

تحلیل مودال تیرهای بتن آرمه دارای ترک با استفاده از یک تکنیک جدید مبتنی بر روش اجزای محدود

علی علی جانی^۱، مرتضی خمایی ابدی^۲، جواد رزاقی^{۳*}

۱- استادیار گروه مهندسی مکانیک، واحد بندرانزلی، دانشگاه آزاد اسلامی، بندرانزلی، ایران

۲- کارشناس ارشد گروه مهندسی عمران، دانشکده فنی، دانشگاه گیلان، رشت، ایران

۳- استادیار گروه مهندسی عمران، دانشکده فنی، دانشگاه گیلان، رشت، ایران

چکیده

در این مقاله، فرکانس‌های دو مود اول تیرهای بتن آرمه‌ی دارای ترک با استفاده از روش اجزای محدود بررسی می‌شود. مدل‌سازی ترک در تحقیق حاضر، بر مبنای شرایط پیوستگی، اصلاح گشتاور دوم سطح و تعیین ضریب شدت تنش در نقطه‌ی ترک انجام می‌گیرد. در این مطالعه، ترک در مود اول شکست (بازشدگی)، با یک فنر پیچشی متناظر، معادل می‌گردد. ضریب سختی این فنر به صورت تابعی از مولفه‌ی ضریب شدت تنش، مشخصات هندسی و مادی سطح مقطع ترک‌خورده استخراج می‌شود. در روش حاضر، ماتریس‌های سختی و جرم المان دارای ترک با استفاده از ماتریس‌های تبدیل مستخرج از اعمال شرایط پیوستگی در محل ترک، غنی‌سازی می‌گردند. با جایگذاری ماتریس‌های سختی و جرم اصلاح شده در معادله‌ی مقدار ویژه، فرکانس‌های طبیعی تیر دارای ترک تعیین می‌شوند. در این تحقیق، تاثیر مکان و عمق‌های مختلف ترک در شرایط مرزی متفاوت بر روی مودهای اول و دوم ارتعاش بررسی می‌شود. مقایسه و صحت‌سنجی نتایج فرکانس طبیعی تیر بتن آرمه‌ی دارای ترک با نتایج تحقیقات آزمایشگاهی مراجع معتبر و شبیه‌سازی کامل در نرم افزار آباکوس، نشان دهنده‌ی صحت و دقت مناسب روش حاضر برای تحلیل مودال تیرهای بتن آرمه‌ی دارای ترک می‌باشد. این مقایسه به وضوح دقت روش پیشنهادی برای تعیین فرکانس طبیعی تیرهای بتن آرمه‌ی دارای ترک را نشان می‌دهد.

کلمات کلیدی: تحلیل مودال، تیرهای بتن آرمه، ترک، روش اجزای محدود، فنر پیچشی

*نویسنده مسئول: جواد رزاقی - استادیار گروه مهندسی عمران، دانشکده فنی، دانشگاه گیلان، رشت، ایران
پست الکترونیکی: javadr@guilan.ac.ir

تاریخ دریافت مقاله: ۰۰/۰۰/۰۰، تاریخ پذیرش مقاله: ۰۰/۰۰/۰۰

۱- مقدمه

تحلیل و مدل‌سازی ترک در سازه‌های بتن آرمه به دلیل تخلخل ذاتی و رفتار شبه‌ترد بتن در مقابل تنش‌های کششی ناشی از بارگذاری، به شدت حائز اهمیت است. از این رو برای کاهش خسارات احتمالی، بررسی عملکرد و شناخت دقیق رفتار این سازه‌ها، ضروری به نظر می‌رسد. شناخت و بررسی عوامل مخرب و نحوه‌ی عملکرد آن‌ها امکان‌پذیر نخواهد بود، مگر آنکه مدل‌ها و روش‌های تحلیلی، عددی و عملی دقیقی از رفتار سازه در دسترس باشد. از این رو، ارائه‌ی روش‌هایی که بتواند تخمین و تقریبی درست از عملکرد سازه‌ها، قبل و بعد از ایجاد و گسترش ترک ارائه نماید، همواره مورد نظر محققین بوده است که در اینجا برخی از آنها ارائه می‌شود.

کاربرد روش اجزای محدود در تحلیل سازه‌های بتن مسلح اولین بار در سال ۱۹۶۷ توسط نگو و اسکوردلیس [۱] انجام گردید. در ادامه یک برنامه رایانه‌ای برای بررسی رفتار یک قاب بتن‌آرمه دارای ترک توسط کریشنامورتی و پانرسلوam [۲] ارائه شده است. سپس زدنگ و بیونگ [۳] با استفاده از روش‌های پیشین، یک مدل تحلیلی بر مبنای تعیین تنش‌های سازه، برای محاسبه میزان خیز تیرهای بتن‌آرمه‌ی دارای ترک ارائه کردند. از آنجایی که رفتار غیرخطی این سازه‌ها نقش ویژه‌ای در تحلیل‌های استاتیکی و دینامیکی دارد، هو و ویلیام [۴] یکی از اولین مطالعات را پیرامون تحلیل غیرخطی سازه‌های بتن‌آرمه‌ی دارای ترک در سال ۱۹۸۹ انجام دادند. یک مدل مناسب و کارا برای مدل‌سازی تیرهای بتن آرمه، استفاده از مدل فنر پیچشی است. این روش قابل تعمیم برای مدل‌سازی ترک در سازه‌های با بتن الیافی و مقاوم شده با ورق‌های کامپوزیتی است، که توسط کراوچزوک و استاچوویکز [۵] ارائه شده است. در این روش با تعیین ضرایب شدت تنش، میزان سختی فنر پیچشی تعیین و اصلاح می‌شود. با پیشرفت علم، بسیاری از روش‌های عددی مبتنی بر مدل‌سازی رایانه‌ای نظیر [۶-۸] برای تحلیل رفتار ترک در سازه‌های بتن‌آرمه گسترش یافته است. استفاده از فنر پیچشی به منظور مدل‌سازی ناپیوستگی‌ها، برای اولین بار توسط ایروین [۹] مورد استفاده قرار گرفت. پس از آن بسیاری از محققان به بررسی رابطه‌ی بین عمق ترک و سختی فنر پیچشی پرداختند تا اینکه سرانجام دیماروگوناتس و پاداپلوس [۹] توانستند رابطه‌ی بین سختی فنر پیچشی و عمق ترک، ارائه کنند. در راستای کاربردهای این روش، اوکامورا و همکارانش [۱۰] با استفاده از فنر پیچشی رفتار یک ستون دارای ترک با مقطع مستطیلی را بررسی کردند. ریزوس و همکاران [۱۱] با استفاده از مدل فنر، تأثیر ترک و عمق آن را بر روی شکل مود و فرکانس‌های طبیعی تیر، مورد مطالعه قرار دادند. در یک تحقیق کاربردی، رفتار شکست دینامیکی در پل‌های بتنی با استفاده از مدل فنر پیچشی، توسط لاو و ژاو [۱۲] ارائه شده است. همچنین در تحقیقی دیگر که توسط لی [۱۳] انجام شده است، به شناسایی ترک‌خوردگی و مدل‌سازی آن با استفاده از مدل فنر پیچشی پرداخته شده است. در ادامه، یوکویاما، رزاقی و همکاران و رایس و ویولا [۱۴-۱۶] به ترتیب، با استفاده از ضرایب شدت تنش، میزان سختی فنر پیچشی را برای مدل‌سازی ترک در تیرهای با مقطع مستطیلی، مستطیلی بتن آرمه، T شکل و ستون‌ها، تعیین کردند. در یکی از جدیدترین تحقیقات در حوزه‌ی مدل‌سازی ترک، علی‌جانی و همکاران [۱۷] با استفاده از فنرهای پیچشی و فنر خطی و به کمک سه روش تحلیلی، عددی و تقریبی، تیر اوپلر برنولی دارای ترک روی بستر الاستیک را مورد تحلیل و بررسی قرار دادند.

به دلیل پیچیدگی‌های بسیار زیاد تحلیل سازه‌ها تحت بارگذاری‌های مختلف، فرض استاتیکی ماندن رفتار سازه در بسیاری از مواقع دور از انتظار است. در نتیجه پیاده‌سازی سایر روش‌های تحلیل، نظیر تحلیل مودال و دینامیکی، در توجیه رفتار سازه‌های دارای ترک، ضروری به نظر می‌رسد. در این راستا، مجموعه‌ای از مطالعات جامع روی تحلیل مودال تیرها توسط لیزا و کاتو [۱۸]، راتو [۱۹] و لوگان [۲۰] ارائه شده است. در دیگر مطالعه، رفتار ارتعاشی تیرهای ترک‌خورده، با استفاده از مشخصات ارتعاشی تیر اوپلر-برنولی روی بستر الاستیک، در مرجع [۲۱] بررسی شده است. در همین راستا رفتار دینامیکی یک تیر ترک‌خورده توسط گودمانسون [۲۲] تحلیل گردید. همچنین یک

مدل ارتعاشی با استفاده از فنر پیچشی، برای تحلیل تیر دارای ترک توسط چادوهاری و مایتی [۲۳] ارائه گردید. یکی از کاربردهای اساسی تحلیل مودال و تعیین مقادیر فرکانس‌های طبیعی، تخمین محل، ابعاد و زاویه‌ی ترک است. در این راستا، اثرات شکست و آسیب‌دیدگی روی میزان انعطاف پذیری سازه توسط پاندی و بیسواس [۲۴] مورد بررسی قرار گرفت؛ که در آن با استفاده از تعیین ماتریس انعطاف‌پذیری در تحلیل مودال، روشی برای تعیین محل ترک خوردگی پیشنهاد و ارائه شده است. در ادامه لیل و مایتی [۲۵] با استفاده از اندازه‌گیری فرکانس‌های طبیعی تیر تیموشنکو دارای ترک که با یک فنر پیچشی مدل‌سازی شده بود، روش دیگری برای تخمین محل ترک پیشنهاد و ارائه کردند. در ادامه، یک تحلیل مودال بر مبنای روش آزمایشگاهی روی یک تیر دارای ترک توسط سیلویا و گومز [۲۶] انجام شده است. در این تحلیل فرکانس‌های طبیعی در تیر دوسر آزاد ترک‌خورده با تغییر در محل و عمق ترک استخراج می‌شود. علاوه بر تعیین محل ترک، از دیگر کاربردهای تحلیل مودال، تعیین فرکانس‌های طبیعی برای تعیین ابعاد ترک به روش غیرمخرب می‌باشد که توسط کیم و استابس [۲۷] ارائه شده است. در یک تحقیق کاربردی، اثرات ابعاد ترک و محل ترک روی فرکانس‌های طبیعی تیر اویلر-برنولی و تیموشنکو دارای ترک با استفاده از روش انرژی توسط اسوامیداس و همکاران [۲۸] ارزیابی شده است. در همین راستا بررسی عملکرد ترک در یک تحلیل مودال توسط دابلینگ [۲۹] مورد بررسی قرار گرفت و تغییرات مدهای فرکانسی با تغییرات محل و عمق ترک از مراجع [۳۰-۳۲] استخراج گردید. در ادامه، یک روش تحلیلی و آزمایشگاهی برای تعیین محل ترک در تیر یکسر گیردار تحت ارتعاش توسط رادکلیف [۳۳] ارائه شده است. به منظور ارزیابی تأثیرات چندین ترک روی رفتار ارتعاشی سازه، یک تیر یکسر گیردار با چند ترک از نوع بازشونده، تحت تحلیل مودال قرار گرفته و اثرات ترک روی مقادیر فرکانس‌های طبیعی توسط استاچووویکز و کراوکزوک [۳۴] بررسی گردید. در همین راستا شکل مود و مقادیر ویژه فرکانس طبیعی برای تیرهایی با چند ترک تحت اثر نیروی محوری بر اساس تئوری‌های مکانیک شکست، توسط بینیکی [۳۵] محاسبه و ارائه شده است. به طور کلی مدل‌سازی ترک به کمک تئوری‌های مکانیک شکست، با دو روش هندسی و غیر هندسی انجام می‌شود. در مدل‌سازی هندسی، ترک در ابعاد و هندسه‌ای مشخص توسط یک ضعف هندسی در المان‌های سازه ایجاد شده و پارامترهای رفتاری آن، نظیر جبهه ترک^۱، زاویه ترک، مسیر و انرژی رشد ترک و ... معرفی می‌شود. برخی از پرکاربردترین روش‌های مدل‌سازی ترک در این حوزه روش کانتور انتگرال و روش اجزای محدود توسعه یافته می‌باشد. در روش هندسی المان‌ها در محل ترک بریده شده و بازشدگی یا رشد ترک، با توجه به معیارهای انرژی و تعیین ضریب شدت تنش مدل‌سازی می‌شود. روش دیگر برای مدل‌سازی ترک، روش-های غیرهندسی نظیر مدل ترک‌پخشی است. به طور کلی در روش‌های مدل‌سازی غیر هندسی ترک، دو گام اصلی وجود دارد: گام اول تعیین محل رخداد ترک اولیه و گام دوم تخمین مسیر ترک و جایگزینی آن با یک المان نرم تر است [۳۶]. این روش بر پایه یک مش المان محدود ثابت استوار است و رشد مرحله‌ای ترک نیاز به مش‌بندی مجدد دارد. در این روش ترک زمانی رخ می‌دهد که تنش به حد تنش خرابی برسد و زمانیکه اولین ترک ایجاد شد؛ مکان ترک ذخیره می‌شود و به دنبال آن مسیر ترک پیش بینی می‌گردد. با داشتن مسیر ترک، به جای قرار دادن سختی واقعی مصالح در مسیر ترک خورده، از المان‌هایی با سختی کمتر (نرم تر) استفاده می‌شود [۳۷].

در مقاله‌ی حاضر، تحلیل مودال تیرهای بتن‌آرمه‌ی دارای ترک با استفاده از مدل‌سازی به کمک یک فنر پیچشی به روش اجزای محدود انجام می‌شود. در این تحقیق رفتار ارتعاشی تیر بتن‌آرمه‌ی دارای ترک، تحت ارتعاش آزاد در سه شرایط مرزی دو سر ساده، دو سر گیردار و یکسر آزاد مورد تحلیل و بررسی قرار می‌گیرد. به طوریکه اثرات تغییر محل و عمق ترک روی فرکانس‌های طبیعی و اشکال مودی تیر تحقیق می‌شود. در روش اجزای محدود، مدل‌سازی آرماتورها با استفاده از اصلاح ممان اینرسی مقاطع کامل و ترک‌خورده و اصلاح مقدار ضریب شدت تنش انجام می‌شود. در پژوهش حاضر، مدل‌سازی ترک به صورت هندسی و با استفاده از روش کانتور انتگرال در نرم افزار آباکوس و همچنین به کمک ایجاد یک ضعف هندسی و وارد کردن مدل فنر پیچشی و استخراج معادلات بر پایه‌ی روش اجزای محدود انجام شده است. مدل‌سازی تیر بتن آرمه در نرم افزار آباکوس به صورت سه بعدی و با استفاده از قید محاط شده^۲ برای میلگردهای طولی و عرضی انجام می‌گردد. در اینجا، به دلیل استفاده از معادلات پایه اجزای محدود خطی برای مدل‌سازی ترک، از رفتار غیرخطی بتن صرف

^۱ Crack front^۲ Embedded Constraint

نظر شده و مدل سازی مادی و هندسی مصالح در نرم افزار آباکوس در محدوده خطی در نظر گرفته می شود. در این پژوهش مود اول شکست (بازشدگی) مورد تحلیل و بررسی قرار گرفته و در نهایت نتایج حاصل از روش اجزای محدود ارائه شده با نتایج حاصل از شبیه سازی رایانه ای در نرم افزار آباکوس و نتایج مراجع معتبر [۳۸] و [۳۹] مقایسه و صحت سنجی می گردد. در تحقیق حاضر با استفاده از چارچوب روش عددی مقاله [۱۷]، تحلیل مودال جایگزین تحلیل استاتیکی شده و فرکانس های طبیعی تیر بتن آرمه استخراج می گردد. همچنین ویژگی های مادی و هندسی تیر بتن آرمه، به ترتیب با در نظر گرفتن شرایط مادی بتن و فولاد و همچنین اصلاح ممان اینرسی مقطع سالم و ترک دار، مدل سازی شده است که از جنبه های تمایز مطالعه حاضر با تحقیقات پیشین محسوب می شود.

۲- فرضیات و روش های تحلیل

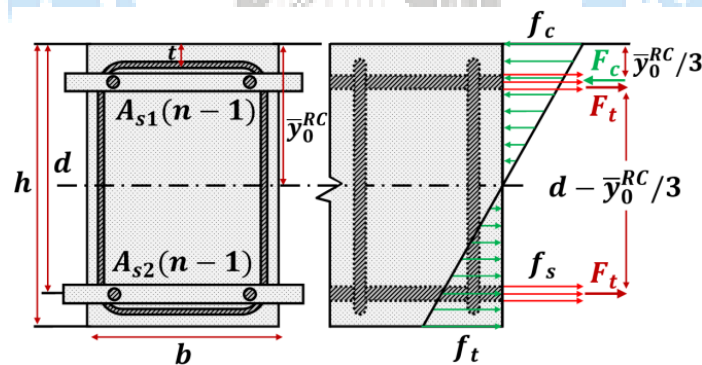
در این تحقیق معادلات پایه ای تیرها با صرف نظر کردن از اثرات نیروی برشی و اینرسی دورانی بر مبنای تئوری تیر اویلر-برنولی استخراج شده است. در این روش از المان های یک بعدی و توابع شکل هرمیتی مطابق با مرجع [۱۷] استفاده شده است. در روش حاضر ماتریس سختی المان های تیر بدون ترک خوردگی با استفاده از معادله ی انرژی پتانسیل مطابق رابطه (۱-۱) به صورت زیر تعیین می گردد.

$$U = \frac{1}{2} \int_0^{l_e} E_c I_0^{RC} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right)^T \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) dx, w = [N]u \quad (1-1)$$

$$K_{St} = E_c I_0^{RC} \int_0^{l_e} [N'']^T [N''] dx \quad (2-1)$$

که در آن ها، U انرژی کرنشی، l_e طول المان ترک دار، E_c مدول الاستیسیته بتن، I_0^{RC} گشتاور دوم سطح مقطع کامل (ترک نخورده)، w جابجایی گره ها، x محور طولی، N تابع شکل، u بردار جابجایی بر حسب گره های اصلی، K_{St} ماتریس سختی تیر بتن اویلر-برنولی استاندارد، تعریف می شود.

با توجه به آنکه سختی المان به صورت تابعی از ممان اینرسی مقطع تعریف می گردد. در نتیجه با توجه به شکل (۱) تغییرات محل تار خشی و ممان اینرسی ناشی از آرماتورهای طولی در تیر بتن آرمه ی بدون ترک به صورت رابطه ی (۱-۲) تعریف می گردد.



شکل ۱: مقطع تبدیل یافته استاندارد تیر بتن آرمه

$$\bar{y}_0^{RC} = \frac{bh \left(\frac{h}{2} \right) + [A_{s1}(n-1)d] + [A_{s2}(n-1)t]}{bh + [(n-1)(A_{s1} + A_{s2})]} \quad (1-2)$$

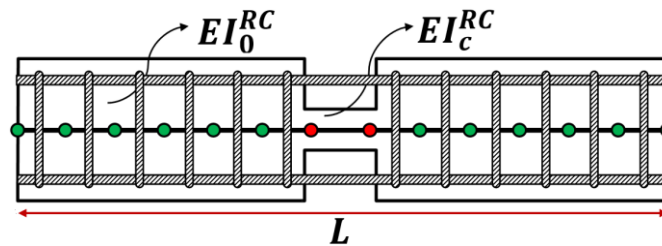
$$I_0^{RC} = \frac{bh^3}{12} + bh \left(\frac{h}{2} - \bar{y}_0^{RC} \right)^2 + A_{s1}(n-1)(d - \bar{y}_0^{RC})^2 + A_{s2}(n-1)(\bar{y}_0^{RC} - t)^2 \quad (2-2)$$

که در آن ها، \bar{y}_0^{RC} محل تارخشی مقطع کامل (بدون ترک) تیر بتن آرمه، b ضخامت تیر، h ارتفاع تیر، A_{s1} و A_{s2} به ترتیب مساحت سطح مقطع میلگردهای فوقانی و تحتانی، d فاصله میلگردهای طولی تا دورترین تار فشاری بتن، t فاصله میلگرد تا سطح خارجی بتن (کاور)، تعریف می شود. همچنین مدول الاستیسیته مقطع بتن آرمه به صورت مدول الاستیسیته معادل بتن (مقطع تبدیل یافته)، مطابق رابطه ی زیر تعیین می گردد.

$$E_c = (3300\sqrt{f_c} + 6900)(\gamma_c/23)^{3/2} \quad (1-3)$$

$$n = E_s/E_c \quad (2-3)$$

که در آن، f_c مقاومت فشاری بتن، γ_c وزن مخصوص بتن و E_s مدول الاستیسیته فولاد تعریف می‌شود. در این تحقیق از ضرایب شدت تنش به عنوان معیاری برای مدل‌سازی ترک استفاده شده است. به‌طور کلی این روش بر اساس تغییرات انرژی کرنشی و تغییرات گشتاور دوم سطح، در مقاطع استاندارد و ترک‌خورده از تیر، مطابق شکل (۲) پایه ریزی می‌شود.



شکل ۲: المان بندی تیر بتن آرمه دارای ترک میانی

در این روش، ترک با یک ضعیف هندسی معادل با عمق ترک در نظر گرفته می‌شود. مدول خمشی تیر با توجه به محل قرارگیری و ابعاد آرماتورها در دو مقطع کامل و دارای ترک مطابق شکل (۳) اصلاح و ارائه می‌گردد. در روش حاضر، انرژی آزاد شده بر اساس روابط پیشنهاد شده توسط اروین و کایس [۴۰] و یوکویاما [۲۱] به مقدار ضریب شدت تنش مرتبط می‌شود. این ضریب برای تیر بتن‌آرمه با مقطع مستطیلی تحت خمش خالص به صورت رابطه‌ی (۱-۴) و (۲-۴) و (۴-۴) به دست می‌آید.

$$K_{IM} = M(x) \sqrt{\frac{1}{b} \left(\frac{1}{I_0^{RC}} - \frac{1}{I_c^{RC}} \right)} \quad [40] \quad (1-4)$$

$$K_{IM} = \frac{6M}{bh^2} \sqrt{\pi a} F_M(\xi) \quad \text{for } 0 \leq \xi \leq 0.6, \quad \xi = \frac{a}{h} \quad [21] \quad (2-4)$$

که در آن

$$F_M(\xi) = \sqrt{\left(\frac{2}{\pi \xi} \right) \tan \frac{\pi \xi}{2} \frac{0.923 + 0.199[1 - \sin(\frac{\pi \xi}{2})]^4}{\cos(\frac{\pi \xi}{2})}} \quad [21] \quad (3-4)$$

روابط فوق علی‌رغم دقت مناسب، در عمق‌های ترک بیشتر از ۰٫۶ ارتفاع تیر، پاسخ دقیقی برای ضریب شدت تنش ارائه نمی‌کنند. رابطه‌ی ضریب شدت تنش برای عمق‌های ترک بیشتر از ۰٫۶ ارتفاع تیر، به صورت رابطه (۴-۴) ارائه می‌شود.

$$K_{IM} = \frac{3.99M}{bh\sqrt{h}\sqrt{(1-\xi)^3}} \quad \text{for } 0.6 < \xi < 1.0 \quad [21] \quad (4-4)$$

با استفاده از روابط فوق، سختی فنر پیچشی به صورت تابعی از ضریب شدت تنش مطابق با رابطه (۵-۴) تعریف می‌شود.

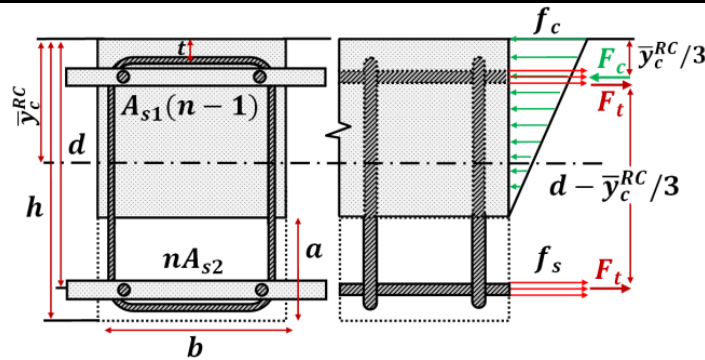
$$\frac{1}{k_{sp}} = \frac{2b(1-\nu^2)}{E} \int_0^a \left(\frac{K_{IM}}{M} \right)^2 da \quad (5-4)$$

که در آن، K_{IM} ضریب شدت تنش، M ممان خمشی و I_c^{RC} مطابق شکل (۳) به صورت گشتاور دوم سطح در مقطع ترک‌خورده بتن آرمه تعریف شده و مقدار آن از روابط زیر استخراج می‌گردد.

$$\bar{y}_c^{RC} = \frac{Y_1/2}{nA_{s1} + nA_{s2} - ab + bh - A_{s1} - A_{s2}} \quad (1-5)$$

$$Y_1 = 2nA_{s1}d + 2nA_{s2}t + a^2b - 2abh + bh^2 - 2A_{s1}d - 2A_{s2}t \quad (2-5)$$

$$I_c^{RC} = \frac{b(h-a)^3}{12} + b(h-a) \left(\frac{h-a}{2} - \bar{y}_c^{RC} \right)^2 + A_{s2}n(d - \bar{y}_c^{RC})^2 + A_{s1}(n-1)(\bar{y}_c^{RC} - t)^2 \quad (3-5)$$



شکل ۳: مقطع تبدیل یافته تیر بتن آرمه دارای ترک

که در آن، \bar{y}_c^{RC} محل تارخنتی در مقطع تیر بتن آرمه ترک دار، Y_1 متغیر تعریف شده و a طول ترک نامگذاری می‌شود.

۳- فرمول بندی تحلیل مودال بر مبنای روش اجزای محدود

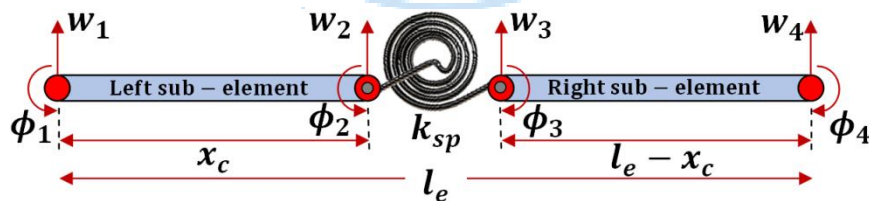
در تحلیل مودال، فرکانس‌های طبیعی تیر بتن آرمه‌ی دارای ترک بر اساس اصول اجزای محدود از معادله‌ی مقدار ویژه زیر استخراج می‌گردد.

$$|K_{st+c}^{RC} - \omega^2 M_{st+c}^{RC}| = 0 \quad (6)$$

که در آن K_{st+c}^{RC} و M_{st+c}^{RC} به ترتیب ماتریس سختی و جرم سرهم شده‌ی تیر با در نظر گرفتن اثرات ترک و تغییرات ناشی از حضور آرماتورها و ω فرکانس طبیعی است.

۳-۱- استخراج ماتریس سختی المان دارای ترک

ماتریس سختی المان‌های بدون ترک، مطابق ماتریس سختی استاندارد، بر مبنای تئوری تیر اویلر-برنولی و با در نظر گرفتن اثرات آرماتورها، مطابق رابطه‌ی (۲-۱) به دست می‌آید. در اینجا به منظور استخراج ماتریس سختی المان دارای ترک، روشی بر مبنای بهبود روش اجزای محدود [۱۷] برای مدل‌سازی ناپیوستگی‌ها و ترک خوردگی به کار گرفته می‌شود. در این روش، المان دارای ترک مطابق شکل (۴) با دو ریز المان و یک فنر پیچشی معادل سازی می‌شود.



شکل ۴: مدل‌سازی المان دارای ترک با استفاده از فنر پیچشی

در شکل (۴)، w_{1-4} میزان خیز گره‌های المان، ϕ_{1-4} میزان دوران گره‌های المان، x_c محل ترک در المان و k_{sp} سختی فنر پیچشی، تعریف می‌شود.

در اینجا ضمن بازنویسی معادلات پیوستگی در محل ترک و وارد نمودن تأثیر سختی فنر پیچشی، مشاهده می‌شود که تغییرات شیب در گره‌های ۲ و ۳ برابر نبوده و شیب در گره‌ی ۲ به صورت تابعی از ضریب سختی فنر مطابق رابطه‌ی (۷-۱) بیان می‌شود.

$$w_2'(x_0) + \psi(w_2''(x_0)) = w_3'(0) \quad (1-7)$$

که در آن، ψ نسبت مدول خمشی به سختی فنر تعریف شده و به صورت معادله (۷-۲) ارائه می‌شود.

$$\psi = \frac{E_c I_0^{RC}}{k_{sp}} \quad (2-7)$$

برای محاسبه‌ی سختی المان دارای ترک، علاوه بر تعیین یک ماتریس سختی برای هر ریز المان، لازم است که میزان سختی فنر پیچشی برحسب عمق ترک مشخص شود. در نتیجه ماتریس سختی المان ترک خورده به صورت مجموع سه ماتریس سختی تعریف می‌شود. که برای محاسبه‌ی هر کدام از آن‌ها از قوانین انرژی استفاده می‌گردد.

$$U_c = U_L + U_R + U_s \quad (8)$$

که در آن، U_s, U_R, U_L, U_c به ترتیب انرژی کرنشی المان دارای ترک، انرژی کرنشی ریز المان سمت چپ، انرژی کرنشی ریز المان سمت راست و انرژی کرنشی فنر تعریف می‌شود.

انرژی کرنشی ریز المان سمت چپ و راست فنر پیچشی با استفاده از تعیین معادله‌ی خیز بر حسب توابع شکل هرمیتی و جایگذاری آن‌ها در معادله‌ی پایه‌ی انرژی مطابق روابط (۹-۱) و (۹-۲) تعیین می‌شود.

$$U_L = \frac{1}{2} \{\mathbf{u}_L\}^T [\mathbf{k}_L] \{\mathbf{u}_L\} \quad (1-9)$$

$$U_R = \frac{1}{2} \{\mathbf{u}_R\}^T [\mathbf{k}_R] \{\mathbf{u}_R\} \quad (2-9)$$

که در آن

$$\{\mathbf{u}_L\}^T = \{w_1 \phi_1 w_2 \phi_2\} \quad (1-10)$$

$$\{\mathbf{u}_R\}^T = \{w_3 \phi_3 w_4 \phi_4\} \quad (2-10)$$

نهایتاً ماتریس سختی ریز المان سمت چپ مطابق رابطه (۱۱) ارائه می‌شود.

$$\mathbf{k}_L^{RC} = \frac{E_c I_c^{RC}}{x_c^3} \begin{bmatrix} 12 & 6x_c & -12 & 6x_c \\ 6x_c & 4x_c^2 & -6x_c & 2x_c^2 \\ -12 & -6x_c & 12 & -6x_c \\ 6x_c & 2x_c^2 & -6x_c & 4x_c^2 \end{bmatrix} \quad (11)$$

به‌طور مشابه با جایگذاری $l_e - x_c$ به جای x_c در معادله‌ی (۱۱) ماتریس سختی ریز المان سمت راست (\mathbf{k}_R^{RC}) تعیین می‌گردد. برای سرهم کردن ماتریس سختی ریز المان‌ها، انرژی کرنشی محاسبه شده بر حسب جابجایی گره‌های ریز المان (گره‌های ۲ و ۳)، توسط ماتریس‌های انتقال $\mathbf{C}_{L(R)}$ بر حسب جابجایی گره‌های ریز المان پایه (گره‌های ۱ و ۴) مطابق رابطه‌ی (۱۲) بازنویسی و ارائه می‌شود.

$$\mathbf{u}_{L(R)} = \mathbf{C}_{L(R)} \mathbf{u} \quad (12)$$

که در آن ماتریس تبدیل برای ریز المان سمت چپ و راست ($\mathbf{C}_{L(R)}$) به صورت زیر ارائه می‌گردد.

$$\mathbf{C}_{L(R)} = \begin{bmatrix} C_{L(R)}^{11} & C_{L(R)}^{12} & C_{L(R)}^{13} & C_{L(R)}^{14} \\ C_{L(R)}^{21} & C_{L(R)}^{22} & C_{L(R)}^{23} & C_{L(R)}^{24} \\ C_{L(R)}^{31} & C_{L(R)}^{32} & C_{L(R)}^{33} & C_{L(R)}^{34} \\ C_{L(R)}^{41} & C_{L(R)}^{42} & C_{L(R)}^{43} & C_{L(R)}^{44} \end{bmatrix} \quad (13)$$

درایه‌های ماتریس تبدیل فوق در بخش اول و دوم ضمیمه آورده شده است.

با جایگذاری رابطه‌ی (۱۲) در روابط محاسبه‌ی انرژی کرنشی ریز المان‌ها (روابط ۹)، انرژی کرنشی ریز المان سمت چپ و راست برحسب گره‌های المان پایه به صورت رابطه (۱۴) محاسبه می‌شود.

$$U_{L(R)} = \frac{1}{2} \{\mathbf{u}\}^T [\mathbf{C}_{L(R)}]^T [\mathbf{k}_{L(R)}^{RC}] [\mathbf{C}_{L(R)}] \{\mathbf{u}\} \quad (14)$$

در اینجا به‌منظور محاسبه‌ی انرژی کرنشی فنر پیچشی، رابطه (۱۵) برحسب میزان دوران در دو طرف فنر پیچشی ارائه می‌شود.

$$U_s = \frac{1}{2} k_s \Delta \phi^2 = \frac{1}{2} k_s (\phi_3 - \phi_2)^T (\phi_3 - \phi_2) \quad (15)$$

بدین ترتیب، میزان دوران گره‌های دو طرف فنر پیچشی (گره‌های ۲ و ۳) با استفاده از ماتریس تبدیل ارائه شده، بر حسب دوران نقاط گره‌ای المان پایه بازنویسی و ارائه می‌شوند.

$$\phi_2 = \{C_L^{41} \quad C_L^{42} \quad C_L^{43} \quad C_L^{44}\} \mathbf{u} \quad (1-16)$$

$$\phi_3 = \{C_R^{21} \quad C_R^{22} \quad C_R^{23} \quad C_R^{24}\} \mathbf{u} \quad (2-16)$$

با جایگذاری روابط فوق در رابطه (۱۵)، انرژی کرنشی فنر پیچشی مطابق رابطه (۱۷) ارائه می‌گردد.

$$U_s = \frac{1}{2} \{\mathbf{u}\}^T k_s \{\mathbf{C}_M\}^T \{\mathbf{C}_M\} \{\mathbf{u}\} \quad (17)$$

که در آن

$$\{\mathbf{C}_M\} = \{C_R^{21} - C_L^{41} \quad C_R^{22} - C_L^{42} \quad C_R^{23} - C_L^{43} \quad C_R^{24} - C_L^{44}\} \quad (18)$$

نهایتاً ماتریس سختی اصلاح‌شده‌ی ریز المان‌های سمت چپ و راست و فنر پیچشی به ترتیب برابر است با:

$$K_L^{RC} = [C_L]^T [k_L^{RC}] [C_L] \quad (1-19)$$

$$K_R^{RC} = [C_R]^T [k_R^{RC}] [C_R] \quad (2-19)$$

$$K_s = k_{sp} \{\mathbf{C}_M\}^T \{\mathbf{C}_M\} \quad (3-19)$$

با مشخص بودن ضریب سختی فنر پیچشی (k_{sp}) از رابطه (۷-۲) و با جایگذاری روابط (۱۴) و (۱۵) در رابطه (۸) ماتریس سختی المان دارای ترک به صورت رابطه (۲۰) محاسبه و ارائه می‌گردد.

$$K_c^{RC} = K_L^{RC} + K_R^{RC} + K_s \quad (20)$$

نهایتاً با ترکیب ماتریس سختی المان‌های استاندارد بتن آرمه و ماتریس سختی المان ترک‌خورده، ماتریس سختی نهایی سازه (K_{st+c}^{RC}) استخراج می‌شود.

۳-۲- استخراج ماتریس جرم المان دارای ترک

در المان‌های بدون ترک، ماتریس جرم با استفاده از روش انرژی، مطابق [۱۰] تعیین می‌گردد. انرژی جنبشی در این حالت برابر است با:

$$T = \frac{1}{2} \int \rho_c \left(\frac{\partial \dot{w}}{\partial t} \right)^2 dv = \frac{1}{2} \int_0^{x_c} \rho_c \dot{w}^T \dot{w} dv \quad (21)$$

که در آن، ρ_c چگالی معادل مقطع بتن آرمه، \dot{w} مشتق خیز (سرعت حرکت) گره‌های المان، تعریف می‌شود. با استفاده از معادله (۲۱)، ماتریس جرم المان‌های استاندارد تیر بتن آرمه به صورت رابطه (۲۲) تعیین می‌گردد.

$$M_{st}^{RC} = \int_0^{l_e} \rho_c [N]^T [N] dv \quad (22)$$

مطابق آنچه برای تعیین ماتریس سختی المان ترک‌خورده ارائه شده است، در اینجا برای تعیین ماتریس جرم المان ترک‌خورده، انرژی جنبشی ریز المان‌های چپ و راست فنر پیچشی تعیین شده و با یکدیگر جمع می‌شوند. در این حالت از جرم فنر صرف‌نظر می‌گردد. در نتیجه انرژی جنبشی ریز المان دارای ترک به صورت معادله (۲۳) ارائه می‌شود.

$$T_c^{RC} = T_L^{RC} + T_R^{RC} \quad (23)$$

که در آن انرژی جنبشی ریز المان سمت چپ (T_L^{RC}) و راست (T_R^{RC}) با توسعه‌ی رابطه‌ی (۱-۱) و مشتقات زمانی خیز ریز المان‌ها به صورت زیر محاسبه می‌گردد.

$$\dot{w}_{L(R)}(x) = N_{1L(R)} \dot{w}_2 + N_{2L(R)} \dot{\phi}_2 + N_{3L(R)} \dot{w}_3 + N_{4L(R)} \dot{\phi}_3 \quad (24)$$

که در آن $\dot{\phi}$ مشتق دوران (سرعت زاویه‌ای) گره‌های المان تعریف می‌گردد.

بدین ترتیب ماتریس جرم ریز المان سمت چپ به صورت زیر ارائه می‌شود.

$$m_L^{RC} = \frac{\rho_c A^{RC}}{x_c} \begin{bmatrix} \frac{13}{35} & \frac{11}{210} x_c & \frac{9}{70} & -\frac{13}{420} x_c \\ \frac{11}{210} x_c & \frac{1}{105} x_c^2 & \frac{13}{420} x_c & -\frac{1}{140} x_c^2 \\ \frac{9}{70} & \frac{13}{420} x_c & \frac{13}{35} & -\frac{11}{210} x_c \\ -\frac{13}{420} x_c & -\frac{1}{140} x_c^2 & -\frac{11}{210} x_c & \frac{1}{105} x_c^2 \end{bmatrix} \quad (25)$$

که در آن A^{RC} مساحت سطح مقطع تیر بتن آرمه فرض می‌شود.

ماتریس جرم ریز المان سمت راست (m_R^{RC}) با جایگذاری $\beta_c = l_e - x_c$ به جای x_c در معادله (25) استخراج می‌شود. انرژی جنبشی اصلاح‌شده ریز المان سمت چپ بر اساس میزان سرعت گره‌های اصلی به صورت معادله (26) تعیین می‌گردد.

$$T_L^{RC} = \frac{1}{2} \{\dot{\mathbf{u}}\}^T [\mathbf{C}_L]^T [m_L^{RC}] [\mathbf{C}_L] \{\dot{\mathbf{u}}\} \quad (26)$$

که در آن $\dot{\mathbf{u}}$ بردار سرعت بر حسب گره‌های اصلی تعریف می‌شود.

به‌طور مشابه انرژی جنبشی اصلاح‌شده برای ریز المان سمت راست به صورت رابطه (26) قابل ارائه می‌باشد.

$$T_R^{RC} = \frac{1}{2} \{\dot{\mathbf{u}}\}^T [\mathbf{C}_R]^T [m_R^{RC}] [\mathbf{C}_R] \{\dot{\mathbf{u}}\} \quad (27)$$

در نتیجه ماتریس جرم اصلاح‌شده برای ریز المان‌های سمت چپ و راست، به ترتیب مطابق معادله (28) و (29) تعیین می‌گردد.

$$\mathbf{M}_L^{RC} = [\mathbf{C}_L]^T [m_L^{RC}] [\mathbf{C}_L] \quad (28)$$

$$\mathbf{M}_R^{RC} = [\mathbf{C}_R]^T [m_R^{RC}] [\mathbf{C}_R] \quad (29)$$

بنابراین ماتریس جرم کلی المان دارای ترک مطابق رابطه (30) تعیین می‌شود.

$$\mathbf{M}_c^{RC} = \mathbf{M}_L^{RC} + \mathbf{M}_R^{RC} \quad (30)$$

در ادامه ماتریس جرم المان‌های استاندارد بتن آرمه (بدون ترک) با ماتریس جرم المان ترک‌خورده سرهم بندی شده و ماتریس جرم نهایی سازه (\mathbf{M}_{st+c}^{RC}) تشکیل می‌شود. در نتیجه نهایتاً فرکانس‌های طبیعی تیر دارای ترک تحت ارتعاش آزاد، با جایگذاری ماتریس جرم و سختی نهایی تیر بتن آرمه‌ی دارای ترک در رابطه (6) استخراج می‌گردد.

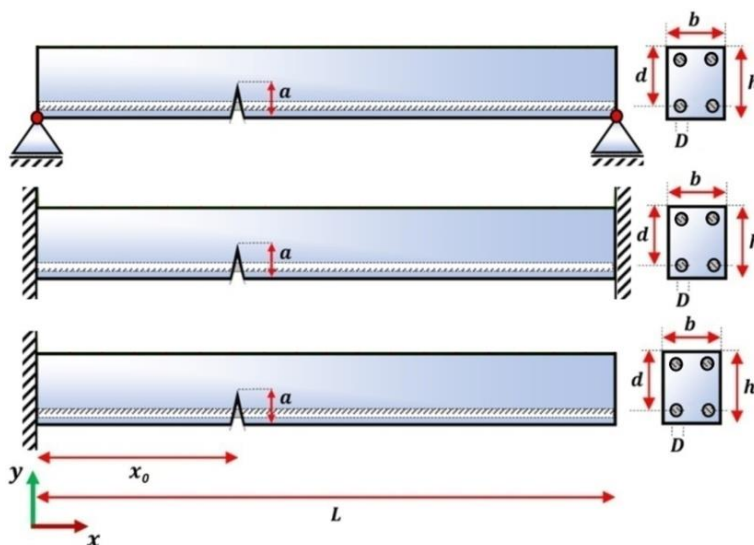
۴- بحث و نتایج

در این بخش، ابتدا صحت و دقت روش مدل‌سازی ارائه شده برای تیرهای بتن آرمه‌ی دارای ترک تحت ارتعاشات آزاد مورد تحلیل و بررسی قرار می‌گیرد؛ سپس نتایج حاصل از تحلیل مودال تیر بتن آرمه‌ی دارای ترک در قالب چند مثال کاربردی بررسی می‌شود. در این پژوهش، اثرات تغییر عمق و محل ترک روی پاسخ فرکانس‌های طبیعی تیر بتن آرمه‌ی دارای ترک در سه شرایط مرزی دو سر ساده، دو سر گیردار و گیردار آزاد بررسی می‌شود. در تحقیق حاضر مقادیر فرکانس طبیعی در دو مود اول و دوم ارتعاش با استفاده از روش اجزای محدود حاضر، مراجع معتبر و مدل‌سازی در نرم افزار آباکوس مقایسه و بررسی می‌گردد.

۴-۱- مطالعه موردی

در اینجا صحت و دقت روش اجزای محدود حاضر با استفاده از یک مطالعه‌ی موردی بررسی و ارزیابی می‌گردد. در این بخش مشخصات مادی، هندسی و نحوه‌ی آرماتورگذاری تیر بتن آرمه دارای ترک تحت سه شرایط مرزی مطابق شکل (5) ارائه می‌شود. در این مطالعه به دلیل استفاده از تئوری تیر اویلر-برنولی، از اثرات نیروی برشی و آرماتورهای عرضی (خاموت) در معادلات صرف نظر شده است در حالی که

در مدل سازی سه بعدی در نرم افزار آباکوس اثرات نیروی برشی و خاموت ها در نظر گرفته می شود. در نتیجه در ابتدا باید به این نکته توجه شود که بخشی از اختلاف پاسخ فرکانس طبیعی دو روش اجزای محدود حاضر و شبیه سازی آباکوس می تواند ناشی از این ساده سازی باشد.



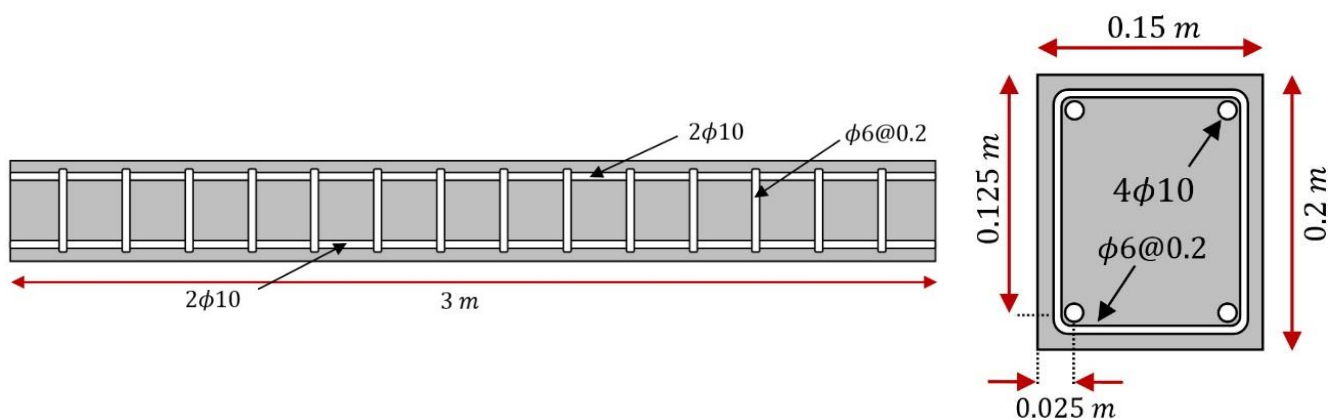
شکل ۵: شرایط تکیه گاهی تیرهای دارای ترک

مشخصات مادی و هندسی تیر مطابق جدول (۱) ارائه می شود.

جدول ۱: ویژگی های هندسی و مادی تیر بتن آرمه ی دارای ترک

مشخصات هندسی	مشخصات مادی
$L = 3m$	$E_c = 2.5e10 N/m^2$
$h = 0.2m$	$E_s = 2.0e11 N/m^2$
$b = 0.15m$	$\nu_c = 0.25$
$d = 0.125m$	$\nu_s = 0.3$
$D = 4\phi 10 m$	$\gamma_c = 2400 N/m^3$
$A_{s1,2} = \pi D^2 / 4 m^2$	$\gamma_s = 7850 N/m^3$
$a/h = 0.0 - 0.9$	$f_c = 25 MPa$
$x_0/L = 0 - 1$	$f_y = 240 MPa$
	$f_u = 400 MPa$

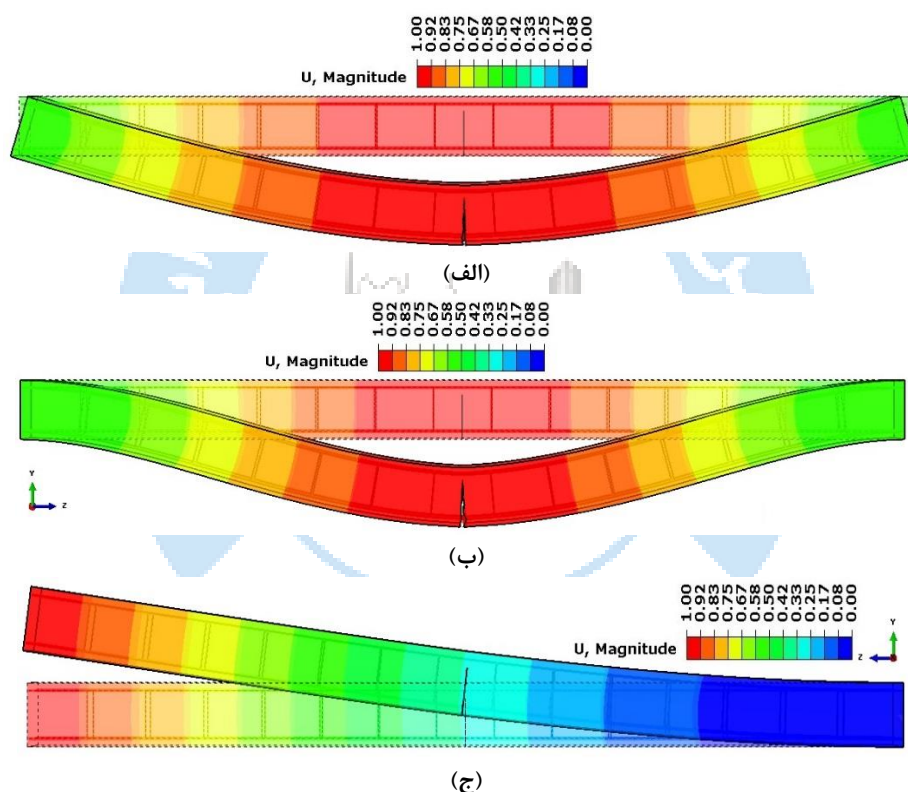
در این مطالعه، مشخصات هندسی در خصوص نحوه ی آرماتورگذاری در تیر بتن آرمه به صورت شکل (۶) ارائه می شود.



شکل ۶: مشخصات هندسی شرایط آرماتورگذاری

۴-۲- مدل سازی در نرم افزار آباکوس

در این مقاله، مدل سازی تیر بتن آرمه ی دارای ترک در محیط نرم افزار آباکوس با استفاده از روش کانتور انتگرال انجام می شود. در این روش یک شبکه ی المانی اطراف نوک ترک ایجاد می گردد. بدین منظور در ابتدا یک دایره به مرکز نوک ترک و به شعاع مشخص ترسیم می شود. مقدار این شعاع به اندازه ی یک ضلع المان چهاروجهی در حالت تغییر شکل نیافته، است. در این مرحله نرم افزار آباکوس بر اساس دایره ی ترسیم شده، نواحی معینی را پیرامون نوک ترک معرفی می کند که به آن ها اصطلاحاً کانتور گفته می شود. نرم افزار آباکوس بر اساس این نواحی یا همان کانتورها، ضرایب شدت تنش را بر پایه ی روابط انتگرال [] تعیین می نماید که به واسطه ی آن انرژی آزاد شده ناشی از ناپیوستگی تعیین شده و ترک مدل سازی می شود. در تحلیل مودال، با صرف نظر کردن از نیروهای خارجی، و معرفی مودهای ارتعاش سازه، مقادیر ویژه فرکانس طبیعی تیر بتن آرمه استخراج می شود. در نرم افزار آباکوس، مدل سازی عملکرد میلگردها در بتن، با استفاده از قید محاط شده انجام شده است. اشکال مودی تیر بتن آرمه ترک دار در دو وضعیت اولیه (نقطه چین کم رنگ) و ثانویه تحت شرایط مرزی مختلف در نرم افزار آباکوس مطابق شکل (۷-الف) الی شکل (۷-ج) در مود اول ارتعاش ارائه می گردد.



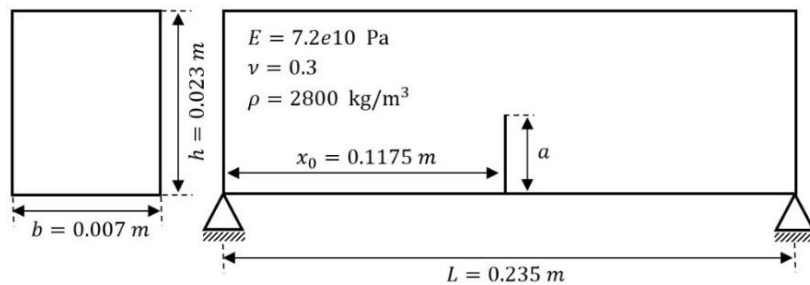
شکل ۷: مود اول ارتعاش تیر بتن آرمه دارای ترک تحت شرایط مرزی (الف) دو سر ساده (ب) دوسرگیردار (ج) یکسر گیردار

۴-۳- صحت سنجی و مقایسه نتایج

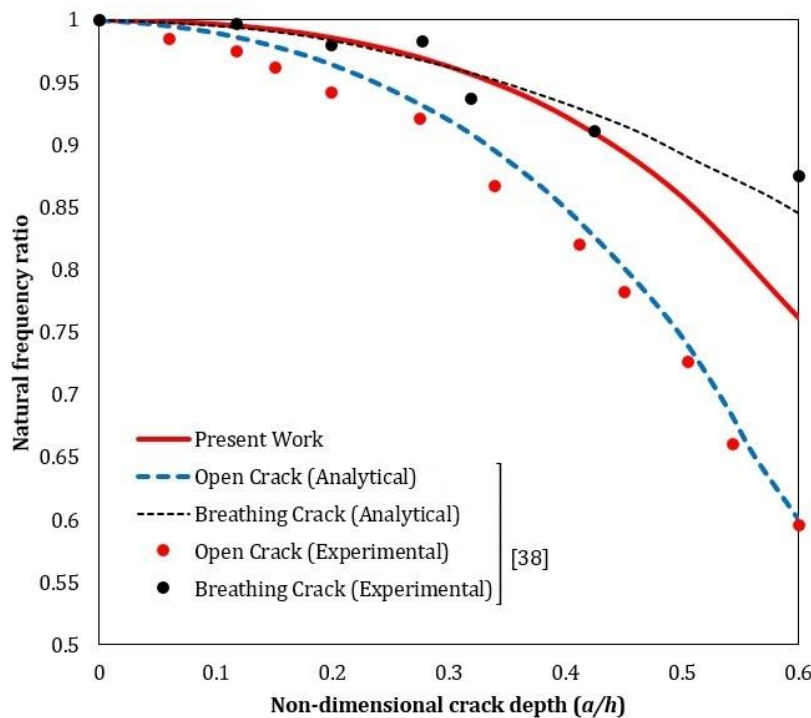
۴-۳-۱- صحت سنجی

در این بخش نتایج حاصل از روش ارائه شده برای تعیین فرکانس های طبیعی تیر دارای ترک با نتایج حاصل از تحقیقات آزمایشگاهی مراجع [۳۸] و [۳۹] اعتبارسنجی می شود. از آنجاکه در دو مرجع مذکور علاوه بر ارائه روابط تحلیلی برای تعیین فرکانس های طبیعی تیرهای دارای ترک، تحقیقات آزمایشگاهی نیز انجام شده است؛ مقایسه نتایج تحقیق حاضر (تحلیل عددی) با نتایج تحلیلی و آزمایشگاهی به خوبی دقت روش اجزای محدود حاضر را نشان می دهد. مطابق با شکل (۸) تیر دارای ترک با مشخصات مادی و هندسی مشخص در

شرایط مرزی دو سر ساده تحت آنالیز مودال قرار می‌گیرد؛ که در آن تغییرات فرکانس طبیعی تیر با افزایش عمق ترک در دو حالت "ترک بازشدگی"^۱ و "ترک باز و بسته شونده"^۲، با نتایج حاصل از تحقیق حاضر بررسی می‌شود.



(الف)

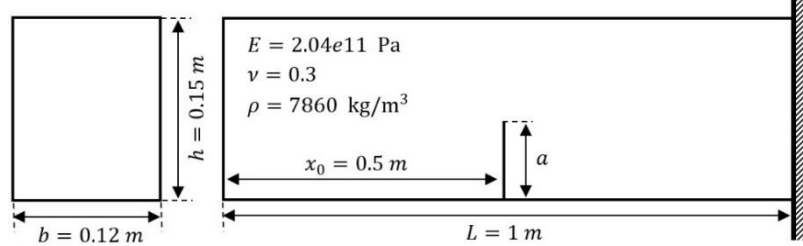


(ب)

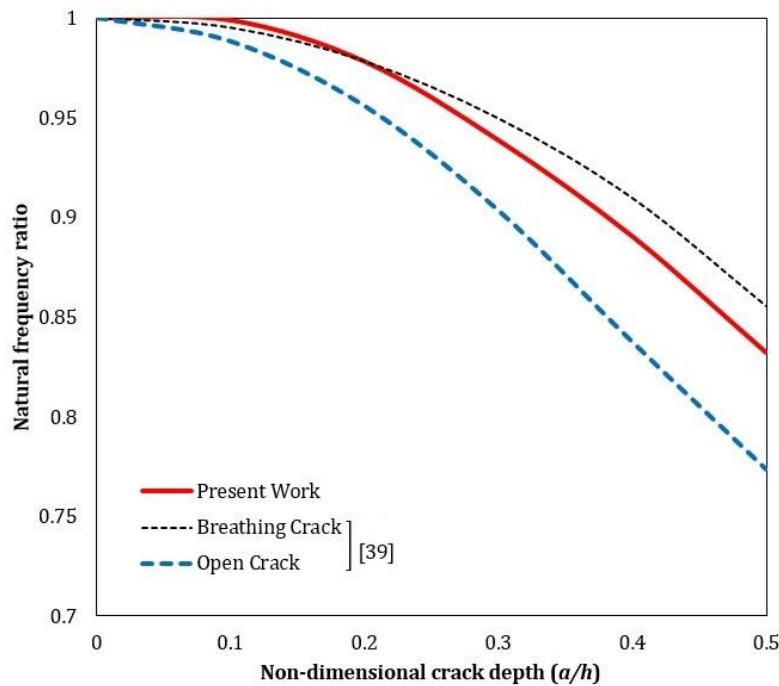
شکل ۸: (الف) طرح شماتیک تیر دو سر ساده دارای ترک (ب) صحت سنجی تغییرات فرکانس طبیعی تیر با افزایش عمق ترک

بررسی‌ها نشان می‌دهد که نتایج مستخرج از روش اجزای محدود ارائه شده در این تحقیق، بین نتایج حاصل از دو روش مدل‌سازی ترک (بازشدگی و باز و بسته شونده) قرار گرفته و تا عمق ترک حدود ۰٫۵ ارتفاع تیر، تقریباً بر نتایج مدل‌سازی "ترک باز و بسته شونده" منطبق است، از آنجاییکه این مدل، یک مدل کامل برای ترک‌های ارتعاشی بوده و اثرات بسته شدن ترک و افزایش سختی سازه را در نظر می‌گیرد، این انطباق به خوبی دقت روش ارائه شده برای تحلیل مودال تیرهای دارای ترک را نشان می‌دهد. یک تحلیل مشابه، مطابق با تحقیقات انجام شده در مرجع [۳۹] به صورت شکل (۹) ارائه می‌شود. در اینجا نتایج تحلیل مودال تیر دارای ترک با مشخصات مادی و هندسی مفروض، در شرایط مرزی یک‌سر آزاد با نتایج حاصل از روش ارائه شده در این پژوهش اعتبارسنجی می‌شود.

^۱ Opening Crack
^۲ Breathing Crack



(الف)



(ب)

شکل ۹: الف) طرح شماتیک تیر یکسر گیردار دارای ترک ب) صحت سنجی تغییرات فرکانس طبیعی تیر با افزایش عمق ترک

به طور مشابه، نتایج بررسی‌ها نشان دهنده‌ی دقت مناسب روش ارائه شده در مقایسه با نتایج تحلیلی و آزمایشگاهی مستخرج از مرجع [۳۹] می‌باشد. در این حالت بیشینه خطا بین نتایج روش ارائه شده با نتایج مدل "ترک باز و بسته شونده"، ۲٫۷ درصد گزارش می‌شود. جدول (۲) نتایج تغییرات فرکانس طبیعی با افزایش عمق ترک را با استفاده از سه مدل "ترک باز شدگی"، "ترک باز و بسته شونده" و "کار حاضر" مقایسه و خطاهای هر یک را ارائه می‌نماید. در این بررسی، خطای شماره ۱، اختلاف مدل "ترک باز شدگی" و "ترک باز و بسته شونده" را نشان می‌دهد و خطای شماره ۲، اختلاف روش مدل‌سازی حاضر و مدل "ترک باز و بسته شونده" در مرجع [۳۹] را تشریح می‌نماید.

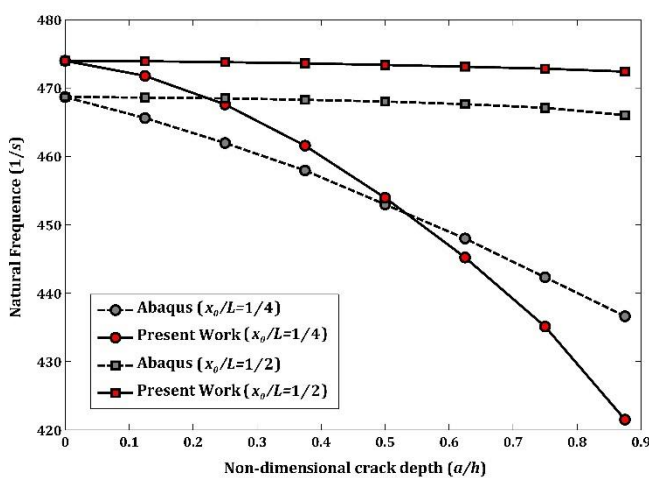
جدول ۲: مقایسه خطاهای سه مدل ترک باز شدگی [۳۹]، ترک باز و بسته شونده [۳۹] و کار حاضر برای تعیین فرکانس‌های طبیعی

a/h	مدل ترک باز و بسته شونده (ω/ω_0)	مدل ترک باز شدگی (ω/ω_0)	تحقیق حاضر (ω/ω_0)	خطا شماره ۱ (%)	خطا شماره ۲ (%)
0	1	1	1	0.0	0.0
0.1	0.99501	0.98815	0.99892	0.7	0.4
0.2	0.97817	0.95571	0.97816	2.3	0.0
0.3	0.94948	0.90332	0.93866	5.1	1.1
0.4	0.90956	0.83747	0.89045	8.6	2.1
0.5	0.85538	0.77359	0.83214	10.6	2.7

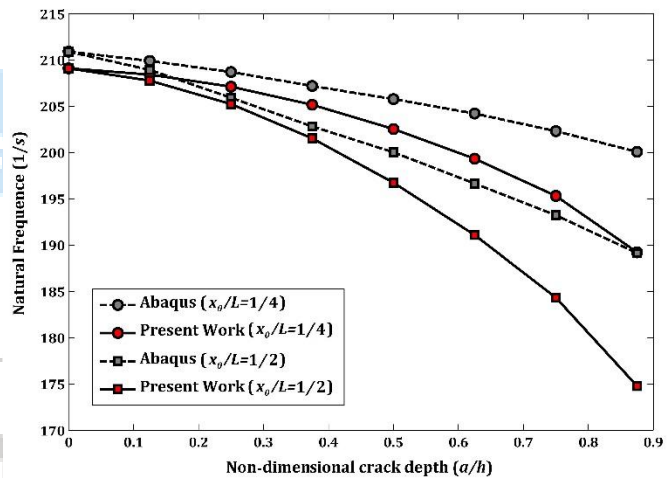
نتایج حاصل از بررسی شکل (۹) و جدول (۲) نشان می‌دهد که مدل "ترک بازشدگی"، در عمق ترک ۰٫۵، ارتفاع تیر، حدود ۱۰ درصد با مدل "ترک باز و بسته شونده" اختلاف دارد، از آنجاکه "ترک باز و بسته شونده" به دلیل در نظر گرفتن اثرات سخت شدگی در تحلیل مودال، از دقت بالاتری برخوردار است، اختلاف ۲٫۷ درصدی روش حاضر با این مدل، اعتبار تحقیق حاضر را اثبات می‌نماید.

۴-۳-۲- مقایسه اثرات تغییر عمق ترک با نرم افزار آباکوس

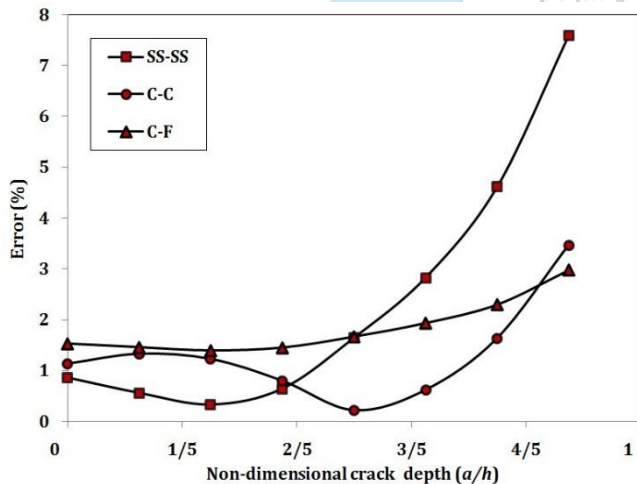
برای بررسی دقت و کارایی مدل پیشنهاد شده، با ثابت فرض کردن محل ترک در دو حالت $(x_0/L = \frac{1}{4}, \frac{1}{2})$ ، تغییرات مقادیر فرکانس طبیعی ناشی از افزایش عمق ترک از صفر تا $\frac{7}{8}h$ ارتفاع مقطع تیر، با استفاده از روش اجزای محدود حاضر و شبیه‌سازی در نرم افزار آباکوس مقایسه و بررسی می‌گردد. در اینجا تیر بتن‌آرمه تحت سه شرایط مرزی دو سر ساده، دو سر گیردار و گیردار آزاد مطابق شکل (۱۰) بررسی می‌گردد.



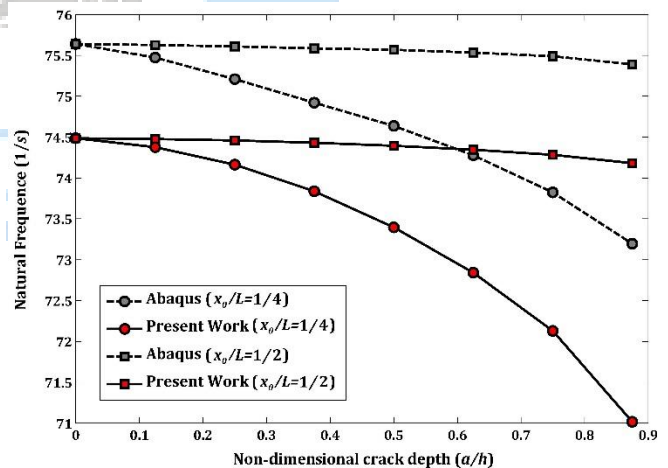
شکل ۱۰-ب: شرایط مرزی دو سر گیردار



شکل ۱۰-الف: شرایط مرزی دو سر ساده



شکل ۱۰-د: بررسی خطاهای دو روش مدل‌سازی



شکل ۱۰-ج: شرایط مرزی یکسر آزاد

شکل ۱۰: مقایسه تغییرات فرکانس طبیعی و خطاهای ناشی از افزایش عمق ترک در مود اول ارتعاش

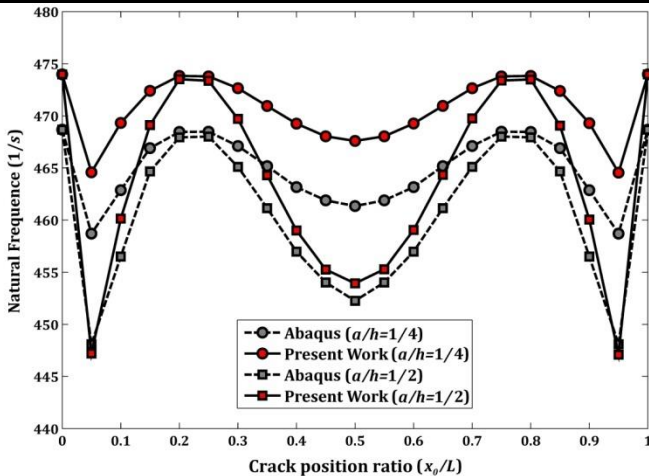
در حالت اول، مقایسه‌ی نتایج حاصل از دو روش مدل‌سازی در شرایط مرزی دو سر ساده مطابق شکل (۱۰-الف) نشان می‌دهد که با افزایش عمق ترک خطای مدل‌سازی افزایش و با تغییر محل ترک از تکیه‌گاه به سمت میانه تیر، خطای ناشی از مقایسه‌ی دو روش کاهش پیدا می‌کند، به طوریکه وقتی ترک در محل $\frac{1}{4}$ و $\frac{1}{2}$ از طول تیر قرار دارد و تا نیمی از ارتفاع مقطع تیر گسترش پیدا می‌کند، میزان خطا به-

ترتیب ۱،۵۴ و ۱،۶۴ درصد و همچنین بیشینه‌ی خطا وقتیکه عمق $\frac{7}{8}h$ است، به ترتیب ۵،۴۱ و ۷،۵۸ درصد گزارش می‌شود؛ که نشان می‌دهد روش اجزای محدود ارائه شده با دقت مناسب قادر به مدل‌سازی رفتار تیر بتن آرمه‌ی دارای ترک در شرایط مرزی دو سر ساده است. در حالت دوم، تغییرات فرکانس طبیعی در شرایط مرزی دو سر گیردار مطابق شکل (۱۰-ب) ارائه می‌شود. نتایج استخراج شده در این حالت نشان می‌دهد؛ بیشینه‌ی خطا زمانیکه ترک در $\frac{1}{4}$ ، $\frac{1}{2}$ طول تیر قرار دارد، به ترتیب برابر با ۱،۳۶ و ۳،۴۶ درصد است. در حالت سوم، تغییرات فرکانس طبیعی در شرایط مرزی گیردار آزاد مطابق شکل (۱۰-ج) ارائه می‌شود. در این حالت، مطابق دو حالت پیشین، مقایسه‌ی نتایج حاصل از تغییر عمق ترک روی مقادیر فرکانس طبیعی تیر نشان می‌دهد؛ بیشینه‌ی خطا در حالتی که ترک در $\frac{1}{4}$ ، $\frac{1}{2}$ طول تیر قرار دارد، به ترتیب برابر با ۱،۶۰ و ۲،۹۷ درصد است. مطابق شکل (۱۰-د)، مقایسه‌ی خطاهای دو روش اجزای محدود ارائه شده و آباکوس، زمانیکه محل ترک در $\frac{1}{4}$ طول تیر قرار دارد، نشان می‌دهد که بیشترین میزان خطا در شرایط مرزی دو سر ساده و کمترین مقدار خطا در شرایط مرزی دو سر گیردار اتفاق می‌افتد. این مقایسه نشان می‌دهد که در شرایط مرزی دو سر ساده و گیردار آزاد همواره با افزایش عمق ترک، مقدار خطا افزایش پیدا می‌کند، در حالیکه در شرایط مرزی دو سر گیردار، تغییرات خطا با افزایش عمق ترک، روندی سینوسی دارد.

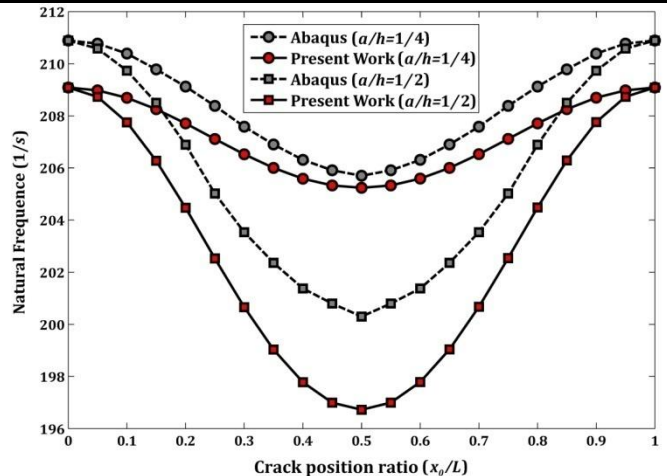
۳-۳-۴- مقایسه اثرات تغییر محل ترک

در اینجا دقت مدل پیشنهاد شده، با توجه به تغییرات مقدار فرکانس طبیعی در حالیکه عمق ترک $\frac{1}{4}$ ، $\frac{1}{2}$ ارتفاع تیر فرض شده است و محل ترک در طول تیر تغییر می‌کند، بررسی می‌شود. مطابق شکل (۱۱) تغییرات مقدار فرکانس طبیعی در مود اول ارتعاش، تحت سه شرایط مرزی با دو روش اجزای محدود حاضر و آباکوس مقایسه می‌گردد. در حالت اول، تغییرات فرکانس طبیعی ناشی از تغییر محل ترک در شرایط مرزی دو سر ساده مطابق شکل (۱۱-الف) ارائه می‌شود. بررسی نتایج در این حالت نشان می‌دهد؛ زمانیکه عمق ترک $\frac{1}{4}$ ارتفاع تیر است، با تغییر محل ترک از تکیه‌گاه تا میانه‌ی تیر میزان خطا کاهش پیدا کرده در حالیکه در عمق ترک $\frac{1}{2}$ ارتفاع تیر، با تغییر محل ترک از تکیه‌گاه تا میانه‌ی تیر میزان خطا افزایش پیدا می‌کند؛ که دلیل آن اثرات کم نیروی برشی در میانه‌ی تیر در عمق ترک $\frac{1}{4}$ ارتفاع و افزایش اثر نیروهای برشی در عمق ترک $\frac{1}{2}$ ارتفاع تیر ارزیابی می‌گردد. در اینجا، بیشینه‌ی خطا زمانیکه عمق ترک $\frac{1}{4}$ ، $\frac{1}{2}$ ارتفاع تیر است، به ترتیب ۰،۸۵ و ۱،۸۹ درصد گزارش می‌شود. در حالت دوم، تغییرات فرکانس طبیعی ناشی از تغییر محل ترک در شرایط مرزی دو سر گیردار با دو روش مذکور مطابق شکل (۱۱-ب) با یکدیگر مقایسه می‌شوند. بررسی نتایج در این حالت نشان می‌دهد؛ بیشینه‌ی خطا در حالتیکه عمق ترک $\frac{1}{4}$ ، $\frac{1}{2}$ ارتفاع تیر است، به ترتیب ۱،۳۹ و ۱،۱۸ درصد تعیین می‌شود. همچنین در حالت سوم، تغییرات فرکانس طبیعی ناشی از تغییر محل ترک در شرایط مرزی گیردار آزاد مطابق شکل (۱۱-ج) ارائه می‌شود. در این حالت بیشینه‌ی خطا زمانیکه عمق ترک $\frac{1}{4}$ ، $\frac{1}{2}$ ارتفاع تیر است، به ترتیب ۱،۵۲ و ۳،۶۹ درصد گزارش می‌شود.

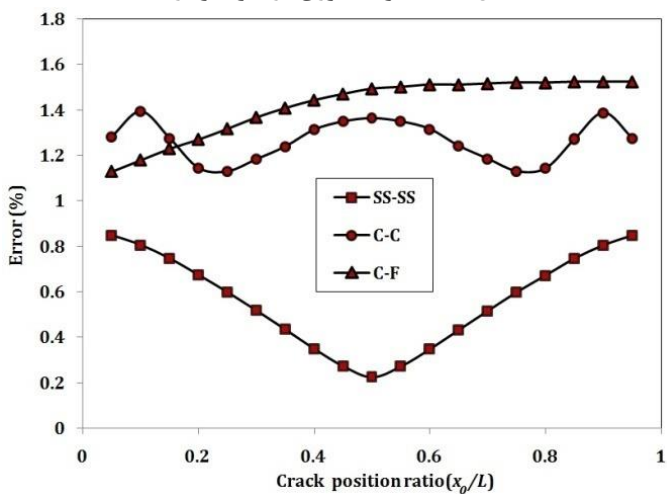
مطابق شکل (۱۱-د)، کم‌ترین میزان خطا بین نتایج دو روش، در شرایط مرزی دو سر ساده مشاهده می‌شود. در این حالت با توجه به تغییر محل ترک از تکیه‌گاه‌ها تا میانه‌ی تیر، همواره میزان خطاهای روندی نزولی را دنبال می‌کنند. در حالیکه در شرایط مرزی گیردار آزاد این روند همواره صعودی بوده و بیشینه‌ی خطاهای در این شرایط مرزی مشاهده می‌گردد. همچنین در شرایط مرزی دوسر گیردار روند فوق ابتدا نزولی و سپس صعودی دنبال می‌گردد. به‌طوریکه بیشترین خطاهای زمانیکه ترک در میانه‌ی تیر قرار دارد استخراج می‌شود. نتایج این بررسی‌ها نشان می‌دهد که روش اجزای محدود ارائه شده برای تخمین رفتار ارتعاشی تیرهای بتن آرمه دارای ترک با تغییر محل ترک در تمامی شرایط مرزی از دقت مناسبی برخوردار است.



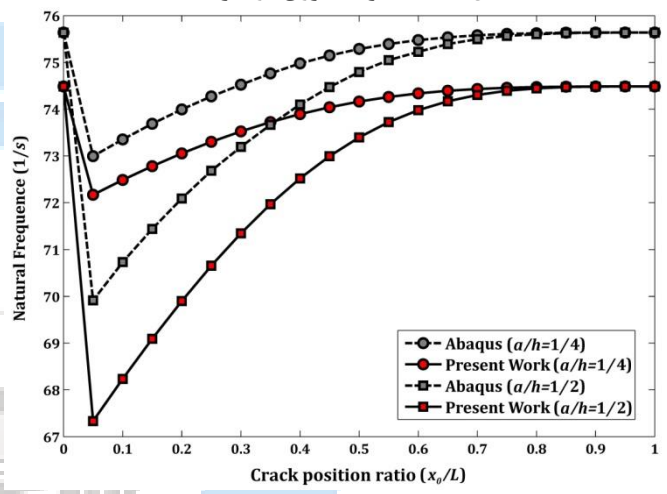
شکل ۱۱-ب: شرایط مرزی دو سر گیردار



شکل ۱۱-الف: شرایط مرزی دو سر ساده



شکل ۱۱-د: بررسی خطاهای دو روش مدل سازی



شکل ۱۱-ج: شرایط مرزی یکسر آزاد

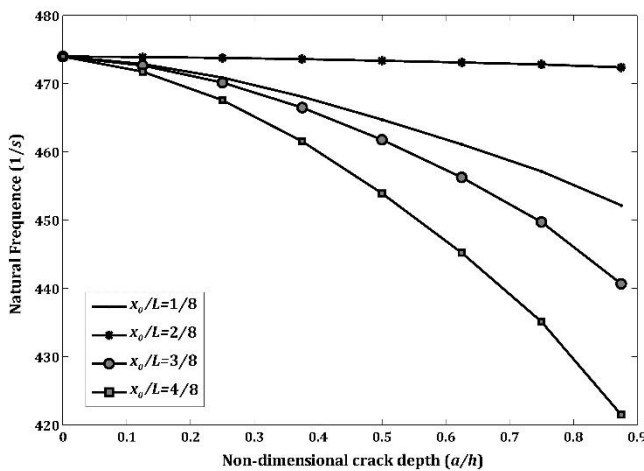
شکل ۱۱: مقایسه تغییرات فرکانس طبیعی و خطاهای ناشی از تغییر محل ترک در مود اول ارتعاش

۴-۴- بررسی اثرات تغییر عمق و محل ترک روی فرکانس های طبیعی تیر بتن آرمه

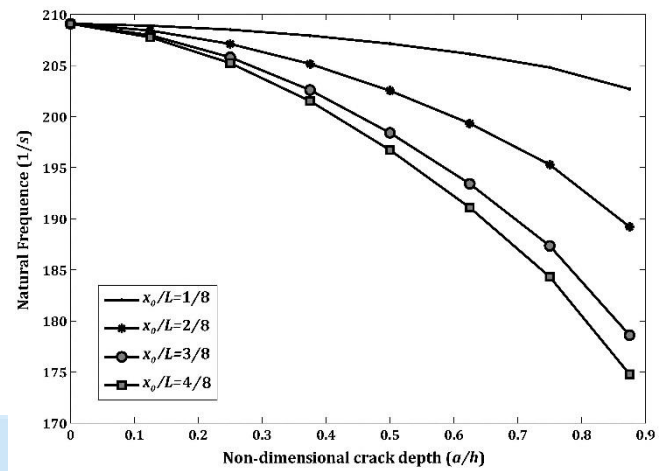
در این بخش یک بحث جامع روی تغییرات فرکانس طبیعی ناشی از تغییر عمق و محل ترک در تیرهای بتن آرمه‌ی دارای ترک انجام می‌شود. به طوریکه یکبار محل ترک در ۸ نقطه‌ی ثابت از طول تیر در نظر گرفته می‌شود و عمق ترک به تدریج افزایش پیدا می‌کند. سپس عمق ترک در ۸ مقدار مشخص، ثابت فرض شده و مکان ترک به تدریج در طول تیر بتن آرمه تغییر می‌نماید. نتایج حاصل از این بررسی، رفتار کامل تیر بتن آرمه دارای ترک، در یک تحلیل مودال را تشریح می‌نماید. در اینجا تغییرات فرکانس طبیعی تیر بتن آرمه در شرایط مرزی دو سر ساده، دو سر گیردار و گیردار آزاد به ترتیب مطابق شکل‌های (۱۲-الف) الی (۱۲-ج) ارائه می‌شود. نتایج بررسی‌ها مطابق شکل (۱۲-الف) نشان می‌دهد که همواره با افزایش عمق ترک، فرکانس طبیعی تیر بتن آرمه در شرایط مرزی دوسر ساده کاهش پیدا می‌کند. در این حالت در صورتیکه ترک از تکیه‌گاه به سمت میانه تیر حرکت نماید همواره مقدار فرکانس طبیعی کاهش یافته و مجدداً از میانه به سمت تکیه‌گاه مقدار فرکانس افزایش می‌یابد.

همچنین نتایج بررسی‌ها در حالت دوم (تحت شرایط مرزی دوسر گیردار) مطابق شکل (۱۲-ب)، نشان می‌دهد که همواره با افزایش عمق ترک، فرکانس طبیعی تیر بتن آرمه کاهش پیدا می‌کند. در این حالت در صورتیکه ترک از تکیه‌گاه به سمت میانه تیر حرکت نماید،

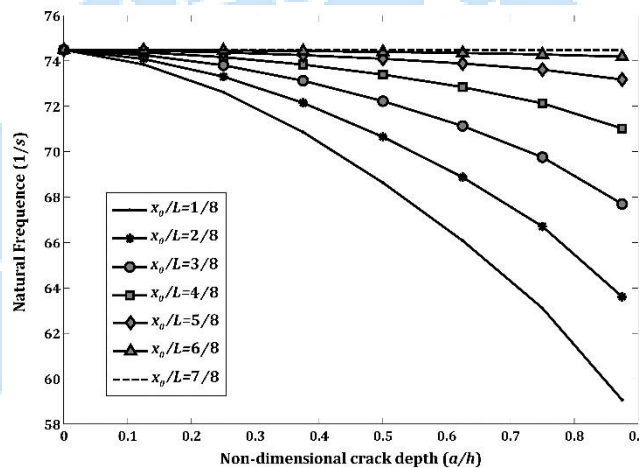
علاوه بر زمانیکه ترک در محل $\frac{1}{4}$ طول تیر قرار دارد و فرکانس تیر دارای ترک به فرکانس تیر بدون ترک نزدیک است، همواره در سایر نقاط، مقدار فرکانس طبیعی تیر با افزایش عمق ترک کاهش پیدا می کند.



شکل ۱۲-ب: شرایط مرزی دو سر گیردار



شکل ۱۲-الف: شرایط مرزی دو سر ساده



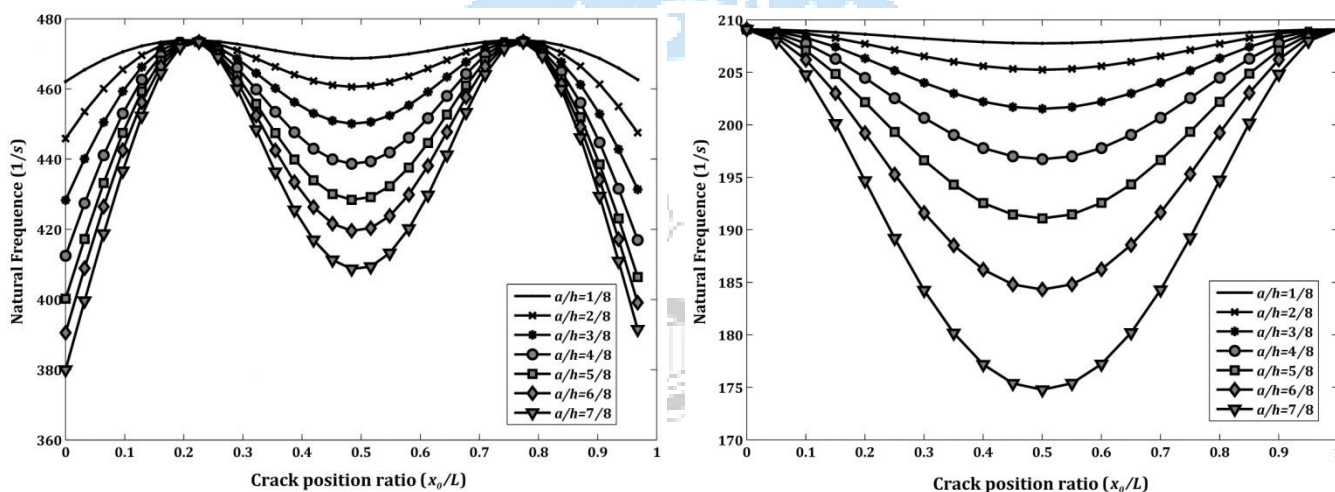
شکل ۱۲-ج: شرایط مرزی یکسر آزاد

شکل ۱۲: تغییرات فرکانس طبیعی مود اول ارتعاش، ناشی از افزایش عمق ترک در شرایط مرزی مختلف

مشابه دو حالت پیشین، در شرایط مرزی گیردار آزاد، مطابق شکل (۱۲-ج)، همواره با افزایش عمق ترک، فرکانس طبیعی کاهش پیدا می کند اما بر خلاف حالات قبل با تغییر محل ترک از تکیه گاه گیردار به سمت انتهای آزاد تیر، مقدار فرکانس طبیعی افزایش پیدا می کند، به طوریکه وقتی ترک در محل $\frac{6}{8}$ ، $\frac{7}{8}$ طول تیر قرار دارد، مقدار فرکانس طبیعی تقریباً به فرکانس طبیعی تیر بدون ترک نزدیک خواهد بود. در ادامه با ثابت فرض کردن عمق ترک در ۸ مقدار مشخص، مکان ترک به تدریج در طول تیر بتن آرمه تغییر می نماید. مطابق حالت-های قبل در اینجا تغییرات فرکانس طبیعی تیر بتن آرمه در شرایط مرزی دو سر ساده، دو سرگیردار و گیردار آزاد به ترتیب مطابق شکل (۱۳-الف) الی (۱۳-ج) ارائه می شود. نتایج بررسی ها نشان می دهد که کمترین مقدار فرکانس طبیعی در هر عمق از ترک خوردگی در مود اول، مطابق شکل (۱۳-الف) زمانی به دست می آید که ترک در میانه تیر دو سر ساده واقع شده باشد. در این حالت هرچه محل ترک از میانه تیر به سمت تکیه گاه ها منتقل شود، همواره فرکانس طبیعی افزایش پیدا می کند. همچنین بررسی نمودار فرکانس های طبیعی در مود دوم مطابق شکل (ض-الف) نشان می دهد، زمانی که ترک در میانه و یا در ابتدا و انتهای تیر واقع است، مقدار فرکانس های طبیعی بیشینه و همواره مقداری ثابت، برابر با مقدار فرکانس در کمترین عمق ترک است. چنین روندی برای تغییرات میزان فرکانس های طبیعی در سایر مودهای تیر دارای ترک نیز قابل بحث است.

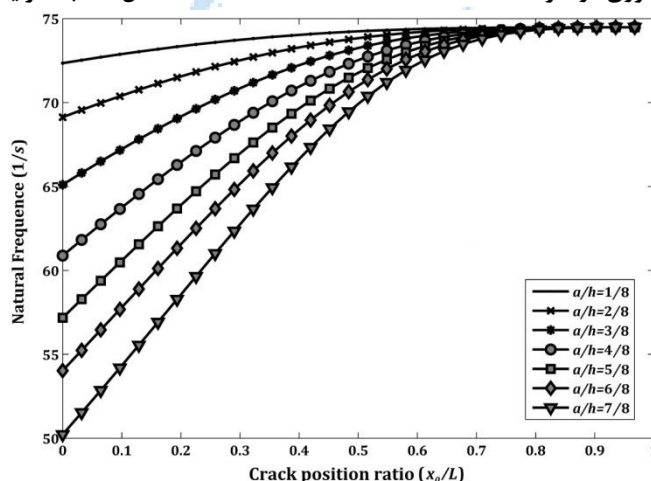
بررسی نمودار فرکانس‌های طبیعی مود اول در شرایط مرزی دو سر گیردار نشان می‌دهد که کمترین مقدار فرکانس طبیعی در هر عمق از ترک خوردگی، زمانیکه ترک در میانه و یا در ابتدا و انتهای تیر دو سر گیردار واقع شده باشد اتفاق می‌افتد. مطابق شکل (۱۱-ب) زمانی که ترک در یک پنجم ابتدایی و یا انتهایی تیر واقع شده باشد، مقدار فرکانس‌های طبیعی وابسته به عمق ترک نیست و همواره مقداری ثابت، برابر با مقدار فرکانس در کمترین عمق ترک تعیین می‌شود. با روندی مشابه تغییرات میزان فرکانس‌های طبیعی در مود دوم مطابق شکل (ض-ب) قابل بررسی است. در این حالت کمترین میزان فرکانس در هر عمق از ترک، زمانی اتفاق می‌افتد که ترک در یک پنجم ابتدایی و یا انتهایی تیر واقع شده باشد.

با توجه به شکل (۱۳-ج) مشاهده می‌شود که کمترین میزان فرکانس طبیعی در هر عمقی از ترک خوردگی در تیر گیردار آزاد، زمانی اتفاق می‌افتد که محل ترک کمترین فاصله را تا تکیه گاه داشته باشد. در نتیجه با تغییر محل ترک از محل تکیه‌گاه به سمت انتهای آزاد همواره مقدار فرکانس طبیعی در مود اول روندی صعودی دارد (افزایش پیدا می‌کند). همچنین مطابق شکل (ض-ج) مشاهده می‌شود میزان فرکانس‌های طبیعی در تیر گیردار آزاد دارای ترک در مود دوم زمانی کمینه خواهد شد که محل ترک از میانه تیر بگذرد، ($0.6 \leq x_0/L$) مطابق آنچه در شرایط مرزی دو سر گیردار گفته شد، در اینجا زمانی که ترک به یک پنجم ابتدایی و یا انتهای تیر نزدیک می‌شود، مقدار فرکانس‌های طبیعی افزایش پیدا کرده و وابستگی فرکانس به عمق ترک از بین می‌رود.



شکل ۱۳-ب: شرایط مرزی دو سر گیردار

شکل ۱۳-الف: شرایط مرزی دو سر ساده



شکل ۱۳-ج: شرایط مرزی یکسر آزاد

شکل ۱۳: تغییرات فرکانس طبیعی مود اول ارتعاش، ناشی از تغییر محل ترک در شرایط مرزی مختلف

۵- نتیجه گیری

در این مقاله رفتار ارتعاش آزاد تیر بتن آرمه‌ی دارای ترک در شرایط مرزی مختلف تحلیل و بررسی شده است. تحلیل انجام شده بر مبنای یک روش اجزای محدود و اصلاح ممان اینرسی ناشی از حضور میلگردها پایه‌ریزی شده است. در این مطالعه، ترک در تیر بتن آرمه با استفاده از یک فنر پیچشی معادل، مدل‌سازی گردیده است. اثر ترک روی میزان سختی تیر بتن آرمه با غنی‌سازی درایه‌های ماتریس جرم و سختی بر اساس پارامترهای مادی و هندسی ترک اعمال شده است. در مطالعه‌ی حاضر تأثیر عمق و مکان ترک روی فرکانس‌های طبیعی در مود اول و دوم ارتعاش تیر بررسی و نتایج آن با نتایج حاصل از نرم افزار آباکوس و مراجع معتبر مقایسه گردید. بررسی نتایج به دست آمده نشان می‌دهد:

- نرخ کاهش میزان فرکانس‌های طبیعی در نسبت‌های $a/h \geq 0.6$ به شدت افزایش پیدا می‌کند؛ که دلیل آن غیرخطی شدن معادلات و کاهش شدید ممان اینرسی در عمق‌های زیاد ترک ارزیابی می‌گردد.
- با توجه به آنکه تحلیل حاضر یک مدل خطی و یک‌بعدی برای محاسبه فرکانس‌های طبیعی تیر دارای ترک را ارائه می‌نماید، مشاهده می‌شود این تحلیل در مقایسه با شبیه‌سازی سه‌بعدی در نرم افزار آباکوس از دقت مناسبی با خطای زیر ۸ درصد برخوردار می‌باشد.
- ایجاد ترک در تیر بتن آرمه، موجب کاهش فرکانس‌های طبیعی سازه می‌شود که دلیل آن کاهش ممان اینرسی مقطع می‌باشد. در حالیکه میلگردهای طولی و عرضی به دلیل افزایش ممان اینرسی سازه، فرکانس‌های طبیعی را افزایش می‌دهند. اثر همزمان (ترک و میلگردها) اهمیت معادلات (۲-۲)، (۴-۱) و (۵-۳) را در مدل‌سازی نشان می‌دهد.
- زمانیکه ترک در ابتدا و انتهای تیر دو سر ساده و یا انتهای آزاد تیر یکسر گیردار قرار می‌گیرد، فرکانس طبیعی، تابعی از محل و عمق ترک نبوده و با فرکانس تیر بدون ترک معادل می‌شود.
- مدل عددی و تحلیلی مورد استفاده با دقت مناسب قادر به توجیه رفتار ترک و میلگردها می‌باشد.

مراجع

- [1] Nego, D., Seordelis, A. (1967). Finite element analysis of reinforced concrete beam. *Am. Con. Ins Journal*, Vol. 63, pp. 240-252.
- [2] Krishnamoorthy, C., Panneerselvam, S. A. (1978). FEP-ACSI-a finite element program for nonlinear analysis of reinforced concrete framed structures. *Computer and Structures*, Vol. 9, pp. 451-461.
- [3] Zdenek, P. B., Byung, H. (1984). Deformation of progressively cracking reinforced concrete beams. *Journal of ACI*, Vol. 71, pp. 268-278.
- [4] Hu, H., William, C. (1990). Nonlinear analysis of cracked reinforced concrete. *Journal of ACI*, Vol. 87, pp. 199-207.
- [5] Krawczuk, M., Ostachowicz, W. M. (1995). Modelling and vibration analysis of a cantilever composite beam with a transverse open crack. *Sound and Vibration*, Vol. 183, pp. 69-89.
- [6] Benarbia, D., Benguediab, M., Benguediab, S. (2013). Two-dimensional Analysis of Cracks Propagation in Structures of Concrete. *Journal of Engineering, Technology & Applied Science Research*, Vol. 3, pp. 429-432.
- [7] Subramani, T., Manivannan, R., Kavitha, M. (2014). Crack Identification in Reinforced Concrete Beams Using Ansys Software. *Engineering Research and Applications*, Vol. 4, pp. 133-141.
- [8] Slowik, M., Smarzewski, P. (2014). Numerical Modeling Of Diagonal Cracks In Concrete Beams. *Archives of Civil Engineering*, Vol. 3, pp. 307-322.
- [9] Dimarogonas, A. D., Papadopoulos, C. A. (1983). Vibration of cracked shafts in bending. *Sound and Vibration*, Vol. 91, pp. 583-593.
- [10] Okamura, H., Liu, H. W., Chorng-Shin, C. (1969). A cracked column under compression. *Engineering Fracture Mechanics*, Vol. 1, pp. 547-564.
- [11] Rizos, P. F., Aspragathos, N., Dimarogonas, A. D. (1990). Identification of crack location and magnitude in a cantilever beam from the vibration modes, *Sound and Vibration*, Vol. 3, pp. 381-388.

- [12] Law, S. S., Zhu, X. Q. (2004). Dynamic behavior of damaged concrete bridge structures under moving vehicular loads. *Engineering Structures*, Vol. 26, pp. 1279-1293.
- [13] Lee, J. (2010). Identification of a crack in a beam by the boundary element method. *Mechanical Science and Technology*, Vol. 24, pp. 801-804.
- [14] Yokoyama, T., Chen, M. C. (1998). Vibration analysis of edge-cracked beams using a line-spring model. *Engineering Fracture Mechanics*, Vol. 59, pp. 403-409.
- [15] Razzaghi, J., Abadi, M. Kh., Alijani, A. (2018). A new approach to finite element modeling of crack in RC beams. *Concrete research quarterly journal*, Vol. 11(2), pp. 42-55.
- [16] Ricci, P., Viola, E. (2006). Stress intensity factors for cracked T-sections and dynamic behavior of T-beams. *Engineering Fracture Mechanics*, Vol. 73, pp. 91-111.
- [17] Alijani, A., Mastan-Abadi, M., Darvizeh, A., Kh. Abadi, M. (2018). Theoretical approaches for bending analysis of founded Euler-Bernoulli cracked beams. *Archive of Applied Mechanics*, in press.
- [18] Leissa, A. W. and Qatu, M. S. (2011). *Vibrations of Continuous Systems*. First edition, United States of America: McGraw-Hill, pp. 50-150.
- [19] Rao, S. S. (2011). *Mechanical Vibrations*. Fifth edition, United States of America: Prentice Hall, pp. 22-57.
- [20] Logan, D. L. (2007). *A First Course in the Finite Element Method*. Fourth edition, Canada: Thomson, pp. 78-121.
- [21] Yokoyama, T. (1996). Vibration analysis of Timoshenko beam-columns on two-parameter elastic foundations. *Journal of Computers & Structures*, Vol. 61, pp. 995-1007.
- [22] Gudmundsun, P. (1983). The dynamic behavior of slender structures with cross-sectional cracks. *Mechanics and Physics of Solids*, Vol. 1, pp. 329-345.
- [23] Chaudhari, T. D., Maiti, S. K. (1999). Modelling of transverse vibration of beam of linearly variable depth with edge crack. *Engineering Fracture Mechanics*, Vol. 63, pp. 425-445.
- [24] Pandey, A. K., Biswas, M. (1994). Damage detection in structures using changes in flexibility. *Sound and Vibration*, Vol. 169, pp. 3-17.
- [25] Lele, S. P., Maiti, S. K. (2002). Modeling of transverse vibration of short beams for crack detection and measurement of crack extension. *Sound and Vibration*, Vol. 257, pp. 559-583.
- [26] Silva, J. M., Gomes, A. J. (1990). Experimental dynamic analysis of cracked free-free beams. *Experimental Mechanics*, Vol. 30, pp. 20-25.
- [27] Kim, J. T., Stubbs, N. (2003). Crack detection in beam-type structures using frequency data. *Sound and Vibration*, Vol. 259, pp. 145-160.
- [28] Swamidass, A. S. J., Yang, X. F., Seshadri, R. (2004). Identification of cracking in beam structures using Timoshenko and Euler formulations. *Engineering Mechanics*, Vol. 130, pp. 1297-1308.
- [29] Dodeling, S. W., Farrar, C. R., Prime, M. B. (1998). A summary review of vibration-based damage identification methods. *Shock and Vibration Digest*, Vol. 30, pp. 91-105.
- [30] Cawly, P., Adams, R. D. (1979). The locations of defects in structures from measurements of natural frequencies. *Strain Analysis*, Vol. 14, pp. 49-57.
- [31] Friswell, M. I., Penny, J. E. T., Wilson, D. A. L. (1994). Using vibration data and statistical measures to locate damage in structures. *Experimental Techniques*, Vol. 9, pp. 239-254.
- [32] Narkis, Y. (1994). Identification of crack location in vibrating simply supported beams. *Sound and Vibration*, Vol. 172, pp. 549-558.
- [33] Ratcliffe, C. P. (1997). Damage detection using a modified Laplacian operator on mode shape data. *Sound and Vibration*, Vol. 204, pp. 505-517.
- [34] Ostachowicz, W. M., Krawczuk, M. (1991). Analysis of the cracks on the natural frequencies of a cantilever Beam. *Sound and Vibration*, Vol. 150, pp. 191-201.
- [35] Binici, B. (2005). Vibration of beam with multiple open cracks subjected to axial force. *Sound and Vibration*, Vol. 287, pp. 277-295.
- [36] Hofstetter, G., Meschke, G. (2011). *Damage and Smearred Crack Models*. First edition, Germany: CISM International Centre for Mechanical Sciences, Springer, Vienna, pp. 1-49.

[37] Borst, R. D., Remmers, J. C., Needleman, A., Angèle Abellan, M. (2004). Discrete vs smeared crack models for concrete fracture: Bridging the gap. *International Journal for Numerical and Analytical Methods in Geomechanics*, Vol. 28(7-8), pp. 583 - 607.

[38] Chondros, T. G., Dimarogonas, A. D., Yao, J. (2001). Vibration of a beam with a breathing crack. *Journal of Sound and vibration*, Vol. 239(1), pp. 57-67.

[39] Liu, W., Barkey, M. E. (2018). The Effects of Breathing Behaviour on Crack Growth of a Vibrating Beam. *Shock and Vibration*, <https://doi.org/10.1155/2018/2579419>.

[40] Irwin, G. R., Kies, J. A. (1954). Critical energy rate analysis of fracture strength. *Journal of Welding*, Vol. 33(1), pp. 193-198.

فهرست علائم

نسبت ضریب الاستیسیته فولاد (میلگرد) به بتن	n	عمق ترک	a
توابع شکل	N	مساحت سطح مقطع تیر بتن آرمه	A^{RC}
ضخامت کاور بتن (فاصله میلگرد تا سطح خارجی بتن)	t	مساحت سطح مقطع میلگردهای فوقانی (تحتانی)	$A_{s1(2)}$
انرژی جنبشی	T	ضخامت تیر	b
انرژی جنبشی المان دارای ترک	T_c^{RC}	قطر میلگردها	D
انرژی جنبشی ریز المان سمت چپ فنر (راست)	$T_{L(R)}^{RC}$	ماتریس اصلاح ریز المان سمت چپ (راست)	$C_{L(R)}$
بردار جابجایی برحسب گره‌های اصلی	u	فاصله میلگردهای طولی تا دورترین تار فشاری بتن	d
بردار سرعت برحسب گره‌های اصلی	\dot{u}	مدول الاستیسیته بتن (فولاد)	$E_{c(s)}$
بردار جابجایی گره‌های ریز المان چپ (راست)	$u_{L(R)}$	ارتفاع تیر	h
انرژی کرنشی	U	گشتاور دوم سطح مقطع کامل (ترک نخورده)	I_0^{RC}
انرژی کرنشی المان دارای ترک	U_c	ممان اینرسی اصلاح شده تیر ترک خورده	I_c^{RC}
انرژی کرنشی ریز المان سمت چپ (راست)	$U_{L(R)}$	ضریب سختی فنر پیچشی	k_{sp}
انرژی کرنشی فنر پیچشی	U_s	ماتریس سختی ریز المان سمت چپ (راست)	$K_{L(R)}^{RC}$
جابجایی گره‌ها	w	ضریب شدت تنش تحت خمش خالص	K_{IM}
سرعت گره‌ها	\dot{w}	ماتریس سختی اصلاح شده فنر پیچشی	K_S
سرعت گره سمت چپ (راست) فنر	$\dot{w}_{L(R)}$	ماتریس سختی تیر بتن آرمه اوپلر-برنولی استاندارد	K_{St}
محل ترک در طول تیر	x_0	ماتریس سختی اصلاح شده ریز المان سمت چپ (راست)	$K_{L(R)}^{RC}$
محل فنر پیچشی در المان دارای ترک	x_c	ماتریس سختی اصلاح شده المان دارای ترک	K_c^{RC}
محل تار خنثی مقطع کامل تیر بتن آرمه (ترک نخورده)	\bar{y}_0^{RC}	ماتریس سختی اسمبل شده تیر دارای ترک	K_{St+c}^{RC}
محل تار خنثی مقطع دارای ترک تیر بتن آرمه	\bar{y}_c^{RC}	طول تیر (طول المان دارای ترک)	$L(l_e)$
وزن مخصوص بتن (فولاد)	$\gamma_{c(s)}$	ماتریس جرم ریز المان سمت چپ (راست)	$m_{L(R)}^{RC}$
نسبت پواسون بتن (فولاد)	$\nu_{c(s)}$	ممان خمشی	M
چگالی بتن (فولاد)	$\rho_{c(s)}$	ماتریس جرم استاندارد تیر بتن آرمه بدون ترک	M_{St}^{RC}
شیب	ϕ	ماتریس جرم اصلاح شده ریز المان سمت چپ (راست)	$M_{L(R)}^{RC}$
فرکانس طبیعی	ω	ماتریس جرم اصلاح شده المان دارای ترک	M_c^{RC}
		ماتریس جرم اسمبل شده تیر دارای ترک	M_{St+c}^{RC}

ضمیمه

در بخش اول، هر یک از درایه‌های ماتریس تبدیل C_L با حل دستگاه معادلات پیوستگی، به صورت زیر ارائه می‌شود.

$$C_L^{11} = C_L^{22} = 1 \quad \text{(ض-۱)}$$

$$C_L^{12} = C_L^{13} = C_L^{14} = C_L^{21} = C_L^{23} = C_L^{24} = 0 \quad \text{(ض-۲)}$$

$$C_L^{31} = \frac{1}{X} (l_e^4 + 4l_e^3\psi - 3l_e^2x_c^2 - 12l_e^2x_c\psi + 2l_ex_c^3 + 12l_ex_c^2\psi - 4x_c^3\psi) \quad \text{(ض-۳)}$$

$$C_L^{32} = \frac{1}{X} (l_e^4x_c - 2l_e^3x_c^2 + 4l_e^3x_c\psi + l_e^2x_c^3 - 12l_e^2x_c^2\psi + 12l_ex_c^3\psi - 4x_c^4\psi) \quad \text{(ض-۴)}$$

$$C_L^{33} = \frac{1}{X} (3l_e^2x_c^2 - 2l_ex_c^3 + 4x_c^3\psi) \quad \text{(ض-۵)}$$

$$C_L^{34} = \frac{1}{X} (-l_e^3x_c^2 + l_e^2x_c^3 - 4l_ex_c^3\psi + 4x_c^4\psi) \quad \text{(ض-۶)}$$

$$C_L^{41} = \frac{1}{X}(-6l_e^2x_c + 6l_ex_c^2 - 6x_c^2\psi) \quad (\text{ض-7})$$

$$C_L^{42} = \frac{1}{X}(l_e^4 - 4l_e^3x_c + 4l_e^2\psi + 3l_e^2x_c^2 - 12l_e^2x_c\psi + 12l_ex_c^2\psi - 6x_c^3\psi) \quad (\text{ض-8})$$

$$C_L^{43} = \frac{1}{X}(6l_e^2x_c - 6l_ex_c^2 + 6x_c^2\psi) \quad (\text{ض-9})$$

$$C_L^{44} = \frac{1}{X}(-2l_e^3x_c + 3l_e^2x_c^2 - 6l_ex_c^2\psi + 6x_c^3\psi) \quad (\text{ض-10})$$

در بخش دوم، به طور مشابه هر یک از درایه‌های ماتریس تبدیل C_R به صورت زیر ارائه می‌گردد.

$$C_R^{33} = C_R^{44} = 1 \quad (\text{ض-11})$$

$$C_R^{31} = C_R^{32} = C_R^{34} = C_R^{41} = C_R^{42} = C_R^{43} = 0 \quad (\text{ض-12})$$

$$C_R^{11} = \frac{1}{X}(l_e^4 + 4l_e^3\psi - 3l_e^2x_c^2 - 12l_e^2x_c\psi + 2l_ex_c^3 + 12l_ex_c^2\psi - 4x_c^3\psi) \quad (\text{ض-13})$$

$$C_R^{12} = \frac{1}{X}(l_e^4x_c - 2l_e^3x_c^2 + 4l_e^3x_c\psi + l_e^2x_c^3 - 12l_e^2x_c^2\psi + 12l_ex_c^3\psi - 4x_c^4\psi) \quad (\text{ض-14})$$

$$C_R^{13} = \frac{1}{X}(3l_e^2x_c^2 - 2l_ex_c^3 + 4x_c^3\psi) \quad (\text{ض-15})$$

$$C_R^{14} = \frac{1}{X}(-l_e^3x_c^2 + l_e^2x_c^3 - 4l_ex_c^3\psi + 4x_c^4\psi) \quad (\text{ض-16})$$

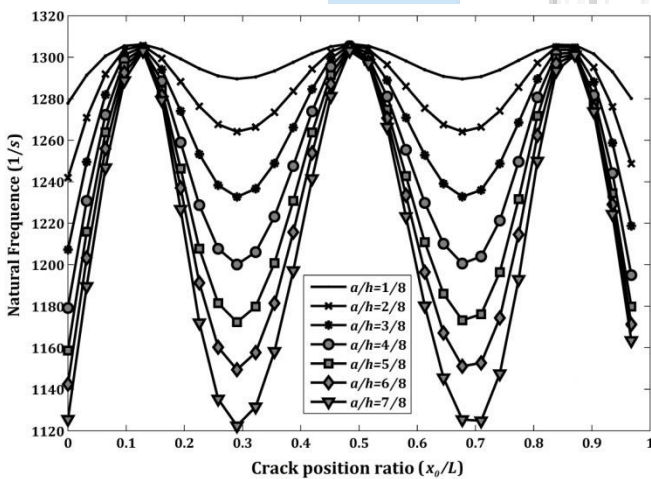
$$C_R^{21} = \frac{1}{X}(-6l_e^2x_c - 6l_e^2\psi + 6l_ex_c^2 + 12l_ex_c\psi - 6x_c^2\psi) \quad (\text{ض-17})$$

$$C_R^{22} = \frac{1}{X}(l_e^4 - 4l_e^3x_c + 3l_e^2x_c^2 - 6l_e^2x_c\psi + 12l_ex_c^2\psi - 6x_c^3\psi) \quad (\text{ض-18})$$

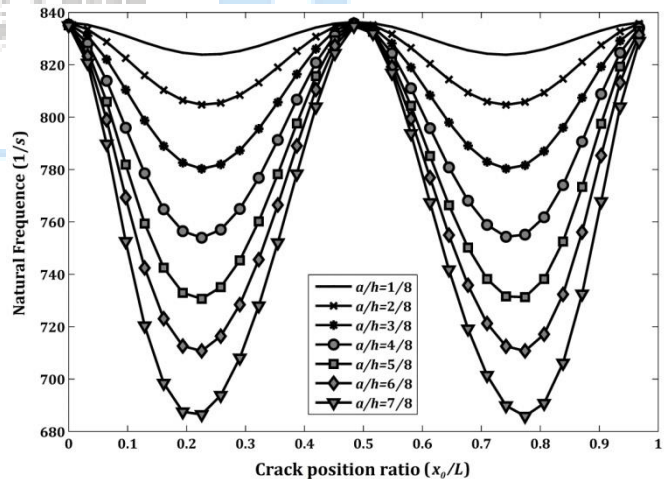
$$C_R^{23} = \frac{1}{X}(6l_e^2x_c + 6l_e^2\psi - 6l_ex_c^2 - 12l_ex_c\psi + 6x_c^2\psi) \quad (\text{ض-19})$$

$$C_R^{24} = \frac{1}{X}(-2l_e^3x_c - 2l_e^3\psi + 3l_e^2x_c^2 + 6l_e^2x_c\psi - 6l_ex_c^2\psi + 6x_c^3\psi) \quad (\text{ض-20})$$

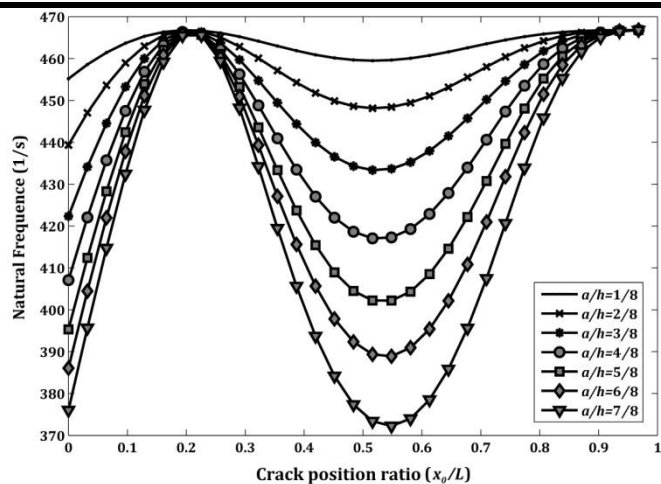
در بخش سوم، نتایج اثرات تغییر محل ترک روی مقادیر فرکانس طبیعی در مود دوم تیر بتن آرمه‌ی دارای ترک در سه شرایط مرزی به صورت شکل‌های (ض-الف) الی (ض-ج) ارائه می‌شود.



شکل ض-ب: شرایط مرزی دو سر گیردار



شکل ض-الف: شرایط مرزی دو سر ساده



شکل ض-ج: شرایط مرزی یکسر آزاد

شکل ض: تغییرات فرکانس طبیعی ناشی از تغییر محل ترک در مود دوم ارتعاش

