محاسبه شکل مدهای سیستم سازه – سیال به روش تکرار زیرفضا با انتقال تهاجمی

سید اصغر ارجمندی[1]*، ساعد رضایی[2]

۱- استادیار، دانشکده مهندسی، دانشگاه زنجان، زنجان، ایران
۲-کارشناس ارشد مهندسی سازه، دانشکده مهندسی، دانشگاه زنجان، زنجان، ایران

چکیده

محاسبه مشخصات ارتعاش آزاد سیستم سازه سیال، مانند فرکانس‌های طبیعی و شکل مدهای سیستم، به نوع خاصی از مسایل مقدار ویژه نامتقارن منجر می‌شود. برای حل این مسائل نامتقارن، روش‌های استاندارد و شناخته شده حل مسائل مقدار ویژه باید اصلاح شوند. روش زیرفضای شبه متقارن روشی کاربردی در این زمینه است که از ماتریس‌های متقارن به جای ماتریس‌های نامتقارن اصلی استفاده می‌کند. در این روش، زمان لازم برای محاسبه زوج ویژه‌های مسائل سازه سیال به تعداد زیاد (مثلا بزرگتر از ۴۰) بسیار زیاد خواهد بود. روش زیرفضای شبه متقارن تسریع یافته، با بهره‌گیری از تکنیک انتقال و کاهش اندازه زیرفضای تکرار، موجب افزایش کارآیی روش قبلی شده است. با این‌حال، در این روش مقدار انتقال بسیار محافظه‌کارانه و همیشه کمتر از آخرین مقدار ویژه همگرا شده انتخاب می‌شود. در این تحقیق یک تکنیک انتقال تهاجمی، که مقدار انتقال را بزرگ‌تر از مقادیر ویژه همگرا شده و در بین مقادیر ویژه در حال محاسبه انتخاب می‌کند، برای حل مسایل نامتقارن پیشنهاد شد. این تکنیک کارایی روش پیشین را حدود ۳۰ تا ۴۰ درصد بهبود بخشید. همچنین یک دامنه خطای قابل محاسبه به عنوان معیار همگرایی برای مسائل مقدار ویژه نامتقارن پیشنهاد شد. این دامنه خطا از یک سو دقت مقادیر ویژه همگرا شده را تضمین می‌کند و از سوی دیگر یک دامنه تقریبی برای مقادیر ویژه همگرا نشده به‌دست می‌دهد. این دامنه خطا برای انتخاب مقدار انتقال در تکنیک تهاجمی ضروری است. در این مقاله ابتدا روش‌های پیشین مورد مطالعه قرار گرفته و سپس روش پیشنهادی معرفی و با مثال‌های متعدد کاربردی امتحان شد.

کلمات کلیدی: سیستم های اندرکنش سازه – سیال، مسایل مقدار ویژه نامتقارن، روش انتقال تهاجمی، روش زیرفضا، معیار همگرایی، دامنه خطای قابل محاسبه

***نویسنده مسئول: سید اصغر ارجمندی**
پست الکترونیکی: arjmandi@znu.ac.ir

تاریخ دریافت مقاله: ۰۰۰۰/۰۰/۰۰، تاریخ پذیرش مقاله: ۰۰۰۰/۰۰/۰۰

۱- مقدمه

مطالعه اندرکنش سازه- سیال [1] معمولا به حل معادلات دیفرانسیل در نواحی با هندسه‌های پیچیده منجر می‌شود. به دلیل پیچیدگی راه حل‌های تحلیلی، روش اجزای محدود به طور گسترده به عنوان روش جایگزین برای حل مسائل اندرکنش مورد استفاده قرار می‌گیرد. روش‌های متعددی برای فرمولبندی مسایل اندرکنش سازه – سیال وجود دارد. در همه این روش‌ها، ناحیه سازه با درجات آزادی تغییر مکان فرمولبندی شده، درحالیکه برای ناحیه سیال می‌توان از درجات آزادی مختلفی، مانند فشار، پتانسیل سرعت و غیره استفاده کرد. در این مطالعه، سیال بر اساس درجه آزادی فشار فرمولبندی شده است. تحت این شرایط، ماتریس‌های جرم و سختی کلی سیستم سازه - سیال نامتقارن خواهند بود. به همین دلیل، محاسبه فرکانس‌های طبیعی و شکل مدهای سیستم منجر به یک مساله مقدار ویژه نامتقارن خواهد شد. از این رو، روش‌های استاندارد حل مسایل مقدار ویژه متقارن به طور مستقیم قابل اعمال نیست.

روش تحلیل مودی [2] یک روش شناخته شده برای تحلیل دینامیکی سیستم‌های اندرکنش سازه – سیال است [۱،۲،۳]. این روش بر محاسبه شکل مدهای درگیر سیستم سازه- سیال استوار است. برای محاسبه فرکانس‌های طبیعی و شکل مدهای سیستم سازه - سیال لازم است یک مسئله مقدار ویژه نامتقارن یا غیرخطی [۴] حل شود.

تعداد محدودی روش‌های کاربردی برای حل مسائل مقدار ویژه نامتقارن مقیاس بزرگ وجود دارد. روش‌های زیرفضا [3]، تکرار معکوس [4]، آرنولدی و لانکزوز، هسته اصلی اغلب این روش‌ها را تشکیل می‌دهند. روش زیرفضا، که توسط بته [5] توسعه داده شده است [۵]، به عنوان روشی قدرتمند برای حل مسائل مقدار ویژه استاندارد، مخصوصا در تحلیل دینامیکی ساختمان‌ها و پل‌ها شناخته شده است. برای حل مسائل مقدار ویژه نامتقارن که در سیستم‌های سازه – سیال دیده می‌شود، لطفی [۶] روش تکرار زیرفضای شبه متقارن پایه [6] را پیشنهاد داد. در این روش یک مسئله مقدار ویژه متقارن که همان زوج‌های ویژه مسئله نامتقارن را داراست، معرفی و حل شد. این روش در محاسبه زوج‌های ویژه سیستم سازه – سیال به تعداد زیاد (مثلا بیشتر از ۴۰) بسیار کارآمد نبود و نیاز به بهبود کارآیی داشت [۶].

در جهت بهبود کارآیی روش پایه، ارجمندی و لطفی [۶] روش تکرار زیرفضای شبه متقارن تسریع یافته [7] را پیشنهاد دادند. در این روش آنها از زیرفضای با اندازه ثابت و تکنیک انتقال [8] برای تسریع روش پایه استفاده کردند. از بین روش‌های مختلف اعمال تکنیک انتقال، آنها از روش پیشنهادی بته و راماسوآمی [۷] بهره گرفتند. تکنیک انتقال یا همان انتقال فرکانسی، تکنیکی است که در مساله مقدار ویژه، ماتریس سختی را با ماتریس سختی انتقال یافته (یا ماتریس سختی منهای ضریبی از ماتریس جرم) جایگزین می‌کند. با این کار مقدار فرکانس‌های مساله مقدار ویژه به اندازه همان ضریب، انتقال پیدا کرده و سرعت همگرایی فرکانس‌های نزدیک به مقدار انتقال به مقدار زیادی افزایش می‌یابد.

در این مطالعه، برای بهبود روش تسریع یافته از تکنیک انتقال تهاجمی استفاده شد. این تکنیک مقادیر انتقال را بزرگ‌تر از مقادیر ویژه همگرا شده انتخاب می‌نماید. در این روش با توجه به نزدیکی مقدار انتقال به مقادیر ویژه‌ای که می‌خواهیم محاسبه کنیم، سرعت همگرایی افزایش می‌یابد.

علاوه بر این، در روش زیرفضا اختلاف نسبی مقادیر ویژه در دو تکرار متوالی به عنوان معیاری برای همگرایی انتخاب می‌شود. این معیار با اینکه همگرایی مقادیر ویژه را به خوبی کنترل می‌کند، نمی‌تواند دقت کافی بردارهای ویژه را در همه موارد تضمین کند. انتخاب بهتر برای معیار همگرایی، دامنه خطای قابل محاسبه [9] می‌باشد، که توسط متیس [۸] پیشنهاد شده است. با این حال، روش پیشنهادی متیس برای تعیین همگرایی مسائل مقدار ویژه متقارن زمانی‌که مقدار انتقال صفر است قابل استفاده است. چن [۹] این معیار همگرایی را برای

[1] Fluid-structure Interaction (FSI)
[2] Modal Analysis Method
[3] Subspace Iteration Method
[4] Inverse Iteration
[5] K. J. Bathe
[6] Basic Pseudo Symmetric Subspace Iteration Method (BPS-SIM)
[7] Accelerated Pseudo Symmetric Subspace Iteration Method (APS-SIM)
[8] Shifting Technique
[9] Computable Error Band

حالتی‌که مقدار انتقال صفر نیست توسعه داد. در این مطالعه این معیار همگرایی، برای مسایل مقدار ویژه نامتقارن برآمده از سیستم سازه - سیال مورد بررسی قرار گرفت.

۲- معادلات ارتعاش آزاد سیستم سازه سیال

با لحاظ درجات آزادی تغییر مکان برای سازه و فشار برای سیال، شکل مدها و فرکانس‌های طبیعی ارتعاش آزاد سیستم سازه سیال از دو مسئله مقدار ویژه زیر به دست می‌آیند:

$$\left[\overline{\mathbf{K}}-\lambda_i\overline{\mathbf{M}}\right]\left\{\mathbf{X}_i^R\right\}=\{\mathbf{0}\} \quad (۱)$$

$$\left[\overline{\mathbf{K}}^T-\lambda_i\overline{\mathbf{M}}^T\right]\left\{\mathbf{X}_i^L\right\}=\{\mathbf{0}\} \quad (۲)$$

که $\overline{\mathbf{M}}$ و $\overline{\mathbf{K}}$ به ترتیب ماتریس‌های تعمیم یافته جرم و سختی سیستم سازه - سیال می‌باشد که طبق روابط زیر تعریف می‌شود:

$$\overline{\mathbf{K}}=\begin{bmatrix}\mathbf{K} & -\mathbf{B}^T\\ \mathbf{0} & \mathbf{H}\end{bmatrix},\ \overline{\mathbf{M}}=\begin{bmatrix}\mathbf{M} & \mathbf{0}\\ \mathbf{B} & \mathbf{G}\end{bmatrix} \quad (۳)$$

$\mathbf{M}$ و $\mathbf{K}$ به ترتیب ماتریس‌های جرم و سختی سازه و $\mathbf{G}$ و $\mathbf{H}$ ماتریس‌های متناظر برای سیال می‌باشد. در نهایت $\mathbf{B}$ ماتریس اندرکنش است. علاوه بر این، λ_i ، $\mathbf{X}_i^R$ و $\mathbf{X}_i^L$ به تریب مقدار ویژه و بردارهای ویژه راست و چپ سیستم سازه سیال است [۱۰، ۱۱]. مقدار ویژه و بردار ویژه راست، به ترتیب فرکانس طبیعی و شکل مد ارتعاشی سیستم را در اختیار می‌گذارند.

لازم به ذکر است که این دو مسئله مقدار ویژه دارای مقادیر ویژه یکسان ولی بردارهای ویژه متفاوت هستند (بردارهای ویژه راست و چپ). با این‌حال، این دو بردار ویژه دارای یک رابطه ساده با یکدیگر هستند [۶]:

$$\mathbf{X}_i^L=\begin{bmatrix}\left(\mathbf{X}_1\right)_i^R\\ \dfrac{1}{\lambda_i}\left(\mathbf{X}_2\right)_i^R\end{bmatrix} \quad (۴)$$

در رابطه فوق $\mathbf{X}_1$ و $\mathbf{X}_2$ به ترتیب بخش های تغییر مکان و فشار بردار ویژه هستند. در بخش‌های بعدی، روش زیرفضای شبه متقارن پایه به عنوان روشی قابل اطمینان برای حل مسائل مقدار ویژه سیستم سازه - سیال معرفی می‌شود. ابتدا، این روش در شکل‌های پایه و تسریع یافته معرفی و سپس در ادامه روش تهاجمی توضیح داده خواهد شد.

۳- روش زیرفضای شبه متقارن پایه

روش زیرفضای شبه متقارن پایه که توسط لطفی پیشنهاد شده است، توسعه‌ای از روش زیرفضای استاندارد برای حل مسائل مقدار ویژه نامتقارن در مسائل سازه - سیال است. این روش یک مسئله مقدار ویژه متقارن را معرفی می‌نماید، که دارای همان زوج‌های ویژه مسئله نامتقارن است.

معادله (۱) را می‌توان به شکل زیر بازنویسی کرد:

$$\overline{\mathbf{K}}\mathbf{X}_i^R=\lambda_i\overline{\mathbf{M}}\mathbf{X}_i^R \quad (۵)$$

با ضرب طرفین معادله (۵) در $\hat{\mathbf{K}}\overline{\mathbf{K}}^{-1}$ یک مسئله مقدار ویژه متقارن به دست می‌آید، که دارای همان زوج‌های ویژه مسئله نامتقارن است:

$$\hat{\mathbf{K}}\mathbf{X}_i^R=\lambda_i\hat{\mathbf{M}}\mathbf{X}_i^R \quad (۶)$$

که $\hat{\mathbf{K}}$ و $\hat{\mathbf{M}}$ ماتریس‌های متقارن به شکل زیر هستند:

$$\hat{\mathbf{K}} = \begin{bmatrix} \mathbf{K} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{G} \end{bmatrix}, \hat{\mathbf{M}} = \hat{\mathbf{K}}\bar{\mathbf{K}}^{-1}\bar{\mathbf{M}} \quad (۷)$$

در کل می‌توان به جای مسئله (۵) مسئله (۶) را حل کرد. روشن است که ماتریس $\hat{\mathbf{K}}$ طبق تعریف متقارن است. اما در مورد ماتریس $\hat{\mathbf{M}}$ این موضوع زیاد روشن نیست. ماتریس $\hat{\mathbf{M}}$ را می‌توان به شکل زیر نوشت [۶، ۱۰]:

$$\hat{\mathbf{M}} = \begin{bmatrix} \mathbf{I}^{\mathrm{T}} & \mathbf{B}^{\mathrm{T}} \\ \mathbf{0} & \mathbf{G}^{\mathrm{T}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{M} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{H}^{-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{I} & \mathbf{0} \\ \mathbf{B} & \mathbf{G} \end{bmatrix} \quad (۸)$$

که $\mathbf{I}$ ماتریس همانی می‌باشد. روش زیرفضای شبه متقارن با حل مسئله متقارن (۶) مقادیر و بردارهای ویژه مسئله اصلی را به دست می‌آورد. جزئیات بیشتر در مورد این روش را می‌توان در [۶] پیدا کرد. جزئیات الگوریتم روش پایه در جدول ۱ نشان داده شده است.

جدول ۱: جزئیات الگوریتم روش زیرفضای شبه متقارن پایه

الف.	**مقداردهی اولیه**
۱	تعیین اندازه زیرفضا، $q = \min\{2p, p+8\}$
۲	تعیین بردارهای شروع $(\mathbf{X}^{\mathrm{R}})^0 \in \mathbf{R}^{\mathrm{Neq}\times\mathrm{q}}$
ب.	**مراحل زیر تا آنجا تکرار می‌شوند که همه p بردار ویژه مورد نیاز همگرا شوند**
۱	بردارهای آزمایشی از حل این معادله به دست می‌آید $\bar{\mathbf{K}}\mathbf{X} = \bar{\mathbf{M}}(\mathbf{X}^{\mathrm{R}})^{k-1}$
۲	تصویر ماتریس‌های $\hat{\mathbf{K}}$ و $\hat{\mathbf{M}}$ محاسبه می‌شود، $\mathbf{K}^* = \mathbf{X}^{\mathrm{T}}\hat{\mathbf{K}}\mathbf{X}, \mathbf{M}^* = \mathbf{X}^{\mathrm{T}}\hat{\mathbf{M}}\mathbf{X}$
۳	مسئله مقدار ویژه تصویر شده حل می‌شود، $\mathbf{K}^*\mathbf{Q} = \mathbf{M}^*\mathbf{Q}\bar{\mathbf{\Lambda}}, \mathbf{Q}^{\mathrm{T}}\mathbf{M}^*\mathbf{Q} = \mathbf{I}$
۴	تقریب بهتری برای بردارهای ویژه به دست می‌آید، $(\mathbf{X}^{\mathrm{R}})^k = \mathbf{X}\mathbf{Q}$
۵	همگرایی بررسی می‌شود.

۴- روش زیرفضای شبه متقارن تسریع یافته

برای بهبود سرعت روش پایه، ارجمندی و لطفی [۱۰] از یک زیرفضا با اندازه ثابت و کوچک $(q << p)$ و تکنیک انتقال استفاده کردند، که p تعداد بردارهای ویژه خواسته شده و q اندازه زیرفضا است. روند کلی این روش به طور خلاصه در ادامه بیان می‌گردد.

در این روش، اندازه زیرفضا، یا همان تعداد بردارهایی که تکرار بر روی آنها انجام می‌گیرد، q مطابق رابطه پیشنهادی ویلسون و ایتو [۱۲] انتخاب شده است:

$$q = Max(\sqrt{b}, 4) \quad (۹)$$

که b نصف عرض باند ماتریس سختی می‌باشد. همچنین، مقدار انتقال μ به روش پیشنهادی بته [۷] تعیین می‌شود:

$$\mu = \frac{\lambda_{m-1} + \lambda_m}{2} \quad (۱۰)$$

که λ_m آخرین مقدار ویژه همگرا شده است. با اعمال انتقال به (۵)، رابطه زیر به دست می‌آید [۶]:

$$\bar{\mathbf{K}}_\mu \mathbf{X}_i^{\mathrm{R}} = \lambda_i \bar{\mathbf{M}}_\mu \mathbf{X}_i^{\mathrm{R}} \quad (۱۱)$$

که در رابطه فوق:

$$\overline{\mathbf{K}}_{\mu}=\begin{bmatrix}\mathbf{K}-\mu\mathbf{M} & -\mathbf{B}^{\mathrm{T}}\\ -\mathbf{B} & \frac{1}{\mu}\left(\mathbf{H}-\mu\mathbf{G}\right)\end{bmatrix},\ \overline{\mathbf{M}}_{\mu}=\begin{bmatrix}\mathbf{M} & 0\\ \frac{1}{\mu}\mathbf{B} & \frac{1}{\mu}\mathbf{G}\end{bmatrix} \qquad (۱۲)$$

مشاهده می‌شود که $\overline{\mathbf{K}}_{\mu}$ یک ماتریس متقارن است. به همین دلیل تجزیه $\mathbf{LDL}^{T}$ به راحتی قابل اعمال است. انتقال جدید زمانی نیاز خواهد بود که حداقل $I_{\max}$ تکرار انجام شده و حداقل یک مقدار ویژه بعد از آخرین انتقال همگرا شده باشد. $I_{\max}$ ماکزیمم تعداد تکرار به ازای هر انتقال است.

در این روش، برای اطمینان از اینکه هیچ زوج ویژه‌ای گم نشود، پس از هر انتقال دنباله استرم[10] بررسی می‌شود. علاوه بر این، بردارهای تکرار زیرفضا، باید در هر تکرار نسبت به بردارهای ویژه‌ای که قبلا همگرا شده‌اند، متعامد شوند تا بردارهای تکرار به برداهای قبلی همگرا نشوند. جزئیات الگوریتم روش تسریع یافته در جدول ۲ لیست شده است.

جدول۲: الگوریتم زیرفضای شبه متقارن تسریع یافته

الف.	**مقدار دهی اولیه**
۱	تعیین اندازه زیرفضا $q << p$
۲	انتخاب بردارهای اولیه $\left(\mathbf{X}^{\mathrm{R}}\right)^{0}\in\mathbf{R}^{\mathrm{Neq}\times\mathrm{q}}$
۳	انتخاب انتقال اولیه $\mu=-1$ ، $\overline{\mathbf{K}}_{\mu}=\begin{bmatrix}\mathbf{K}-\mu\mathbf{M} & -\mathbf{B}^{\mathrm{T}}\\ -\mathbf{B} & \frac{1}{\mu}\left(\mathbf{H}-\mu\mathbf{G}\right)\end{bmatrix}$ ، $\overline{\mathbf{K}}_{\mu}=\mathbf{LDL}^{\mathrm{T}}$
۴	تعیین ماکزیمم تکرار $I_{\max}$ به ازای هر انتقال یا تجزیه $\mathbf{LDL}^{T}$
ب.	**انتقال و بررسی دنباله استرم**
۱	محاسبه مقدار انتقال μ که نباید خیلی نزدیک به یک مقدار ویژه باشد، $\mu=\frac{\lambda_{m-1}+\lambda_{m}}{2}$
۲	تجزیه ماتریس $\overline{\mathbf{K}}_{\mu}=\mathbf{LDL}^{T}$
۳	بررسی دنباله استرم
ج.	**مراحل زیر انجام و سپس به مرحله ب منتقل می‌شود**
۱	بردارهای آزمایشی محاسبه می‌شود، $\mathbf{LDL}^{T}\mathbf{X}=\overline{\mathbf{M}}_{\mu}\left(\mathbf{X}^{R}\right)^{k-1}$
۲	تصاویر ماتریس‌های $\hat{\mathbf{K}}$ و $\hat{\mathbf{M}}$ محاسبه می‌شود، $\mathbf{K}^{*}=\mathbf{X}^{T}\hat{\mathbf{K}}\mathbf{X},\ \mathbf{M}^{*}=\mathbf{X}^{T}\hat{\mathbf{M}}\mathbf{X}$
۳	مساله مقدار ویژه تصویر شده حل می‌شود، $\mathbf{K}^{*}\mathbf{Q}=\mathbf{M}^{*}\mathbf{Q}\overline{\boldsymbol{\Lambda}}$ ، $\mathbf{Q}^{\mathrm{T}}\mathbf{M}^{*}\mathbf{Q}=\mathbf{I}$
۴	تقریب بهتی برای بردارهای ویژه محاسبه می‌شود، $\left(\mathbf{X}^{R}\right)^{k}=\mathbf{XQ}$
۵	همگرایی بررسی شده، بردارهای همگرا شده از زیرفضا خارج و بردارهای تصادفی در $\left(\mathbf{X}^{R}\right)^{k}$ جایگزین می‌شود
۶	اگر تعداد بردارهای همگرا شده به تعداد خواسته شده p رسید روند متوقف می‌شود.

[10] Strum Sequence Check

۵- معیار همگرایی

در روش زیرفضا، اختلاف نسبی مقادیر ویژه از دو تکرار متوالی معمولا به عنوان معیار همگرایی انتخاب می‌شود:

$$\left|\frac{\lambda_i^{(k)}-\lambda_i^{(k-1)}}{\lambda_i^{(k)}}\right|<\varepsilon_y , i=1,2,...,q \qquad (۱۳)$$

که $\lambda_i^{(k)}$ مقدار ویژه i ام در تکرار k ام می‌باشد. با اینکه این معیار همگرایی مقادیر ویژه را کنترل می‌کند، نمی‌تواند همگرایی بردارهای ویژه را در همه موارد تضمین کند. روش‌های پایه و تسریع یافته از معیار فوق برای کنترل همگرایی استفاده می‌کنند. در این مقاله یک معیار بهتر، که یک دامنه خطای قابل محاسبه در اختیار می‌گذارد، استفاده شده است. این معیار همچنین در تعیین مقدار انتقال مفید خواهد بود که در بخش بعدی بیشتر توضیح داده خواهد شد.

معیار مذکور در فوق اولین بار توسط متیس[11] [۸] برای تعیین همگرایی در مسایل مقدار ویژه متقارن، زمانیکه مقدار انتقال صفر $(\mu=0)$ باشد، معرفی شده است. چن و همکاران [۹] این معیار همگرایی را برای حالتی که مقدار انتقال صفر نباشد $(\mu\neq 0)$ گسترش دادند. در این مقاله این معیار برای مسائل نامتقارن مورد استفاده قرار گرفته است. برای مسائل متقارن زمانیکه $\mu=0$ است معیار همگرایی به شکل زیر نوشته می‌شود:

$$\underset{j}{Min}\left|\frac{\lambda_j-\bar{\lambda}_i^{(k)}}{\lambda_j}\right|\le\left\{1-\frac{\left(\bar{\lambda}_i^{(k)}\right)^2}{\left(\bar{q}_i^{(k)}\right)^T\bar{q}_i^{(k)}}\right\}^{1/2}<tol , i=1,2,...,q \qquad (۱۴)$$

که λ_j مقدار ویژه j ام و $\bar{\lambda}_i^{(k)}$ و $\bar{q}_i^{(k)}$ به ترتیب مقدار و بردار ویژه تقریبی در تکرار k ام هستند. تلرانس همگرایی، tol، باید برای همه مقادیر ویژه $i=1,...,q$ ارضا شود. مقدار تلرانس به شکل $tol=10^{-2t}$ انتخاب می‌شود، که به این معنی است که مقادیر ویژه تا $2t$ رقم و بردارهای ویژه تا t رقم دقیق خواهند بود [۱۳].

زمانیکه $\mu\neq 0$ باشد رابطه (14) به شکل زیر اصلاح می‌گردد:

$$\min_{j}\left|\frac{\lambda_j-\bar{\lambda}_i^{(k)}}{\lambda_j}\right|\le\left\{1-\frac{\left(\bar{\lambda}_i^{(k)}\right)^2}{\left(\bar{q}_i^{(k)}\right)^T\bar{q}_i^{(k)}+\mu\left(2\bar{\lambda}_i^{(k)}-\mu\right)}\right\}^{1/2}<tol , i=1,2,...,q \qquad (۱۵)$$

همانطور که ذکر شد، رابطه (۱۵) برای مسائل مقدار ویژه متقارن قابل استفاده است. الگوریتم تسریع یافته، مطابق جدول ۲، در همه گام‌هایش بجز گام ج.۱ طوری عمل می‌کند که گویی مسئله مقدار ویژه (۶) را حل می‌کند. (با ماتریس‌های $\hat{\mathbf{K}}$ و $\hat{\mathbf{M}}$ کار می‌کند). گام ج.۱ را نیز می‌توان به شکل زیر نوشت:

$$\bar{\mathbf{K}}_{\mu}\mathbf{X}=\bar{\mathbf{M}}_{\mu}\left(\mathbf{X}^R\right)^{k-1} \qquad (۱۶)$$

که معادل رابطه زیر است:

$$\left(\bar{\mathbf{K}}-\mu\bar{\mathbf{M}}\right)\mathbf{X}=\bar{\mathbf{M}}\left(\mathbf{X}^R\right)^{k-1} \qquad (۱۷)$$

با ضرب $\hat{\mathbf{K}}\bar{\mathbf{K}}^{-1}$ به طرفین رابطه فوق و استفاده از (۷)، رابطه زیر به دست می‌آید:

$$\left(\hat{\mathbf{K}}-\mu\hat{\mathbf{M}}\right)\mathbf{X}=\hat{\mathbf{M}}\left(\mathbf{X}^R\right)^{k-1} \qquad (۱۸)$$

[11] Matthies

که نشان می‌دهد این گام از الگوریتم نیز طوری عمل می‌کند که گویی با ماتریس‌های متقارن کار می‌کند. در نتیجه، معیار همگرایی (۱۵) می‌تواند برای الگوریتم تسریع یافته استفاده شود و یک دامنه خطای قابل محاسبه به دست دهد.

۶- تکنیک انتقال تهاجمی [۱۲]

انتخاب یک روش انتقال بهینه می‌تواند سرعت همگرایی روش تسریع یافته را بطور موثری افزایش دهد. در روش زیرفضا همراه با مقادیر ویژه همگرا شده، تخمینی از چند مقدار ویژه بعدی نیز به دست می‌آید. به این ترتیب می‌توان مقدار انتقال را به مقادیر ویژه همگرا نشده نزدیک‌تر انتخاب کرد، که باعث افزایش سرعت همگرایی مقادیر ویژه نزدیک به مقدار انتقال خواهد شد. این روش با تکنیک انتقال استفاده شده در روش تسریع یافته، که از (۱۰) به عنوان مقدار انتقال استفاده می‌کند، متفاوت است. برای کارآیی بهتر روش انتقال تهاجمی، مقادیر ویژه قبل از مقدار انتقال باید سریع‌تر از مقادیر ویژه بعد از مقدار انتقال همگرا شوند [۱۴]. مشکلات پیش‌روی این تکنیک انتقال و راه‌حل‌های آن در ادامه بررسی می‌گردد.

اولین مساله در مورد تکنیک انتقال تهاجمی این است که اگر مقدار انتقال به یکی از مقادیر ویژه خیلی نزدیک باشد، روند حل مسئله مقدار ویژه ناپایدار خواهد شد. بنابراین، لازم است مقدار انتقال همیشه با یک فاصله مشخص از مقادیر ویژه تقریبی انتخاب شود. از آنجا که مقدار انتقال در بین مقادیر ویژه همگرا نشده انتخاب میشود، معیار همگرایی (۱۵) برخلاف (۱۳) کمک می‌کند که مقدار انتقال به اندازه کافی دور از مقادیر ویژه تقریبی انتخاب شود. لازم به ذکر است معیار همگرایی (۱۵) برای هر مقدار ویژه، حتی مقادیر ویژه تقریبی، یک دامنه خطا محاسبه می‌کند که در نتیجه می‌توان مقدار انتقال را در خارج از این دامنه‌ها انتخاب کرد.

دومین مساله این است که، اگر مقدار انتقال بیشتر از یک مقدار معقولی انتخاب شود، یا به عبارت دیگر عمق انتقال تهاجمی از یک مقدار مشخصی بزرگتر باشد، بعضی از زوج‌های ویژه ممکن است گم شوند (محاسبه نشوند). به همین دلیل، پس از $I_{\max}$ تکرار به ازای هر انتقال، یک بررسی دنباله استرم خلفی لازم است. اگر تعداد تکرارها به $I_{\max}$ برسد ولی همه مقادیر ویژه قبل از مقدار انتقال همگرا نشوند، مقدار انتقال باید اصلاح گردد. ژائو و همکاران [۱۴] پیشنهاد دادند که تکرار تا $1.5I_{\max}$ ادامه یابد و اگر بازهم همه مقادیر ویژه قبل از مقدار انتقال همگرا نشد، مقدار انتقال به کمتر از پایین ترین مقدار ویژه تقریبی در زیرفضای حاضر منتقل شود.

طبیعت انتقال تهاجمی به این روش، سرعت همگرایی مقادیر ویژه در هر دو سمت مقدار انتقال را افزیش می‌دهد. در نتیجه در هر انتقال، تعداد مقادیر ویژه بیشتری همگرا خواهند شد. با همه اینها، انتقال تهاجمی سرعت همگرایی مقادیر ویژه واقع در انتهای سمت چپ بازه مورد بررسی را کاهش می‌دهد و یا حتی از همگرایی آنها جلوگیری می‌کند. به همین دلیل یک انتقال معقول باید همگرایی مقادیر ویژه واقع در سمت چپ بازه را تضمین کند [۱۴].

در تکنیک‌های پیشین، مانند آنچه که در روش تسریع یافته استفاده شده است، مقدار انتقال کمتر از آخرین مقدار ویژه همگرا شده انتخاب می‌شود و فرض بر این است که مقادیر ویژه از چپ به راست (از کمتر به بیشتر) همگرا می‌شوند. ولی در تکنیک انتقال تهاجمی، مقادیر ویژه نزدیک به مقدار انتقال سریعتر از مقادیر ویژه دورتر همگرا می‌شوند و انتظار داریم که در هر انتقال حدود q مقدار ویژه همگرا شود. در نتیجه، برای اینکه مقادیر ویژه سمت چپ مقدار انتقال سریعتر از مقادیر ویژه سمت راست همگرا شوند، لازم است مقدار انتقال در نیمه چپ بازه $\left[\lambda_{m+1}, \lambda_{m+q}\right]$ انتخاب شود:

$$\mu \approx 0.5\left(\bar{\lambda}^{+}_{m+u-1} + \bar{\lambda}^{-}_{m+u}\right) \qquad (۱۹)$$

$$u = \lfloor \alpha q \rfloor, 0 < \alpha \le 0.5 \qquad (۲۰)$$

[۱۲] Aggressive shifting technique

که u عمق انتقال تهاجمی و α عمق نسبی می‌باشد، که مقدار انتقال را به وسط بازه $\left[\bar{\lambda}^{+}_{m+u-1}, \bar{\lambda}^{-}_{m+u}\right]$ منتقل می‌کند. همچنین $\bar{\lambda}^{+}_{m+u-1}$ و $\bar{\lambda}^{-}_{m+u}$ به ترتیب حد بالا و پایین محدوده مقادیر ویژه تقریبی $\bar{\lambda}_{m+u-1}$ و $\bar{\lambda}_{m+u}$ می‌باشند.

اگر فاصله بین $\bar{\lambda}^{+}_{m+u-1}$ و $\bar{\lambda}^{-}_{m+u}$ از یک مقدار کوچک‌تر باشد، مثلا $0.001\lambda_1$، u را یک واحد کاهش می‌دهیم $(u-1 \rightarrow u)$. ژائو و همکاران بر اساس مطالعات خود $\alpha = 0.4$ را پیشنهاد داده‌اند که در این مطالعه نیز از این مقدار استفاده شد. الگوریتم روش تسریع یافته با انتقال تهاجمی در جدول ۳ با جزئیات بیشتری نشان داده شده است.

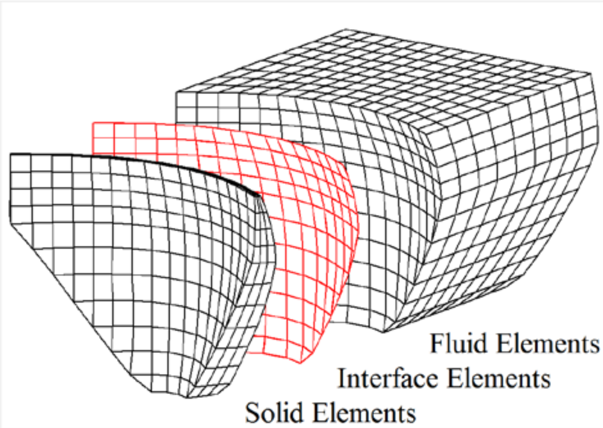
جدول۳: جزئیات الگوریتم زیرفضای شبه متقارن با انتقال تهاجمی

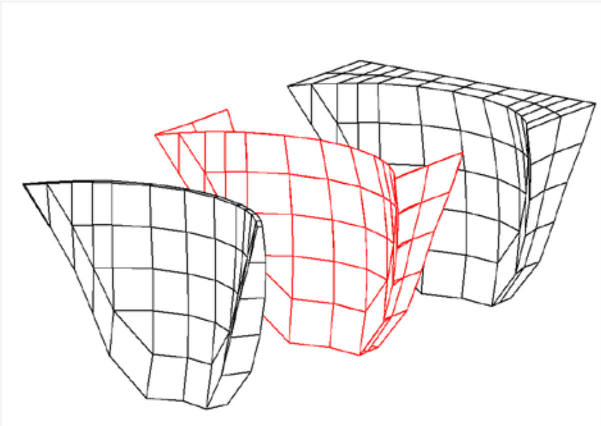
الف.	**مقداردهی اولیه**
۱	تعیین اندازه زیرفضا q
۲	انتخاب بردارهای اولیه $\left(\mathbf{X}^{R}\right)^{0} \in \mathbf{R}^{Neq\times q}$
۳	انتخاب انتقال اولیه $\mu = -1$، $\bar{\mathbf{K}}_{\mu} = \begin{bmatrix} \mathbf{K}-\mu\mathbf{M} & -\mathbf{B}^{T} \\ -\mathbf{B} & \frac{1}{\mu}(\mathbf{H}-\mu\mathbf{G}) \end{bmatrix}$، $\bar{\mathbf{K}}_{\mu} = \mathbf{LDL}^{T}$
۴	تعیین ماکزیمم تکرار $I_{\max}$ به ازای هر انتقال یا تجزیه $\mathbf{LDL}^{T}$
ب.	**انتقال و بررسی دنباله استرم**
۱	محاسبه مقدار μ که نباید نزدیک به یک مقدار ویژه باشد، $\mu = 0.5\left(\bar{\lambda}^{+}_{m+u-1} + \bar{\lambda}^{-}_{m+u}\right)$, $u = \lfloor \alpha q \rfloor$, $\alpha = 0.4$
۲	تجزیه ماتریس $\bar{\mathbf{K}}_{\mu} = \mathbf{LDL}^{T}$
۳	بررسی دنباله استرم
ج.	**مراحل زیر به تعداد $I_{\max}$ تکرار انجام شده و سپس کنترل به مرحله ب. منتقل می‌شود**
۱	بردارهای آزمایشی محاسبه می‌شود، $\mathbf{LDL}^{T}\mathbf{X} = \bar{\mathbf{M}}_{\mu}\left(\mathbf{X}^{R}\right)^{k-1}$
۲	تصاویر ماتریس‌های $\hat{\mathbf{K}}$ و $\hat{\mathbf{M}}$ محاسبه می‌شود، $\mathbf{K}^{*} = \mathbf{X}^{T}\hat{\mathbf{K}}\mathbf{X}, \mathbf{M}^{*} = \mathbf{X}^{T}\hat{\mathbf{M}}\mathbf{X}$
۳	مساله مقدار ویژه تصویر شده حل می‌شود، $\mathbf{K}^{*}\mathbf{Q} = \mathbf{M}^{*}\mathbf{Q}\bar{\mathbf{\Lambda}}$ ، $\mathbf{Q}^{T}\mathbf{M}^{*}\mathbf{Q} = \mathbf{I}$
۴	تقریب بهتی برای بردارهای ویژه محاسبه می‌شود، $\left(\mathbf{X}^{R}\right)^{k} = \mathbf{XQ}$
۵	همگرایی بررسی شده، بردارهای همگرا شده از زیرفضا خارج و بردارهای تصادفی در $\left(\mathbf{X}^{R}\right)^{k}$ جایگزین می‌شود
۶	اگر تعداد بردارهای همگرا شده به تعداد خواسته شده p رسید روند متوقف می‌شود.

۷- مدل‌های تحلیل شده

برای محاسبه شکل مدهای سیستم سازه- سیال با استفاده از روش‌های پایه، تسریع یافته و با انتقال تهاجمی، یک برنامه کامپیوتری به زبان فرترن نوشته شد. مدل‌های مختلفی از سیستم‌های سد و آب مخزن با برنامه نوشته شده تحلیل و نتایج مورد بحث و بررسی واقع شد.

در این مقاله دو سیستم سد و آب مخزن مورد بررسی قرار گرفت. سد قوسی ماروپوینت[13] واقع در ایالات متحده (شکل ۱) و سد قوسی کارون ۳ واقع در ایران، خوزستان (شکل ۲). در این مدل‌ها بدنه سد و ناحیه سیال به ترتیب با المان‌های ۲۰ گرهی ایزوپارامتریک جامد و ۲۰ گرهی ایزوپارامتریک سیال گسسته‌سازی شده‌اند.





شکل ۱: مدل گسسته سازی شده سد و مخزن ماروپوینت (MP-DR)　　شکل ۲: مدل گسسته سازی شده سد و مخزن کارون ۳ (KR3-DR)

- **پارامترهای پایه**

در مدل‌های فوق، بدنه سد همگن[14]، همسانگرد[15] و با خاصیت ویسکوالاستیک خطی فرض شد. پارامترهای لازم برای بدنه سد در جدول ۴ نشان داده شده است. همچنین ناحیه سیال تراکم‌پذیر و غیر لزج در نظر گرفته شد. بعلاوه، سرعت موج فشاری و وزن واحد حجم سیال به ترتیب ۱۴۴۰ متر بر ثانیه و ۹/۸۱ کیلونیوتن بر مترمکعب فرض شد.

جدول ٤: پارامترهای پایه بدنه سد

مدل	ضریب کشسانی (GPa)	ضریب پواسون	وزن واحد (kN/m^3)
ماروپوینت (MP-DR)	۲۷/۵	۰/۲	۲۴/۸
کارون ۳ (KR3-DR)	۲۳/۵	۰/۲	۲۴/۵

۸- نتایج عددی و بحث

مدل‌های تعریف شده در بالا با استفاده از برنامه نوشته شده تحلیل شد. روش خط‌آسمان[16] برای ذخیره‌سازی ماتریس‌های سختی و جرم استفاده شده است. استفاده از روش خط‌آسمان تعداد عملیات ریاضی و حافظه مورد نیاز را به مقدار زیادی کاهش می‌دهد. ابعاد مدل‌های اجزای محدود در جدول ۵ لیست شده‌اند. این پارامترها شامل تعداد درجات آزادی تغییر مکان (NDEQ)، تعداد درجات آزادی فشار

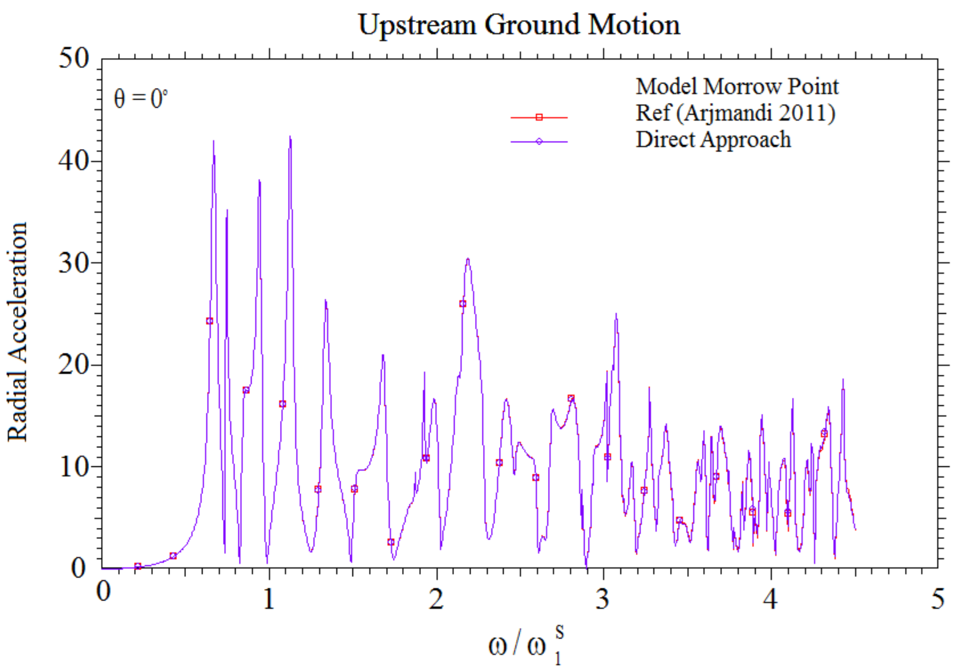
13 Morrow Point Arch Dam
14 Homogenous
15 Isotropic
16 Sky Line

(NPEQ)، تعداد کل معادلات (NEQ) و تعداد درایه‌های غیر صفر در نصف بالایی ماتریس سختی و جرم (NZER) هستند. تحلیل با استفاده از روش‌های پایه، تسریع‌یافته و تهاجمی برای هر دو مدل انجام گرفت.

جدول۵: تعداد درجات آزادی مدل اجزای محدود

مدل	NDEQ	NPEQ	NEQ	NZER
مارووپوینت	۷۶۵	۲۵۷۵	۳۳۴۰	۱۰۴۸۷۸۵
کارون ۳	۵۹۳۷	۵۴۰۲	۱۱۳۳۹	۸۱۱۷۳۵۸

برای معتبرسازی برنامه نوشته شده، پاسخ فرکانسی[17] سد مارووپوینت با مرجع [۶] مقایسه شد، که نتایج در شکل ۲ نشان داده شده است. در شکل ۲ شتاب تاج سد در جهت شعاعی بر حسب فرکانس تحریک ترسیم شده است. مقادیر محاسبه شده در این تحقیق با رنگ بنفش و نشانگرهای کوچک لوزی و مقادیر اخذ شده از مرجع [۶] به رنگ قرمز و نشانگرهای کوچک مربع رسم شده است. این نمودار تطابق بسیار خوبی بین مقادیر محاسبه شده و مقادیر گزارش شده نشان می‌دهد.



شکل۲: پاسخ فرکانسی سد مارووپوینت، مقایسه نتایج برنامه نوشته شده با مرجع [٦]

برای صحت سنجی فرکانس‌های محاسبه شده، در جدول ۶ برای هر دو مدل تحلیل شده فرکانس‌های محاسبه شده در این تحقیق و مقادیر گزارش شده در مراجع [۱۰] و [۶] مقایسه شده است. پنج فرکانس اول سد مارووپوینت و سد کارون ۳ ، به ترتیب با مقادیر گزارش شده در مراجع [۱۰] و [۶] مقایسه شده است. این مقایسه، نشان دهنده انطباق خوب و صحت مقادیر محاسبه شده می‌باشد.

جدول ٦: مقایسه پنج فرکانس طبیعی اول محاسبه شده و گزارش شده

مدل	مارووپوینت	کارون ۳

[17] Frequency Response Function

شماره فرکانس طبیعی	فرکانس محاسبه شده (Hz)	فرکانس گزارش شده [۱۰] (Hz)	فرکانس محاسبه شده (Hz)	فرکانس گزارش شده [۶] (Hz)
۱	۲/۷۹۲۰۱	۲/۷۹۲	۱/۶۸۰۰۸	۱/۶۸۰
۲	۲/۹۲۸۷۴	۲/۹۲۹	۱/۷۶۴۳۹	۱/۷۶۴
۳	۳/۱۱۵۵۳	۳/۱۱۶	۲/۲۵۶۴۷	۲/۲۵۶
۴	۳/۵۰۷۹۴	۳/۵۰۸	۲/۷۷۹۵۱	۲/۷۷۹
۵	۳/۹۶۳۳۰	۳/۹۶۳	۳/۳۱۳۶۱	۳/۳۱۴

پارامترهای مهم روش زیرفضا با انتقال تهاجمی در ادامه مورد بررسی قرار می‌گیرد.

- **اندازه زیرفضا و حداقل تعداد تکرار به ازای هر انتقال**

هر کدام از روش‌های فوق پارامترهایی دارد که برای افزایش کارآیی باید تنظیم شوند و مقادیر بهینه هرکدام تعیین شود. اندازه زیرفضا q و حداقل تعداد تکرار به ازای هر انتقال $I_{\max}$ بر اساس روندهای معرفی شده در روش تسریع‌یافته انتخاب شد. این مقادیر برای محاسبه ۱۰۰ شکل مد اول، برای مدل‌های مختلف در جدول ۷ لیست شده است. در این جدول q_{opt} اندازه زیرفضایی است که به ازای آن کمترین زمان پردازنده به دست آمده است. این مقدار نزدیک عددی است که از رابطه (۹) به دست می‌آید. همانطور که در این جدول مشاهده می‌شود، با افزایش $I_{\max}$ تا یک مقداری زمان پردازنده کاهش یافته است. این موضوع به این دلیل است که با افزایش $I_{\max}$ تعداد تکرار به ازای هر انتقال افزایش یافته و در نتیجه تعداد انتقال کاهش مییابد. از آنجا که هر انتقال بسیار زمان‌برتر از یک تکرار است، در مجموع زمان پردازنده کاهش می‌یابد. اما افزایش بیش از اندازه $I_{\max}$ نیز باعث تکرار بیهوده در یک انتقال می‌شود، که باز باعث افزایش زمان پردازنده خواهد شد. به همین دلیل در جدول ۷ برای هر دو مدل یک $I_{\max}$ بهینه وجود دارد. در جداول بعدی زمان پردازنده به ازای q و $I_{\max}$ بهینه برای هر مدل و هر روش مقایسه خواهد شد.

جدول ۷: بعضی پارامترهای مهم روش زیرفضا با انتقال تهاجمی، برای محاسبه ۱۰۰ شکل مد اول

مدل	q_{opt}	$I_{\max}$	تعداد انتقال	تعداد تکرار	زمان پردازنده (s)
ماروپوینت	۱۷	۲	۴۰	۸۸	۵۷/۳۳
		۳	۲۸	۹۱	۵۵/۷۷
		۴	۲۲	۹۴	۵۲/۷۴
		۵	۱۸	۹۷	۵۴/۸۱
		۶	۱۶	۱۰۰	۵۳/۱۹
		۷	۱۴	۱۰۱	۵۴/۸۸
		۱۰	۱۱	۱۱۱	۵۶/۳۴
		۲۰	۸	۱۶۱	۷۸/۶۳
کارون ۳	۲۷	۵	۱۲	۶۱	۲۲۱/۵۰
		۱۰	۷	۷۷	۲۳۲/۷۵
		۱۱	۶	۷۲	۲۱۲/۷۵
		۱۲	۶	۷۷	۲۲۶/۰۹
		۱۳	۵	۷۶	۲۱۸/۷۸
		۱۴	۵	۷۷	۲۲۱/۱۳
		۱۵	۶	۹۱	۲۶۰/۸۴
		۲۰	۵	۱۰۳	۲۸۲/۵۹

- **بررسی کارآیی انتقال تهاجمی**

پنج فرکانس طبیعی اول مدل‌ها و دامنه خطا برای هر فرکانس، که توسط روش زیرفضا با انتقال تهاجمی با تلرانس 1×10^{-6} محاسبه شده، در جدول ۸ نشان داده شده است. لازم به ذکر است که دامنه خطا، بزرگترین خطای ممکن فرکانس‌های محاسبه شده را نشان می‌دهد. روش‌های پایه و تسریع‌شده هیچکدام قادر به محاسبه دامنه خطا برای فرکانس‌های محاسبه شده نیستند. واضح است که مقدار انتقال نباید به یک مقدار ویژه خیلی نزدیک باشد . از سوی دیگر در روش انتقال تهاجمی مقدار انتقال در بین مقادیر ویژه همگرا نشده، که هنوز مقدار دقیق آنها مشخص نیست، انتخاب می‌شود. مشخص نبودن دقیق مقادیر ویژه همگرا نشده، این احتمال را به وجود می‌آورد که مقدار انتقال به آنها خیلی نزدیک انتخاب شود. دامنه خطا، که حتی برای مقادیر ویژه همگرا نشده نیز محاسبه می‌شود، این امکان را در اختیار می‌گذارد که مقدار انتقال خارج از محدود خطای مقایر ویژه همگرا نشده انتخاب شود. در نتیجه این اطمینان را می‌دهد که مقدار انتقال هرگز خیلی نزدیک به مقادیر ویژه نیست.

جدول ۸: پنج فرکانس طبیعی اول مدل‌های تحلیل شده و دامنه خطا

مدل	ماروپوینت		کارون ۳	
شماره فرکانس طبیعی	فرکانس (Hz)	دامنه خطا $(\times10^{-7}\ Hz)$	فرکانس (Hz)	دامنه خطا $(\times10^{-7}\ Hz)$
۱	۲/۷۹۲۰۱	۵/۹۷	۱/۶۸۰۰۸	۶/۴۰
۲	۲/۹۲۸۷۴	۸/۶۵	۱/۷۶۴۳۹	۲/۹۲
۳	۳/۱۱۵۵۳	۸/۸۷	۲/۲۵۶۴۷	۳/۴۳
۴	۳/۵۰۷۹۴	۱/۰۷	۲/۷۷۹۵۱	۹/۳۶
۵	۳/۹۶۳۳۰	۱/۴۴	۳/۳۱۳۶۱	۴/۲۱

همچنین در جدول ۹ بعضی پارامترهای دیگر این روش مانند تعداد تکرار و زمان پردازنده لیست شده است. زمانهای پردازنده ذکر شده در این جدول همگی با یک کامپیوتر لپ‌تاپ با پردازنده ۴ هسته‌ای به سرعت 2.4 GHz و حافظه رم 4 GB به دست آمده است، تا با یکدیگر قابل مقایسه باشند. با توجه به جدول ۹، زمان پردازنده برای محاسبه ۱۵۰ زوج ویژه سد ماروپوینت با روش‌های پایه، تسریع‌یافته و انتقال تهاجمی به ترتیب ۱۹۸/۲، ۱۰۴/۱ و ۷۴/۴ ثانیه می‌باشد. این مقادیر برای محاسبه ۳۰۰ زوج ویژه سد کارون ۳ به ترتیب ۱۸۶۵/۳، ۹۲۰/۴ و ۷۰۹/۳ ثانیه است. این زمان‌ها به خوبی نشان دهنده کارآیی روش انتقال تهاجمی می‌باشد. همچنین در این جدول تعداد تکرار و تعداد انتقال لازم برای هر روش ذکر شده است. در روش تهاجمی نیز مقدار $\alpha = 0.4$ طبق پیشنهاد تحقیقات پیشین انتخاب شده است.

جدول ۹: تعداد تکرار و زمان پردازنده برای روش‌های پایه تسریع یافته و تهاجمی

مدل		ماروپوینت	کارون ۳
تعداد زوج ویژه‌های خواسته شده	p	۱۵۰	۳۰۰
روش پایه BPS-SIM	اندازه زیرفضا q	۳۰۰	۶۰۰
	تعداد تکرار	۳۸	۳۰
	زمان پردازنده (s)	۱۹۸/۲	۱۸۶۵/۳
روش تسریع‌یافته APS-SIM	q_{opt}	۱۷	۲۷
	I_{max}	۷	۱۳
	تعداد تکرار	۱۶۶	۲۲۴
	تعداد انتقال	۲۳	۱۷
	زمان پردازنده (s)	۱۰۴/۱	۹۲۰/۴

روش زیرفضا با انتقال تهاجمی AAPS-SIM	q_{opt}	۱۷	۲۷
	I_{max}	۷	۱۳
	α	۰/۴	۰/۴
	تعداد تکرار	۱۴۱	۲۴۰
	تعداد انتقال	۱۹	۱۸
	زمان پردازنده (s)	۷۴/۴	۷۰۹/۳

از تقسیم زمان‌های پردازنده برای روش‌های مختلف که در جدول ۹ ارائه شد، نسبت این زمانها به‌دست می‌آید، که در جدول ۱۰ مقایسه زمان پردازنده برای سه روش مطرح شده در فوق نشان داده شده است. نسبت زمان‌های پردازنده لیست شده در جدول ۱۰ نشان می‌دهد که روش زیرفضا با انتقال تهاجمی، حدود ۳۰ الی ۴۰ درصد سریع‌تر از روش تسریع‌یافته و بیش از دو برابر سریع‌تر از روش پایه است.

جدول ۱۰: مقایسه زمان پردازنده سه روش

مدل	نسبت زمان‌های پردازنده		
	$\frac{t_{BPS-SIM}}{t_{APS-SIM}}$	$\frac{t_{BPS-SIM}}{t_{AAPS-SIM}}$	$\frac{t_{APS-SIM}}{t_{AAPS-SIM}}$
مارو‌پوینت	۱/۹۰	۲/۶۶	۱/۴۰
کارون ۳	۲/۰۳	۲/۶۳	۱/۳۰

۹- نتیجه گیری

در این مقاله، روش زیرفضای شبه متقارن با انتقال تهاجمی معرفی گردید. این روش، روش پیشنهاد شده قبلی، یعنی زیرفضای شبه متقارن تسریع‌یافته، برای حل مسائل مقدار ویژه برآمده از سیستم‌های اندرکنش سازه-سیال را بهبود بخشید. همچنین یک معیار همگرایی که دامنه خطای قابل محاسبه برای مقادیر ویژه در اختیار می‌گذارد، برای این روش معرفی گردید. یک برنامه کامپیوتری به زبان فرترن برای بررسی کارآیی روش پیشنهادی نوشته شد و نتایج زیر بدست آمد:

- تکنیک انتقال تهاجمی کارآیی روش زیرفضای شبه متقارن تسریع‌یافته را حدود ۳۰ الی ۴۰ درصد افزایش داد. در حقیقت این روش با انتخاب مقدار انتقال در نزدیکی مقادیر ویژه‌ای که در حال همگرایی هستند، سرعت همگرایی را افزایش داده و زمان محاسبه را کاهش می‌دهد.
- معیار همگرایی معرفی شده برای این روش، یک دامنه خطا برای هر مقدار ویژه در اختیار می‌گذارد. این دامنه خطا از یک سو دقت مقادیر ویژه همگرا شده را تضمین می‌کند و از سوی دیگر دامنه تقریبی مقادیر ویژه همگرا نشده را به‌دست می‌دهد. اطلاع از دامنه تقریبی مقادیر همگرا نشده برای انتخاب مقدار انتقال در روش انتقال تهاجمی ضروری است. چنین دامنه خطایی برای فرکانس‌های طبیعی یک مساله سازه - سیال در هیچکدام از روش‌های پیشین معرفی نشده بود.

مراجع

[1] Lotfi, V. (2003). Seismic analysis of concrete gravity dams by decoupled modal approach in time domain. *Electronic Journal of Structural Engineering*, Vol. 3, 102-116.

[2] Khazaee, A. and Lotfi, V. (2015). A new technique for determining coupled modes of structure-acoustic systems. *Archive of Applied Mechanics*, Vol. 85 (7), 955-967.

[3] Stammberger, M. and Voss, H. (2009). On an unsymmetric eigenvalue problem governing free vibrations of fluid-solid structures. *Electronic Transactions on Numerical Analysis*, Vol. 36, 113-125.

[4] Zheng, C. J., Bi, C. X., Zhang, C., Gao, H. F. and Chen, H. B. (2018). Free vibration analysis of elastic structures submerged in an infinite or semi-infinite fluid domain by means of a coupled FE–BE solver. *Journal of Computational Physics*, Vol. 359, 183-198.

[5] Bathe, K. J. Solution methods for large generalized eigenvalue problems in structural engineering. *National Technical Information Service*, US Department of Commerce, 1971.

[6] Arjmandi, S. A. and Lotfi, V. (2011). Computing mode shapes of fluid-structure systems using subspace iteration methods. *Scientia Iranica*, Vol. 18 (6), 1159-1169.

[7] Bathe, K. J. and Ramaswamy, S. (1980). An accelerated subspace iteration method. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, Vol. 23 (3), 313-331.

[8] Matthies, H. (1985). Computable error bounds for the generalized symmetric eigenproblem. *International Journal for Numerical Methods in Biomedical Engineering*, Vol. 1 (1), 33-38.

[9] Chen, P., Gong, Y., Chen, Y., and Kulasegaram, S. (2011). An enhanced formulation of error bound in subspace iteration method. *International Journal for Numerical Methods in Biomedical Engineering*, Vol. 27 (1), 113-127.

[10] Arjmandi, S. A. and Lotfi, V. (2013). Comparison of Three Efficient Methods for Computing Mode Shapes of Fluid-Structure Interaction Systems. *Arabian Journal for Science & Engineering*, Vol. 38 (4), 787-803.

[11] Samii, A. and Lotfi, V. (2007). Comparison of coupled and decoupled modal approaches in seismic analysis of concrete gravity dams in time domain. *Finite elements in analysis and design*, Vol. 43 (13), 1003-1012.

[12] Wilson, E. L. and Itoh, T. (1983). An eigensolution strategy for large systems. *Computers & Structures*, Vol. 16 (1-4), 259-265.

[13] Bathe, K. J. and Dong, J. (2014). Component mode synthesis with subspace iterations for controlled accuracy of frequency and mode shape solutions. *Computers & Structures*, Vol. 139, 28-32.

[14] Zhao, Q. C., Chen, P., Peng, W. B., Gong, Y. C. and Yuan, M. W. (2007). Accelerated subspace iteration with aggressive shift. *Computers & Structures*, Vol. 85 (19), 562-1578.