

تحلیل پایداری ناخطی قاب‌های فولادی ساده نامنشوری با تکیه‌گاه‌های کشسان و پیوند نیمه‌سخت

محسن بمبائی چی^{۱*}، قاسم پاسبان^۲

۱- استادیار، دانشکده فنی و مهندسی، گروه مهندسی عمران، دانشگاه صنعتی قوچان، قوچان، ایران
۲- دانشجوی کارشناسی ارشد سازه، دانشکده فنی و مهندسی، گروه مهندسی عمران، دانشگاه صنعتی قوچان، قوچان، ایران

چکیده

در این مقاله به تحلیل پایداری خطی و ناخطی یک قاب فولادی ساده دو عضوی با پیوند نیمه‌سخت و تکیه‌گاه‌های کشسان دورانی و انتقالی پرداخته می‌شود. تیر سازه، منشوری می‌باشد. با وجود این، ستون قاب، دارای مقطع I-شکل نامنشوری با ضریب‌های شکل متفاوت است که زیر اثر بار برون محور قائم قرار دارد. سختی پیوند نیمه‌سخت تیر به ستون، سختی جانبی قاب و سختی دورانی تکیه‌گاه پای ستون، به ترتیب، با فنرهای خطی دورانی، انتقالی و دورانی الگوسازی می‌شوند. بر این پایه، نخست، با بهره‌جویی از نگره تیر اولر- برنولی، رابطه کارمایه نهفته کل سازه به دست می‌آید. در این راستا، کرنش‌ها کوچک پنداشته می‌شوند ولی تغییرمکان‌ها می‌توانند بزرگ باشند. سپس، با بهره‌گیری از اصل پایستاری کارمایه نهفته و وارد نمودن شرط‌های مرزی طبیعی و هندسی در تغییرمکان‌های محوری و جانبی، رابطه‌های تعادل خطی و ناخطی مسیر ایستایی پیش‌کمانشی و پس‌کمانشی قاب در دسترس قرار می‌گیرد. در ادامه، پس از صحت‌سنجی رابطه‌سازی پیشنهادی، به ارزیابی اثر عامل‌های ضریب شکل نامنشوری ستون، سختی تکیه‌گاه‌های کشسان، سختی پیوند نیمه‌سخت، برون محوری بار و نسبت لاغری عضوها، بر مسیر ایستایی و بار بحرانی قاب ساده پرداخته خواهد شد. یافته‌ها نشان می‌دهد هر یک از عامل‌های یاد شده، اثر قابل توجهی بر مسیر ایستایی و بار کمانشی سازه دارند. به سخن دیگر، با افزایش نسبت لاغری عضوها، ضریب شکل و سختی پیوندهای تکیه‌گاهی و عضوی، بار کمانشی ناخطی سازه افزایش می‌یابد. در این میان، سختی انتقالی تکیه‌گاه جانبی و نسبت لاغری عضوها، به ترتیب، بیشترین و کمترین اثر را در این افزایش دارند. با وجود این، افزایش برون محوری، کاهش بار بحرانی را در پی خواهد داشت. همچنین، ناخطی پنداشتن تحلیل پایداری، سبب کاهش بار کمانشی سازه نسبت به تحلیل خطی می‌گردد.

کلمات کلیدی: تحلیل ناخطی، پایداری، قاب ساده فولادی، ستون نامنشوری □-شکل، تکیه‌گاه کشسان، پیوند نیمه‌سخت، برون محوری بار.

*نویسنده مسئول: -----

پست الکترونیکی: -----

تاریخ دریافت مقاله: ۰۰۰۰/۰۰/۰۰، تاریخ پذیرش مقاله: ۰۰۰۰/۰۰/۰۰

پایداری سازه‌ها همواره به عنوان یک عامل اثرگذار در طرح سازه‌ها و به ویژه، سازه‌های فولادی بوده است. در عضوهای سازه‌ای لاغر، افزون بر آن که مقاومت و سختی سازه باید در حد مجاز باشد، می‌بایست، پدیده کمانش و در نتیجه، ناپایداری مورد بررسی قرار گیرد. نگره پایداری سازه‌ها و مفهومی وابسته به آن، پاسخگوی بسیاری از پرسش‌های قابل طرح در رابطه با عضوهای فشاری می‌باشند.

تا کنون، پژوهش‌های بسیاری درباره پدیده تحلیل ناخطی پایداری و پس‌کمانش قاب‌های فولادی ساده دو عضوی زیر اثر بار برون محور صورت پذیرفته است. یافته‌ها نشان می‌دهند که وجود نقص‌های کوچک، ظرفیت باربری سازه را به طور قابل توجهی در محدوده پس‌کمانش کاهش می‌دهند. افزون بر این، اثر عامل‌های گوناگونی مانند مقدار برون محوری بار، نیمه‌سخت بودن پیوند تیر به ستون، نامنشوری بودن ستون و کشسان بودن تکیه‌گاه پای ستون بر پایداری قاب‌های ساده مورد ارزیابی قرار گرفته است. از آن میان، کونادیس و همکاران، تحلیل پایداری ناخطی یک قاب منشوری دو عضوی با برون محوری بار را مورد ارزیابی قرار دادند [۱]. سمتسز و ولانوس، به تحلیل ناخطی پایداری قاب ساده منشوری دو عضوی با پیوند نیمه‌سخت^۱ تیر به ستون پرداختند [۲]. تحلیل پس‌کمانشی یک قاب ساده با ستون نامنشوری و ضریب شکل $n=2$ به وسیله کونادیس و ارموپولوس انجام پذیرفت [۳]. آورام و کونادیس، به اثر برون محوری بار و تکیه‌گاه کشسان بر تحلیل پایداری و پس‌کمانش یک قاب منشوری دو عضوی پرداختند [۴]. کمانش ناخطی پویای قاب‌های فولادی ساده دو عضوی بر پایه نگره کاتاستروف به وسیله کونادیس [۵]، و همچنین، کونادیس و رافتویانیس [۶]، انجام پذیرفت. رافتویانیس و کونادیس، راهکاری ساده برای تعیین بار کمانش قاب‌های منشوری دو عضوی زیر اثر بار برون محور در دسترس قرار دادند [۷]. تحلیل کمانشی ناخطی قاب‌های ساده منشوری دو عضوی با نقص نخستین دورانی پای ستون، به وسیله آورام و رافتویانیس انجام شد [۸]. در این میان، رضایی‌پژند و بمبائی‌چی، تحلیل کشسان مرتبه دوم و پایداری خطی قاب‌های فولادی منشوری با پیوندهای نیمه‌سخت را مورد ارزیابی قرار دادند [۹]. افزون بر این، رضایی‌پژند و همکاران، پایداری خطی قاب‌های فولادی نامنشوری با تکیه‌گاه‌های کشسان را در فضای عدم قطعیت بررسی کردند [۱۰]. راهکار ساده‌ای برای تحلیل پایداری خطی و ناخطی قاب‌های فولادی منشوری ساده با برون محوری بار، به وسیله رافتویانیس ارائه گردید [۱۱]. وی، از اثر کوتاه‌شدگی ناشی از خمش در رابطه‌سازی‌ها چشم‌پوشی کرد. به دنبال آن، آورام و فسولاکیس، به تحلیل پس‌کمانشی ناخطی قاب‌های فولادی ساده دو عضوی با ستون نامنشوری و ضریب شکل $n=3$ پرداختند [۱۲]. آن‌ها اثر تکیه‌گاه‌های کشسان را نیز وارد تحلیل پایداری کردند. به تازگی، فسولاکیس و همکاران، با چشم‌پوشی از نیروی محوری تیر، کمانش ناخطی پویای^۲ قاب ساده نامنشوری با ضریب شکل $n=3$ را بررسی نموده‌اند [۱۳].

آن گونه که آمد، بیشتر پژوهش‌های انجام گرفته به ارزیابی رفتار قاب‌های دو عضوی منشوری با تکیه‌گاه‌های ساده پرداخته‌اند. افزون بر این، در بیشتر کارها، پیوند تیر به ستون، سخت پنداشته شده است. بر این پایه، پژوهش کنونی، به تحلیل پایداری ناخطی^۳ قاب ساده نامنشوری دو عضوی با پیوند نیمه‌سخت و تکیه‌گاه‌های کشسان می‌پردازد. باید افزود، وارد نمودن اثر کوتاه‌شدگی ناشی از خمش و نیروی محوری تیر در رابطه‌سازی‌ها، سبب ناخطی شدن تحلیل می‌شود. تیر سازه، دارای مقطع منشوری و ستون قاب، دارای مقطع I-شکل نامنشوری با ضریب شکل‌های متفاوت می‌باشد که زیر اثر بار برون محور قائم قرار دارد. سختی پیوند نیمه‌سخت تیر به ستون، سختی جانبی قاب و سختی دورانی تکیه‌گاه پای ستون، به ترتیب، با فنرهای خطی دورانی، انتقالی و دورانی الگوسازی می‌شوند. نخست، با بهره‌جویی از نگره تیر اولر- برنولی، رابطه کارمایه نهفته کل سازه به دست می‌آید. سپس، با وارد نمودن شرط‌های مرزی طبیعی و هندسی، رابطه‌های تعادل ناخطی مسیر ایستایی پیش‌کمانشی و پس‌کمانشی قاب در دسترس قرار می‌گیرد. در ادامه، اثرهای ضریب شکل ستون نامنشوری، پیوند نیمه‌سخت، تکیه‌گاه‌های کشسان و برون محوری بار، بر مسیر ایستایی و بار بحرانی قاب نامنشوری با پیوند نیمه‌سخت و تکیه‌گاه‌های کشسان بررسی خواهد شد.

1 semi-rigid connection

2 dynamic

3 nonlinear

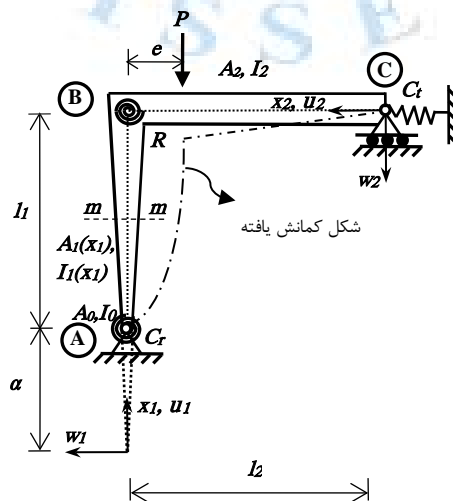
۲- قاب ساده نامنشوری با پیوند نیمه سخت و تکیه‌گاه‌های کشسان

یک قاب فولادی ساده نامنشوری با پیوند نیمه سخت و تکیه‌گاه‌های کشسان، همانند شکل ۱ در نظر گرفته می‌شود. در تکیه‌گاه A، یک فنر دورانی با سختی دورانی C_r ، در تکیه‌گاه C، یک فنر انتقالی با سختی انتقالی C_t و در پیوند تیر به ستون B، یک فنر دورانی با سختی دورانی R قرار دارد. بار P با برون محوری e نسبت به خط مرکزی ستون در نقطه B وارد می‌شود. بر پایه شکل ۱، l_1 طول ستون پنداشته می‌شوند. سطح مقطع تیر A_2 و لنگر لختی آن با I_2 نشان داده می‌شوند که هر دو ثابت هستند. w_1 و w_2 به ترتیب، تغییر مکان جانبی ستون و تیر می‌باشند. همچنین، تغییر مکان محوری ستون و تیر، به ترتیب، با u_1 و u_2 نشان داده می‌شوند. سطح مقطع و لنگر لختی ستون نامنشوری I-شکل، به ترتیب، با رابطه‌های (۱) و (۲) در دسترس قرار می‌گیرند.

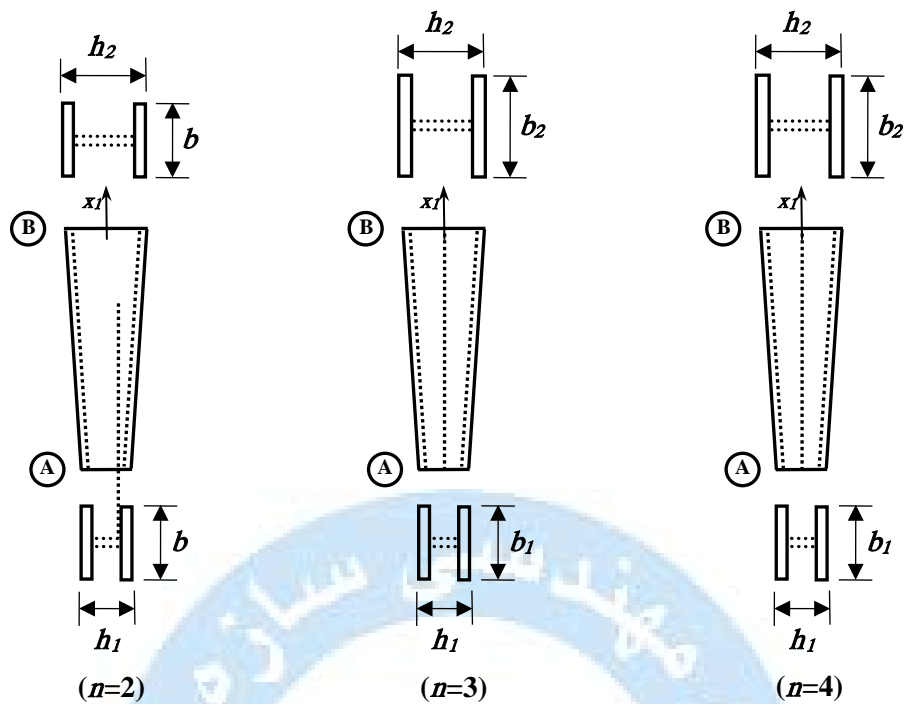
$$A_1(x_1) = A_0 \left(\frac{x_1}{\alpha} \right)^{n-2} = A_{1,m} \left(\frac{2x_1}{2\alpha + l_1} \right)^{n-2} \quad (1)$$

$$I_1(x_1) = I_0 \left(\frac{x_1}{\alpha} \right)^n = I_{1,m} \left(\frac{2x_1}{2\alpha + l_1} \right)^n \quad (2)$$

که در آن‌ها، A_0 و $A_{1,m}$ ، به ترتیب، سطح مقطع آغاز ($x_1 = \alpha$) و میانه ($x_1 = \alpha + l_1/2$) ستون می‌باشند. همچنین، I_0 و $I_{1,m}$ به ترتیب، لنگر لختی در ابتدا و میانه ستون هستند. ضریب شکل n وابسته به چگونگی تغییر ارتفاع جان، h و پهناى بال، b ستون نامنشوری با مقطع I-شکل در امتداد محور طولی ستون می‌باشد. این ضریب برای حالت‌های رایج، در شکل ۲ آمده است. باید افزود، برای مقطع منشوری، مقدارهای لنگر لختی و سطح مقطع ثابت می‌باشند و ضریب شکل، صفر خواهد بود. خاطر نشان می‌کند، رابطه‌سازی‌های همانندی، تنها برای ستون نامنشوری I-شکل فولادی با $n=3$ به وسیله اورام و فسولاکیس در مرجع [۱۲] در دسترس قرار گرفته است. همچنین، رابطه‌های مشابهی، تنها برای ستون نامنشوری نردبانی فولادی با $n=2$ به وسیله کونادیس و ارموپولوس در مرجع [۳] آمده است. با وجود این، رابطه‌های پیشنهادی، کلی می‌باشند و برای همه n های برابر یا بزرگتر از دو برقرار خواهند بود.



شکل ۱: قاب ساده نامنشوری با تکیه‌گاه‌های کشسان و پیوند نیمه سخت زیر اثر بار برون محور.



تغییرات ارتفاع جان، h ، خطی
پهنای بال، b ، ثابت

تغییرات ارتفاع جان، h ، خطی
تغییرات پهنای بال، b ، خطی

تغییرات ارتفاع جان، h ، خطی
تغییرات پهنای بال، b ، سهمی

شکل ۲: ستون نامنشوری I-شکل با ضرب‌های شکل متفاوت.

۳- رابطه‌سازی پیشنهادی

در این بخش، رابطه‌های کارمایه نهفته کل^۴، شرط‌های مرزی هندسی^۵، شرط‌های مرزی طبیعی^۶، تغییرمکان‌های محوری و جانبی و سرانجام، رابطه تعادل ناخطی و مسیر ایستایی^۷ قاب ساده نامنشوری شکل ۱ در دسترس قرار می‌گیرند.

۳-۱- برپایی کارمایه نهفته کل سازه

بر پایه رابطه‌های میان تغییرمکان و انحناء، کارمایه نهفته کل (V_T) قاب دو عضوی شکل ۱ که ناشی از کارمایه‌های نهفته ستون

(V_1)، تیر (V_2)، پیوند تیر به ستون (V_R) و نیروی خارجی (V_P) می‌باشد را می‌توان از برابری زیر یافت:

$$V_T = V_1 + V_2 + V_R + V_P \quad (3)$$

⁴ total potential energy

⁵ geometrical boundary conditions

⁶ natural boundary conditions

⁷ equilibrium path

در رابطه کنونی، V_1 کارمایه نهفته ستون (عضو AB) می‌باشد، که در آن کارمایه کرنشی ذخیره شده به سبب تغییرشکل‌های محوری و خمشی و با در نظر گرفتن سختی فنر دورانی تکیه‌گاه C_r به قرار زیر خواهد بود [۱۲]:

$$V_1 = \frac{1}{2} \int_{\alpha}^{\alpha+l_1} \left[EI_1(x_1)w_1''^2(x_1) + EA_1(x_1) \left(u_1'(x_1) + \frac{1}{2}w_1'^2(x_1) \right)^2 \right] dx_1 + \frac{1}{2}C_r w_1'^2(\alpha) \quad (4)$$

V_2 نیز، کارمایه نهفته تیر (عضو BC) می‌باشد که در آن کارمایه نهفته شده به سبب کرنش‌های ناشی از خمش و نیروی محوری و با در نظر گرفتن سختی تکیه‌گاه جانبی C_t ، به صورت رابطه (۵) بیان می‌گردد [۱۲]:

$$V_2 = \frac{1}{2} \int_0^{l_2} \left[EI_2 w_2''^2(x_2) + EA_2 \left(u_2'(x_2) + \frac{1}{2}w_2'^2(x_2) \right)^2 \right] dx_2 + \frac{1}{2}C_t u_2^2(0) \quad (5)$$

همچنین، V_R ، کارمایه نهفته ناشی از فنر پیوند دهنده تیر به ستون با سختی دورانی R ، برابر زیر خواهد بود:

$$V_R = \frac{1}{2}R \left(w_1'^2(\alpha+l_1) - w_2'^2(l_2) \right) \quad (6)$$

افزون بر این‌ها، کار نیروی خارجی (V_P)، به سبب نیروی خارجی محوری P همانند زیر می‌باشد [۱۲]:

$$V_P = -Pw_2(l_2) - Pw_2'(l_2) \quad (7)$$

باید افزود، از آن‌جا که کرنش‌ها کوچک پنداشته می‌شوند ولی تغییرشکل‌ها (دوران‌ها) می‌توانند بزرگ باشند، برای یافتن کارمایه کرنشی محوری اعضا در رابطه‌های (۴) و (۵)، از برابری زیر بهره‌جویی شده است:

$$\varepsilon_i = u_i' + \frac{1}{2}w_i'^2 \quad (i = 1, 2) \quad (8)$$

در رابطه کنونی، u_i' ، کوتاه‌شدگی ناشی از نیروی محوری و عبارت $\frac{1}{2}w_i'^2$ ، کوتاه‌شدگی ناشی از خمش می‌باشند. باید افزود، پانویس‌های $i=1$ و $i=2$ ، به ترتیب، نشانگر رابطه‌های وابسته به ستون و تیر هستند.

۳-۲- یافتن رابطه‌های دیفرانسیلی حاکم تعادلی

برای به دست آوردن رابطه‌های دیفرانسیلی حاکم تعادلی، بر پایه اصل پایستاری و ثابت بودن مقدار کارمایه نهفته، رابطه $\delta V_T = 0$ بایستی برقرار باشد. به سخن دیگر، مشتق کارمایه نهفته کل، نسبت به تمامی متغیرهایش، برابر صفر خواهد بود. از این رو، مشتق‌گیری کلی از رابطه کارمایه نهفته کل و صفر قرار دادن آن، چهار رابطه دیفرانسیلی حاکم تعادلی زیر در دسترس قرار می‌گیرد [۱۲]:

$$\left[EA_1(x_1) \left(u_1'(x_1) + \frac{1}{2} w_1'^2(x_1) \right) \right]' = 0 \quad (9)$$

$$\left[EA_2 \left(u_2'(x_2) + \frac{1}{2} w_2'^2(x_2) \right) \right]' = 0 \quad (10)$$

$$\left[EI_1(x_1) w_1''(x_1) \right]'' - \left[EA_1(x_1) \left(u_1'(x_1) + \frac{1}{2} w_1'^2(x_1) \right) w_1'(x_1) \right]' = 0 \quad (11)$$

$$EI_2 w_1''''(x_2) - \left[EA_2 \left(u_2'(x_2) + \frac{1}{2} w_2'^2(x_2) \right) w_2'(x_2) \right]' = 0 \quad (12)$$

باید افزود، در ادامه، با تابع اولیه گیری^۸ از برابری های (۹) و (۱۰)، تغییر شکل های محوری عضوها (u_1 و u_2) به دست می آیند. همچنین، تغییر مکان جانبی عضوها (w_1 و w_2)، با به کارگیری رابطه های (۱۱) و (۱۲) و تابع اولیه گیری از آنها در دسترس قرار خواهند گرفت.

۳-۴- وارد نمودن شرط های مرزی هندسی و طبیعی

با بدون یکسازگی طول ها، تغییر شکل های جانبی و تغییر مکان های محوری عضوها و معرفی عامل های بدون یکای $X_i = \frac{x_i}{l_i}$

که در آنها پانویس های $i=1$ و $i=2$ ، به ترتیب، نشانگر رابطه های وابسته به ستون و تیر هستند، شرط های مرزی

هندسی و طبیعی سازه شکل ۱، به ترتیب، همانند رابطه های (۱۳) و (۱۴) خواهند بود. باید افزود، شرط های مرزی هندسی، بر پایه مقدارهای تغییر شکل های محوری و جانبی و وابستگی آنها به یکدیگر به دست می آیند؛ در حالی که، شرط های مرزی طبیعی، بنا بر رابطه های تعادل نیرویی و وابستگی آنها با تغییر مکان های محوری و جانبی برپا می گردند. برای نمونه، نخستین شرط مرزی هندسی رابطه (۱۳)، از صفر بودن تغییر شکل جانبی پای ستون در گره A و نخستین شرط مرزی طبیعی رابطه (۱۴)، از صفر بودن لنگر سر تیر در گره C به دست آمده اند.

$$\begin{cases} W_1(\bar{\alpha}) = 0 \\ W_2(0) = 0 \\ U_1(\bar{\alpha}) = 0 \\ W_1(1+\bar{\alpha}) = rU_2(1) \\ U_1(1+\bar{\alpha}) = -rW_2(1) \end{cases} \quad (13)$$

⁸ Integral

$$\left\{ \begin{array}{l} W_2''(0) = 0 \\ W_1''(\bar{\alpha}) - \bar{C}_r W_1'(\bar{\alpha}) = 0 \\ \left(\frac{2+2\bar{\alpha}}{1+2\bar{\alpha}} \right)^n r W_1''(1+\bar{\alpha}) + [r W_1'(1+\bar{\alpha}) - W_2'(1)] \bar{R} = 0 \\ k_2^2 = -\bar{C}_t U_2(0) \\ k_{1,m}^2 W_1'(1+\bar{\alpha}) + \left[\left(\frac{2X_1}{1+2\bar{\alpha}} \right)^n W_1''(X_1) \right]_{X_1=1+\bar{\alpha}} - \frac{\bar{C}_t}{\rho r^2} U_2(0) = 0 \\ \left(\frac{2+2\bar{\alpha}}{1+2\bar{\alpha}} \right)^n W_1''(1+\bar{\alpha}) + \frac{1}{\rho r} W_2''(1) + r \beta^2 e = 0 \\ \beta^2 - k_{1,m}^2 + \frac{1}{\rho r^2} [W_1'''(1) + k_2^3 W_1'(1)] = 0 \end{array} \right. \quad (14)$$

در این رابطه‌ها، $k_{1,m}$ و k_2 ، به ترتیب، نسبت نیروی محوری ستون و تیر پنداشته می‌شوند. این عامل‌ها، به ترتیب، به صورت $k_{1,m}^2 = \frac{P_1 l_1^2}{EI_{1,m}}$

و $k_2^2 = \frac{P_2 l_2^2}{EI_2}$ تعریف می‌شوند. بار خارجی سازه، P ، با عامل بدون یکای $\beta^2 = \frac{P l_1^2}{EI_{1,m}}$ تعیین می‌گردد. بر این پایه، ضریب بار بحرانی

سازه، برابر $\beta_{cr}^2 = \frac{P_{cr} l_1^2}{EI_{1,m}}$ خواهد بود. عامل $r = \frac{l_2}{l_1}$ ، نسبت طول تیر به ستون و پارامتر $\rho = \frac{I_{1,m}}{I_2}$ ، نسبت لنگر لختی میانه ستون

نامنشوری به لنگر لختی تیر می‌باشد. برای سادگی، عامل‌های بدون یکای $\bar{\alpha} = \frac{\alpha}{l_1}$ و $\bar{e} = \frac{e}{l_2}$ ، به ترتیب، نسبت نامنشوری و نسبت برون

محوری بار معرفی می‌شوند. همچنین، نسبت‌های بدون یکای سختی دورانی تکیه‌گاه، سختی دورانی پیوند تیر به ستون و سختی جانبی، به

ترتیب، با رابطه‌های $\bar{C}_r = \frac{C_r l_1}{EI_0}$ ، $\bar{R} = \frac{R l_1}{EI_{1,m}}$ و $\bar{C}_t = \frac{C_t l_2^3}{EI_2}$ بیان می‌گردند. یادآوری می‌کند، عامل n ، ضریب شکل ستون نامنشوری

I-شکل است که بر پایه جدول ۱، می‌تواند برابر مقدارهای $n=2$ ، $n=3$ و $n=4$ باشد. همچنین، آشکار است که برای ستون منشوری، این ضریب، برابر صفر خواهد بود.

۳-۳- یافتن تغییر مکان‌های محوری و جانبی

باید دانست، بر پایه رابطه‌های میان تنش-نیرو- کرنش، تنش محوری فشاری عضوهای قاب (σ_i) بر حسب نیروی محوری داخلی

(P_i)، سطح مقطع (A_i) و کرنش محوری (ε_i) تیر و ستون و از برابری‌های زیر به دست می‌آید:

$$\sigma_i = -\frac{P_i}{A_i} = E \varepsilon_i \quad (i = 1, 2) \quad (15)$$

از این رو، با در نظر گرفتن رابطه میان کرنش محوری و تغییر شکل‌های محوری و جانبی، همانند برابری (۹)، تابع‌های پنداشتی نیروی محوری فشاری در تیر و ستون، به ترتیب، همانند رابطه‌های (۱۶) و (۱۷) بیان می‌شوند.

$$P_1(x_1) = -EA_1(x_1) \left(u_1'(x_1) + \frac{1}{2} w_1'^2(x_1) \right) \quad (16)$$

$$P_2(x_2) = -EA_2 \left(u_2'(x_2) + \frac{1}{2} w_2'^2(x_2) \right) \quad (17)$$

از سوی دیگر، بر پایه رابطه‌های تعادلی (۹) و (۱۰)، نیروی محوری عضوها مقدارهایی ثابت خواهند بود و تابعی از x نیستند. از این رو، با تابع اولیه‌گیری از رابطه‌های تعادلی (۹) و (۱۰)، نیروهای داخلی محوری ستون P_1 و تیر P_2 ، همانند برابری‌های زیر در دسترس قرار می‌گیرد:

$$\left(\frac{2x_1}{l_1 + 2\alpha} \right)^{n-2} \left(u_1'(x_1) + \frac{1}{2} w_1'^2(x_1) \right) = \frac{-P_1}{EA_{1,m}} \quad (18)$$

$$u_2'(x_2) + \frac{1}{2} w_2'^2(x_2) = \frac{-P_2}{EA_2} \quad (19)$$

سرانجام، با تابع اولیه‌گیری دوباره از رابطه‌های بالا در حالت بدون یکا، تغییر مکان‌های محوری ستون نامنشوری با ضریب شکل‌های متفاوت (U_1) و تیر منشوری (U_2) ، همانند برابری‌های زیر به دست می‌آیند:

$$U_1(X_1) = \begin{cases} C_5 - \frac{k_{1,m}^2}{\lambda_{1,m}^2} (X_1 - \bar{\alpha}) - \frac{1}{2} \int_{\bar{\alpha}}^{X_1} W_1'^2(X_1) dX_1 & (n=2) \\ C_5 - \frac{k_{1,m}^2}{\lambda_{1,m}^2} \left(\frac{1}{2} + \bar{\alpha} \right) \ln \frac{X_1}{\bar{\alpha}} - \frac{1}{2} \int_{\bar{\alpha}}^{X_1} W_1'^2(X_1) dX_1 & (n=3) \\ C_5 - \frac{k_{1,m}^2}{\lambda_{1,m}^2} \left(\frac{1}{2} + \bar{\alpha} \right)^2 \left(\frac{1}{\bar{\alpha}} - \frac{1}{X_1} \right) - \frac{1}{2} \int_{\bar{\alpha}}^{X_1} W_1'^2(X_1) dX_1 & (n=4) \end{cases} \quad (20)$$

$$U_2(X_2) = D_5 - \frac{k_2^2}{\lambda_2^2} X_2 - \frac{1}{2} \int_0^{X_2} W_2'^2(X_2) dX_2 \quad (21)$$

در این رابطه‌ها، $\lambda_{1,m} = l_1 \left(\frac{A_{1,m}}{I_{1,m}} \right)^{\frac{1}{2}}$ و $\lambda_2 = l_2 \left(\frac{A_2}{I_2} \right)^{\frac{1}{2}}$ ، به ترتیب، نسبت لاغری ستون و تیر پنداشته می‌شوند. یادآوری می‌کند،

عامل‌های $k_{1,m}$ و k_2 پیش از این تعریف شدند و به ترتیب، برابر با $k_{1,m} = \frac{P_1 l_1^2}{EI_{1,m}}$ و $k_2 = \frac{P_2 l_2^2}{EI_2}$ می‌باشند.

از سوی دیگر، با در نظر گرفتن رابطه‌های تعادلی (۹) و (۱۰)، آشکار می‌گردد که جمله‌های دوم رابطه‌های تعادلی (۱۱) و (۱۲)، بایستی برابر صفر باشند. بنابراین، این رابطه‌ها به صورت زیر بازنویسی می‌شوند:

$$\left[EI_1 (x_1) w_1'' (x_1) \right]'' = 0 \quad (22)$$

$$EI_2 w_1''' (x_2) = 0 \quad (23)$$

حال، با چهار بار تابع اولیه‌گیری پی‌درپی از رابطه‌های بالا در حالت بدون یکا، تغییرمکان‌های جانبی ستون نامنشوری با ضریب شکل‌های متفاوت (W_1) و تیر منشوری (W_2)، به ترتیب، به صورت رابطه‌های (24) و (25) به دست می‌آیند:

$$W_1(X_1) = \begin{cases} C_1 \sqrt{X_1} \sin \left[\sqrt{\mu^2 - \frac{1}{4}} \times \ln \left(\frac{X_1}{\bar{\alpha}} \right) \right] + C_2 \sqrt{X_1} \cos \left[\sqrt{\mu^2 - \frac{1}{4}} \times \ln \left(\frac{X_1}{\bar{\alpha}} \right) \right] + C_3 X_1 + C_4 & (n=2) \\ C_1 \sqrt{X_1} Bessel J \left(1, \frac{2\mu}{\sqrt{X_1}} \right) + C_2 \sqrt{X_1} Bessel Y \left(1, \frac{2\mu}{\sqrt{X_1}} \right) + C_3 X_1 + C_4 & (n=3) \\ C_1 X_1 \sin \left[\mu \left(\frac{\bar{\alpha}}{X_1} \right) \right] + C_2 X_1 \cos \left[\mu \left(\frac{\bar{\alpha}}{X_1} \right) \right] + C_3 X_1 + C_4 & (n=4) \end{cases} \quad (24)$$

$$W_2(X_2) = D_1 \sin(k_2 X_2) + D_2 \cos(k_2 X_2) + D_3 X_2 + D_4 \quad (25)$$

عامل μ ، در رابطه (24) به صورت $\mu^2 = k_{1,m}^2 \left(\frac{1}{2} + \bar{\alpha} \right)^n$ تعریف می‌شود. باید افزود، دو ثابت تغییرمکان محوری عضوها، یعنی C_5 و D_5 در رابطه‌های (20) و (21) و هشت ثابت تغییرمکان جانبی عضوها یعنی C_j و D_j ($j=1,2,3,4$) در رابطه‌های (24) و (25) که از تابع اولیه‌گیری‌ها به وجود آمدند، با بهره‌جویی از سه شرط مرزی نخست رابطه (13) و هفت شرط مرزی رابطه (14) در دسترس قرار می‌گیرند. به سخن دیگر، ده ثابت تابع‌های تغییرشکل محوری و جانبی، با بهره‌جویی از ده شرط مرزی از میان دوازده شرط مرزی رابطه‌های (13) و (14) حساب می‌شوند.

خاطر نشان می‌کند، تا کنون، تغییرمکان‌های محوری و جانبی عضوها حساب شدند. با وجود این، از دو شرط مرزی پایداری رابطه (13) که از برابری متناظر تغییرشکل‌های محوری و جانبی تیر و ستون در گره B به دست آمده‌اند، بهره‌جویی نشده است. در ادامه، با به کارگیری این دو شرط، مسیر ایستایی سازه در دسترس قرار خواهد گرفت.

۳-۵- یافتن رابطه‌های تعادل ناخطی و دستیابی به مسیر ایستایی پیش‌کمانش و پس‌کمانش

در این بخش، با در اختیار داشتن تغییرمکان‌های محوری و جانبی عضوها و با بهره‌جویی از دو شرط پایانی رابطه (13)، دو رابطه تعادل ناخطی به دست می‌آید که با حل عددی هم‌زمان آن‌ها، مسیر ایستایی قاب دو عضوی با پیوند نیمه‌سخت و تکیه‌گاه‌های کشسان بر حسب عامل‌هایی که پیش از این تعریف گردید، در دسترس قرار می‌گیرد. به سخن دیگر، برای مقدارهای مختلف بار خارجی P که پیش از این با عامل β^2 معرفی شد، مقدارهای نیروی محوری عضوهای قاب، یعنی P_1 و P_2 ، بر حسب عامل‌های $k_{1,m}$ و k_2 ، با دانستن دیگر متغیرها $(\lambda_{1,m}, \lambda_2, \rho, r, \bar{e}, \bar{\alpha}, \bar{C}_r, \bar{C}_t, \bar{R})$ به دست می‌آیند. از این رو، مسیر تعادل ناخطی پیش‌کمانش و پس‌کمانش با رابطه زیر بیان می‌گردد:

$$\beta^2 = \beta^2(k_{1,m}, k_2, \lambda_{1,m}, \lambda_2, \rho, r, \bar{e}, \bar{\alpha}, \bar{C}_r, \bar{C}_t, \bar{R}) \quad (26)$$

بر پایه رابطه کنونی، با در اختیار داشتن مقدار عامل‌های بدون یکای $\lambda_{1,m}, \lambda_2, \rho, r, \bar{e}, \bar{\alpha}, \bar{C}_r, \bar{C}_t, \bar{R}$ و برای مقدارهای متفاوت بار خارجی β^2 ، عامل‌های $k_{1,m}$ و k_2 ، با حل عددی هم‌زمان دو شرط پایانی رابطه (۱۳) به دست می‌آیند. به دنبال آن، تابع‌های تغییرشکل محوری و جانبی عضوها مشخص می‌شوند. سرانجام، نمودار تغییر بار خارجی، β^2 ، در برابر تغییرشکل جانبی نوک ستون، $W(I+\bar{\alpha})$ ، بر حسب عامل‌های متفاوت، به عنوان مسیر ایستایی سازه در دسترس قرار می‌گیرد. همچنین، می‌توان β_{cr}^2 یا همان، ضریب بار بحرانی سازه را یافت. خاطر نشان می‌کند، برای حل عددی رابطه‌های تعادل ناخطی و دیگر عملیات‌های ریاضی، از نرم‌افزار تجاری ریاضی Maple بهره‌جویی شده است.

۴- صحت‌سنجی رابطه‌سازی پیشنهادی

به منظور واری دقت و کارایی رابطه‌سازی پیشنهادی، نخست، قاب شکل ۱ با ستون منشوری، پیوند سخت و تکیه‌گاه‌های ساده تحلیل شده است. مقدارهای بارکمانشی و نیروهای محوری عضوها برای مقدارهای متفاوت برون محوری، در جدول ۱ می‌آید. باید افزود، این سازه، پیشتر به وسیله کونادیس و همکاران [۱] و نیز، رافتویانیس [۱۱] مورد ارزیابی قرار گرفته است. بر پایه پاسخ‌های جدول ۱، می‌توان دید که یافته‌های رابطه‌سازی پیشنهادی، همخوانی خوبی با پاسخ‌های مرجع‌های [۱] و [۱۱] دارند. در ادامه، سازه شکل ۱ با ستون نامنشوری (ضریب شکل $n=3$)، پیوند سخت و تکیه‌گاه‌های کشسان تحلیل می‌شود. مقدارهای بارکمانشی و نیروهای محوری عضوها برای مقدارهای متفاوت سختی تکیه‌گاه‌های کشسان، با چشم‌پوشی از نیروی محوری تیر ($k_2=0$) و در نظر گرفتن آن ($k_2 \neq 0$)، در جدول ۲ آمده است. این قاب، پیش از این به وسیله آورام و فسولاکیس (۲۰۱۳)، [۱۲] بررسی شده است. بر پایه پاسخ‌های جدول ۲، دقت و کارایی رابطه‌سازی پیشنهادی آشکار می‌گردد.

جدول ۱: بار بحرانی قاب فولادی منشوری با پیوند سخت و تکیه‌گاه‌های ساده ($\lambda_{1,m} = \lambda_2 = 80, \rho = r = 1, \bar{\alpha} = 10^7, \bar{C}_r = 0, \bar{C}_t = \bar{R} = \infty$)

مرجع	\bar{e}	β_{cr}^2	$k_{1,m}^2$	k_2^2
رافتویانیس [۱۱]	۰/۰۰۰۴۷۲۸۸	۱۳/۹۴۲۹۸	۱۳/۹۳۹۳۴	۰/۰۰۱۶۲۷۹۱
کونادیس و همکاران [۱]		۱۳/۸۸۷۱	۱۳/۸۸۲۰	۰/۰۰۱۵۱۸۴۶۱
روش پیشنهادی		۱۳/۹۱۳۶۳	۱۳/۹۰۸۳۱	۰/۰۰۱۳۴۳
رافتویانیس [۱۱]	۰/۰۰۰۰۰۰۰۰	۱۳/۵۹۵۴۵	۱۳/۶۸۹۴۳	۰/۰۰۹۴۷۴۱
کونادیس و همکاران [۱]		۱۳/۵۴۷۹	۱۳/۶۴۰۹	۰/۰۰۹۴۳۱۳۲۳
روش پیشنهادی		۱۳/۶۳۳۱۱	۱۳/۷۱۵۵۶	۰/۰۰۹۶۳۶۳
رافتویانیس [۱۱]	-۰/۰۰۱۳۰۰۰۰	۱۳/۲۷۲۲۷	۱۳/۴۵۹۸۵	۰/۱۷۵۴۰۸
کونادیس و همکاران [۱]		۱۳/۲۳۲۵	۱۳/۴۱۹۵	۰/۱۷۴۸۱۳۴۰
روش پیشنهادی		۱۳/۳۳۷۸۳	۱۳/۵۱۳۴۲	۰/۱۷۶۰۴۸
رافتویانیس [۱۱]	-۰/۰۰۲۵۰۰۰	۱۳/۰۷۶۰۸	۱۳/۳۳۱۱۳	۰/۲۲۰۹۱۲
کونادیس و همکاران [۱]		۱۳/۰۴۳۴	۱۳/۲۸۷۸	۰/۲۲۰۳۵۵۹۰
روش پیشنهادی		۱۳/۱۴۲۸۱	۱۳/۳۹۵۶۱	۰/۲۲۰۸۱۲
رافتویانیس [۱۱]	-۰/۰۰۵۰۰۰۰	۱۲/۷۷۷۴۸	۱۳/۱۱۲۸۹	۰/۲۸۷۰۳۳
کونادیس و همکاران [۱]		۱۲/۷۵۱۹	۱۳/۰۸۶۶	۰/۲۸۶۴۵۲۶۰
روش پیشنهادی		۱۲/۸۳۱۶۷	۱۳/۲۱۲۳۱	۰/۲۸۸۸۰۳
رافتویانیس [۱۱]	-۰/۰۰۷۰۰۰	۱۲/۵۸۷۰۱	۱۲/۹۸۰۲۲	۰/۳۲۶۰۶۳
کونادیس و همکاران [۱]		۱۲/۵۶۸۱	۱۲/۹۶۰۷	۰/۳۲۵۵۳۴۰۰
روش پیشنهادی		۱۲/۶۶۹۳۱	۱۳/۰۸۷۱۲	۰/۳۲۸۱۵۹

جدول ۲: باربرحالی قاب فولادی نامنشوری ($n=3$) با پیوند سخت و تکیه‌گاه‌های کشسان ($\lambda_{1,m} = \lambda_2 = 80, \bar{e} = 0, \rho = r = \bar{\alpha} = 1, \bar{R} = \infty$)

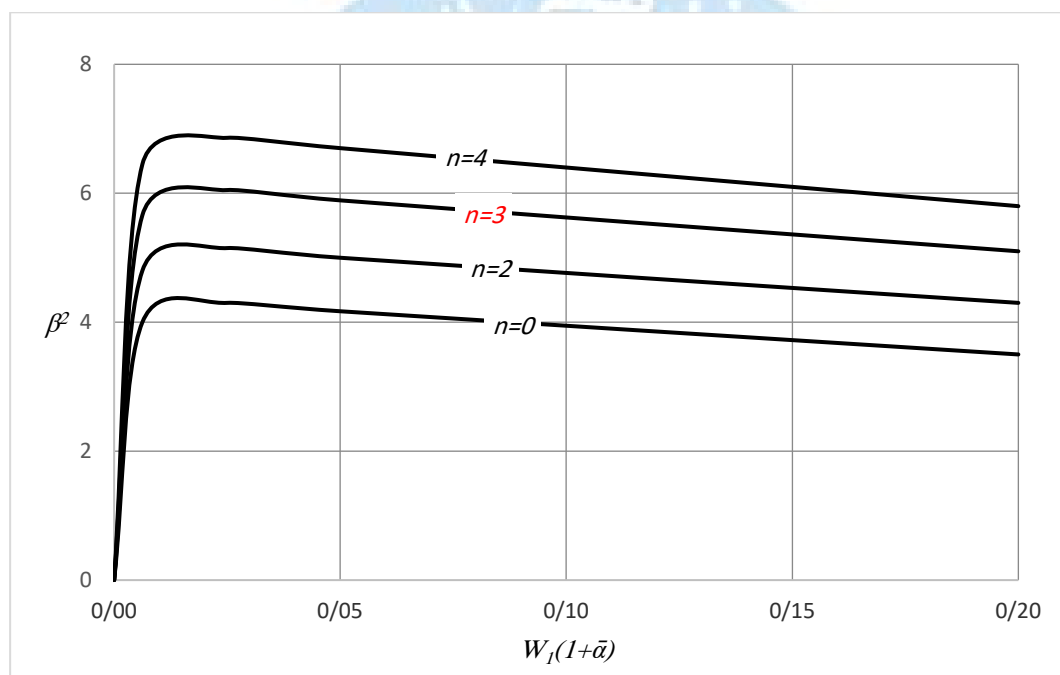
منبع	\bar{C}_r	\bar{C}_t	β_{cr}^2		$k_{1,m}^2$	k_2^2
			$k_2 = 0$	$k_2 \neq 0$		
آورام و فسولاکیس [۱۲]	۰	۱۰ ^{-۳}	۱/۶۰۶۹۷	۱/۶۰۶۵۵	۱/۶۲۶۹۰	۰/۰۰۰۰۰۲۹۷
روش پیشنهادی			۱/۶۰۵۸۱	۱/۶۰۵۳۱۷	۱/۶۲۰۷۸۳۶	۰/۰۰۰۰۰۳۰۵
آورام و فسولاکیس [۱۲]	۰	۵	۹/۷۶۸۶۲	۹/۷۵۷۲۰	۹/۷۸۵۰۱	۰/۱۵۹۷۰
روش پیشنهادی			۹/۷۴۳۱۵	۹/۷۱۳۴۵	۹/۷۶۲۱۴	۰/۱۳۳۷۱
آورام و فسولاکیس [۱۲]	۰	۱۰ ^۰	۱۱/۰۳۴۰	۱۱/۰۲۲۸۶	۱۱/۰۹۰۲۳	۰/۰۶۷۲۷
روش پیشنهادی			۱۱/۰۲۲۸	۱۱/۰۸۸۸۱	۱۱/۱۰۹۳۱	۰/۰۳۳۵
آورام و فسولاکیس [۱۲]	۱	۱۰ ^{-۳}	۲/۰۶۴۵	۲/۰۶۳۹۶	۲/۰۸۸۳۱	۰/۰۰۰۰۰۳۳۲
روش پیشنهادی			۲/۰۴۳۲۶	۲/۰۲۲۲۹	۲/۰۷۸۱۸	۰/۰۰۰۰۰۲۶۳
آورام و فسولاکیس [۱۲]	۲	۱۰ ^{-۳}	۲/۴۰۴۴	۲/۴۰۴۰۰	۲/۴۳۳۲۹	۰/۰۰۰۰۰۳۸۰
روش پیشنهادی			۲/۴۰۳۲۱	۲/۴۰۰۱۵	۲/۴۱۰۱۸	۰/۰۰۰۰۰۳۹۷
آورام و فسولاکیس [۱۲]	۵	۱۰ ^{-۳}	۳/۰۲۵۶	۳/۰۲۵۲۳	۳/۰۶۱۴۵	۰/۰۰۰۰۰۴۲۷
روش پیشنهادی			۳/۰۱۳۶	۳/۰۱۸۳۴	۳/۰۵۵۱۵۴	۰/۰۰۰۰۰۴۳۵
آورام و فسولاکیس [۱۲]	۲۰	۱۰ ^{-۳}	۳/۸۵۲۰	۳/۸۵۱۶۱	۳/۸۹۷۴۷	۰/۰۰۰۰۰۴۷۵
روش پیشنهادی			۳/۸۲۳۶۷	۳/۸۰۰۳۵	۳/۸۱۴۷۹	۰/۰۰۰۰۰۴۶۹
آورام و فسولاکیس [۱۲]	۱۰۰	۱۰ ^{-۳}	۴/۲۲۵۶۷	۴/۲۲۵۱۹	۴/۲۷۴۵۱	۰/۰۰۰۰۰۴۸۱
روش پیشنهادی			۴/۲۱۳۶۵	۴/۱۹۳۵۸	۴/۲۳۶۷۸	۰/۰۰۰۰۰۴۸۶
آورام و فسولاکیس [۱۲]	۱۰ ^۰	۱۰ ^{-۳}	۴/۳۳۳۸	۴/۳۳۳۸۳	۴/۳۸۴۰۴	۰/۰۰۰۰۰۴۸۱
روش پیشنهادی			۴/۳۱۲۵	۴/۲۹۳۱۵	۴/۳۴۲۸۷	۰/۰۰۰۰۰۴۸
آورام و فسولاکیس [۱۲]	۱	۱۰ ^۰	۱۱/۸۱۷۳	۱۱/۸۳۴۸۸	۱۱/۹۰۴۵۷	۰/۱۰۲۵۵
روش پیشنهادی			۱۱/۸۰۰۳۲	۱۱/۸۰۰۴۳	۱۱/۹۳۲۰۵	۰/۱۲۵۴۶۵
آورام و فسولاکیس [۱۲]	۲	۱۰ ^۰	۱۲/۷۹۸۲	۱۲/۸۱۹۵۹	۱۲/۸۹۵۲۸	۰/۰۸۸۱۴
روش پیشنهادی			۱۲/۷۸۵۴	۱۲/۸۵۳۴	۱۲/۹۳۱۴۵	۰/۰۸۰۱۷
آورام و فسولاکیس [۱۲]	۵	۱۰ ^۰	۱۴/۹۱۱۶	۱۴/۹۴۶۲۵	۱۵/۰۳۳۵۴	۰/۰۴۹۲۷
روش پیشنهادی			۱۴/۹۰۱۴	۱۴/۹۰۱۳	۱۵/۰۰۰۰۱	۰/۰۳۹۹۴
آورام و فسولاکیس [۱۲]	۲۰	۱۰ ^۰	۱۸/۵۴۴۴	۱۸/۵۹۶۱۱	۱۸/۷۲۶۳۹	۰/۰۹۴۳۹
روش پیشنهادی			۱۸/۵۳۲۱	۱۸/۵۶۳۱۴	۱۸/۶۶۳۱	۰/۰۸۳۱۱
آورام و فسولاکیس [۱۲]	۱۰۰	۱۰ ^۰	۲۰/۴۳۳۵	۲۰/۴۷۲۱۹	۲۰/۶۱۵۲۳	۰/۲۱۸۲۸
روش پیشنهادی			۲۰/۴۲۱۵	۲۰/۴۱۰۳۱	۲۰/۵۵۲۴۱	۰/۱۸۳۵۷
آورام و فسولاکیس [۱۲]	۱۰ ^۰	۱۰ ^۰	۲۰/۹۷۸۸	۲۱/۰۱۱۸۶	۲۱/۱۶۵۵۲	۰/۲۷۵۸۸
روش پیشنهادی			۲۰/۹۶۲۱	۲۱/۱۳۳۵۴	۲۱/۶۸۳۴۲	۰/۲۸۳۶۲۱
آورام و فسولاکیس [۱۲]	۱	۱۰ ^۰	۱۲/۰۵۱۱	۱۲/۰۷۴۳۷	۱۲/۱۴۰۳۵	۰/۰۵۰۸۷
روش پیشنهادی			۱۲/۰۴۲۱	۱۲/۱۷۳۹۵	۱۲/۱۹۷۳۴	۰/۰۵۵۳۱
آورام و فسولاکیس [۱۲]	۲	۱۰ ^۰	۱۲/۹۴۹۹	۱۲/۹۸۴۷۷	۱۳/۰۷۴۷۳	۰/۰۵۲۸۳
روش پیشنهادی			۱۲/۹۳۸۹	۱۳/۰۳۴۹	۱۳/۱۱۴۹۱	۰/۰۵۰۴۱
آورام و فسولاکیس [۱۲]	۵	۱۰ ^۰	۱۴/۹۳۹۷	۱۴/۹۸۶۲۱	۱۵/۰۹۷۱۱	۰/۰۲۴۸۵
روش پیشنهادی			۱۴/۹۲۹۸	۱۴/۸۳۱۲۵	۱۴/۹۹۳۱	۰/۰۳۰۱۴
آورام و فسولاکیس [۱۲]	۲۰	۱۰ ^۰	۱۸/۶۱۴۹	۱۸/۶۵۸۸۹	۱۸/۷۶۱۰۳	۰/۰۳۰۷۲
روش پیشنهادی			۱۸/۶۰۰۳	۱۸/۵۳۲۱۴	۱۸/۶۳۴۵۲	۰/۰۲۳۲۱
آورام و فسولاکیس [۱۲]	۱۰۰	۱۰ ^۰	۲۰/۷۲۴۶	۱۸/۷۷۴۶۹	۲۰/۹۱۶۹۰	۰/۰۶۸۰۶
روش پیشنهادی			۲۰/۷۰۰۳۶	۲۰/۸۳۲۱۴	۲۰/۹۹۴۱۳	۰/۰۵۳۱۴
آورام و فسولاکیس [۱۲]	۱۰ ^۰	۱۰ ^۰	۲۱/۳۷۵۳	۲۱/۴۲۳۳۴	۲۱/۵۶۴۸۸	۰/۰۷۴۳۰
روش پیشنهادی			۲۱/۳۵۲۲	۲۱/۵۵۳۱۲	۲۱/۶۲۳۷۱	۰/۰۶۵۳۱

۵- ارزیابی اثر عامل‌های گوناگون در تحلیل ناخطی پایداری قاب ساده

در این بخش، به بررسی اثرهای ضریب شکل نامنشوری، سختی دورانی پیوند تیر به ستون، سختی انتقالی تکیه‌گاه جانبی، سختی دورانی تکیه‌گاه پای ستون و برون محوری بار، بر مسیر ایستایی (رفتار پیش‌کمانشی و پس‌کمانشی) و بار بحرانی قاب مورد مطالعه پرداخته می‌شود.

۵-۱- اثر ضریب شکل نامنشوری n

نمودار مسیر ایستایی بار خارجی β^2 در برابر تغییر مکان جانبی $W_1(1+\bar{\alpha})$ قاب فولادی شکل ۱، برای ضریب‌های شکل متفاوت و با در نظر گرفتن $(\lambda_{1,m} = \lambda_2 = 80, \bar{e} = 0, \rho = r = \bar{\alpha} = 1, \bar{C}_r = \bar{C}_t = \bar{R} = 10)$ در شکل ۳ به نمایش درآمده است. می‌توان دید، در این نمونه، افزایش ضریب شکل از صفر به چهار، می‌تواند سبب افزایشی در حدود ۶۶ درصد در بار کمانشی سازه نسبت به حالت مشابه منشوری گردد. یادآوری می‌کند، پاسخ‌ها نسبت به ستون منشوری همپایه شده‌اند. از سوی دیگر، آشکار است که برای یک مقدار مشخص از بار خارجی، تغییر مکان جانبی نوک ستون، با افزایش ضریب شکل، کاهش می‌یابد.



شکل ۳: نمودار مسیر ایستایی بار خارجی β^2 در برابر تغییر مکان جانبی $W_1(1+\bar{\alpha})$ قاب فولادی برای ضریب‌های شکل متفاوت و $(\lambda_{1,m} = \lambda_2 = 80, \bar{e} = 0, \rho = r = \bar{\alpha} = 1, \bar{C}_r = \bar{C}_t = \bar{R} = 10)$

۵-۲- اثر سختی دورانی پیوند تیر به ستون R ، سختی دورانی تکیه‌گاه C_r و سختی انتقالی تکیه‌گاهجانبی C_t

برای بررسی اثرهای سختی دورانی پیوند نیمه‌سخت و سختی‌های انتقالی و دورانی تکیه‌گاه‌های کشسان، مسیر ایستایی پیش-کمانشی و پس‌کمانشی قاب شکل ۱، برای سه حالت متفاوت، در شکل‌های ۴ تا ۶ رسم شده است. به طور کلی و بر پایه این شکل‌ها، دیده می‌شود که افزایش سختی این عامل‌ها، سبب افزایش بار کمانشی سازه می‌شود، به گونه‌ای که این افزایش، برای نسبت‌های سختی پایین (کمتر از ۵)، بسیار چشم‌گیر ولی برای نسبت‌های سختی بالا (بیشتر از ۵)، ناچیز است.

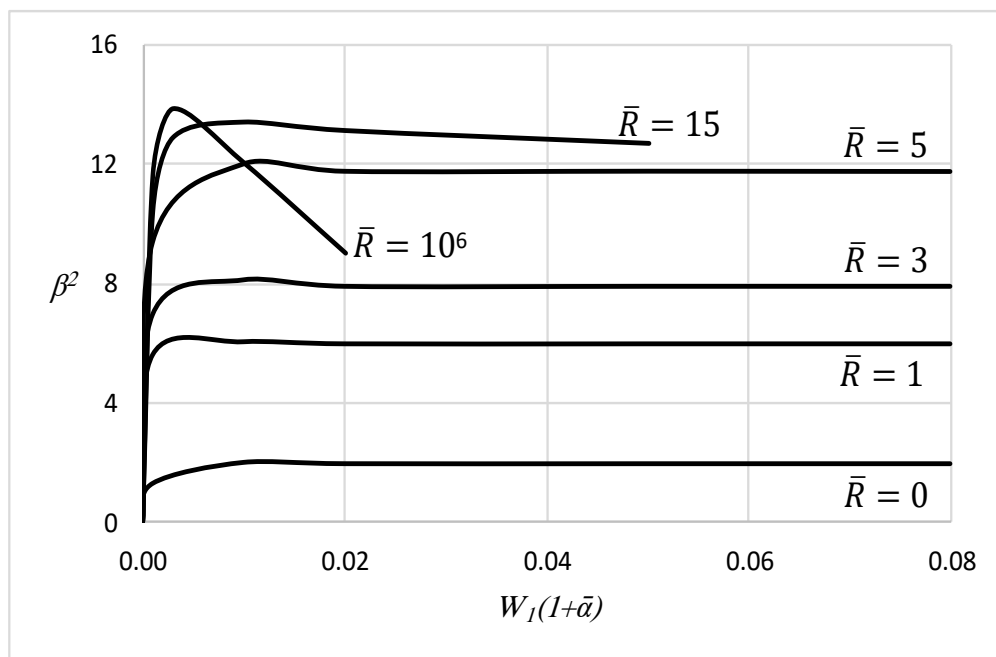
بر پایه شکل ۴، افزایش سختی دورانی پیوند تیر به ستون از $\bar{R} = 0$ (پیوند ساده)، تا $\bar{R} = 10^6$ (پیوند سخت)، به طور تقریبی، سبب افزایش ۶/۵ برابری بار بحرانی سازه خواهد شد. همچنین، افزایش چشم‌گیر عامل \bar{R} ، سبب تغییر قابل توجه در مسیر ایستایی پس‌کمانشی قاب فولادی می‌شود. شکل ۵ نشان می‌دهد که افزایش سختی دورانی پیوند ستون به تکیه‌گاه از $\bar{C}_r = 0$ (تکیه‌گاه ساده)، تا $\bar{C}_r = 10^5$ (تکیه‌گاه گیردار)، به طور تقریبی، سبب افزایش ۵ برابری بار بحرانی می‌شود. با وجود این، افزایش چشم‌گیر عامل \bar{C}_r ، اثر قابل توجهی بر مسیر ایستایی پس‌کمانشی نخواهد داشت. بر پایه شکل ۶، افزایش سختی انتقالی تکیه‌گاه جانبی از $\bar{C}_t = 0$ (تکیه‌گاه غلتکی یا قاب بدون مهار)، تا $\bar{C}_t = 10^4$ (تکیه‌گاه ساده یا قاب مهاربندی‌شده)، به طور تقریبی، سبب افزایش ۱۳ برابری بار بحرانی قاب فولادی خواهد شد. همچنین، افزایش چشم‌گیر عامل \bar{C}_t ، سبب تغییر قابل توجهی در مسیر ایستایی پس‌کمانشی سازه می‌شود.

در ادامه و برای درک بهتر اثر عامل‌های یاد شده، مقدار بار بحرانی قاب نامنشوری با ضریب شکل‌های متفاوت و در نظر گرفتن $(\lambda_{1,m} = \lambda_2 = 80, \bar{e} = 0, \rho = r = \bar{\alpha} = 1)$ ، برای مقدارهای حدی (صفر و بی‌کران) سختی‌های دورانی و انتقالی در جدول ۳ می‌آید. پاسخ‌ها برای ضریب شکل $n=3$ در دو حالت خطی و ناخطی و ضریب شکل‌های $n=0$ و $n=2$ در حالت خطی و در هفت گونه قاب فولادی در دسترس قرار گرفته‌اند. یادآوری می‌کند، چشم‌پوشی از اثرهای کوتاه‌شدگی ناشی از خمش و نیروی محوری تیر در رابطه‌سازی‌ها، سبب خطی شدن تحلیل می‌شود. بر پایه جدول ۳ و درمیان گونه‌های حدی بررسی شده، سختی انتقالی تکیه‌گاه جانبی، بیشترین اثر بر بار کمانشی سازه را دارد. به سخن دیگر، با سنجش گونه‌های یکم و ششم، افزایش عامل \bar{C}_r از صفر تا بی‌کران، در بیشترین حالت، سبب افزایش ۱۳ برابری بار بحرانی قاب با ضریب شکل $n=3$ و افزایش ۸ برابری بار کمانشی قاب منشوری ($n=0$) می‌گردد. همچنین، درمیان گونه‌های حدی بررسی شده، افزایش سختی دورانی پیوند تیر به ستون، در کمترین حالت (سنجش گونه‌های ششم و هفتم)، به ترتیب، سبب افزایش ۲۵ درصدی و ۳۴ درصدی بار بحرانی قاب با ضریب شکل‌های $n=0$ و $n=3$ خواهد شد. از سوی دیگر، افزایش عامل \bar{R} در بیشترین حالت (سنجش گونه‌های یکم و سوم)، سبب افزایش ۳ برابری بار کمانشی سازه با ضریب شکل $n=3$ و افزایش ۲/۵ برابری بار کمانشی قاب منشوری ($n=0$) می‌گردد. افزون بر این‌ها، با سنجش بار کمانشی گونه‌های چهارم با ششم و پنجم با هفتم، می‌توان دید که افزایش سختی دورانی پیوند ستون به تکیه‌گاه از صفر ($\bar{C}_r = 0$) تا بی‌کران ($\bar{C}_r = \infty$)، در نمونه‌های یاد شده و برای ضریب شکل‌های متفاوت، به طور تقریبی، سبب افزایش ۲ برابری بار بحرانی قاب می‌شود. با وجود این، سنجش بار کمانشی در گونه‌های دوم و سوم نشان می‌دهد که با افزایش عامل \bar{C}_r از صفر تا بی‌کران، بار بحرانی قاب با ضریب شکل‌های $n=0$ و $n=3$ به ترتیب، ۲/۷ برابر و ۴ برابر می‌گردد. خاطر نشان می‌کند، بر پایه یافته‌های کنونی، دیده می‌شود که افزایش ضریب شکل n همواره افزایش بار کمانشی سازه را در پی خواهد داشت.

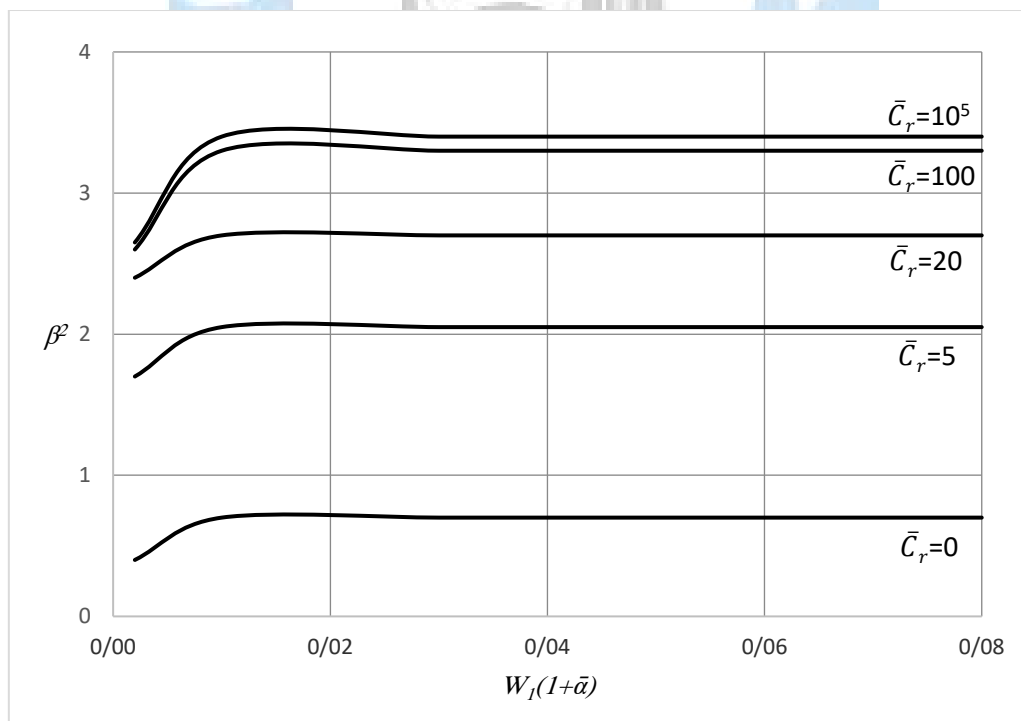
افزون بر این‌ها، جدول ۳ نشان می‌دهد که ناخطی پنداشتن تحلیل پایداری، سبب کاهش بار بحرانی سازه می‌گردد. برای نمونه، بار کمانشی گونه یکم در حالت خطی و برای $n=3$ حدود ۴ درصد، بیشتر از بار بحرانی در حالت ناخطی است.

جدول ۳: بار بحرانی قاب فولادی نامنشوری با پیوند نیمه‌سخت و تکیه‌گاه‌های کشسان در حالت‌های حدی $(\lambda_{1,m} = \lambda_2 = 80, \bar{e} = 0, \rho = r = \bar{\alpha} = 1)$.

$P_{cr} l_1^2 / EI_0$				\bar{R}	\bar{C}_r	\bar{C}_t	گونه قاب
$n=0$	$n=2$	$n=3$					
تحلیل خطی	تحلیل خطی	تحلیل ناخطی	تحلیل خطی				
۲/۴۶۷۴	۳/۸۳۶۵	۴/۴۴۹۳	۴/۶۱۱۹	0	∞	0	گونه یکم
۱/۴۲۲۰	۳/۶۰۶۳	۵/۴۱۸۲	۵/۶۳۲۹	∞	0	0	۱/۶۶۹۰
۶/۰۳۰۲	۱۱/۱۴۰۷	۱۴/۷۴۰۳	۱۵/۱۵۳۸	∞	∞	0	گونه سوم
۹/۸۶۹۶	۲۰/۷۹۲۳	۲۸/۴۱۵۱	۲۹/۰۲۲۶	0	0	∞	گونه چهارم
۱۳/۸۸۵۹	۲۷/۷۶۹۱	۳۷/۲۲۱۹	۳۸/۰۵۹۹	∞	0	∞	گونه پنجم
۲۰/۱۹۰۷	۴۲/۱۰۹۰	۵۷/۸۷۶۲	۵۸/۹۵۹۶	0	∞	∞	گونه ششم
۲۶/۹۵۸۳	۵۳/۷۱۴۳	۷۲/۴۸۱۸	۷۳/۹۱۵۵	∞	∞	∞	گونه هفتم

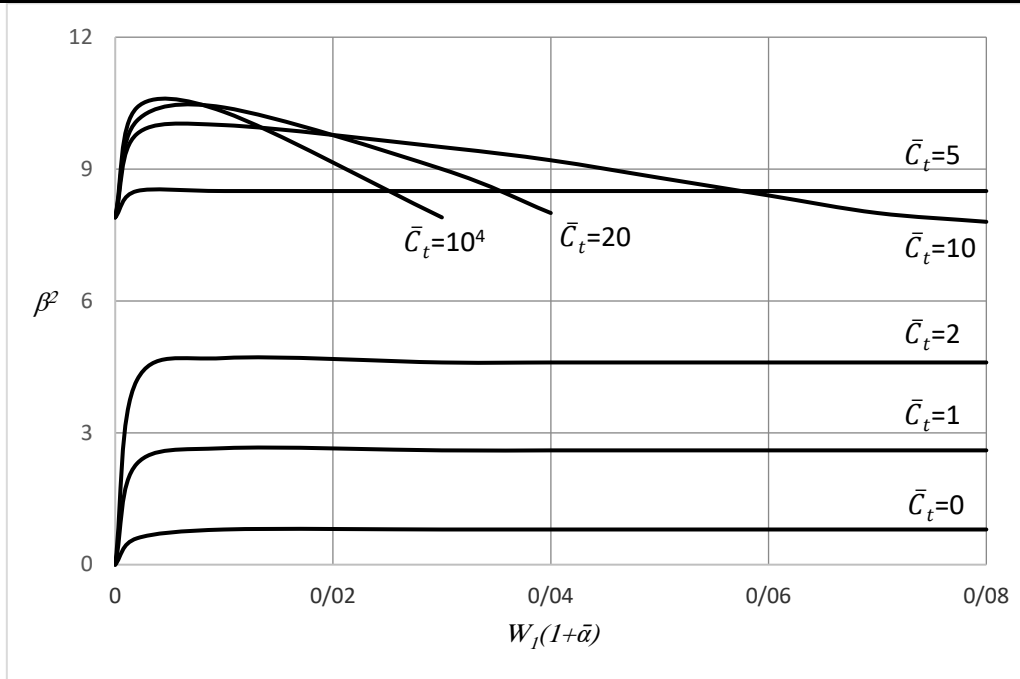


شکل ۴: نمودار مسیر ایستایی بار خارجی β^2 در برابر تغییر مکان جانبی قاب فولادی نامنشوری ($n=2$) برای دورانی متفاوت پیوند تیر به ستون و ($\lambda_{1,m} = \lambda_2 = 100, \bar{e} = 0, \rho = r = \bar{\alpha} = 1, \bar{C}_r = \bar{C}_i = 10$)



شکل ۵: نمودار مسیر ایستایی بار خارجی β^2 در برابر تغییر مکان جانبی قاب فولادی نامنشوری ($n=2$) برای دورانی متفاوت تکیه گاه و

$$(\lambda_{1,m} = \lambda_2 = 100, \bar{e} = 0, \rho = r = \bar{\alpha} = 1, \bar{R} = 10, \bar{C}_i = 0)$$



شکل ۶: نمودار مسیر ایستایی بار خارجی β^2 در برابر تغییر مکان جانبی قاب فولادی نامنشوری ($n=3$) برای سختی‌های انتقالی متفاوت تکیه‌گاه جانبی و ($\lambda_{1,m} = \lambda_2 = 100, \bar{e} = 0, \rho = r = \bar{\alpha} = 1, \bar{R} = 10, \bar{C}_r = 0$)

۳-۵- اثر برون محوری بار e

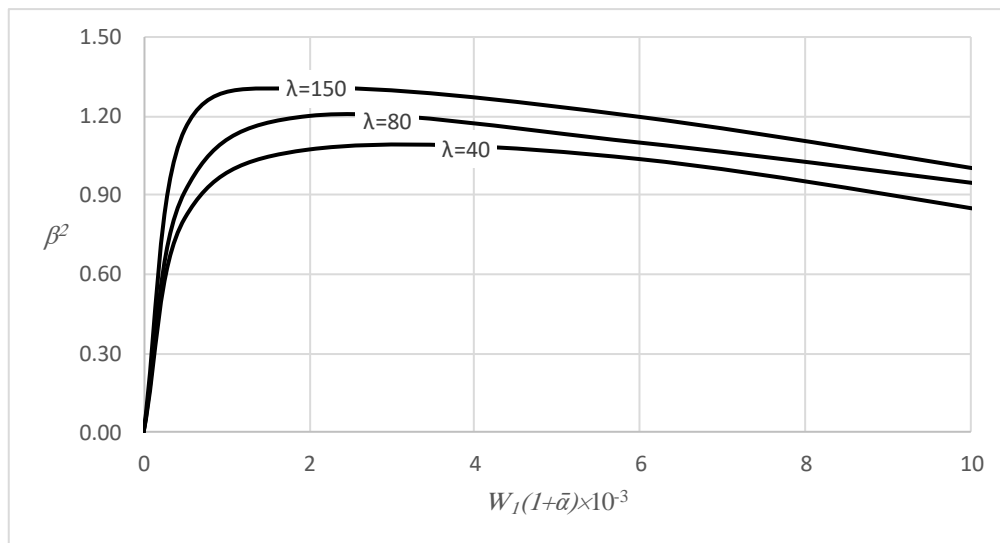
در این بخش، به منظور بررسی اثر برون محوری بار بر روی بار بحرانی، بار کمانشی قاب شکل ۱ با مقدارهای متفاوت برون محوری بار در تحلیل ناخطی حساب می‌گردد. یافته‌ها در جدول ۴ در دسترس قرار گرفته‌اند. بر پایه جدول ۴، می‌توان دید که با افزایش برون محوری بار از $\bar{e}=0.000$ تا $\bar{e}=0.007$ در قاب بررسی شده، مقدار بار بحرانی ناخطی، حدود ۷ درصد کاهش می‌یابد. همچنین، آشکار است که افزایش برون محوری، سبب کاهش بار کمانشی سازه در تحلیل پایداری ناخطی می‌گردد. یادآوری می‌کند، تغییر برون محوری بار، تاثیری بر بار کمانشی در تحلیل پایداری خطی نخواهد داشت.

جدول ۴: بار بحرانی قاب فولادی منشوری با پیوند سخت و تکیه‌گاه‌های ساده ($\lambda_{1,m} = \lambda_2 = 80, \rho = r = 1, \bar{\alpha} = 10^7, \bar{C}_r = 0, \bar{C}_i = \bar{R} = \infty$)

-۰/۰۰۷۰۰۰	-۰/۰۰۵۰۰۰	-۰/۰۰۲۵۰۰	-۰/۰۰۱۳۰۰	۰/۰۰۰۰۰۰	۰/۰۰۰۴۷۲۸۸	\bar{e}
۱۲/۶۶۹۳	۱۲/۸۳۱۷	۱۳/۱۴۲۸	۱۳/۳۳۷۸	۱۳/۶۳۳۱	۱۳/۹۱۳۶	β_{cr}^2

۴-۵- اثر نسبت لاغری عضوها λ

برای بررسی اثر نسبت لاغری روی رفتار پیش‌کمانشی و پس‌کمانشی، قاب شکل ۱، با در نظر گرفتن نسبت‌های متفاوت لاغری در شکل ۷ می‌آید. می‌توان دید که با افزایش لاغری، بار کمانشی سازه در تحلیل پایداری ناخطی افزایش خواهد یافت. به گونه‌ای که در نمونه بررسی شده، افزایش لاغری از $\lambda=40$ به $\lambda=150$ به طور تقریبی، سبب افزایش ۲۰ درصدی بار بحرانی قاب می‌شود. همچنین، بر پایه شکل ۷، برای یک مقدار مشخص از بار خارجی، تغییر مکان جانبی نوک ستون، با افزایش لاغری، کاهش می‌یابد. یادآوری می‌کند، تغییر لاغری، تاثیری بر بار کمانشی در تحلیل پایداری خطی نخواهد داشت.



شکل ۷: نمودار مسیر ایستایی بار خارجی β^2 در برابر تغییر مکان جانبی قاب فولادی نامنشوری ($n=2$) برای لاغری‌های متفاوت و $(\bar{e} = 0, r = 0.5, \rho = \bar{\alpha} = 1, \bar{C}_r = \bar{C}_t = 0, \bar{R} = 1)$.

۶- نتیجه‌گیری

در این پژوهش، تحلیل پایداری ناخطی یک قاب فولادی ساده با تکیه‌گاه‌های کشسان و پیوند نیمه‌سخت انجام پذیرفت. تیر سازه، منشوری، ولی ستون قاب، دارای مقطع I-شکل نامنشوری با ضریب‌های شکل متفاوت می‌باشد که زیر اثر بار برون محور قائم قرار دارد. باید افزود، سختی پیوندهای عضوی و تکیه‌گاهی با فنرهای خطی دورانی و انتقالی الگوسازی شدند. بر این پایه، نخست، با بهره‌جویی از نگره تیر اولر- برنولی، رابطه کارمایه نهفته کل سازه به دست آمد. در این راستا، کرنش‌ها کوچک پنداشته می‌شوند ولی تغییر مکان‌ها می‌توانند بزرگ باشند. سپس، با وارد نمودن شرط‌های مرزی طبیعی و هندسی، رابطه‌های تعادل ناخطی مسیر ایستایی پیش‌کمانشی و پس‌کمانشی قاب در دسترس قرار گرفتند. در ادامه، پس از صحت‌سنجی رابطه‌سازی پیشنهادی، به ارزیابی اثرهای ضریب شکل نامنشوری ستون، سختی تکیه-گاه‌های کشسان و پیوند نیمه‌سخت، برون محوری بار و نسبت لاغری عضوها، بر مسیر ایستایی و بار بحرانی قاب ساده پرداخته شد. با بررسی پاسخ‌های بدست آمده از نمونه‌های عددی، می‌توان به نتیجه‌های زیر دست یافت:

- ۱- افزایش ضریب شکل ستون نامنشوری، افزایش بار بحرانی سازه را در پی خواهد داشت. به گونه‌ای که در نمونه بررسی شده، افزایش ضریب شکل n از صفر به چهار، سبب افزایشی در حدود ۶۶ درصد، در بار کمانشی قاب، نسبت به حالت مشابه منشوری می‌گردد. از سوی دیگر، برای یک مقدار مشخص از بار خارجی، تغییر مکان جانبی نوک ستون، با افزایش ضریب شکل، کاهش می‌یابد.
- ۲- افزایش سختی پیوندهای تکیه‌گاهی (\bar{C}_r, \bar{C}_t) و عضوی (\bar{R}) ، سبب افزایش بار کمانشی سازه می‌شود، به گونه‌ای که این افزایش، برای نسبت‌های سختی پایین (کمتر از ۵)، بسیار چشم‌گیر، ولی برای نسبت‌های سختی بالا (بیشتر از ۵)، ناچیز است.
- ۳- در میان گونه‌های حدی بررسی شده، سختی انتقالی تکیه‌گاه جانبی، بیشترین اثر بر بار کمانشی سازه را دارد. به طوری که، افزایش عامل \bar{C}_t از صفر تا بی‌کران با در نظر گرفتن $(\lambda_{1,m} = \lambda_2 = 80, \bar{e} = 0, \rho = r = \bar{\alpha} = 1, \bar{R} = 0, \bar{C}_r = \infty)$ ، در بیشترین حالت، سبب افزایش ۱۳ برابری بار بحرانی قاب با ضریب شکل $n=3$ و افزایش ۸ برابری بار کمانشی قاب منشوری ($n=0$) می‌گردد.
- ۴- در میان نمونه‌های حدی بررسی شده، افزایش سختی دورانی پیوند تیر به ستون از صفر تا بی‌کران با در نظر گرفتن $(\lambda_{1,m} = \lambda_2 = 80, \bar{e} = 0, \rho = r = \bar{\alpha} = 1, \bar{C}_r = \bar{C}_t = \infty)$ و در کمترین حالت، به ترتیب، سبب افزایش ۲۵ درصدی و ۳۴ درصدی

بار بحرانی قاب با ضریب شکل‌های $n=0$ و $n=3$ خواهد شد. از سوی دیگر، افزایش عامل \bar{R} از صفر تا بی‌کران با در نظر گرفتن $(\lambda_{1,m} = \lambda_2 = 80, \bar{e} = 0, \rho = r = \bar{\alpha} = 1, \bar{C}_r = \infty, \bar{C}_t = 0)$ در بیشترین حالت، سبب افزایش ۳ برابری بار کمانشی سازه با ضریب شکل $n=3$ و افزایش ۲/۵ برابری بار کمانشی قاب منشوری ($n=0$) می‌شود.

۵- افزایش سختی دورانی پیوند ستون به تکیه‌گاه از صفر ($\bar{C}_r = 0$) تا بی‌کران ($\bar{C}_r = \infty$)، در میان نمونه‌های بررسی شده با در نظر گرفتن $(\lambda_{1,m} = \lambda_2 = 80, \bar{e} = 0, \rho = r = \bar{\alpha} = 1, \bar{R} = \bar{C}_t = \infty)$ و برای ضریب شکل‌های متفاوت، در کمترین حالت، به طور تقریبی، سبب افزایش ۲ برابری بار بحرانی قاب می‌گردد. با وجود این، سنجش بار کمانشی گونه‌های حدی متفاوت نشان می‌دهد که با افزایش عامل \bar{C}_r از صفر تا بی‌کران با در نظر گرفتن $(\lambda_{1,m} = \lambda_2 = 80, \bar{e} = 0, \rho = r = \bar{\alpha} = 1, \bar{R} = \infty, \bar{C}_t = 0)$ و در بیشترین حالت، بار بحرانی قاب با ضریب شکل‌های $n=0$ و $n=3$ به ترتیب، ۲/۷ برابر و ۴ برابر می‌شود.

۶- ناخطی پنداشتن تحلیل پایداری، سبب کاهش بار بحرانی سازه می‌گردد. به طوری که، بار کمانشی نمونه بررسی شده، $(n=0, \lambda_{1,m} = \lambda_2 = 80, \bar{e} = 0, \rho = r = \bar{\alpha} = 1, \bar{R} = 0, \bar{C}_r = \infty, \bar{C}_t = 0)$ در حالت خطی، حدود ۴ درصد، بیشتر از بار بحرانی در حالت ناخطی است.

۷- افزایش برون محوری، سبب کاهش بار کمانشی ناخطی سازه می‌گردد. به گونه‌ای که افزایش برون محوری بار از $\bar{e}=0.000$ تا $\bar{e}=0.007$ در قاب بررسی شده، سبب کاهش مقدار بار بحرانی ناخطی در حدود ۷ درصد خواهد شد.

۸- با افزایش لاغری، بار کمانشی ناخطی سازه افزایش خواهد یافت. به طوری که در نمونه بررسی شده، $(n=2, \bar{e} = 0, r = 0.5, \rho = \bar{\alpha} = 1, \bar{C}_r = \bar{C}_t = 0, \bar{R} = 1)$ ، افزایش لاغری از $\lambda=40$ به $\lambda=150$ ، به طور تقریبی، سبب افزایش ۲۰ درصدی بار بحرانی قاب می‌شود. همچنین، برای یک مقدار مشخص از بار خارجی، تغییر مکان جانبی نوک ستون، با افزایش لاغری، کاهش می‌یابد.

مراجع

- [1] Kounadis, A.N., Giri, J. and Simitzes, G.J. (1977). Nonlinear stability analysis of an eccentrically loaded two-bar frame. *Journal of Applied Mechanics*. 44 (4), 701–706. DOI:https://doi.org/10.1115/1.3424160.
- [2] Simitzes, G.J. and Vlahinos, A.S. (1982). Stability analysis of a semi-rigidly connected simple frame. *Journal of Constructional Steel Research*. 2 (3), 29–32. DOI:https://doi.org/10.1016/0143-974X(82)90031-1.
- [3] Kounadis, A.N. and Ermopoulos, J.C. (1984). Postbuckling analysis of a simple frame with varying stiffness. *Acta Mechanica*. 54 (1–2), 95–105. DOI:https://doi.org/10.1007/BF01190599.
- [4] Avraam, T. and Kounadis, A. (1994). Elastica stability analysis of a simple frame under a follower force. *Engineering Structures*. 16 (4), 238–241. DOI:https://doi.org/10.1016/0141-0296(94)90062-0.
- [5] Kounadis, A.N. (2002). Dynamic buckling of simple two-bar frames using catastrophe theory. *International Journal of Non-Linear Mechanics*. 37 (7), 1249–1259. DOI:https://doi.org/10.1016/S0020-7462(01)00138-X.
- [6] Raftoyiannis, I.G. and Kounadis, A.N. (2009). Dynamic buckling of non-sway imperfect rectangular steel frames. *Engineering Transactions*. 57 (1), 3–15.
- [7] Ioannidis, G.I. and Raftoyiannis, I.G. (2005). A simplified nonlinear stability analysis of an imperfect rectangular two-bar frame. *Computational Mechanics*. 35 (2), 127–133. DOI:https://doi.org/10.1007/s00466-004-0608-7.
- [8] Avraam, T.P. and Raftoyiannis, I.G. (2010). Nonlinear buckling analysis of simple geometrically imperfect frames. *Archive of Applied Mechanics*. 80 (4), 441–450. DOI:https://doi.org/10.1007/s00419-009-0325-y.
- [9] رضایی‌پژند، م. و بمبائی‌چی، م. (۱۳۸۸)، تحلیل کشسان مرتبه دوم و پایداری قاب‌های فولادی با پیوندهای نیمه‌سخت. *نشریه علمی و پژوهشی سازه و فولاد*. ۵ (۶)، ۸۱–۵۹.
- [۱۰] رضایی‌پژند، م.، شهبان، ف. و بمبائی‌چی، م. (۱۳۹۳)، تحلیل احتمالاتی پایداری قاب‌های فولادی ساده و دروازه‌ای با پیوندها و تکیه‌گاه‌های نرم. *نشریه علمی و پژوهشی سازه و فولاد*. ۱۰ (۱۶)، ۷۹–۵۱.
- [11] Raftoyiannis, I.G. (2013). Nonlinear Stability Analysis of Simple Steel Frames with Load Imperfections. *Frontiers of Engineering Mechanics Research*. 2, 15–21.
- [12] Avraam, T.P. and Fasoulakis, Z.C. (2013). Nonlinear postbuckling analysis of frames with varying cross-section columns. *Engineering Structures*. 56, 1–7. DOI:https://doi.org/10.1016/j.engstruct.2013.04.010.

[13] Fasoulakis, Z.C., Avraam, T.P. and Raftoyiannis, I.G. (2015). Dynamic buckling of partially-sway frames with varying stiffness using catastrophe theory. *International Journal of Non-Linear Mechanics*. 71, 116-126. DOI:<https://doi.org/10.1016/j.ijnonlinmec.2014.10.002>.

