



The Study of Elastic Buckling Load of Uniform & Non-Uniform Columns Under Non-Uniform Axial Loading Using Finite Element Method

Masoud Mahmoudabadi¹, Reza Akbari², Seyed Mohammad Reza Hasani³

1- Assistant Professor, Department of Civil Engineering, Faculty of Engineering, University of Qom, Qom, Iran

2- MSc Student, Department of Civil Engineering, University of Qom, Qom, Iran

3- Phd student, Department of Civil Engineering, Noshirvani University of Technology, Babol, Iran

ABSTRACT

The need to use non-uniform members in the structures from the past till now had been proposed although the subjects and research references in this case are insufficient. Therefore the use of non-uniform members is inevitable and should be carefully examined. About this members the main subject that should be investigated is buckling that if it occurs it leads to member failure which may lead to collapse of the local or entire structure. So the exact solution of buckling load of non-uniform columns is available only for simple cases. In this paper a method based on finite element method is used for studying the problem of elastic buckling load of non-uniform columns with general cases of cross-section and axial loading. In first the column is divided to arbitrary numbers of finite elements. Then the stiffness matrix and geometric stiffness matrix is obtained based on existing relationship for each element and then for overall column. After applying boundary conditions using the eigenvalue equation to obtain the critical buckling load. It is clear that the effects of changes in cross-section of a column appear in stiffness matrix and changes in axial loading in geometric stiffness matrix. The proposed method in addition to high accuracy is general and could be used by the help of Matlab codes. Results obtained from this method are compared to ones that presented by Serna et al. The procedure in this paper is rating as a exact solutions but Serna's method is a closed form method that is from approximated solutions. The results are presented for uniform columns under non-uniform axial loading and non-uniform columns under non-uniform axial loading. Different non-uniform columns contain single web-tapered columns, double web-tapered columns and web-tapered & flange-tapered columns. Also results are presented for various end boundary conditions that contain hinged-hinged, clamped-clamped, hinged-clamped and clamped-free.

ARTICLE INFO

Receive Date: 23 October 2018

Revise Date: 04 March 2019

Accept Date: 23 April 2019

Keywords:

Elastic buckling
Uniform and Non-Uniform
columns
Axial load
Eigenvalue
Finite element

All rights reserved to Iranian Society of Structural Engineering.

doi: 10.22065/JSCE.2019.153522.1689

*Corresponding author: author:MasoudMahmoudabadi
Email address: m.mahmoudabadi@qom.ac.ir

بررسی بارکمانش ارتجاعی ستون‌های یکنواخت و غیریکنواخت تحت بار محوری

غیریکنواخت با استفاده از روش اجزای محدود

مسعود محمودآبادی^{۱*}، رضا اکبری^۲، سید محمدرضا حسینی^۳

۱- استادیار گروه عمران، دانشکده فنی و مهندسی دانشگاه قم، قم، ایران

۲- کارشناس ارشد عمران- سازه، دانشکده فنی و مهندسی دانشگاه قم، قم، ایران

۳- دانشجوی دکتری عمران- سازه، دانشگاه صنعتی نوشیروانی، بابل، ایران

چکیده

نیاز به استفاده از اعضای غیریکنواخت در سازه از گذشته تا به حال مطرح بوده است در عین حال موضوعات و مراجع تحقیقی در این مورد زیاد نمی باشند. در مورد این اعضا یکی از مهمترین مسائلی که باید مورد بررسی قرار گیرد کمانش ستون ها است که در صورت رخ دادن، باعث از دست رفتن عضو می گردد که ممکن است منجر به فروپاشی موضعی یا کل ستون و یا سازه شود. در این مقاله روشی دقیق بر اساس اجزای محدود برای بررسی مسئله کمانش ارتجاعی ستون های یکنواخت و غیر یکنواخت با هر سطح مقطع و هر حالت بارگذاری ارائه شده است. این روش برای تمام شرایط مرزی تکیه گاهی قابل کاربرد است. در ابتدا ستون را به تعداد جزء دلخواه تقسیم بندی کرده و سپس ماتریس سختی و ماتریس سختی هندسی را بر اساس روابط موجود برای هر جزء و سپس برای کل ستون تشکیل شده است و پس از اعمال شرایط تکیه گاهی با استفاده از رابطه ی مقدار مشخصه بار بحرانی کمانش بدست آمده است. نتایج این روش با روش سایر محققین که به صورت تقریبی محاسبه شده اند مقایسه شده است. روش ارائه شده علاوه بر دقت بالا دارای جامعیت نیز می باشد و با کمک برنامه کدنویسی شده *Matlab* می توان از آن بهره گرفت.

کلمات کلیدی: کمانش ارتجاعی، ستون های یکنواخت و غیریکنواخت، بار محوری، مقدار مشخصه، روش اجزای محدود

| شناسه دیجیتال: | | سابقه مقاله: | | | | |
|--|---|--------------|---------------|------------|------------------------------------|------------|
| doi: | 10.22065/JSCE.2019.153522.1689 | چاپ | انتشار آنلاین | پذیرش | بازنگری | دریافت |
| | https://dx.doi.org/10.22065/jsce.2019.153522.1689 | ۱۴۰۰/۰۲/۳۰ | ۱۳۹۸/۰۲/۰۳ | ۱۳۹۸/۰۲/۰۳ | ۱۳۹۷/۱۱/۱۳ | ۱۳۹۷/۰۸/۰۱ |
| مسعود محمودآبادی mahmoudabadi@qom.ac.ir | | | | | *نویسنده مسئول: پست الکترونیکی: | |

۱- مقدمه

برای سازه‌های پیچیده، خاص یا عظیم، بکارگیری اعضای غیریکنواخت بدلیل کاهش مقدار مصالح مورد نیاز بسیار سودمند است. وزن مصالح می‌تواند بطور خاص در برخی از انواع سازه‌ها پراهمیت و بحرانی باشد بنابراین این بکارگیری اعضای غیریکنواخت امری اجتناب ناپذیر است و باید به دقت مورد بررسی قرار گیرد.

این نوع از اعضا فواید متعددی نسبت به اعضای منشوری یکنواخت دارند. اعضای باریک شونده دارای بازدهی ساخت بیشتری می‌باشند زیرا می‌توان در نواحی که نیاز به بار بیشتری است از سطح مقطع بزرگتری بهره گرفت و در نواحی با بار کمتر از مقاطع با سطح مقطع کوچکتر استفاده نمود [۱]. برای اولین بار، اوپلر در مقاله‌ی خود در سال ۱۷۵۹ مسئله کمانش ستون با در نظر گرفتن سطح مقطع غیریکنواخت را مورد بررسی قرار داد [۲]. اولین پاسخ‌ها در خصوص محاسبه‌ی بار بحرانی کمانش الاستیک ستون‌های باریک شونده، شامل جواب‌های تقریبی تیموشنکو، مورلی و دینیک بوسیله‌ی حل معادله دیفرانسیل سختی تغییر شکل یافته یک ستون ایده‌آل در مورد کمانش الاستیک می‌باشد [۳].

تحقیقات و مقالات ارائه شده از نظر دقت در جواب را می‌توان به دو دسته‌ی جواب‌های تقریبی و دقیق تقسیم‌بندی نمود. یکی از روش‌های بررسی مسئله کمانش که از جمله روش‌های تقریبی و سریع می‌باشد ارائه‌ی فرمول‌های فرم بسته است.

هدف، یک فرمول‌بندی به فرم بسته و ایجاد یک شیوه‌ی تقریبی و سریع و ساده برای بدست آوردن مقدار یک ورودی می‌باشد، مقدار دقیق‌تر می‌تواند از روش‌های پیچیده‌تر بدست آید. این نوع بیان به فرم بسته معمولاً حاصل از نتایج مطالعات پارامتریک می‌باشد [۴]. با استفاده از این روش، جواب‌هایی برای بعضی از شرایط تکیه‌گاهی و بعضی حالات بارگذاری محوری بدست آورده‌اند. در مقابل، روش‌های دقیق‌تری نیز وجود دارد که از جمله می‌توان به روش اجزای محدود اشاره کرد.

شبیه‌سازی‌های ساده شده عددی برای رسیدن به رفتار کلی اتصال‌ها نیز مناسب هستند، به این دلیل که کم حجم هستند و به زمان کمی برای تحلیل نیاز دارند [۵]. از نمونه موارد پیشرفته شبیه‌سازی‌های عددی و مدلسازی‌های عددی، می‌توان به شبیه‌سازی عددی در اتصالات پس کشیده [۵]، مدلسازی المان محدود اتصالات صلب برای ساختمان‌های بتنی پیش ساخته با استفاده از المان رابط فولادی [۶]، اشاره نمود. همچنین کمانش ستون‌های واقع بر بستر الاستیک با شرایط مرزی مختلف به روش انرژی [۷] و پایداری ستون‌های لاغر واقع بر بستر الاستیک با شرایط انتهایی تعمیم یافته [۸] و اثرات تغییر شکل‌های برشی بر روی پایداری الاستیک و دینامیک تیر-ستون‌های واقع بر بستر الاستیک مورد مطالعه قرار گرفته است [۹ و ۱۰]. روش اجزای محدود یک تکنیک عددی است که سیستم را بصورت یک مجموعه که در نقاطی تحت عنوان گره به یکدیگر متصل هستند در نظر می‌گیرد و هر جزء با جابه‌جایی کلی و نیروهای کلی مرتبط می‌باشد. ماتریس سختی سازه متشکل از ماتریس سختی اجزای منفرد و تشکیل این ماتریس به کمک اعمال شرایط تعادل و سازگاری تغییر مکان‌ها می‌باشد. روش اجزای محدود در مسائل مقدار مشخصه در جواب دقیق مسائل کمانش توسط سیده بطور گسترده‌ای مورد بررسی قرار گرفت. به نظر می‌رسد روش اجزای محدود بهترین روش در جهان برای استفاده در نرم افزارهای کامپیوتری است [۲]. روش اجزای محدود بطور گسترده‌ای برای حالات کلی شامل شرایط مرزی کلی و دیگر مودها بغیر از کمانش خمشی بکار گرفته شده است.

هنگام بکارگیری روش اجزای محدود برای حالتی که مشخصات سطح مقطع در طول ستون متغیر است، ضروری است که ستون را به تعداد زیادی جزء کوچک تقسیم بندی شود و تعدادی ممان اینرسی و نیروی محوری معادل برای هر جزء در نظر گرفته شود. پاسخ به دست آمده تقریبی بوده و می‌توان با در نظر گرفتن تعداد اجزای بیشتر پاسخ دقیق‌تری را بدست آورد.

آیزن برگر و ریچ یک پاسخ اجزای محدود ارائه داده‌اند که می‌توان از آن برای اعضای متغیر بهره گرفت. آن‌ها این روش را برای تمام حالات بحث شده بکار گرفتند و نتایج قابل قبولی نیز بدست آوردند [۱۱].

در پژوهش حاضر، روشی برای بدست آوردن بار کمانش ارتجاعی ستون‌های غیریکنواخت با هر تابع سختی مقطع و تحت هر حالت بارگذاری غیریکنواخت و تحت هر شرایط تکیه‌گاهی از قبیل دو سر مفصل، یک سر گیردار-یک سر آزاد (طره)، یک سر گیردار-یک

سر مفصل، یک سر گیردار-یک سر غلطکی و دو سر گیردار ارائه شده است. این روش که یکی از روش‌های بکارگیری مسئله مقدار مشخصه در مسایل اجزای محدود می‌باشد، روش ماتریسی نامیده شده است.
بار کمانشی یا بار بحرانی به این صورت تعریف می‌گردد:

$$P_E = \frac{\pi^2 EI}{L^2} \quad (1)$$

که در آن E مدول الاستیسیته ماده، I ممان دوم سطح مقطع حول محوری که کمانش در آن رخ می‌دهد و L طول ستون می‌باشد. بار اویلر P_E ، یک مقدار مرجع است که مقاومت ستون‌های حقیقی اغلب با آن سنجیده می‌گردد.
طبق مرجع [۴] برای تیر و ستون‌های غیریکنواخت بار کمانشی الاستیک را به این صورت می‌توان بیان نمود:

$$P_{cr} = CP_E \quad (2)$$

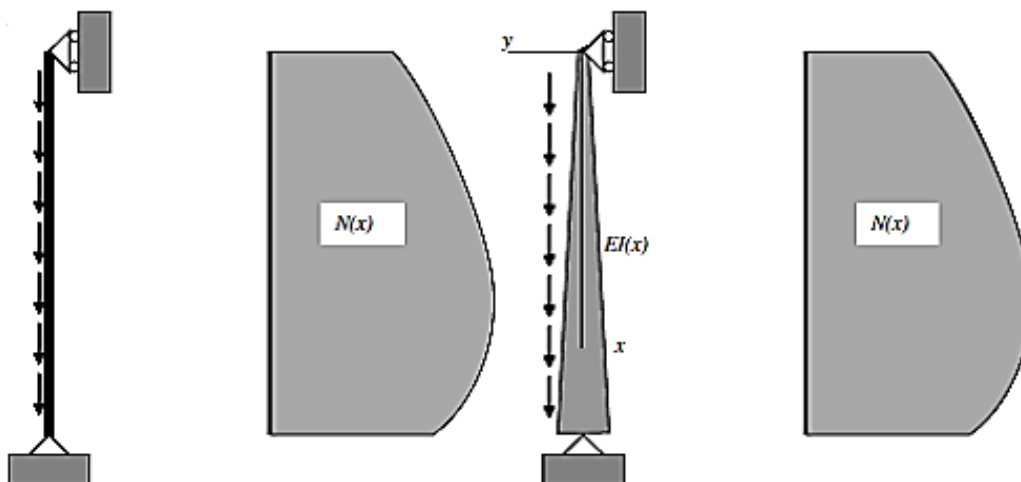
که در آن P_{cr} متناظر با حداکثر مقدار توزیع بار محوری غیر یکنواخت، C ضریب بار یکنواخت معادل، و P_E بار بحرانی اویلر ستون است که طبق رابطه (۱) برابر است با:

$$P_E = \frac{\pi^2 EI}{L^2} \quad (3)$$

۲- تعریف مشخصات و مدل‌سازی

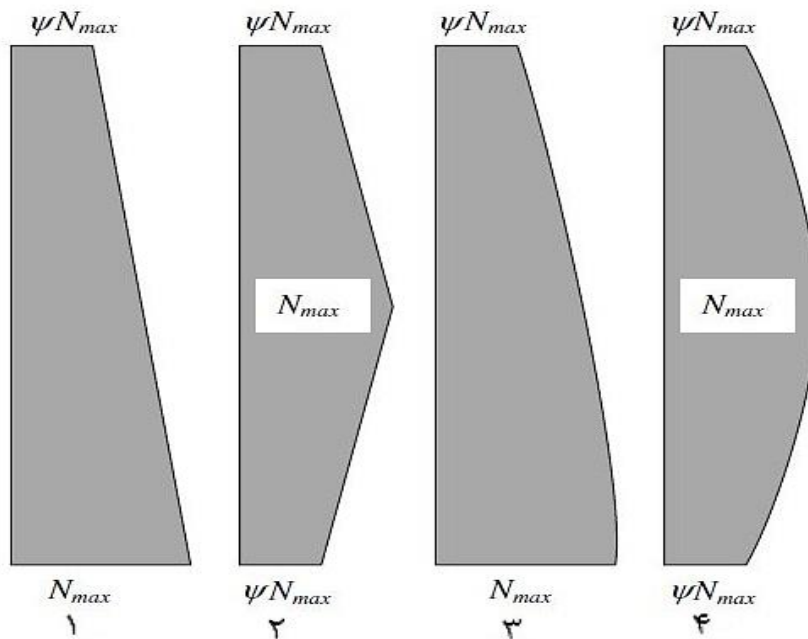
۲-۱- مشخصات ستون‌ها و بارگذاری‌های مختلف محوری

یک ستون یکنواخت تحت بار محوری غیریکنواخت و یک ستون غیریکنواخت تحت بار محوری غیریکنواخت مطابق شکل ۱ در نظر گرفته می‌شود که مقطع ستون می‌تواند دارای هر تابع دلخواهی باشد.



شکل ۱: ستون یکنواخت تحت بار محوری غیریکنواخت و ستون غیریکنواخت تحت بار محوری غیریکنواخت

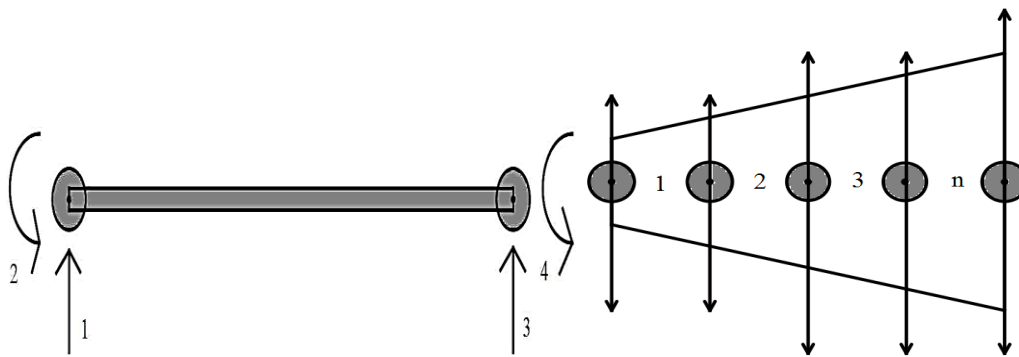
حالات بارگذاری محوری غیریکنواختی مطابق شکل ۲ نشان داده شده است.



شکل ۲: حالات بارگذاری غیریکنواخت محوری شامل: ۱. توزیع خطی با حداکثر در یک انتها ۲. توزیع خطی با حداکثر در وسط دهانه ۳. توزیع سهمی با حداکثر در یک انتها ۴. توزیع سهمی با حداکثر در وسط دهانه

۲-۲- روش ماتریسی

روش ماتریسی برای کلیه حالات ستون‌های یکنواخت و غیریکنواخت تحت هر حالت بارگذاری محوری یکنواخت یا غیریکنواخت قابل کاربرد است. در این روش ابتدا ستون مطابق شکل ۳ به چند المان تقسیم‌بندی می‌شود. بدیهی است که هرچه تعداد المان‌ها افزایش یابد دقت روش نیز افزایش خواهد یافت. هر المان توسط دو گره مشخص می‌گردد. تعداد درجات آزادی هر گره طبق شکل ۳ برابر با ۲ می‌باشد که یک درجه آزادی انتقالی و یک درجه آزادی چرخشی می‌باشد. طبق شکل ۴ درجات آزادی ۱ و ۳ انتقالی و درجات آزادی ۲ و ۴ چرخشی می‌باشد. در ادامه ماتریس سختی و ماتریس سختی هندسی برای هر المان بدست آورده شده و پس از آن ماتریس‌های سختی کلی و ماتریس سختی هندسی کلی سازه تشکیل داده می‌شود و سپس شرایط مرزی را اعمال نمود. شرایط مرزی در مورد ستون‌ها به شرایط تکیه‌گاهی مرتبط می‌باشد. پس از اعمال شرایط مرزی می‌توان با استفاده از رابطه‌ی مقدار مشخصه، مقدار بار بحرانی کمناشی خمشی ستون را بدست آورد.

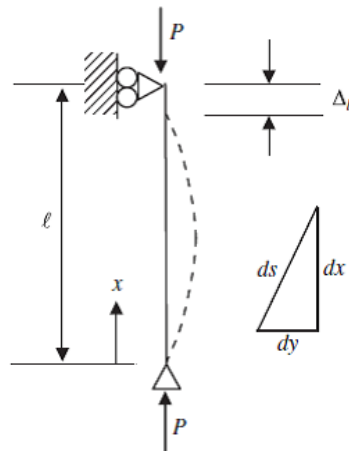


شکل ۴: یک المان تیری و درجات آزادی گره‌ها

شکل ۳: تقسیم ستون غیریکنواخت به n المان دو گره‌ای

۳-۲- محاسبه ماتریس سختی و ماتریس سختی هندسی المان تیری

مطابق شکل ۵ کرنش محوری یک نقطه در فاصله y از محور خنثی برابر است با [۱۲]:



شکل ۵: کرنش ایجاد شده در ستون

$$\varepsilon_x = \frac{du}{dx} - y \frac{d^2v}{dx^2} + \frac{1}{2} \left(\frac{dv}{dx} \right)^2 \quad (3)$$

بطوریکه u و v مولفه‌های جابه‌جایی در جهات x و y بوده، $\frac{du}{dx}$ کرنش محوری، $-y \frac{d^2v}{dx^2}$ کرنش ناشی از انحناء و $\frac{1}{2} \left(\frac{dv}{dx} \right)^2$ بخش غیر خطی کرنش محوری می‌باشد.

با در نظر گرفتن $dV = Adx$ ، انرژی کرنشی المان برابر است با:

$$U = \frac{1}{2} \int_V \varepsilon \sigma dV = \frac{1}{2} \int_l \int_A E \varepsilon_x^2 dA dx \quad (4)$$

با جایگذاری معادله (۳) در معادله (۴) و یادآوری آنکه:

$$\int_A E \frac{du}{dx} dA = P$$

و توجه به این نکته که P نیروی محوری با علامت مثبت در کشش می‌باشد، آنگاه انرژی کرنشی برابر خواهد بود با:

$$U = \frac{1}{2} \int_0^l EA \left(\frac{du}{dx} \right)^2 dx + \frac{1}{2} \int_0^l EI \left(\frac{d^2v}{dx^2} \right)^2 dx + \frac{1}{2} \int_0^l P \left(\frac{dv}{dx} \right)^2 dx \quad (5)$$

اولین انتگرال در معادله (۵) در خصوص ماتریس سختی برای یک المان میلگردی مرتبط با درجه آزادی جنبشی u_1 و u_2 می‌باشد. دومین انتگرال مربوط به ماتریس سختی برای یک المان تیری بوده و سومین انتگرال نیز کار انجام شده توسط بار خارجی P هنگامی است که المان‌های دیفرانسیلی dx به اندازه $\frac{dx}{2} \times \left(\frac{dv}{dx} \right)^2$ کشیده شوند. دومین و سومین انتگرال به ترتیب منجر به تشکیل ماتریس سختی و ماتریس سختی هندسی المان می‌شوند. جابجایی جانبی v تیر و مشتق آن و مشتق دوم آن برابر هستند با [۱۲]:

$$v = [N]\{\Delta\} \quad (6)$$

$$\frac{dv}{dx} = \frac{d[N]}{dx} \{\Delta\} = [G]\{\Delta\} \quad (7)$$

$$\frac{d^2 v}{dx^2} = \frac{d^2 [N]}{dx^2} \{\Delta\} = [B] \{\Delta\} \quad (8)$$

به طوری که:

$$[\Delta] = [v_1 \ \theta_1 \ v_2 \ \theta_2] \quad (9)$$

$$[N] = \left[1 - \frac{3x^2}{l^2} + \frac{2x^3}{l^3} \quad x - \frac{2x^2}{l} + \frac{x^3}{l^2} \quad \frac{3x^2}{l^2} - \frac{2x^3}{l^3} \quad -\frac{x^2}{l} + \frac{x^3}{l^2} \right] \quad (10)$$

$$[G] = \left[-\frac{6x}{l^2} + \frac{6x^2}{l^3} \quad 1 - \frac{4x}{l} + \frac{3x^2}{l^2} \quad \frac{6x}{l^2} - \frac{6x^2}{l^3} \quad -\frac{2x}{l} + \frac{3x^2}{l^2} \right] \quad (11)$$

$$[B] = \left[-\frac{6}{l^2} + \frac{12x}{l^3} \quad -\frac{4}{l} + \frac{6x}{l^2} \quad \frac{6}{l^2} - \frac{12x}{l^3} \quad -\frac{2}{l} + \frac{6x}{l^2} \right] \quad (12)$$

انتگرال دوم نیز به این صورت بیان می‌گردد:

$$\frac{1}{2} [\Delta] [K] \{\Delta\} = \frac{1}{2} [\Delta] \left[\int_0^l EI \{B\} [B] dx \right] \{\Delta\} \quad (13)$$

و انتگرال سوم نیز به این صورت قابل بیان می‌باشد:

$$\frac{1}{2} [\Delta] [K_G] \{\Delta\} = \frac{1}{2} [\Delta] \left[\int_0^l P \{G\} [G] dx \right] \{\Delta\} \quad (14)$$

بنابراین ماتریس سختی و ماتریس سختی هندسی یک المان تیری به ترتیب عبارتند از:

$$[K] = \int_0^l EI \{B\} [B] dx \quad (15)$$

$$[K_G] = \int_0^l P \{G\} [G] dx \quad (16)$$

با استفاده از معادلات ارائه شده می‌توان ماتریس‌های سختی و سختی هندسی کلی سازه را تشکیل داده و پس از اعمال شرایط تکیه گاهی از آن‌ها برای استفاده در معادله مشخصه رابطه (۱۷) بهره گرفت:

$$|K_T - \lambda K_{GT}| = 0 \quad (17)$$

در معادله (۱۷) K_T ماتریس سختی کلی و K_{GT} ماتریس سختی هندسی کلی سازه و λ همان مقدار ویژه و بار کمانشی خمشی بحرانی مطلوب می‌باشد. روشن است که تغییرات سطح مقطع یک ستون غیریکنواخت اثر خود را در ماتریس سختی و تغییرات نیروی محوری در ماتریس سختی هندسی اثر می‌گذارد. با استفاده از نرم افزار Matlab [۱۳] برنامه‌ای کد نویسی شده است که با وارد نمودن تابع سختی و تابع بار محوری توانایی محاسبه بار کمانشی را به ازای هر تعداد جزء محاسبه نماید.

۳- بررسی نتایج

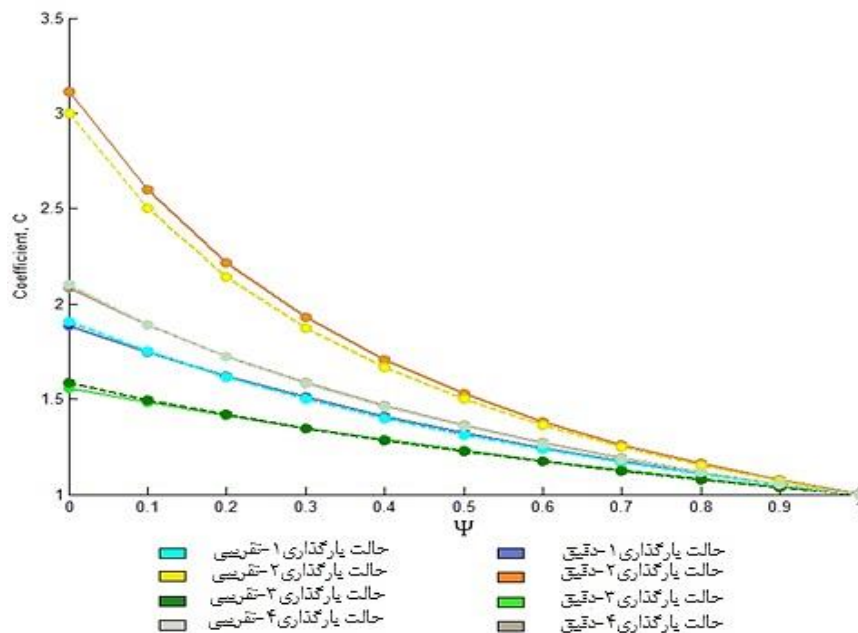
در این قسمت نتایج روش ماتریسی برای ستون‌های یکنواخت تحت بار محوری غیریکنواخت و ستون‌های غیریکنواخت تحت بار محوری غیریکنواخت ارائه شده است. لازم به ذکر است که نتایج همان ضریب بار یکنواخت معادل C می‌باشد و برای ۴ حالت بارگذاری طبق شکل ۲ مورد محاسبه قرار گرفته است. تعداد ۱۰۰ المان نیز برای هر حالت در نظر گرفته شده است.

۳-۱- نتایج برای شرایط تکیه‌گاهی دو سر مفصل

ابتدا نتایج حاصل از روش ماتریسی را با نتایج ارائه شده توسط سرنا و همکارانش [۴] که تنها برای شرایط مرزی دو سر مفصل می‌باشد و در منحنی‌ها با خط چین نشان داده شده است مورد مقایسه قرار می‌گیرند.

۳-۳-۱- نتایج برای ستون‌های یکنواخت تحت بار محوری غیریکنواخت

جواب اجزای محدود و جواب سرنا و همکارانش که از روش‌های فرم بسته می‌باشد در شکل ۶ به صورت خط چین ارائه و مورد مقایسه قرار گرفته است:

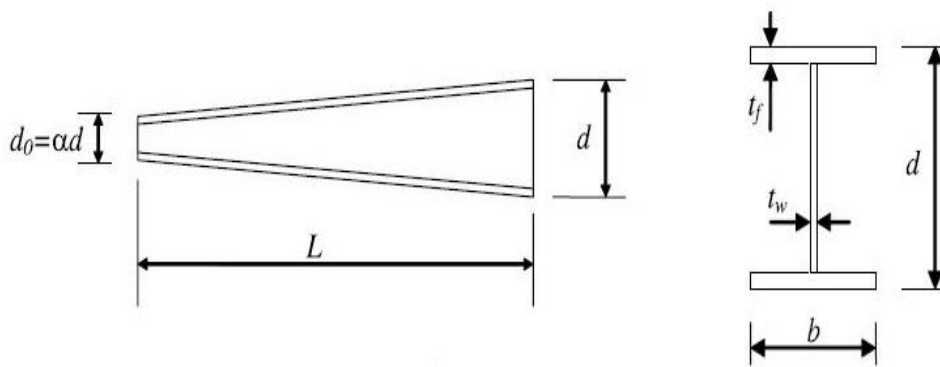


شکل ۶: مقایسه نتایج دقیق در برابر فرمول فرم بسته سرنا و همکاران

۳-۱-۲- نتایج برای ستون‌های غیریکنواخت تحت بار محوری غیریکنواخت

۳-۱-۲-۱- نتایج برای ستون‌های منفرد با جان باریک شونده

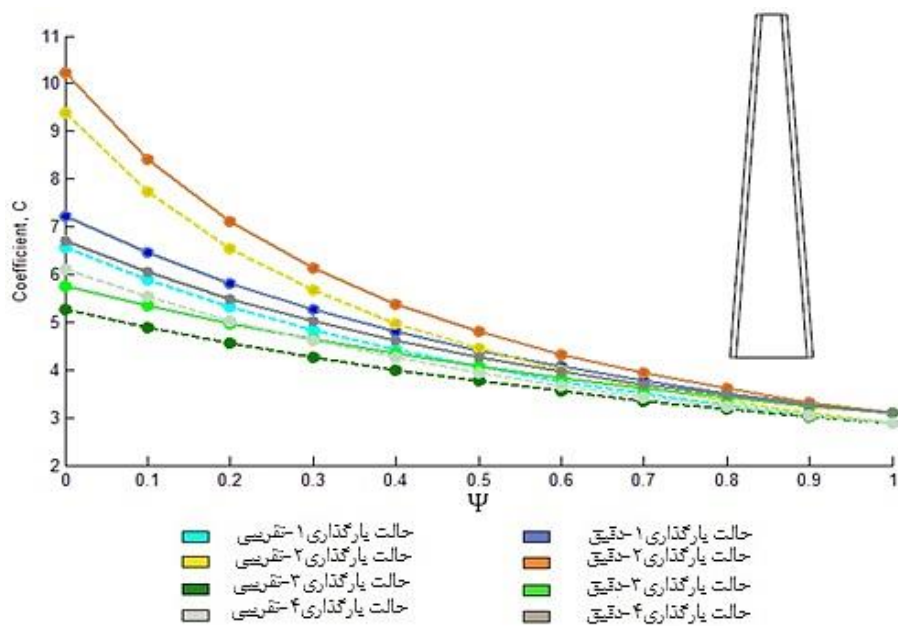
ستونی که در این قسمت مورد بررسی قرار گرفته است دارای مشخصاتی مطابق شکل ۷ است که سطح مقطع آن به صورت جدول ۱ در نظر گرفته شده است. برای این حالت نتایج روش سرنا و همکارانش با خط چین در شکل ۸ ارائه شده است.



شکل ۷: ستون منفرد با جان باریک شونده

جدول ۱: مقطع ستون

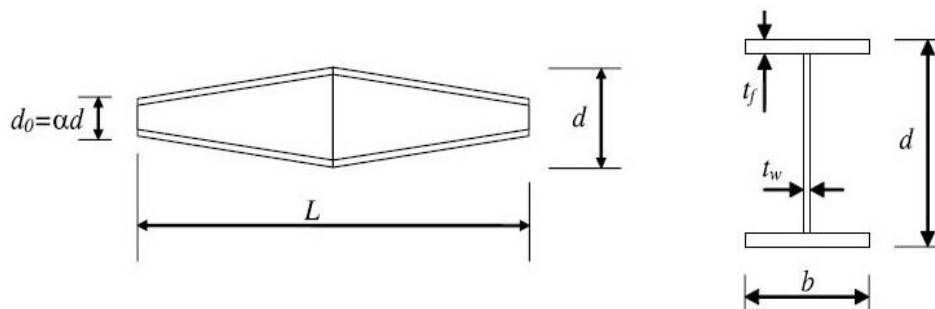
| d_0 (cm) | b_0 (cm) | t_f (mm) | t_w (mm) | α |
|------------|------------|------------|------------|----------|
| ۴۰۰ | ۴۰۰ | ۴۰ | ۲۰ | ۰/۴ |



شکل ۸: مقایسه نتایج دقیق در برابر تقریبی

۳-۲-۱-۲- نتایج بدست آمده برای ستون‌های با جان دوپل باریک شونده

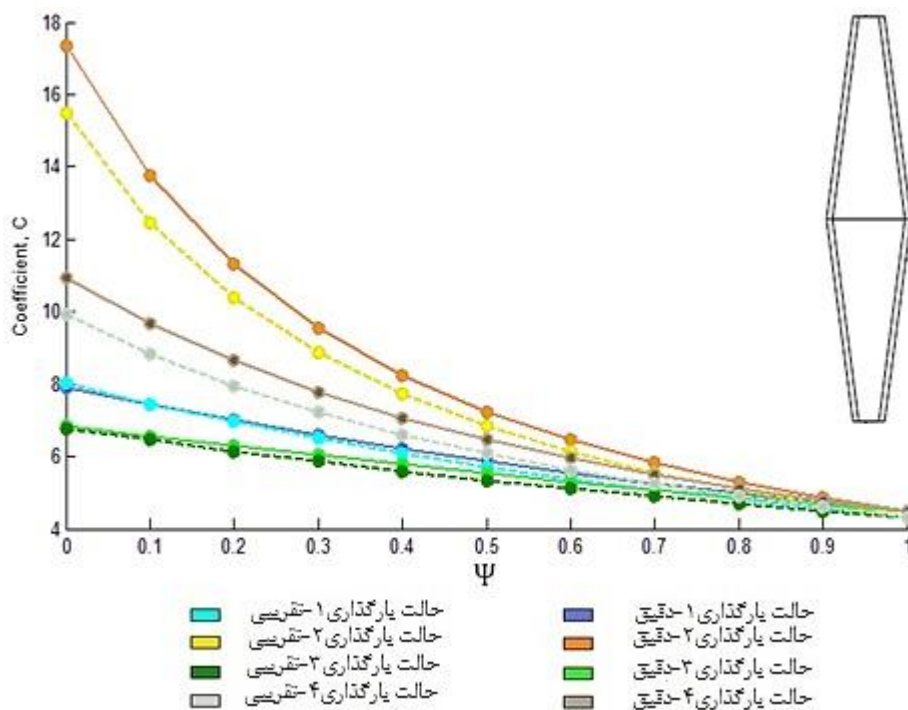
ستون مورد مطالعه دارای مشخصات مطابق با شکل ۹ است و سطح مقطع برای این ستون بصورت جدول ۲ در نظر گرفته شده است. لازم به ذکر است که نتیجه بدست آمده در شکل ۱۰ نشان داده شده و با نتایج فرم بسته سرنا مورد مقایسه قرار گرفته است.



شکل ۹: ستون با جان دابل باریک شونده

جدول ۲: مقطع ستون مورد مطالعه

| d_0 (cm) | b_0 (cm) | t_f (mm) | t_w (mm) | α |
|------------|------------|------------|------------|----------|
| ۴۰۰ | ۴۰۰ | ۴۰ | ۲۰ | ۰/۴ |



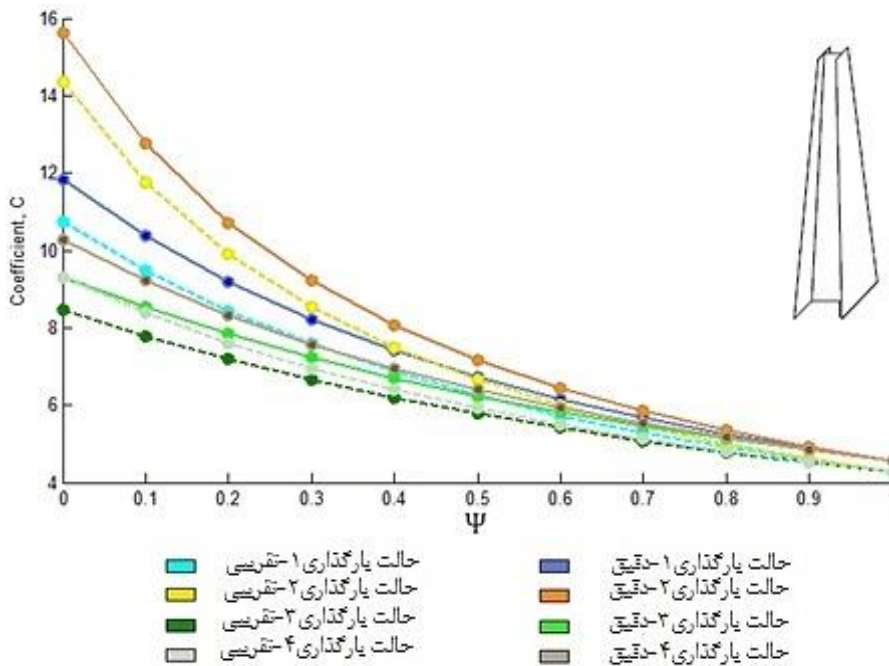
شکل ۱۰: مقایسه نتایج دقیق در برابر تقریبی در ستون با جان دابل باریک شونده

۳-۲-۱-۳- نتایج برای ستون با جان و بال باریک شونده

در این حالت جان و بال با نسبتی برابر با یکدیگر، باریک می‌شوند. مشخصات سطح مقطع در انتهای کوچکتر در شکل ۷ ارائه شده و شکل چنین مقطعی نیز در شکل ۱۱ نشان داده شده است که نتایج آن در شکل ۱۲ آورده شده است.



شکل ۱۱: ستون با جان و بال باریک شونده



شکل ۱۲: مقایسه نتایج دقیق در برابر تقریبی

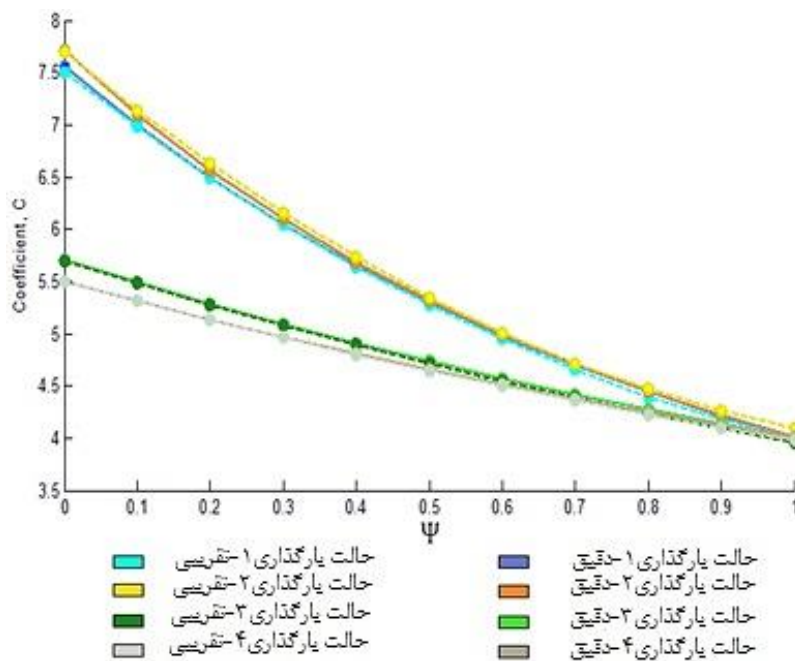
همانطور که مشاهده گردید روش سرنا و همکارانش دارای خطایی برابر با ۱۱ درصد نسبت به پاسخ دقیق می باشد و در عین حال به علت بکاربردن آن فقط برای حالت دوسر مفصل، این روش دارای محدودیت کاربرد می باشد.

۳-۲- نتایج سایر شرایط تکیه گاهی

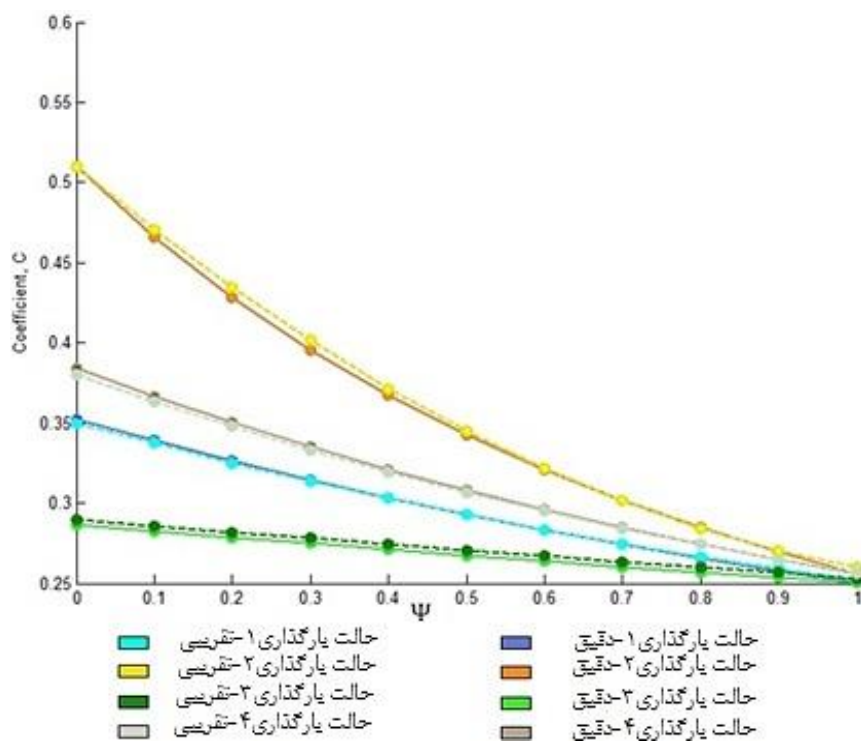
در اینجا نتایج بخش قبل، مجدداً برای سایر شرایط تکیه گاهی بدست آمده و در کنار نتایج دقیق برای هر حالت، یک منحنی که حاصل از برازش یک منحنی بر مقدار دقیق است ارائه گردیده و مورد مقایسه قرار گرفته است.

۳-۲-۱- نتایج سایر شرایط تکیه گاهی برای ستون یکنواخت تحت بار محوری غیریکنواخت

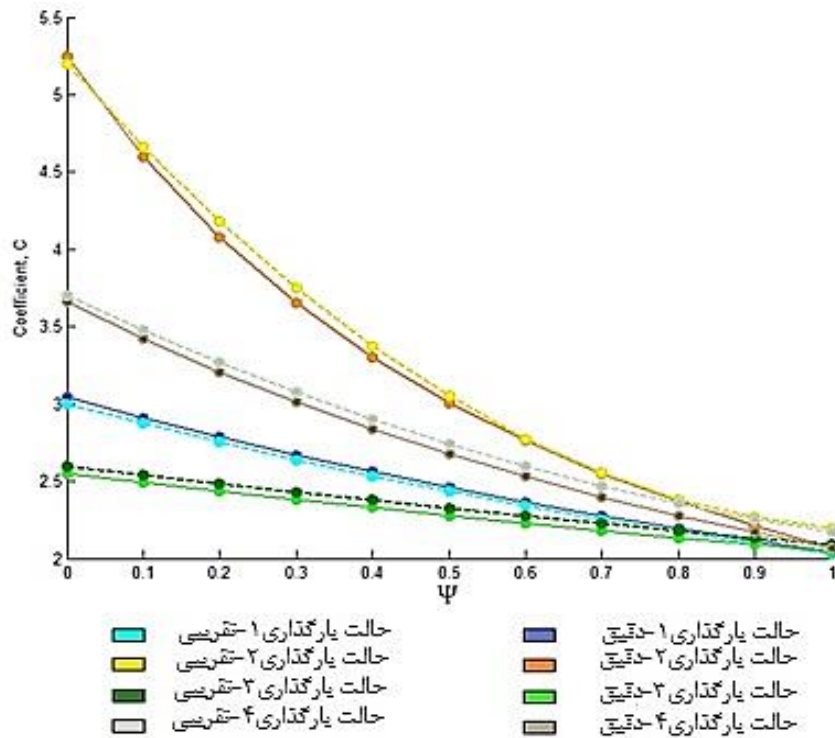
نتایج برای شرایط تکیه گاهی دو سرگیردار، یک سرگیردار- یک سر آزاد و یک سرگیردار- یک سر مفصل به ترتیب در شکل های ۱۳، ۱۴ و ۱۵ ارائه شده است.



شکل ۱۳: مقایسه نتایج دقیق در برابر تقریبی، دوسرگردار



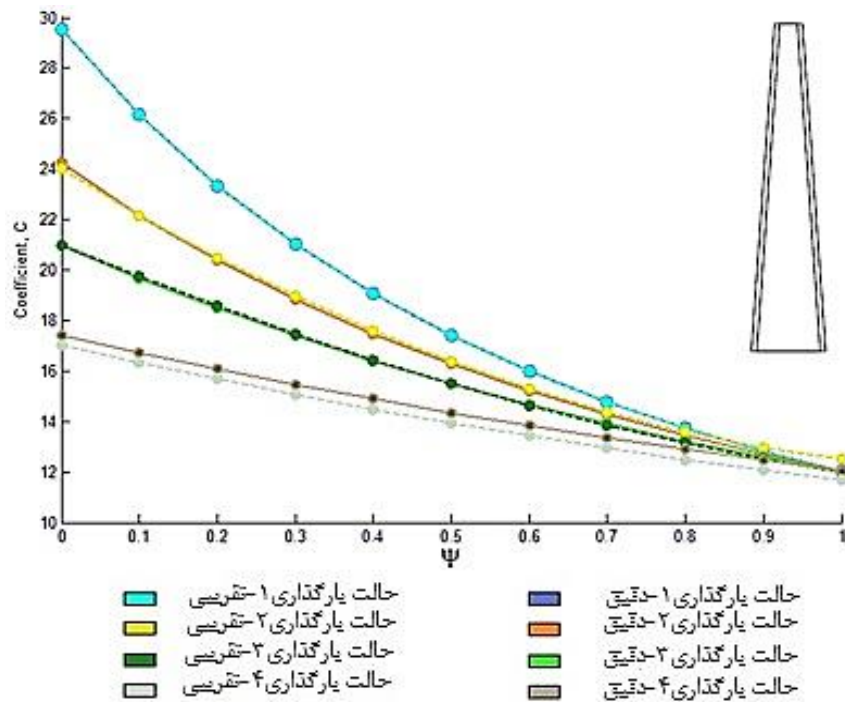
شکل ۱۴: مقایسه نتایج دقیق در برابر تقریبی، یک سرگردار - یک سرآزاد



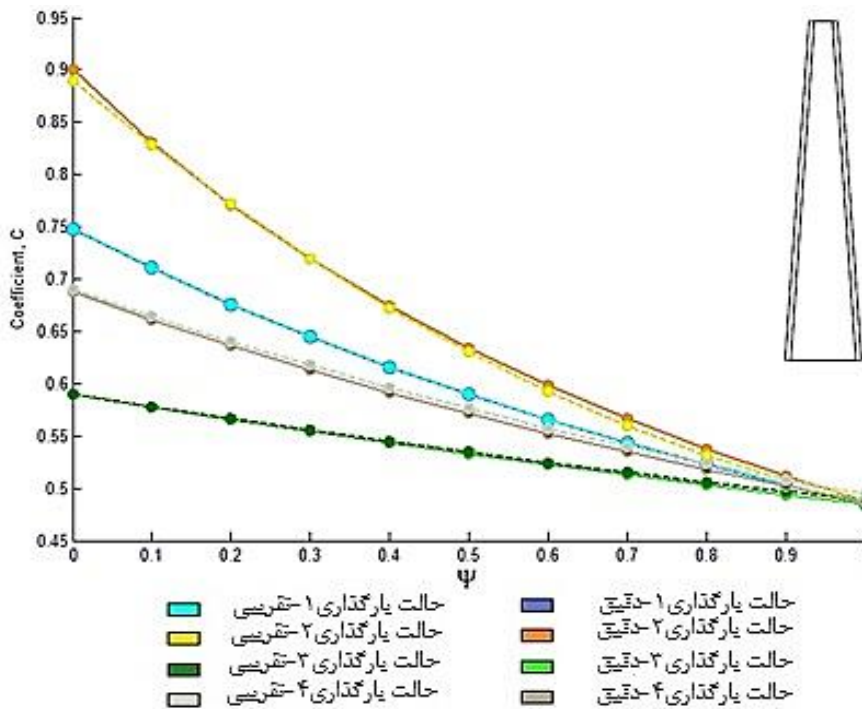
شکل ۱۵: مقایسه نتایج دقیق در برابر تقریبی، یک سرگیردار-یک سرمفصل

۳-۲-۲- نتایج دیگر شرایط تکیه‌گاهی برای ستون‌های منفرد با جان باریک شونده تحت بار محوری غیریکنواخت

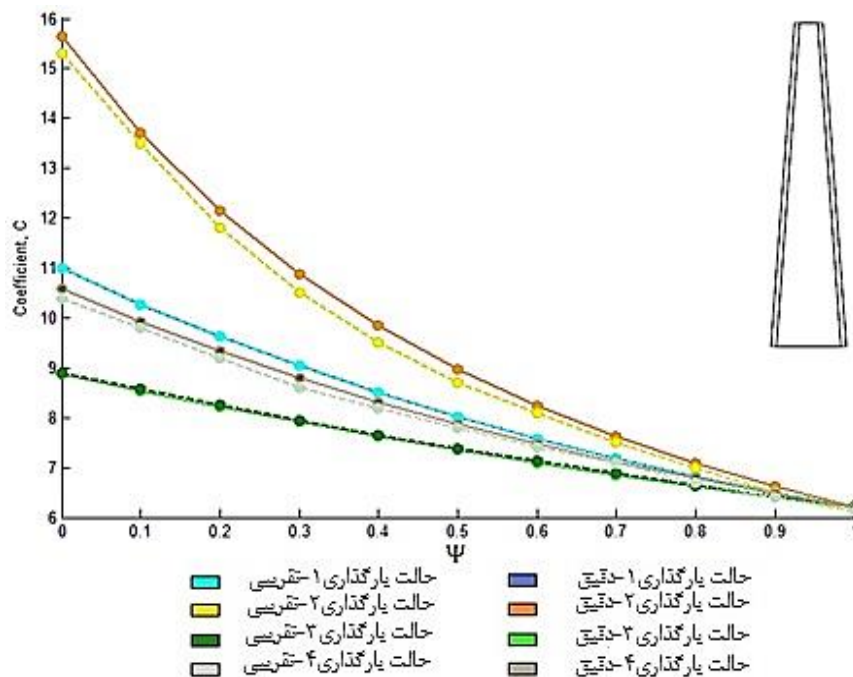
نتایج برای شرایط تکیه‌گاهی دو سرگیردار، یک سرگیردار-یک سر آزاد و یک سر مفصل به ترتیب در شکل-های ۱۶، ۱۷ و ۱۸ ارائه شده است.



شکل ۱۶: مقایسه نتایج دقیق در برابر تقریبی در ستون دو سرگیردار



شکل ۱۷: مقایسه نتایج دقیق در برابر تقریبی در ستون یک سرگیردار - یک سر آزاد

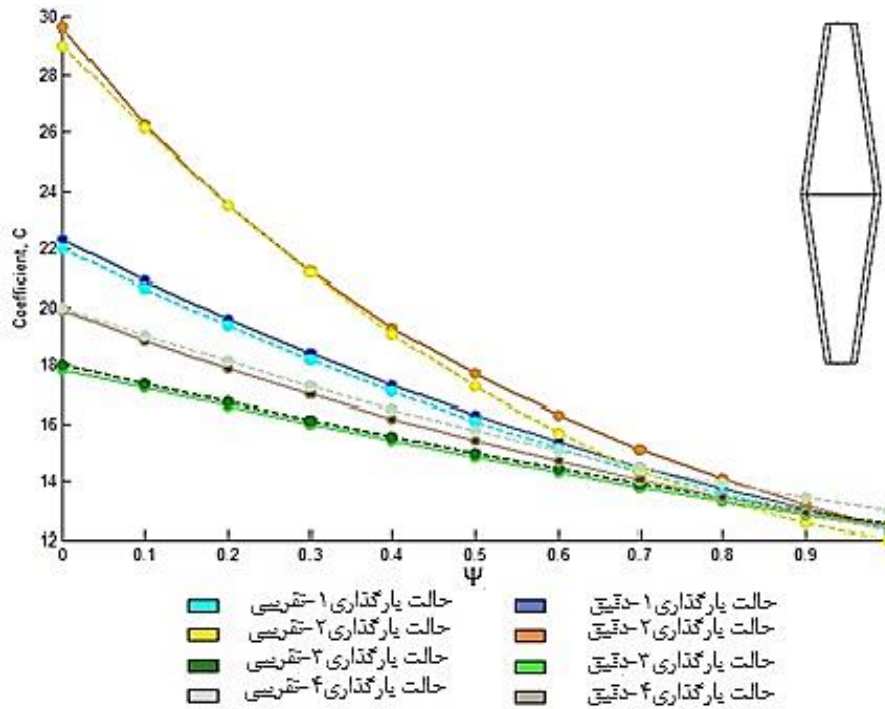


شکل ۱۸: مقایسه نتایج دقیق در برابر تقریبی در ستون یک سرگیردار - یک سرمفصل

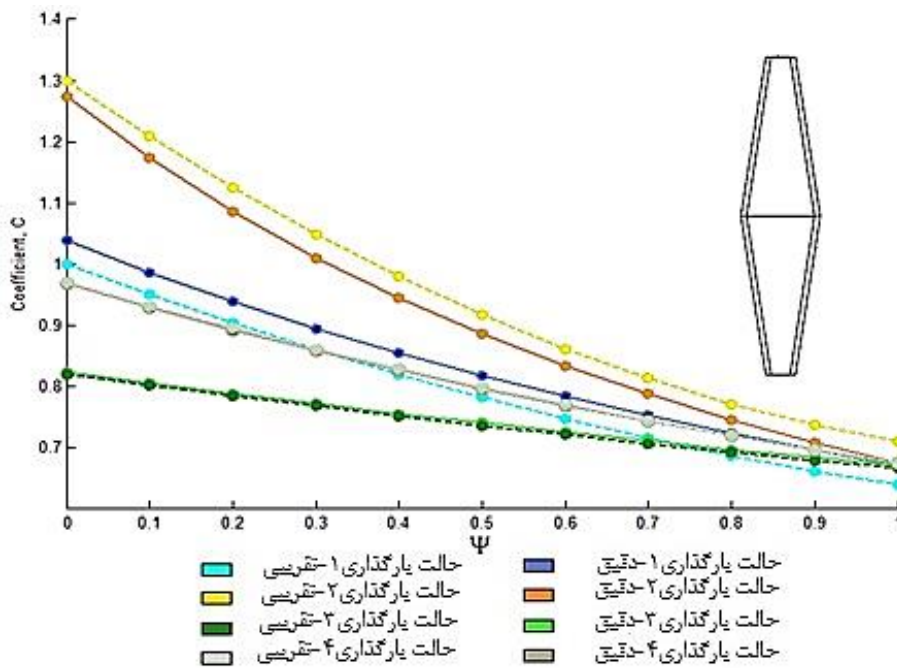
۳-۲-۳- نتایج سایر شرایط تکیه‌گاهی برای ستون‌های با جان دابل باریک شونده تحت بار محوری غیریکنواخت

نتایج شرایط تکیه‌گاهی دو سرگیردار، یک سرگیردار-یک سر آزاد و یک سرگیردار - یک سرمفصل به ترتیب در شکل‌های ۱۹،

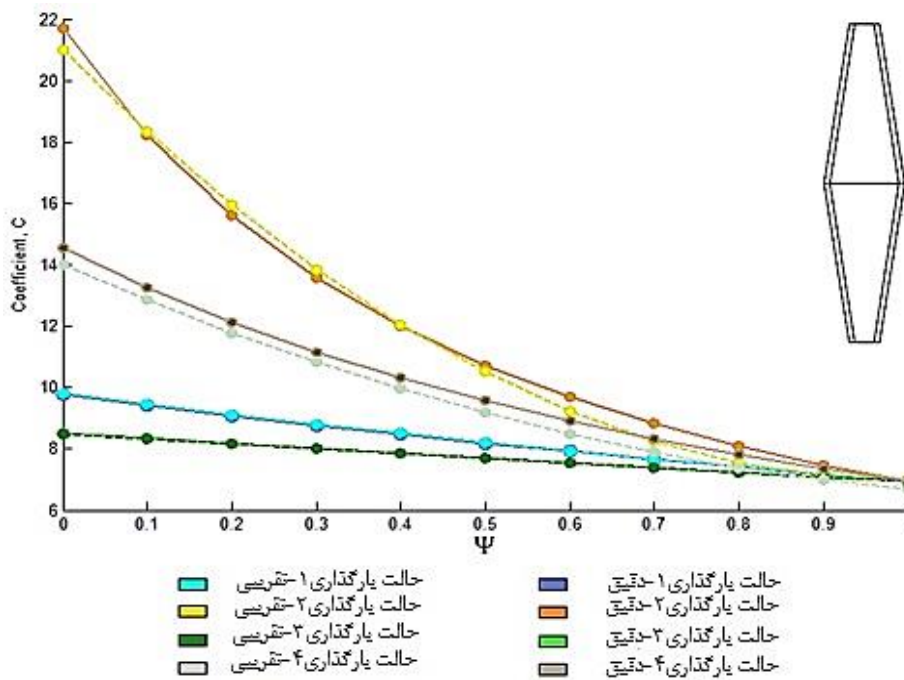
۲۰ و ۲۱ ارائه شده است.



شکل ۱۹: مقایسه نتایج دقیق در برابر تقریبی در ستون دوسرگیردار



شکل ۲۰: مقایسه نتایج دقیق در برابر تقریبی در ستون یک سرگیردار-یک سرآزاد

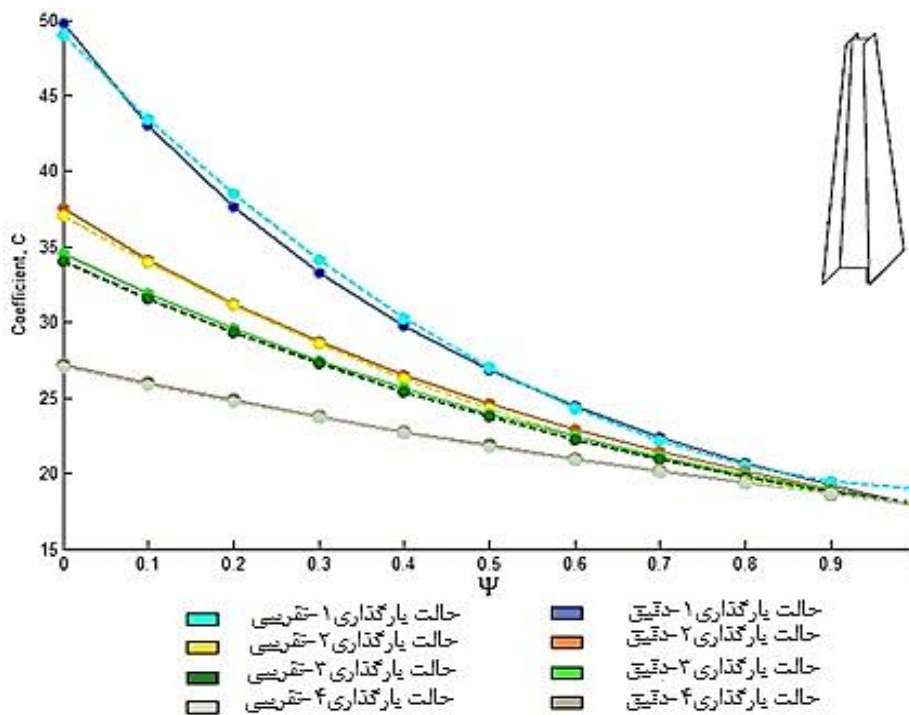


شکل ۲۱: مقایسه نتایج دقیق در برابر تقریبی در ستون یک سرگیردار- یک سرمفصل

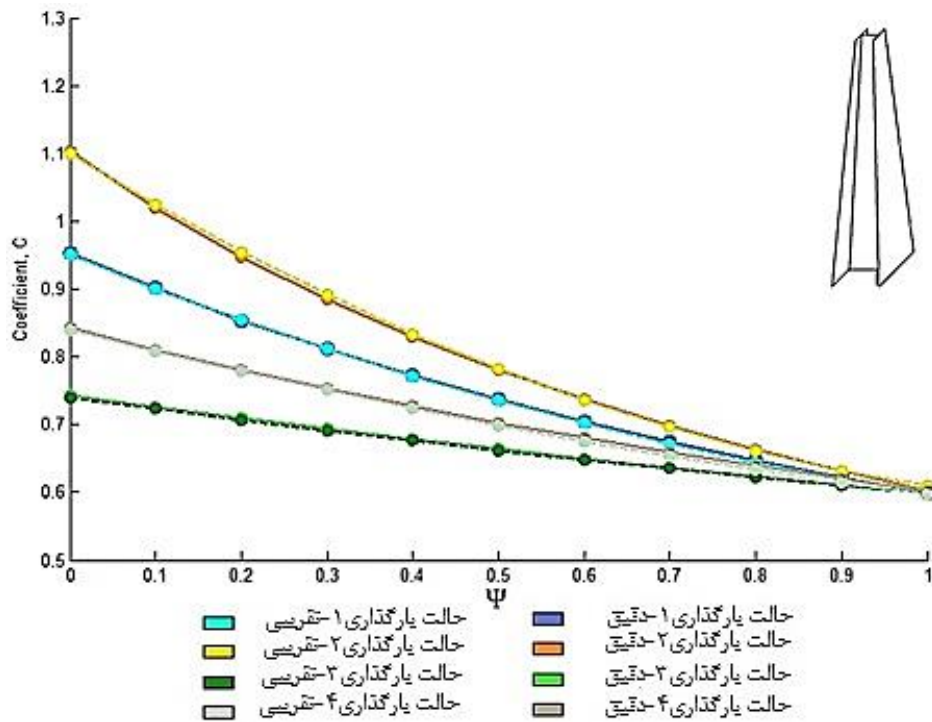
۳-۲-۴- نتایج دیگر شرایط تکیه‌گاهی برای ستون‌های با جان و بال باریک شونده تحت بار محوری غیریکنواخت

نتایج شرایط تکیه‌گاهی دو سرگیردار، یک سرگیردار- یک سر آزاد و یک سرگیردار- یک سرمفصل به ترتیب در شکل‌های ۲۲، ۲۳

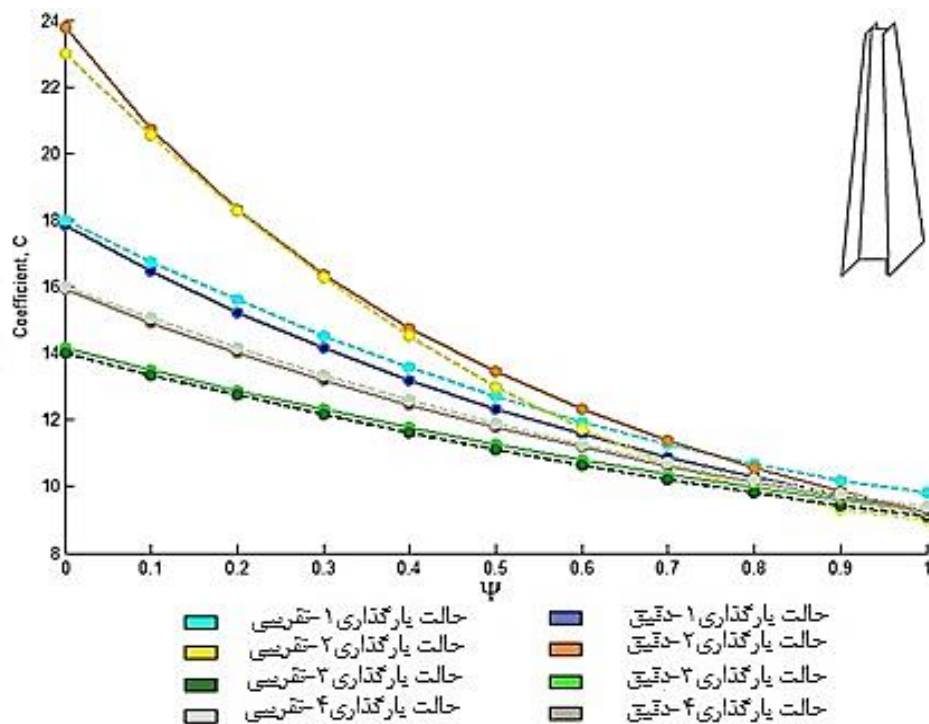
و ۲۴ ارائه شده است.



شکل ۲۲: مقایسه نتایج دقیق در برابر تقریبی در ستون دوسرگیردار



شکل ۲۳: مقایسه نتایج دقیق در برابر تقریبی در ستون یک سرگیردار - یک سرآزاد



شکل ۲۴: مقایسه نتایج دقیق در برابر تقریبی در ستون یک سرگیردار - یک سرمفصل

۴- نتیجه گیری

در این پژوهش جهت بررسی مسئله کمانش ارتجاعی ستون‌های یکنواخت و غیریکنواخت با هر سطح مقطع و هر حالت بارگذاری روشی دقیق بر اساس اجزای محدود ارائه شده است که نتایج حاصل از بررسی و مقایسه روش بکارگرفته شده با سایر روش‌ها به صورت زیر ارائه گردیده است:

۱- خطای استفاده از روش سرنا در حدود ۱۱ درصد بوده است که در روش ارائه شده نتایج در برخی مقاطع مطابق با نتایج واقعی و در سایر مقاطع کمتر از ۱۱ درصد بوده است.

۲- خطای ایجاد شده در سایر روش‌ها به دلیل وجود تقریب در فرضیات و داده‌های مسئله بوده است که این خطا در روش ارائه شده حذف شده است.

۳- برخی محققین روش‌های تقریبی و سریع را برای حل مسئله کمانش ستون‌های غیریکنواخت ارائه کرده‌اند که نقطه ضعف این روش‌ها عدم جامعیت آنهاست. بطور مثال روش فرم بسته‌ی سرنا و همکارانش تنها برای ستون دو سر مفصل قابلیت کاربرد دارد اما با استفاده از روش پیشنهادی می‌توان محاسبات را برای سایر ستون‌ها و شرایط تکیه گاهی انجام داد.

۴- در این تحقیق تنها با وارد کردن تابع بار محوری متغیر و تابع سختی خمشی متغیر و همچنین تعداد اجزای مورد انتظار که بیانگر میزان دقت جواب نیز هستند در برنامه‌ی کد نویسی شده نرم افزار Matlab می‌توان تنها در مدت زمان کوتاهی به جواب دقیق دست یافت.

۵- مراجع

- [1] Ziemian, R. D. (2010). Guide to stability design criteria for metal structures, 6th Edition, John Wiley & Sons, Inc, pp. 12-114
- [2] Elishakoff, I. (2004). Eigenvalues of Inhomogenous Structures: Unusual Closed-form Solutions, CRC Press.
- [3] Riahi, H. T., Shojaei Barjoui, A., Bazazzadeh, S., and Etezady, S.M.A. (2012). Buckling Analysis of Non-Prismatic Columns Using Slope-Deflection Method. 15th World Conference on Earthquake Engineering. Lisbon, Portugal, September 28700-28710.
- [4] Serna, M. A., Ibanez, J. R., Lopez, A. (2011). Elastic flexural buckling of non-uniform members: Closed-form expression and equivalent load approach. *Journal of Constructional Steel Research*, Vol. 67, pp. 1078-1085.
- [5] Hadianfard, M. A., Sharbati, R. (1392). Numerical simulation of retracted steel bonding connections and investigation of the role of connecting components in its behavior. *Journal of Modeling in Engineering*, Vol. 34, pp. 11-24.
- [6] Fafhi, M. A., Hasani, R. (1396). Finite element modeling A proposed rigid connection for prefabricated concrete buildings using a steel interface element. *Journal of Modeling in Engineering*, Vol. 49, pp. 189-200.
- [7] Hasani, S.M.R., Mahmoudabadi, M., Danaei, R., (1397). Investigating effect of boundary conditions on columns' buckling. *Journal of Structural and Construction Engineering (JSCE)*, Vol. 5, pp. 143-156.
- [8] Aristizabal-Ochoa, J. D. (2013). Stability of slender columns on an elastic foundation with generalised end conditions. *Ingeniera e Investigacion*, Vol. 33, No. 3, pp. 34 - 40.
- [9] Arboleda-Monsalve, L. G., Zapata-Medina, D. G. and AristizabalOchoa, J. D., Timoshenko. (2008). beam-column with generalized end conditions on elastic foundation: Dynamic-stiffness matrix and load vector., *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 310, pp.1057-1079.
- [10] Zapata-Medina, D. G. Arboleda-Monsalve, L. G. AristizabalOchoa, J. D. (2010). Static Stability Formulas of a Weakened Timoshenko Column: Effects of Shear Deformations. *J. of Engineering Mechanics-ASCE*, Vol. 126, No. 12, pp.1-9.
- [11] Eisenberger, M. (1991), Buckling Loads For Variable Cross-Section Members With Variable Axial Forces, *Int.J.Solids Structures*, Vol. 27, pp. 135-143.
- [12] Yoo, C. H., Lee, L. (2011). Stability of structures principles and applications, Elsevier, pp. 133.
- [13] MATLAB, "The Language of Technical Computing", (2008), Version 7.6.0. The Math-works Inc.: Natick, MA