Journal of Structural and Construction Engineering, 8(5), 2021, pp. 83-109

Journal of Structural and Construction Engineering

www.jsce.ir

Developing and Investigation the Numerical Efficiency of Modified Energy Method in Solid Mechanics With Geometric Nonlinearity and Bifurcation Points

A. Razaghi[1], J. Asgari Marnani[2*], M.S. Rohanimanesh[2]

1- Ph.D. student, Department of Civil Engineering, Central Tehran Branch, Islamic Azad University, Tehran, Iran
2- Assistant professor, Department of Civil Engineering, Central Tehran Branch, Islamic Azad University, Tehran, Iran

ABSTRACT

Geometric nonlinear analyses are used in many structural problems, such as the determination of failure load, as well as the study of buckling mechanism. Nevertheless, due to the complex nature of this type of problems and the absence of a comprehensive analytical solution for them, numerical methods are utilized in practice to approximate the exact response of these systems. In the application of numerical methods, there are also some difficulties such as divergence or finding the correct path of equilibrium, especially in the case of bifurcation points. Hence, the main purpose of this research is to apply the modified energy method (introduced in the dynamics of structures) in quasi-static problems with geometric nonlinearity and bifurcation points so that the efficiency of this method can be compared to others, such as Newtonian numerical techniques and force-displacement-constraint approaches. To achieve the objectives of this research, after briefly reviewing the current force-based computational methods in practice, the energy method is described for such problems, and then the step-by-step process of its computer implementation will be presented. Afterward, by coding in MATLAB software and applying the method to numerical examples employed by other researchers such as truss and frame structures, the numerical results are verified by analytical solution as well as those obtained by other methods, such as Newton-Raphson and Arc Length techniques. Generally, the interpretation of the results obtained from performed simulations has shown that the presented numerical method in analyzing nonlinear geometric problems has better accuracy compared to the Arc Length method; moreover, it can well pass through bifurcation points in the force-displacement curve without divergence in comparison with the Newton-Raphson method.

ARTICLE INFO

Receive Date: 22 December 2018
Revise Date: 21 October 2019
Accept Date: 03 November 2019

Keywords:
Numerical study;
Modified energy method;
Solid mechanics;
Geometric nonlinearity;
Bifurcation points.

doi: 10.22065/JSCE.2019.163823.1746

*Corresponding author: Jafar Asgari Marnani.
Email address: Jaf.Asgari_Marnani@iauctb.ac.ir

Journal of Structural and Construction Engineering
JSCE
نشریه علمی-پژوهشی مهندسی سازه و ساخت

نشریه مهندسی سازه و ساخت
(علمی - پژوهشی)
www.jsce.ir

ISSE
انجمن مهندسی سازه ایران

ارزیابی عددی روش انرژی اصلاح‌شده در تحلیل مسائل سازه‌ای با هندسه غیرخطی

احمد رزاقی[۱]، جعفر عسگری مارنانی[۲*]، محمد صادق روحانی منش۲

۱- دانشجوی دکتری سازه، گروه عمران، واحد تهران مرکزی، دانشگاه آزاد اسلامی، تهران، ایران

۲- استادیار، گروه عمران، واحد تهران مرکزی، دانشگاه آزاد اسلامی، تهران، ایران

چکیده

در بسیاری از مسائل سازه‌ای مانند تعیین بار خرابی و همچنین تحلیل مکانیزم کمانش باید از تحلیلی‌های غیرخطی هندسی بهره گرفت. بااین‌وجود، به علت ماهیت پیچیده این نوع از مسائل و عدم وجود یک راه‌حل تحلیلی جامع برای آن‌ها در عمل از روش‌های عددی برای تقریب پاسخ دقیق مسئله استفاده می‌گردد. از مشکلات روش‌های عددی نیز عدم همگرایی و یا یافتن مسیر صحیح تعادل خصوصاً در مواجه با نقاط انشعابی است. ازاین‌رو هدف از این تحقیق، به‌کارگیری روش انرژی اصلاح‌شده (که در دینامیک سازه‌ها معرفی شده است) در مسائل شبه-استاتیک با هندسه غیرخطی و دارای نقاط انشعابی است تا بتوان کارایی این روش را در مقایسه با سایر روش‌های موجود نظیر تکنیک‌های عددی نیوتنی و همچنین نیرو-تغییرمکان-قید موردبررسی قرار داد. برای رسیدن به اهداف این تحقیق، پس از مرور کوتاه بر روی روش‌های تحلیلی نیرو-مبنا موجود در عمل، روش انرژی برای این نوع از مسائل تشریح شده و در ادامه مراحل اجرای کامپیوتری آن در غالب یک روند گام‌به‌گام تشریح می‌گردد. سپس با کدنویسی در نرم‌افزار متلب و به‌کارگیری روش مذکور بر روی مثال‌های عددی به کار گرفته‌شده توسط دیگر محققین نظیر سازه‌های خرپایی و قابی، پاسخ‌های به‌دست‌آمده با حل تحلیلی و همچنین نتایج دیگر روش‌ها مانند نیوتن-رافسون و طول قوس مورد صحت سنجی واقع شده‌اند. درمجموع، تفسیر نتایج به‌دست‌آمده از شبیه‌سازی‌های عملی صورت گرفته بیانگر این موضوع بوده‌اند که روش عددی معرفی‌شده در تحلیل مسائل با غیرخطی هندسی دارای دقت بهتری در مقایسه با روش طول قوس بوده و همچنین نسبت روش نیوتن-رافسون نیز به‌خوبی می‌تواند از نقاط انشعابی در منحنی بار-تغییرمکان بدون واگرایی عبور کند.

کلمات کلیدی: بررسی عددی، روش انرژی اصلاح‌شده، مکانیک جامدات، هندسه غیرخطی، نقاط انشعابی

سابقه مقاله:					شناسه دیجیتال:
دریافت	بازنگری	پذیرش	انتشار آنلاین	چاپ	doi: 10.22065/JSCE.2019.163823.1746
۱۳۹۷/۱۰/۰۱	۱۳۹۸/۰۷/۲۹	۱۳۹۸/۰۸/۱۲	۱۳۹۸/۰۸/۱۲	۱۴۰۰/۰۵/۳۰	https://dx.doi.org/10.22065/jsce.2019.163823.1746

*نویسنده مسئول: **جعفر عسکری مارنانی**

پست الکترونیکی: j_asgari@iauctb.ac.ir

۱- مقدمه

بسیاری از پدیده‌های فیزیکی در طبیعت دارای رفتار غیرخطی هستند و سیستم‌های خطی درواقع یک تقریب از مدل غیرخطی واقعی تحت شرایط محدودی هستند. فرض‌هایی که در خطی سازی مسائل مکانیک جامدات به کار می‌روند عمدتاً شامل فرض جابه‌جایی‌های کوچک و یا کرنش‌های کوچک می‌باشند. این فرضیات تنها برای برخی از کاربردهایی عملی مناسب هستند و منجر به تخمین نتایج قابل‌قبول می‌شوند. به‌عبارت‌دیگر، اگر سیستم موردنظر را با استفاده از یک مدل غیرخطی تحلیل کنیم، پاسخ‌ها تفاوت محسوسی نخواهد داشت. باوجوداینکه سیستم‌های خطی حل ساده‌تری دارند، در شرایطی که تغییر شکل‌ها بزرگ در سازه به وجود می‌آیند دیگر نمی‌توان از تقریب سازی خطی بهره برد و باید مسئله غیرخطی واقعی تحلیل گردد. به‌طور مثال، زمانی که جابه‌جایی‌های سازه بزرگ باشند (مانند هنگامی‌که سازه در برابر زلزله قرار می‌گیرد و وارد ناحیه غیرخطی می‌گردد) دیگر فرض ثابت بودن سختی سازه در طول تحلیل برقرار نبوده و رابطه نیرو-تغییرشکل سازه خطی نبوده و مجبور هستیم تا برای یافتن پاسخ دقیق سیستم یک تحلیل غیرخطی انجام دهیم]۱[. به‌طورکلی، با توجه به اینکه حل ریاضی دقیق در بسیاری از مسائل غیرخطی وجود ندارد، برای تعیین پاسخ این نوع از سیستم‌ها در عمل باید از روش‌های عددی بهره گرفته شود.

مسائل غیرخطی سازه‌ای فراوانی تاکنون توسط پژوهشگران مختلف با استفاده از روش‌های مختلفی بررسی شده‌اند. ازنظر تاریخی، مطالعه‌ای را که تونر[1]]۲[در ارتباط با تحلیل اجزا محدود غیرخطی در رشته مهندسی هوافضا انجام داد را می‌توان جزو اولین کارهای موجود در این زمینه دانست. به‌طورکلی، اکثر کارهای اولیه صورت گرفته در تحلیل‌های غیرخطی سازه‌ای، مربوط به تحلیل غیرخطی هندسی در مسئله کمانش بوده است [۳-۶]. به‌طور مثال در برخی مطالعات اولیه، استفاده از روش افزاینده، با به‌کارگیری ماتریس سختی هندسی در رابطه با به‌روزرسانی مختصات این نوع سیستم‌ها به کار گرفته شده است [۸،۷،۲]. همچنین، اثرات غیرخطی مادی نیز در ابتدا توسط مراجع [۱۰،۹] موردمطالعه واقع شده است و مفهوم ماتریس سختی مماسی نیز برای اولین بار در مراجع [۱۰-۱۲] بیان شده است. باید توجه داشت که تمامی روش‌های معرفی‌شده تا آن زمان، عمدتاً بر مبنای روش *اولیر-پیشرو*[2] بوده‌اند، که منجر به ایجاد خطاهای زیاد در محاسبات می‌گردد. برای حل این مشکل، روش *نیوتن-رافسون*[3] بعدها پیشنهاد شد. برای افزایش کارایی این تکنیک نیز در ادامه روش *نیوتن رافسون اصلاح‌شده*[4] به وجود آمد که در آن برخلاف روش نیوتن-رافسون معمولی، ماتریس سختی به‌صورت پیوسته، به‌روزرسانی نمی‌گردد]۱۳،۹[. در ادامه، روش *جستجو انرژی مستقیم*[5] نیز در همین رابطه پیشنهاد گردیده است]۱۵،۱۴[. و بالاخره، برای افزایش دقت، تکنیک *زیرافزاینده‌ها*[6] نیز توسط زینکویچ[7] ارائه شده است]۱۶[.

علاوه بر این، مطالعه‌ای بر روی تفسیر هندسی از روش *طول-قوس*[8] توسط ماسیکوتس[9] و فافارد[10] در سال ۱۹۹۱ نیز انجام شد. آن‌ها با فرمول‌بندی پیوسته و گسسته برای روش طول-قوس، دو نوع روش عددی گسترش دادند و معایب و مزایای هر یک را مقایسه کردند. درنهایت، این مطالعه منجر به اصلاح روش ارائه‌شده توسط کریسفیلد[11]، برای همگرایی سریع‌تر جواب شد]۱۷[. کدا[12] و گرسو[13] در سال ۲۰۰۴، بر روی یک فرمول‌بندی ساده برای تغییرشکل‌های بزرگ در قاب‌های دوبعدی کارکردند. این روش که بر مبنای توصیف مکان جسم قرار داشت، نیازی به استفاده از مفاهیم تغییرمکانی نداشت و مکان را به‌عنوان مجهول اصلی مسئله در نظر می‌گرفت. کرنش‌ها نیز مستقیماً از روی یک فضای یک‌بعدی برای ارتباط بین شکل مرجع و فرم تغییرشکل یافته، بر مبنای محاسبه مستقیم انرژی کرنشی در کل نقاط، بیان می‌شدند. این محققین با ارائه مثال‌های عددی، ویژگی اصلی روش خود را ساده بودن آن ذکر کردند که نتایج خوبی را به دنبال

[1] Tuner
[2] Forward-Euler
[3] Newton-Raphson
[4] Modified Newton-Raphson
[5] Direct energy search
[6] Sub-increments
[7] Zienkiewicz
[8] Arc-length
[9] Massicottes
[10] Fafard
[11] Crisfield
[12] Coda
[13] Greso

دارد و به‌راحتی می‌تواند در تحلیل قاب‌های غیرخطی دوبعدی به کار گرفته شود [۱۸]. ربزاک[14] و همکاران، در سال ۲۰۰۶، با تأکید بر روی اثرات غیرخطی مادی در سطوح چسبنده (مانند بتن)، با در نظر گرفتن یک مدل کرنش صفحه‌ای یک روش برای تحلیل باندهای برشی با سطح چسبنده ارائه نمودند. آن‌ها روش خود را در تحلیل دوبعدی و سه‌بعدی، با در نظر گرفتن مواد وابسته و غیروابسته به نرخ تغییرشکل، اعمال کردند. درنهایت، نتایج به‌دست‌آمده حاکی از آن بود که روش اعمالی به‌خوبی می‌تواند در تحلیل غیرخطی (مصالح و هندسه) در مدل‌سازی باند برشی به کار گرفته شود [۱۹]. در سال ۲۰۱۱، یک روش ساده و مؤثر برای تحلیل غیرخطی قاب‌های دوبعدی نیز توسط لورنزانا[15] و همکاران پیشنهاد گردید. آن‌ها با این فرض که اثرات غیرخطی در دو سر تیر متمرکز شده‌اند و با در نظر گرفتن یک مدل الاستوپلاستیک برای خرابی و تعریف تابع جاری شدن برحسب (نیروی محوری، برشی و لنگر خمشی) به تحلیل غیرخطی قاب‌های صفحه‌ای پرداختند. به‌طورکلی، هدف اصلی این مقاله پیدا کردن بار نهایی در قاب‌های دوبعدی با در نظر گرفتن (مدل خرابی متمرکز در دو سر تیر) بوده است [۲۰]. در سال ۲۰۱۲، منصوری و سفری، یک الگوریتم شبیه به روش نیوتن برای در نظر گرفتن غیرخطی‌های هندسی معرفی کردند. این تکنیک تکرار-شونده نیاز به حدس اولیه دارد که به‌عنوان یک روش تکراری دونقطه‌ای تکراری شناخته می‌شود. در این روش یک تابع ریاضی برای تقریب ماتریس مماسی انتخاب می‌شود. به‌عبارت‌دیگر، این پژوهش یک تابع مؤثر برای کاهش زمان محاسباتی و تعداد تکرارها به‌وسیله ترکیب روش نیوتن-رافسون و روش دو-نقطه ای ارائه می‌دهد. محاسبات آنالیز غیرخطی بر روی قاب‌های صفحه‌ای نشان می‌دهند که روش پیشنهادی می‌تواند، با کاهش تعداد سعی و خطا، زمان محاسبات را تا حدود ۴۰ درصد در مقایسه با روش نیوتن رافسون کاهش دهد [۲۱].

در سال‌های اخیر نیز کارهای تحقیقاتی بسیار خوبی در ارتباط با موضوع تحقیق حاضر انجام شده‌اند. به‌طور مثال، ماموری[16] و همکاران در سال ۲۰۱۵، به مطالعه ناپایداری غیرخطی هندسی در قاب‌های دوبعدی پرداختند. در این تحقیق، مصالح الاستیک فرض شده و با استفاده از فرمول‌بندی کلی لاگرانژی، جواب مسائل غیرخطی ناپایدار کننده با جابه‌جایی‌های بزرگ قبل از کمانش موردمطالعه قرار گرفت. روش مورداستفاده در این تحقیق بر مبنای روش ریلکسیشن دینامیکی[17] بود که نسبت به روش‌های استاتیکی معمول مزیت پیدا کردن نقطه تعادل بعد از نقطه حدی را دارد [۲۲]. همچنین رادنیک[18] و همکاران، به مقایسه مدل‌های عددی برای تحلیل غیرخطی استاتیکی قاب‌های بتنی بر مبنای المان‌های یک‌بعدی و دوبعدی، در سال ۲۰۱۶ پرداختند. آن‌ها با دو بار فرمول‌بندی مسئله با در نظر گرفتن المان‌های یک‌بعدی و دوبعدی به تحلیل غیرخطی قاب‌های صفحه‌ای پرداخته و با مقایسه نتایج تحلیلی و آزمایشگاهی رفتار غیرخطی را هم برای فولاد و هم برای بتن در نظر گرفتند [۲۳]. در سال ۲۰۱۶، مویتا[19] و همکاران نیز تحلیل غیرخطی سازه‌های ساندویچی را موردمطالعه قرار دادند. در این پژوهش، یک مدل غیرخطی برای صفحات ساندویچی پیشنهاد گردید. در اجرای روش اجزا محدود، المان‌های لایه‌ای با یک ضخامت معین، با این فرض که جابه‌جایی‌ها در مرزها پیوستگی دارند انتخاب‌شده‌اند؛ ولی هر یک از لایه‌ها می‌توانستند رفتار متفاوتی داشته باشند. لایه‌های الاستیک سخت، توسط صفحات کلاسیک مدل شده و هسته نیز به‌وسیله تئوری تغییرشکل برشی مرتبه سه ردی[20]، مدل‌سازی شده است و سپس، با استفاده از یک الگوریتم نیوتن-رافسون افزاینده-تکراری مسیر تعادل به دست می‌آید. همچنین، در حالتی که منحنی بار-تغییرشکل دچار دوشاخگی می‌گردد، روش طول-قوس برای تشخیص مسیر صحیح به کار گرفته‌شده است. نهایتاً، آن‌ها گزارش دادند که مدل پیشنهادی بر مبنای المان تخت مثلثی به‌طور مؤثری می‌تواند تلاش محاسباتی را در مقایسه با تحلیل سه‌بعدی اجزا محدود، کاهش دهد [۲۴]. علاوه بر این، یک فرمول‌بندی ترکیبی برای تحلیل‌های غیرخطی سازه‌های کابلی توسط مرجع [۲۵] و همکاران در سال ۲۰۱۷، پیشنهاد شده است. در این پژوهش، یک خانواده از المان‌های زنجیری بر مبنای تغییرشکل‌های محدود و یک روش اجزا محدود ترکیبی سازگار-ضعیف شده بیان گردید. بر این اساس، دو نوع المان، یکی با نیروی محوری پیوسته و دیگری با نیروی محوری گسترده معرفی شدند. کینماتیک مسئله در این مطالعه، در مختصات منحنی-الخط حاصل‌شده و با استفاده از اصل کار مجازی فرم ضعیف رابطه کرنش-جابه جایی به‌دست‌آمده است. در انتها، روش اجزا محدود با ارائه سه مثال اجرا شد و

14 Robczuk
15 Lorenzana
16 Mamouri
17 Dynamic relaxation approach
18 Radnik
19 Moita
20 Reddy

نتایج دقت بالایی را (به علت تمایز این فرمول‌بندی با روش‌های قبلی که نیروی محوری را ثابت در نظر می‌گرفتند) نشان می‌دادند. فنگ[21] و همکاران در سال ۲۰۱۷، بر روی المان‌های فیبری یک تیر خمشی-برشی تیموشنکو بر مبنای مدل نرم شوند خرابی-پلاستیسیته کار کردند. در این مطالعه یک المان تیری با در نظر گرفتن اندرکنش برش و خمش بر مبنای جابه‌جایی گسترش داده شد. المان‌های انتخابی بر مبنای تیموشنکو قرار داشت و رفتار با روش مقطع فیبری مدل‌سازی شد، که در آن مقطع به فیبرهای فولادی و بتنی تقسیم‌بندی می‌شود. مقایسه تحلیل‌های انجام‌شده بر روی تیرهای ساده با نتایج آزمایشگاهی نشان می‌داد که المان‌های معرفی‌شده به‌خوبی قادرند تا اثر اندرکنش رفتار برشی تیرها را در نظر بگیرند]۲۶[.

درمجموع هدف از انجام تحقیق ارائه‌شده، گسترش روش عددی معرفی در مرجع]۲۷[برای مسائل غیرخطی هندسی در مکانیک جامدات است. به‌طورکلی فلسفه تکنیک عددی ارائه‌شده به‌جای تمرکز بر روی حل معادلات تعادل نیرویی بر روی حل گام‌به‌گام معادلات تعادل انرژی یک سیستم سازه‌ای قرار دارد. ویژگی‌های عددی این روش نظیر دقت و همگرایی در مسائل غیرخطی که خصوصاً دارای نقاط انشعابی هستند، بررسی خواهند شد و کارایی روش معرفی‌شده با سایر روش‌ها مقایسه می‌گردد. برای این منظور تعدادی مثال عددی از مراجع مختلف انتخاب‌شده و نتایج عددی به‌دست‌آمده از روش ارائه‌شده با حل دقیق مسائل (در صورت وجود) و همچنین سایر روش‌های موجود صحت سنجی شده‌اند. در اینجا باید ذکر شود که در سرتاسر این پژوهش کلیه بارها به‌صورت شبه-استاتیک فرض می‌شوند، یعنی از آثار مربوط به میرایی و اینرسی صرف‌نظر می‌شود. همچنین در این تحقیق، از آثار غیرخطی‌های مربوط به تغییر جهت نیروهای اعمالی در اثر تغییرشکل سازه صرف‌نظر شده و شرایط مرزی مسئله به‌صورت مستقل از جابه‌جایی‌ها در نظر گرفته می‌شوند.

۲- تکنیک‌های حل مسائل غیرخطی شبه-استاتیک[22]

در این بخش، ابتدا مرور کوتاهی بر روی مسائل غیرخطی در مکانیک جامدات صورت گرفته و در ادامه به بررسی انواع تکنیک‌های رایج عملی در حل این نوع از مسائل پرداخته می‌شود.

۲-۱- انواع مسائل غیرخطی در مکانیک جامدات

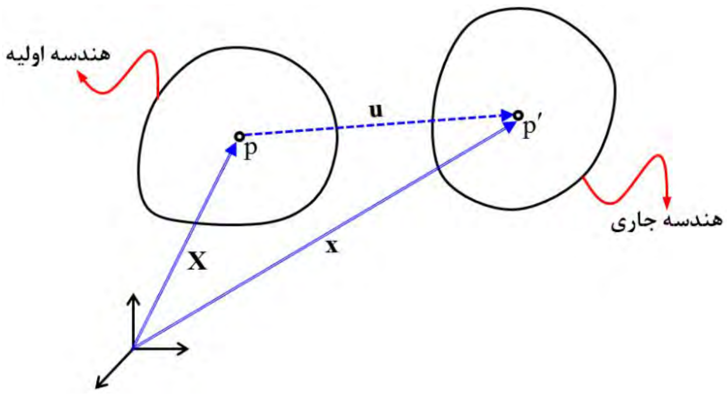
در اکثر موارد رفتار غیرخطی جامدات شامل دو حالت *غیرخطی مادی*[23] و *غیرخطی هندسی*[24] می‌شود. در رفتار غیرخطی مادی تنش‌ها به‌صورت خطی با کرنش‌ها متناسب نیستند. غیرخطی هندسی نیز به حالتی اطلاق می‌شود که در آن تغییرشکل یک سیستم سازه‌ای به حالتی برسد که در آن فرم تغییرشکل یافته با شکل اولیه سیستم به‌طور اساسی فرق کند؛ در این حالت نوشتن رابطه تعادل بر مبنای هندسه اولیه سازه، دیگر امکان‌پذیر نیست. در حالت کلی با توجه به شکل (۱)، چهار نوع رفتار غیرخطی را می‌توان در یک سیستم سازه‌ای در نظر گرفت. اگر در هنگام نوشتن روابط کینماتیک بین جابه‌جایی‌های سیستم و کرنش‌های نظیر، جملات غیرخطی وارد معادله تعادل سیستم گردند، غیرخطی را از نوع هندسی می‌گویند. در حالتی که رابطه بین تنش و کرنش نیز خطی نباشد آن را غیرخطی مادی می‌نامند. دو نوع غیرخطی مربوط به شرایط مرزی و همچنین نیروهای اعمالی نیز در حالت کلی مطابق شکل (۱) قابل‌تعریف هستند که کمتر در عمل موردتوجه قرار دارند.

شکل۱ : انواع غیرخطی‌های موجود در مکانیک جامدات]۲۸[

[21] Feng
[22] Quasi-static
[23] Material nonlinearity
[24] Geometric nonlinearity

در مسائل غیرخطی هندسی، کرنش‌ها نباید به‌عنوان یک تابع خطی از جابجایی‌ها محاسبه شوند، زیرا در غیر این صورت این موضوع می‌تواند منجر به محاسبه کرنش‌های بزرگ برای حالت دوران-جسم-صلب[25] یا اندازه‌گیری کرنش‌های غیر یکتا[26] گردد. اگرچه باید دقت داشت که وجود جابه‌جایی‌های بزرگ لزوماً همراه با کرنش‌های بزرگ در سازه نیست، به‌طور مثال در این رابطه می‌توان به تحلیل سازه‌های جدار نازک منعطف اشاره نمود. در حالت کلی، در تحلیل مسائل سازه‌ای با هندسه غیرخطی دو نوع توصیف لاگرانژی کلی[27] و لاگرانژی به‌روز شده[28] به کار می‌روند. دیدگاه لاگرانژی کلی در مسائلی که جابه‌جایی‌ها بزرگ ولی کرنش‌ها کوچک هستند مناسب بوده و حالت لاگرانژی به‌روز شده نیز در مواردی استفاده می‌شوند که کرنش‌های بزرگ (پلاستیک) در سیستم حضور دارند [۲۹].

در مواردی که با هندسه غیرخطی در سیستم مواجه هستیم، تحت اثر بارهای اعمالی اختلاف قابل‌توجهی در هندسه اولیه و هندسه تغییرشکل یافته سازه مشاهده می‌شود. این در حالی است که در تحلیل‌های خطی تمام تنش‌ها، کرنش‌ها و جابه‌جایی‌ها با در نظر گرفتن هندسه اولیه سازه محاسبه می‌شوند. بنابراین، با توجه به اینکه در واقعیت سازه در هر لحظه در حالت تغییرشکل و درعین‌حال در تعادل است، روابط تعادل باید بر روی هندسه تغییرشکل یافته نوشته شوند. به‌طورکلی، در حالتی که تغییرشکل‌ها بزرگ باشند (تحلیل غیرخطی هندسی)، اختلاف بین هندسه اولیه و *بافتار جاری*[29] یا تغییرشکل یافته زیاد است و نمی‌توان از این اختلاف صرف‌نظر کرد. بنابراین در این حالت مهم است که مشخص شود چگونه می‌توان تغییرشکل‌های بزرگ، تنش‌ها و کرنش‌ها را در یک ماده توصیف کرد. در این حالت با در نظر گرفتن یک جسم جامد مطابق شکل (۲)، جابه‌جایی‌های بزرگ سبب می‌شود تا هندسه جسم از حالت اولیه (تغییرشکل نیافته) به حالت جاری (تغییرشکل یافته) تغییر کند.



شکل ۲ : جسم جامد تحت تغییرشکل‌های بزرگ [۲۹]

با توجه به شکل (۲)، بردار تغییرمکان $\mathbf{u}$ برحسب موقعیت جاری سیستم، $\mathbf{x}$، و همچنین هندسه اولیه سیستم، $\mathbf{X}$، طبق رابطه (۱) قابل بیان است.

$$\mathbf{u}=\mathbf{x}-\mathbf{X} \tag{۱}$$

با توجه به اینکه تعریف کرنش شامل مشتق جابه‌جایی‌ها نسبت به یک محور مختصات است. هر یک از هندسه‌های تغییرشکل یافته و اولیه می‌توانند در مشتق‌گیری به کار گرفته شوند و بنابراین، دو نوع شیوه مختلف برای تعریف کرنش‌ها به وجود می‌آید. در حالت اول اگر هندسه اولیه به‌عنوان مرجع مشتق‌گیری در نظر گرفته شود، کرنش‌های لاگرانژی، $\mathbf{E}$، طبق رابطه (۲) تعریف می‌شود.

[25] rigid body rotation
[26] non-unique
[27] Total Lagrange
[28] Updated Lagrange
[29] Current configuration

$$\mathbf{E}=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \mathbf{X}}+\frac{\partial \mathbf{u}^{\mathrm{T}}}{\partial \mathbf{X}}+\frac{\partial \mathbf{u}^{\mathrm{T}}}{\partial \mathbf{X}}\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \mathbf{X}}\right) \tag{۲}$$

به‌طور جایگزین، اگر هندسه اولیه به‌عنوان مرجع مشتق‌گیری در نظر گرفته شود، کرنش‌های اویلری، $\mathbf{e}$، به‌صورت زیر بیان می‌شوند.

$$\mathbf{e}=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \mathbf{x}}+\frac{\partial \mathbf{u}^{\mathrm{T}}}{\partial \mathbf{x}}+\frac{\partial \mathbf{u}^{\mathrm{T}}}{\partial \mathbf{x}}\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \mathbf{x}}\right) \tag{۳}$$

۲-۲- معادلات تعادل سیستم در حالت غیرخطی

اصل کار مجازی که در فرمول‌بندی مسائل غیرخطی بسیار کاربرد دارد، بیان می‌کند که: در حالتی که سازه در حال تعادل است، کار مجازی نیروهای داخلی و خارجی برای هر تغییرشکل مجازی سازگار با سیستم باهم برابرند. در این قسمت نیز، قصد بر آن است تا نحوه به دست آوردن روابط تعادل برای یک مدل اجزا محدود غیرخطی به‌صورت خلاصه مرور گردد.

با فرض یک میدان جابه‌جایی سه‌بعدی $\mathbf{U}=\{u,v,w\}^{\mathrm{T}}$، در یک مسئله اجزا محدود، جابه‌جایی‌های داخل المان ($\mathbf{U}^e$) مطابق رابطه (۴) برحسب توابع شکل ($\mathbf{N}$) قابل‌تعریف هستند.

$$\mathbf{U}^e=\mathbf{N}\mathbf{d}^e \tag{۴}$$

که در آن، $\mathbf{d}^e$ بیانگر بردار جابه‌جایی‌های گره‌ای المان است و با استفاده از تعریف ماتریس $\mathbf{B}$ می‌تواند طبق رابطه ماتریسی (۵) کرنش‌های ایجادشده در داخل المان، $\boldsymbol{\varepsilon}^e$، را در اختیار قرار دهد.

$$\boldsymbol{\varepsilon}^e=\mathbf{B}\mathbf{d}^e \tag{۵}$$

با بهره‌گیری از اصل حساب تغییرات[30] و با تعریف یک میدان مجازی برای جابه‌جایی‌های المان به‌صورت ($\delta\mathbf{d}^e$)، رابطه (۵) را می‌توان به فرم ذیل نوشت:

$$\delta\boldsymbol{\varepsilon}^e=\mathbf{B}\delta\mathbf{d}^e \tag{۶}$$

حال، با برابر قرار دادن کار داخلی (ناشی از تنش‌های $\boldsymbol{\sigma}^e$) با انتگرال‌گیری روی حجم المان V^e و کار خارجی ناشی از بارهای گره‌ای، $\mathbf{F}^e$، طبق اصل کار مجازی، داریم:

$$\int_{V^e}\left(\delta\boldsymbol{\varepsilon}^e\right)^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\sigma}^e\,dv=\left(\delta\mathbf{d}^e\right)^{\mathrm{T}}\mathbf{F}^e \tag{۷}$$

که با مقداری ساده‌سازی ماتریسی، رابطه تعادل به شکل زیر نوشته می‌شود.

$$\int_{V^e}\mathbf{B}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\sigma}^e\,dv=\mathbf{F}^e \tag{۸}$$

پس از حصول رابطه تعادل در سطح المان‌ها، با انجام عملیات سرهم‌بندی[31]، معادلات تعادل سیستم در مختصات کلی به شکل زیر درمی‌آیند.

[30] Variational principle
[31] Assembling

$$\mathbf{F}_{\text{int}} = \mathbf{F}_{\text{ext}} \tag{۹}$$

که در آن، $\mathbf{F}_{\text{int}}$ و $\mathbf{F}_{\text{ext}}$ به ترتیب نمایانگر نیروهای داخلی و خارجی در سیستم موردبررسی هستند.

۲-۳- حل معادلات تعادل غیرخطی

روش‌های عددی متنوعی تاکنون برای حل معادلات تعادل یک سیستم غیرخطی سازه‌ای پیشنهادشده‌اند. استفاده از روش تکراری نیوتن-رافسون در یک گام بار، در یک استراتژی حل افزایشی-تکراری[۳۲]، جزو شناخته‌شده‌ترین روش‌های سنتی در این زمینه است. بااین‌حال، برای افزایش کارایی تکنیک‌های حل در مسائل مختلف، الگوریتم‌های پیشرفته‌تری نظیر: روش‌های جستجوهای خطی[۳۳]، دنبال کننده مسیر[۳۴]، شبه نیوتنی[۳۵]، و تعویض‌کننده شاخه در نقاط انشعابی[۳۶] نیز تابه‌حال معرفی‌شده‌اند، که در ادامه تشریح می‌گردند.

همان‌طور که در بخش قبل ذکر شد، معادلات تعادل بین نیروهای داخلی و خارجی یک جسم در مکانیک جامدات که با رابطه (۹) بیان می‌شوند در زمان $t+\Delta t$ به‌صورت زیر قابل بازنویسی هستند:

$$^{t+\Delta t}\mathbf{F}_{\text{int}} = {}^{t+\Delta t}\mathbf{F}_{\text{ext}} \tag{۱۰}$$

با توجه به اینکه در اینجا نیروی داخلی یک تابع غیرخطی از تغییرمکان‌های سیستم، $\mathbf{D}$، است؛ با استفاده از مفهوم ضریب سختی مماسی $^{t}\mathbf{k}$، تغییرات نیروی داخلی، $\Delta\mathbf{F}_{\text{int}}$، از زمان t تا $t+\Delta t$ را می‌توان طبق رابطه (*) بیان نمود.

$$^{t}\mathbf{F}_{\text{int}} + {}^{t}\mathbf{k}\,\Delta\mathbf{D} = {}^{t+\Delta t}\mathbf{F}_{\text{ext}} \quad , \quad {}^{t}\mathbf{k} = \frac{\partial\, {}^{t}\mathbf{F}_{\text{int}}}{\partial\, {}^{t}\mathbf{D}} \tag{۱۱}$$

تجربه نشان داده است که اگر پس از محاسبه $\Delta\mathbf{D}$، از رابطه (۱۱) بلافاصله به گام بعدی برویم جواب‌ها دارای خطاهای بزرگ‌شده و احتمالاً ناپایدار می‌گردند؛ ازاین‌رو، در عمل لازم است که محاسبات در یک گام تا رسیدن به یک رواداری[۳۷] مجاز ادامه یابند تا به جواب‌های دقیق برسیم. تعدادی از روش‌های رایج در این زمینه در ادامه مطالب آورده شده‌اند.

۲-۳-۱- روش نیوتن-رافسون[۳۸]

این تکنیک به‌عنوان یک روش کلاسیک عددی در تحلیل سیستم‌های غیرخطی دارای معادلاتی به شرح زیر است:

$$^{t+\Delta t}\mathbf{k}^{(i-1)}\,\Delta\mathbf{D}^{(i)} = {}^{t+\Delta t}\mathbf{F}_{\text{ext}} - {}^{t+\Delta t}\mathbf{F}_{\text{int}}^{(i-1)} \quad , \quad {}^{t+\Delta t}\mathbf{D}^{(i)} = {}^{t+\Delta t}\mathbf{D}^{(i-1)} + \Delta\mathbf{D}^{(i)} \tag{۱۲}$$

در این روابط، بالانویس i نشانگر شماره تکرار است، همچنین، در شروع فرایند تکرار، یعنی هنگامی‌که $i=1$ است، شرایط اولیه زیر باید در نظر گرفته شوند.

$$^{t+\Delta t}\mathbf{k}^{(0)} = {}^{t}\mathbf{k} \quad , \quad {}^{t+\Delta t}\mathbf{F}_{\text{int}}^{(0)} = {}^{t}\mathbf{F}_{\text{int}} \quad , \quad {}^{t+\Delta t}\mathbf{D}^{(0)} = {}^{t}\mathbf{D} \tag{۱۳}$$

با تعریف یک نیروی باقیمانده یا نامتوازن[۳۹]، $\mathbf{F}_{\text{R}}$، در هر تکرار به کمک رابطه زیر

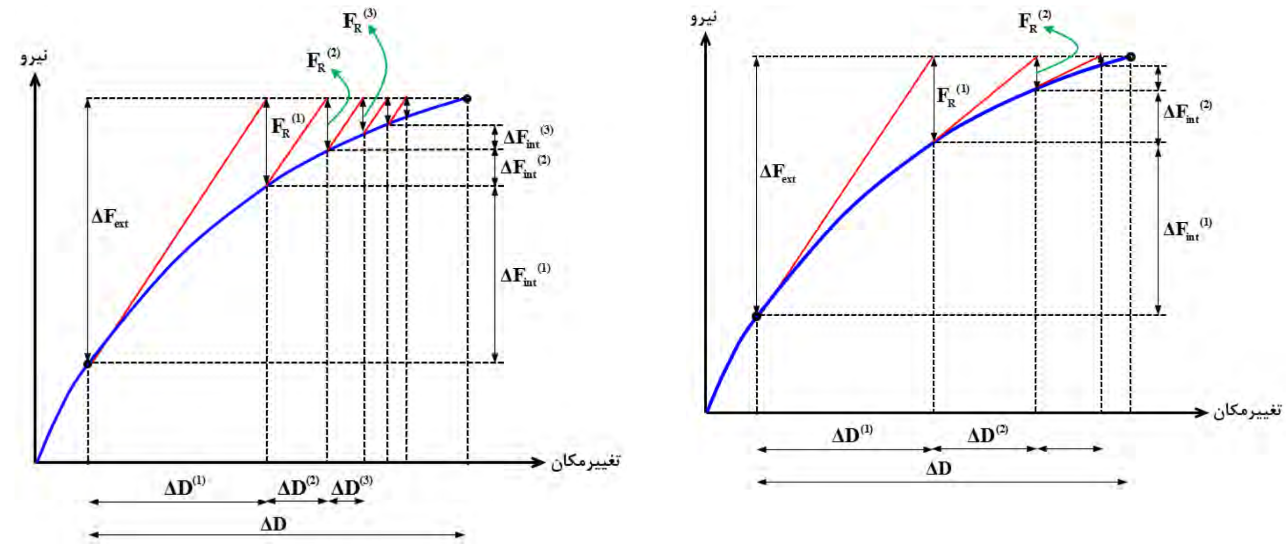
$$^{t+\Delta t}\mathbf{F}_{\text{R}}^{(i)} = {}^{t+\Delta t}\mathbf{F}_{\text{ext}} - {}^{t+\Delta t}\mathbf{F}_{\text{int}}^{(i-1)} \tag{۱۴}$$

می‌توان شرط توقف تکرارها برای حصول از همگرایی محاسبات در یک گام را برحسب کوچک شدن این بردار بار خارج از تعادل بیان نمود.

---

32 Incremental-iterative solution strategy
33 Line searches
34 Path-following
35 Quasi-Newton
36 Branch switching techniques at bifurcation points
37 Tolerance
38 Newton-Raphson
39 Residual or Unbalanced force

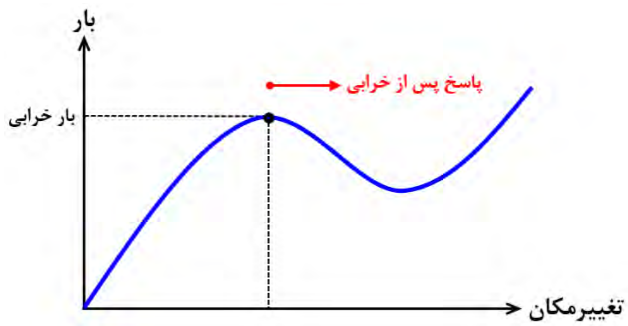
در اینجا باید توجه داشت که به‌روزرسانی ماتریس سختی مماسی در هر تکرار، هزینه محاسباتی بالایی را در عمل ایجاد می‌کند. بنابراین، روش نیوتن-رافسون اصلاح‌شده[40] معرفی‌شده است که در آن ماتریس سختی مماسی فقط در ابتدای هر پله بار ایجاد می‌شود و در طول فرایند تکرار در هر گام زمانی ثابت نگه داشته می‌شود. تصور هندسی از این دو روش در شکل (۳) نشان داده شده است. همچنین تکنیک‌های دیگری نیز در این زمینه معرفی‌شده‌اند که به روش‌های شبه-نیوتنی معروف‌اند؛ این دسته از روش‌ها درواقع حالت میانه‌ای از روش‌های نیوتن-رافسون معمولی و اصلاح‌شده هستند.



شکل۳ : حل معادلات تعادل به روش‌های نیوتن-رافسون معمولی (سمت راست) و نیوتن-رافسون اصلاح‌شده (سمت چپ)

۲-۳-۲- روش‌های نیرو-تغییرمکان-قید[41]

در بسیاری از موارد تحلیل‌های غیرخطی به‌منظور تعیین بار خرابی در یک سیستم سازه‌ای به کار می‌روند. در این حالت، مطابق شکل (۴)، در ابتدای منحنی بار-تغییرمکان که رفتار سازه خطی است می‌توان از نموهای بزرگ برای بار استفاده نمود؛ ولی، با نزدیک شدن به نقطه خرابی (با غیرخطی شدن رابطه نیرو-تغییرمکان) مقدار نموهای بار باید کوچک‌تر شوند. به‌خصوص در هنگام عبور از نقطه خرابی (که مقدار سختی در آنجا صفر می‌گردد) و ازلحاظ ریاضی تکین[42] خواهد شد. علاوه بر این، برای محاسبه پاسخ پس از کمانش[43] باید از روش‌های خاصی بهره گرفت که قادر باشند کاهش در بار هم‌زمان با افزایش در تغییرمکان را در نظر بگیرند.



شکل۴ : پاسخ سازه‌های دارای نقطه خرابی

[40] Modified Newton-Raphson
[41] Load-Displacement-Constraint
[42] Singular
[43] Post-buckling

ایده روش‌های بار-تغییرمکان-قید اولین بار توسط ریکس [۳۰] مطرح شده است. به‌طورکلی، فلسفه این روش‌ها شامل وارد نمودن یک ضریب بار، λ ، در معادلات تعادل است که شدت بار وارده را کاهش یا افزایش می‌دهد. درواقع سه هدف اصلی از تعریف کردن این ضریب در معادلات وجود دارد: ۱- وقوع همگرایی سریع‌تر در هر گام ۲- عبور آسان از نقطه خرابی ۳- امکان تعیین پاسخ پس از خرابی. در این دسته از روش‌ها، معادلات تعادل به شکل زیر بازنویسی می‌گردند.

$$ {}^{t+\Delta t}\mathbf{F}_{\mathbf{int}} = {}^{t+\Delta t}\lambda\,\mathbf{F}_{\mathbf{ext}} \tag{۱۵}$$

با تعریف نیروی داخلی در تکرار iام از یک فرایند تکراری به‌صورت زیر

$$ {}^{t+\Delta t}\mathbf{F}_{\mathbf{int}}{}^{(i)} = {}^{t+\Delta t}\mathbf{F}_{\mathbf{int}}{}^{(i-1)} + {}^{t+\Delta t}\mathbf{k}^{(i-1)}\Delta\mathbf{D}^{(i)} \tag{۱۶}$$

و همچنین بیان ضریب بار،

$$ {}^{t+\Delta t}\lambda^{(i)} = {}^{t+\Delta t}\lambda^{(i-1)} + \Delta\lambda^{(i)} \tag{۱۷}$$

رابطه اساسی تعادل نیرویی در این روش‌ها در فرم تکراری (۱۸) بیان می‌گردد.

$$ {}^{t+\Delta t}\mathbf{k}^{(i-1)}\Delta\mathbf{D}^{(i)} = ({}^{t+\Delta t}\lambda^{(i-1)} + \Delta\lambda^{(i)})\mathbf{F}_{\mathbf{ext}} - {}^{t+\Delta t}\mathbf{F}_{\mathbf{int}}{}^{(i-1)} \tag{۱۸}$$

باید توجه داشت که دو مجهول اصلی رابطه (۱۸) شامل نمو تغییرمکان، $\Delta\mathbf{D}^{(i)}$، و نمو ضرایب بار، $\Delta\lambda^{(i)}$، هستند که باید توسط یک رابطه قیدی در فرم معادله (۱۹) به هم مرتبط شوند.

$$ f(\Delta\mathbf{D}^{(i)}, \Delta\lambda^{(i)}) = 0 \tag{۱۹}$$

اکنون اگر در درون یک پله بار، تغییرات جابه‌جایی، $\delta\mathbf{D}^{(i)}$، و ضریب بار، $\delta\lambda^{(i)}$، تا تکرار iام را به‌صورت زیر در نظر بگیریم.

$$ \delta\mathbf{D}^{(i)} = {}^{t+\Delta t}\mathbf{D}^{(i)} - {}^{t}\mathbf{D} \quad , \quad \delta\lambda^{(i)} = {}^{t+\Delta t}\lambda^{(i)} - {}^{t}\lambda \tag{۲۰}$$

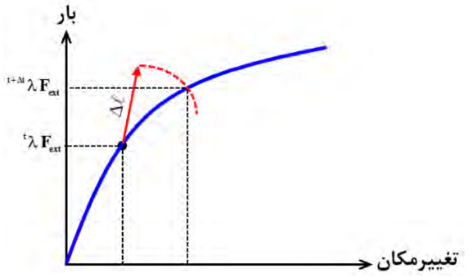
به‌طور نمونه، مطابق با شکل (۵)، با استفاده از معیار طول کمان ثابت کروی، $\Delta\ell$، می‌توان رابطه قیدی زیر را تعریف نمود [۳۱].

$$ (\delta\lambda^{(i)})^2 + \frac{(\delta\mathbf{D}^{(i)})^T(\delta\mathbf{D}^{(i)})}{\beta} = \Delta\ell^2 \tag{۲۱}$$

β در رابطه فوق ثابتی است که به‌منظور بی‌بعد کردن عبارت به کار می‌رود. در عمل دو حد بالا و پایین برای طول قوس، به‌صورت $\Delta\ell_{Min}$ و $\Delta\ell_{Max}$ در نظر گرفته می‌شوند.

$$ \Delta\ell_{Min} \le \Delta\ell \le \Delta\ell_{Max} \tag{۲۲}$$

درواقع، برای حالاتی که سازه رفتار خطی دارد مقادیر نزدیک به $\Delta\ell_{Max}$ انتخاب‌شده و با غیرخطی شدن پاسخ سازه نیز باید از مقادیر در مجاورت $\Delta\ell_{Min}$ بهره برد.



شکل۵ : توصیف هندسی از معیار طول کمان ثابت کروی

در برخی موارد نیز، معادلات تعادل در این گروه از روش‌ها را به‌صورت زیر بازنویسی می‌کنند.

$$\Delta\bar{\mathbf{D}}^{(i)} = ({}^{t+\Delta t}\mathbf{k}^{(i-1)})^{-1}({}^{t+\Delta t}\lambda^{(i-1)}\mathbf{F}_{ext} - {}^{t+\Delta t}\mathbf{F}_{int}{}^{(i-1)})$$
$$\Delta\bar{\bar{\mathbf{D}}}^{(i)} = ({}^{t+\Delta t}\mathbf{k}^{(i-1)})^{-1}(\mathbf{F}_{ext}) \quad (۲۳)$$

از این دو رابطه، نمو جابه‌جایی در تکرار iام به شکل زیر بیان می‌گردد.

$$\Delta\mathbf{D}^{(i)} = \Delta\bar{\mathbf{D}}^{(i)} + \Delta\lambda^{(i)}\Delta\bar{\bar{\mathbf{D}}}^{(i)} \quad (۲۴)$$

در این حالت با جایگذاری این معادلات در رابطه قیدی (۲۱) می‌توان به یک عبارت درجه دوم برحسب $\Delta\lambda^{(i)}$ رسید، که برای ادامه فرایند تحلیل سیستم یک مقدار مناسب از آن باید انتخاب گردد. همچنین اگر از *معیار نمو ثابت در کار خارجی* نیز استفاده شود، معادله قیدی منجر به رابطه (۲۵) می‌گردد.

$$\Delta\lambda^{(i)} = -\frac{(\mathbf{F}_{ext})^{T}\Delta\bar{\mathbf{D}}^{(i)}}{(\mathbf{F}_{ext})^{T}\Delta\bar{\bar{\mathbf{D}}}^{(i)}} \quad (۲۵)$$

در اینجا ذکر این نکته ضروری است که روش‌های ذکرشده در این قسمت غیرخودآغازگر هستند؛ بدین معنا که یک الگوریتم حل دیگر در ابتدا برای شروع فرایند حل باید به کار گرفته شود. همچنین، تکنیک‌هایی نیز در طول فرایند تحلیل برای انتخاب مناسب مقدار $\Delta\ell$ باید به کار گرفته شوند. علاوه بر این، در مواردی که واگرایی نزدیک است، الگوریتم به کار گرفته‌شده باید فرایند تکرار را متوقف ساخته و سپس با پارامترهای جدید فرایند حل دوباره آغاز گردد.

۳- روش تحقیق

ایده اصلی روش به کار گرفته‌شده در این تحقیق بر مبنای روش انرژی اصلاح‌شده قرار دارد که اولین بار توسط مراجع [۳۳،۳۲] در تحلیل تاریخچه زمانی سازه‌های دارای رفتار غیرخطی معرفی شده است. به‌طورکلی روش انرژی اصلاح‌شده در ابتدا در مرجع [۳۲] در ارتباط با یافتن پاسخ دینامیکی سازه‌های تک درجه آزادی مطرح شد که مسائل موردبررسی شامل سیستم‌های خطی و همچنین غیرخطی ساده‌ای نظیر فنر با سختی درجه سه (دافینگ)، اصطکاک کولمب و همچنین حرکت آونگ با دوران‌های بزرگ (جمله غیرخطی سینوسی) بوده‌اند. روش به کار گرفته‌شده در آغاز، شامل گسسته سازی معادلات تعادل انرژی در زمان و سپس یافتن سرعت حقیقی سیستم با استفاده از معادلات تعادل نیرویی سیستم بوده است. پس‌ازآن، این روش در مرجع [۳۳] بر روی سیستم‌های قاب-برشی با رفتار خطی به کار گرفته شد و در آنجا تکنیک حذف سرعت‌های ناپیوسته[۴۴] برای اولین بار در حل معادلات کوپله حاصل از روش انرژی بر روی این سازه‌ها معرفی شد. در مقاله حاضر نیز با گسترش ایده مطرح‌شده (استفاده از رویکرد انرژی-مبنا) در تحلیل مسائل غیرخطی هندسی در مکانیک جامدت (که به‌مراتب دارای جملات غیرخطی پیچیده‌تری از مسائل در نظر گرفته‌شده در دو مرجع قبلی هستند)؛ به‌طور ویژه، کارایی روش انرژی اصلاح‌شده در مقایسه سایر روش‌ها (نظیر تکنیک نیوتن-رافسون و ریکس-ومپنر) در مسائلی که دارای نقاط انشعابی در منحنی نیرو-تغییر مکان خود هستند موردبررسی قرار می‌گیرد.

همان‌طور که می‌دانیم تحلیل واقعی مسائل سازه‌ای شامل یک تحلیل دینامیکی که در آن رفتار سازه با زمان تغییر می‌کند، ولی در بسیاری از موارد، برای رهایی از پیچیدگی‌های تحلیلی، زمانی که بارها به‌صورت تدریجی بر سازه وارد می‌شوند (مانند آنچه در این تحقیق فرض شده است) از یک فرایند شبه-استاتیکی[۴۵] در تحلیل‌های غیر غیرخطی استفاده می‌شود. در تحلیل‌های شبه استاتیکی، بار به‌صورت گام‌های افزاینده به سازه اعمال می‌گردد. باید توجه داشت که در این حالت، متغیر t بیانگر یک شبه-زمان[۴۶] است که شدت بار

[۴۴] Elimination of Discontinuous velocities
[۴۵] Quasi-static
[۴۶] pseudo time

اعمالی در یک گام مشخص را بیان می‌کند و نباید با متغیر زمانی که در تحلیل‌های غیرخطی دینامیکی استفاده می‌شوند، اشتباه گرفته شود.

به‌جای استفاده از رابطه (۹) که بیانگر تعادل نیرویی سیستم است، در این تحقیق از یک فرمول‌بندی مبتنی بر انرژی به‌عنوان رابطه حاکم بر یک مسئله غیرخطی سازه‌ای استفاده می‌شود. به‌طورکلی، انرژی‌های موجود در یک سیستم استاتیک در حالت کلی شامل انرژی ناشی از نیروی مقاوم سازه، F_{int} و انرژی یا کار ناشی از بارگذاری وارد بر سازه، F_{ext}، هستند که در این پژوهش به ترتیب با E_{int} و E_{out} نمایش داده می‌شوند. بر مبنای قانون بقای انرژی و طبق رابطه (۲۶) مقدار این دو انرژی در هرلحظه باید باهم برابر باشند.

$$ {}^{t}E_{int} = {}^{t}E_{ext} \tag{۲۶}$$

برای حصول یک رابطه نموی، رابطه فوق را می‌توان به شکل زیر نوشت.

$$ \boxed{\Delta E_{int} = \Delta E_{ext}} \quad ; \quad \Delta E_{int} = E_{int}(t_{j+1}) - E_{int}(t_j) \quad , \quad \Delta E_{ext} = E_{ext}(t_{j+1}) - E_{ext}(t_j) \tag{۲۷}$$

که در آن t_j و t_{j+1} به ترتیب بیانگر دو لحظه زمانی متوالی هستند.

تغییرات انرژی ناشی از کار نیروهای داخلی، ΔE_{int}، در حالت کلی برای یک سیستم غیرخطی به‌صورت انتگرالی زیر بیان می‌گردد.

$$ \Delta E_{int} = \int_{t_j}^{t_{j+1}} F_{int}(D)\,dD \tag{۲۸}$$

که با استفاده از قانون ذوزنقه به‌صورت زیر قابل گسسته سازی است که در آن زیرنویس j شماره گام زمانی را نشان می‌دهد.

$$ \Delta E_{int} = \frac{\Delta D}{2}[{}^{j+1}F_{int} + {}^{j}F_{int}] \tag{۲۹}$$

که اگر در آن نیروی داخلی در گام جاری، ${}^{j+1}F_{int}$، را برحسب نیروی داخلی در گام قبلی، ${}^{j}F_{int}$، و همچنین ماتریس سختی مماسی، ${}^{t}k$، بیان گردد؛ رابطه (۲۹) به فرم زیر درمی‌آید.

$$ \Delta E_{int} = \frac{\Delta D}{2}[2\,{}^{j}F_{int} + {}^{t}k\Delta D] \tag{۳۰}$$

از طرفی، تغییرات انرژی ناشی از کار خارجی، ΔE_{ext} ، نیز با رابطه (۳۱) تعریف می‌شود.

$$ \Delta E_{ext} = \int_{t_j}^{t_{j+1}} F_{ext}(t)\,dD \tag{۳۱}$$

رابطه (۳۱) را نیز با استفاده از تعریف سرعت، ${}^{j}v$، می‌توان به شکل زیر بازنویسی نمود.

$$ \Delta E_{ext} = \int_{t_j}^{t_{j+1}} F_{ext}(t)\,v(t)dt \tag{۳۲}$$

که فرم گسسته شده آن عبارت است از

$$ \Delta E_{ext} = \frac{\Delta t}{2}[{}^{j+1}F_{ext}\,{}^{j+1}v + {}^{j}F_{ext}\,{}^{j}v] \tag{۳۳}$$

حال با جایگذاری روابط (۳۰) و (۳۳) در داخل معادله تعادل انرژی (۲۷)، می‌توان به فرم زیر دست‌یافت.

$$\Delta D[2\,{}^{j}F_{int} + {}^{t}k\Delta D] = \Delta t[\,{}^{j+1}F_{ext}\;{}^{j+1}v + {}^{j}F_{ext}\;{}^{j}v] \qquad (۳۴)$$

از طرفی، تغییرات جابه‌جایی، ΔD، را نیز می‌توان به کمک رابطه اویلر به شکل زیر نوشت؛ که در آن β ضریب مشارکت سرعت در تعیین تغییرمکان‌های سیستم است که درواقع نوع انتگرال‌گیری را مشخص می‌کند.

$$\Delta D = \Delta t\left[\beta\;{}^{j+1}v + (1-\beta)\;{}^{j}v\right] \qquad (۳۵)$$

با قرار دادن رابطه (۳۵) در داخل (۳۴) و انجام مقداری ساده‌سازی ریاضی، می‌توان به رابطه درجه دوم (۳۶) برحسب ${}^{j+1}v$ رسید.

$$A\;{}^{j+1}v^2 + B\,{}^{j+1}v + C = 0 \qquad (۳۶)$$

ضرایب این معادله نیز به‌صورت زیر تعریف می‌گردند.

$$\begin{cases} A = {}^{t}k\Delta t\beta^2 \\ B = 2\beta\left[{}^{j}F_{int} + {}^{t}k\Delta t(1-\beta)\,{}^{j}v\right] - {}^{j+1}F_{ext} \\ C = {}^{j}v\left[2(1-\beta)\,{}^{j}F_{int} + {}^{t}k\,\Delta t\;{}^{j}v(1-\beta)^2 - {}^{j}F_{ext}\right] \end{cases} \qquad (۳۷)$$

با توجه به اینکه وجود سرعت‌های موهومی در یک سیستم سازه‌ای معنی فیزیکی ندارد؛ دلتا، $\Delta = B^2 - 4AC$، معادله درجه دوم (۳۶) باید همواره مثبت باشد. با توجه به اینکه این مقدار در حالت کلی به خواص سیستم، بارگذاری وارده و پارامترهای گسسته سازی وابسته است، می‌توان یک شرط اضافی در مورد پایداری جواب‌های عددی حاصل‌شده به دست آورد. باید توجه داشت که این یک مزیت این نوع فرمول‌بندی است که در دیگر روش‌های نیرو-مبنای رایج موجود نیست.

همانطور که از معادلات (۳۷) مشاهده می شود، مقدار Δ به پارامتر β وابستگی دارد. به طور مثال، به ازای $\beta = 0$ طبق سطر اول از معادلات موجود در رابطه (۳۷) ضریب A صفر شده و در نتیجه با تبدیل فرم درجه دوم رابطه (۳۶) به یک معادله درجه اول (به صورت $B^{j+1}v + C = 0$) امکان ایجاد سرعت های موهومی در طول تحلیل سازه از بین می رود. ولی به ازای دیگر مقادیر این پارامتر (یعنی $0 < \beta \leq 1$) باید علامت دلتا در طول تحلیل کنترل شده و در صورت منفی شدن مقدار بازه زمانی Δt را کوچک نمود. زیرا به‌راحتی با استفاده از رابطه (۳۷) می‌توان مشاهده نمود که با به سمت صفر میل کردن گام زمانی ($\Delta t \to 0$)، مقدار دلتای معادله درجه دوم همواره مثبت می‌گردد. علاوه بر این، سؤالی که در اینجا برای خواننده ایجاد می‌گردد این است که با توجه به درجه دوم بودن معادله سرعت و در اختیار قرار دادن دو سرعت در هر لحظه، سرعت واقعی سیستم را چگونه می‌توان از میان این دو انتخاب نمود؟ برای این منظور با توجه به مرجع [۳۳]، می‌توان بر مبنای پیوسته بودن تغییرات سرعت، سرعت واقعی در هر لحظه را از میان سرعتی که به سرعت در گام قبلی نزدیک‌تر است انتخاب نمود. در این روش برای حل معادله درجه دوم سرعت و تشخیص سرعت واقعی سیستم در هر زمان، فرض بر این است که تغییرات سرعت با زمان به‌صورت پیوسته است و تغییرات ناپیوسته سرعت با رفتار سیستم سازه‌ای ازلحاظ فیزیکی سازگار نیست. بنابراین، از میان دو سرعتی که در هرلحظه از این معادلات درجه دوم به دست می‌آید، سرعت نزدیک‌تر به سرعت در گام زمانی قبلی به‌عنوان سرعت واقعی سازه انتخاب می‌گردد. به همین دلیل، نام این روش در ادبیات تحقیق با عنوان تکنیک *حذف سرعت‌های ناپیوسته* (Elimination of Discontinuous Velocities) شناخته می‌شود. ازلحاظ ریاضی اگر سرعت‌های محاسبه‌شده در گام جاری را v_1 و v_2 بنامیم، در این حالت می‌توان نوشت:

$$
{}^{j+1}v = \begin{cases} v_1 & \text{if} \quad \left|v_1 - {}^{j}v\right| < \left|v_2 - {}^{j}v\right| \\ v_1 & \text{if} \quad \left|v_2 - {}^{j}v\right| < \left|v_1 - {}^{j}v\right| \\ \dfrac{-B}{A} & \text{if} \quad {}^{j}v = 0 \end{cases} \tag{۳۸}
$$

به‌طورکلی برای اجرای کامپیوتری روش ارائه‌شده برای تحلیل یک سیستم غیرخطی گام‌های ذیل باید طی شوند:

۱- تعریف رابطه نیرو-تغییرمکان غیرخطی، F_{int}

۲- تعریف بارگذاری وارد بر سازه، F_{ext}

۳- انتخاب گام زمانی، Δt

۴- تعیین روش انتگرال‌گیری، β

۵- پیشروی در زمان تا رسیدن به پایان تحلیل ($j = j + 1$)

۶- حل معادله درجه دوم سرعت با استفاده از رابطه (۳۶)

۷- تعیین سرعت واقعی سیستم به کمک عبارت (۳۸)

۸- محاسبه تغییرمکان‌ها در گام جاری، $\left({}^{j+1}D = {}^{j}D + \Delta D\right)$

۹- به‌روزرسانی سختی سازه، ${}^{t}k$

۱۰- تکرار در بین گام‌های شماره (۶) تا (۹) برای رسیدن به همگرایی جواب‌ها

۱۱- ذخیره‌سازی دلتای معادله درجه دوم، Δ (برای کنترل جواب‌ها)

۱۲- ذخیره‌سازی مقادیر مربوط به جابه‌جایی و سرعت، ${}^{j+1}D$ و ${}^{j+1}v$

شکل۶ : مراحل گام‌به‌گام موردنیاز برای اجرای کامپیوتری روش انرژی اصلاح‌شده

۴- مثال‌های عددی

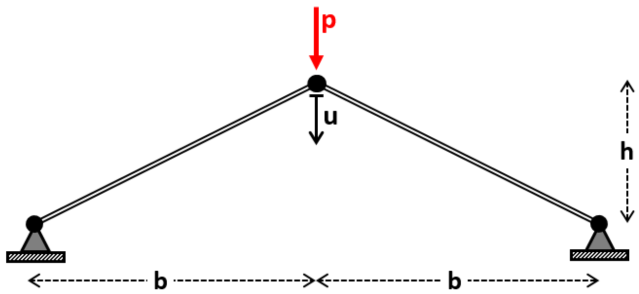
در این بخش به‌منظور بررسی کارایی الگوریتم ارائه‌شده در بخش قبل، تعدادی مثال عددی با استفاده از کدنویسی در برنامه متلب[47] مورد تحلیل واقع‌شده‌اند. در مثال اول، رفتار کمانشی یک سازه خرپایی تحت تغییرشکل‌های بزرگ و اثرات هندسه غیرخطی بررسی می‌گردد. در مثال بعدی نیز بار کمانشی و همچنین پاسخ پس-خرابی یک سازه قابی شکل با در نظر گرفتن رفتار خمشی و محوری در المان‌ها موردبررسی قرار می‌گیرد. در مثال سوم نیز یک سازه خرپایی شبیه به مثال اول، ولی دارای هندسه نامتقارن و سطح مقطع اعضای

[47] MATLAB

نابرابر بررسی شده است. قابل‌ذکر است که نتایج عددی به‌دست‌آمده از روش انرژی ارائه‌شده در تمامی مسائل به کمک استفاده از روش‌های عددی دیگر به‌دست‌آمده توسط دیگر محققین و همچنین جواب دقیق تحلیلی (در صورت وجود) مورد صحت سنجی واقع شده‌اند.

۴-۱- خرپای دوبعدی با هندسه غیرخطی

سیستم موردبررسی در این مثال که شامل یک خرپای دو عضوی تحت تغییرشکل‌های بزرگ است در شکل (۷) نشان داده شده است. این سازه در مرجع [۳۴] برای مطالعه رفتار کمانشی آن موردبررسی قرار گرفته است و همچنین توسط مرجع [۳۵] منحنی بار-تغییرشکل غیرخطی سازه با استفاده از روش ریکس-ومپنر[۴۸] تعیین گشته است.



شکل۷ : خرپای دوبعدی با تغییرشکل‌های بزرگ (رفتار غیرخطی هندسی)

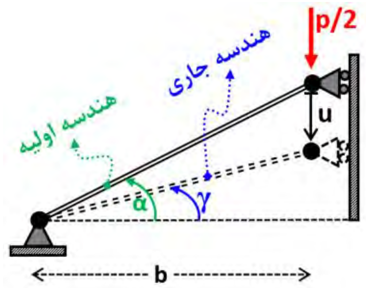
خصوصیات در نظر گرفته‌شده برای این سیستم نیز شامل هندسه و خصوصیات مکانیکی مصالح نیز در جدول (۱) آورده شده‌اند.

جدول ۱: ویژگی‌های در نظر گرفته‌شده برای سازه خرپایی موردبررسی

نوع پارامتر	کمیت	نشانه	مقدار
هندسه سازه	ارتفاع خرپا	h	19.05 cm
	نصف دهانه سازه	b	33 cm
	طول اعضا	ℓ	38.1 cm
	زاویه اعضا با افق	α	30^0
مقطع اعضا	سطح مقطع اعضا	A	99.77 cm^2
ویژگی مصالح	مدول ارتجاعی	E	6889 kN/cm^2

۴-۱-۱- حل تحلیلی (دقیق):

با توجه به اینکه سازه موردنظر متقارن بوده و بارگذاری وارد بر آن نیز تقارن دارد، به‌جای تحلیل کل سیستم می‌توان مطابق شکل (۸)، نیمی از سازه را تحلیل نمود.



شکل۸ : استفاده از تقارن سازه در تحلیل مثال ۴-۱

[48] Riks-Wempner

در این مسئله که با تغییرشکل‌های بزرگ مواجه هستیم، طبق شکل فوق، اگر زاویه اولیه عضو با افق را α و زاویه عضو را در حالتی که تکیه‌گاه غلتکی به‌اندازه u پایین آمده را برابر γ فرض کنیم. با فرض تغییر طول محوری عضو، δ، روابط هندسی زیر را می‌توان بیان نمود.

$$(\ell-\delta)Cos\gamma=\ell Cos\alpha \tag{۳۹}$$

و

$$(\ell-\delta)Sin\gamma+u=\ell Sin\alpha \tag{۴۰}$$

با ترکیب دو رابطه (۳۹) و (۴۰)، می‌توان به عبارت زیر برای بیان تغییر طول محوری عضو رسید.

$$\delta=\ell-\sqrt{\ell^2+u^2-2u\ell Sin\alpha} \tag{۴۱}$$

اگر نیروی محوری عضو را با F_{bar} نشان دهیم، با نوشتن رابطه تعادل قائم نیروها می‌توان به رابطه زیر دست‌یافت.

$$\sum F_Y=0 \quad \therefore \quad F_{bar}Sin\gamma=\frac{p}{2} \tag{۴۲}$$

رابطه قبل با در نظر گرفتن قانون هوک برای رفتار محوری میله به‌صورت زیر

$$F_{bar}=\frac{EA}{\ell}\delta \tag{۴۳}$$

و همچنین در نظر گرفتن روابط (۴۰) و (۴۱)، به‌صورت زیر درمی‌آید.

$$\frac{2EA}{\ell}\left(\frac{1}{\sqrt{1+(\frac{u}{\ell})^2-2(\frac{u}{\ell})Sin\alpha}}-1\right)(h-u)=p \tag{۴۴}$$

۴-۱-۱- حل به روش انرژی:

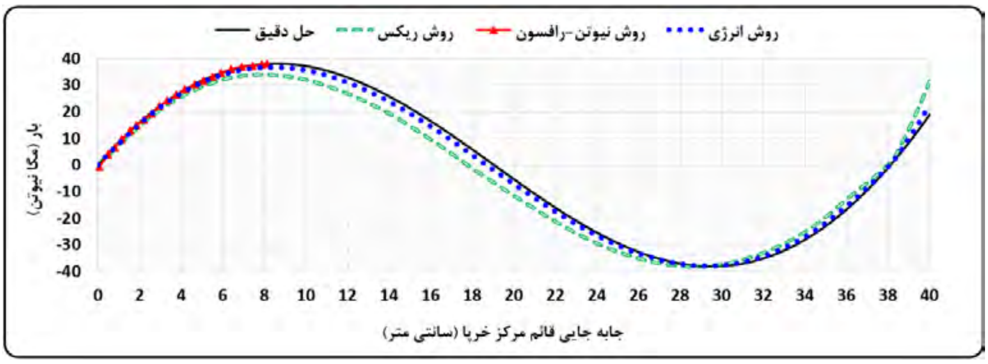
با تعریف یک نیروی فنر معادل، f_S ، برای سیستم موردبحث به‌صورت زیر

$$f_S(u)=\frac{2EA}{\ell}\left(\frac{1}{\sqrt{1+(\frac{u}{\ell})^2-(\frac{u}{\ell})}}-1\right)(\frac{\ell}{2}-u) \tag{۴۵}$$

سختی لحظه‌ای سیستم، $k(t)$، با مشتق‌گیری از این رابطه برحسب جابه‌جایی به شکل زیر قابل حصول است.

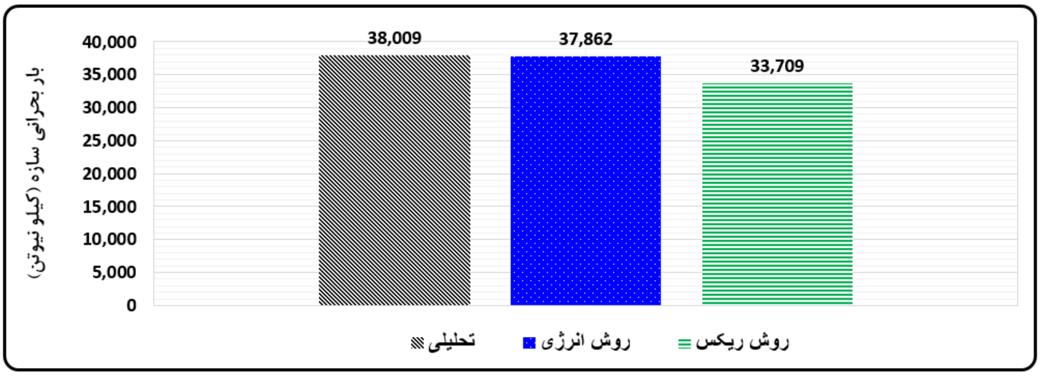
$$k(t)=\frac{\partial f_S}{\partial u}=\frac{2EA}{\ell}\left(1-\frac{3}{4\times\left(1+(\frac{u}{\ell})^2-(\frac{u}{\ell})\right)^{1.5}}\right) \tag{۴۶}$$

با در نظر گرفتن رابطه فوق در رابطه تعادل انرژی می‌توان طبق الگوریتم داده‌شده در بخش قبل به تحلیل این سیستم پرداخت. نتایج حاصل از این تحلیل به همراه حل دقیق مسئله و حل به روش ریکس-ومپنر و همچنین نیوتن-رافسون در شکل (۹) نمایش داده‌شده‌اند



شکل۹ : منحنی بار-تغییرشکل مثال ۴-۱

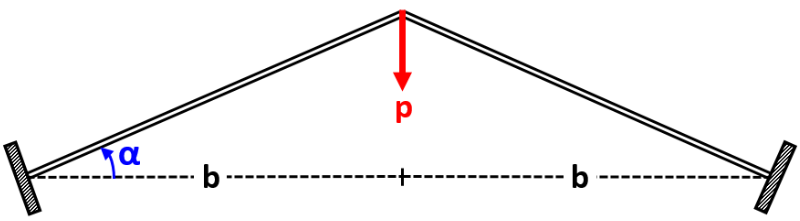
همان‌طور که به‌وضوح از شکل فوق مشخص است، روش انرژی تطابق بسیار خوبی با حل دقیق مسئله داشته و نسبت به روش ریکس اصلاح‌شده بهتر به جواب دقیق مسئله میل نموده است. همچنین، روش نیوتن-رافسون نیز با رسیدن به اولین نقطه انشعابی در حوالی نقطه خرابی سازه (جایی که سختی در حال صفر شدن است) متوقف‌شده و دیگر نتوانسته پاسخ سیستم را پیش‌بینی کند. در ادامه، بار بحرانی سازه در شکل (۱۰) که از روش‌های انرژی و ریکس محاسبه‌شده با مقدار متناظر با حل دقیق مسئله مقایسه شده‌اند که همان‌طور که مشاهده می‌گردد بیانگر دقت بهتر روش انرژی در محاسبه مقدار بار خرابی بوده است.



شکل۱۰ : مقایسه بار کمانشی محاسبه‌شده برای سازه خرپایی از روش‌های انرژی اصلاح‌شده و ریکس-ومپنر با مقدار دقیق در تحلیل مثال ۴-۱

۴-۲- قاب ویلیامز[۴۹] تحت تغییرشکل‌های بزرگ

در این مثال یک سازه قابی مطابق شکل (۱۱) تحت بار متمرکز میانی در نظر گرفته می‌شود. جواب تحلیلی و آزمایشگاهی این سیستم اولین بار توسط مرجع]۳۶[ارائه شده‌اند و به همین منظور نام این قاب نیز از روی نویسنده این مقاله گرفته شده است.



شکل۱۱ : قاب ویلیامز تحت تغییرشکل‌های بزرگ[۳۶]

[49] Williams

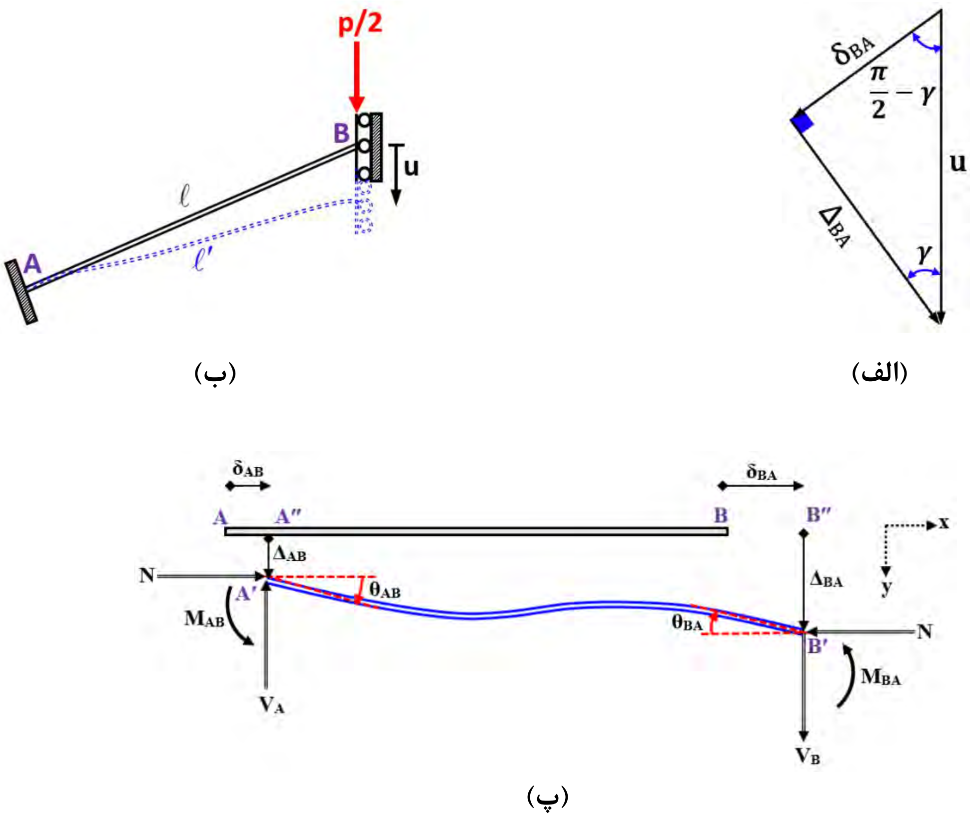
در اینجا، ویژگی فرض شده برای این سازه نیز مطابق جدول (۲) در نظر گرفته شده‌اند.

جدول ۲: ویژگی‌های در نظر گرفته‌شده برای قاب موردبررسی

نوع پارامتر	کمیت	نشانه	مقدار
هندسه سازه	نصف دهانه سازه	b	33.8575 cm
	زاویه اعضا با افق	α	1.658^0
صلبیت مقاطع	محوری	EA	8.251×10^6 N
	خمشی	EI	2.66×10^5 N.cm^2

۴-۲-۱- حل تحلیلی (دقیق):

مشابه آنچه در مثال قبل صورت گرفت، با استفاده از تقارن سازه و بارگذاری وارده می‌توان نیمی از سازه را به‌صورت شکل (۱۲) در نظر گرفت.



شکل۱۲ : استفاده از تقارن سازه در تحلیل مثال ۴-۲

اگر زاویه عضو AB در حالت تغییرشکل یافته با افق را γ فرض کنیم، با استفاده از روابط هندسی نشان داده‌شده در شکل (۱۲)، تغییر مکان در راستا و عمود بر این عضو در نقطه B را می‌توان به‌صورت زیر بیان نمود.

$$\delta_{BA}=uSin\gamma \tag{۴۷}$$

و

$$\Delta_{BA}=uCos\gamma \tag{۴۸}$$

در این حالت، نیروی محوری، N ، ایجادشده در عضو AB را طبق رابطه هوک می‌توان از حاصل‌ضرب سختی محوری عضو در تغییر طول محوری، به‌صورت زیر محاسبه نمود.

$$N = \frac{EA}{\ell}[\delta_{BA} - \delta_{AB} - \frac{1}{2}\int_0^{\ell}\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 dx] \tag{۴۹}$$

که مقدار δ_{AB} با توجه به شرایط مرزی صفر هست و مقدار تغییر طول عضو در اثر خمش که با عبارت انتگرالی نمایش داده شده است نیز طبق مرجع [۳۶] برای مسئله موردنظر به‌صورت زیر محاسبه می‌گردد.

$$\frac{1}{2}\int_0^{\ell}\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 dx = 0.6\frac{u^2}{\ell} \tag{۵۰}$$

درنتیجه نیروی محوری را می‌توان به فرم زیر نوشت:

$$N = \frac{EA}{\ell}[uSin\gamma - 0.6\frac{u^2}{\ell}] \tag{۵۱}$$

اگر فاصله دو سر عضو در حالت تغییرشکل یافته را ℓ' بنامیم، نیروی برشی در نقطه B، V_B، به کمک معادله تعادل لنگر بر روی نقطه A عبارت است از

$$\sum M_A = 0 \quad \therefore \quad V_B = \frac{M_{AB} + M_{BA}}{\ell'} - \frac{p\ell Cos\alpha}{2\ell'} \tag{۵۲}$$

که لنگرهای تکیه‌گاهی M_{AB} و M_{BA} با استفاده از روابط شیب-افت و اعمال شرایط مرزی مربوط به دوران‌ها و چرخش کلی عضو به شکل زیر نوشته می‌شوند.

$$\begin{cases} M_{AB} = \dfrac{2EI}{\ell}[2\underbrace{\theta_A}_{0} + \underbrace{\theta_B}_{0} + 3\dfrac{\Delta_{BA}}{\ell}] = \dfrac{6EIu}{\ell^2}Cos\gamma \\ M_{BA} = \dfrac{2EI}{\ell}[2\underbrace{\theta_B}_{0} + \underbrace{\theta_A}_{0} + 3\dfrac{\Delta_{BA}}{\ell}] = \dfrac{6EIu}{\ell^2}Cos\gamma \end{cases} \tag{۵۳}$$

درنتیجه می‌توان عبارت (۵۲) را برای V_B به‌صورت زیر ساده نمود.

$$V_B = \frac{12EIu}{\ell'\ell^2}Cos\gamma - \frac{p\ell Cos\alpha}{2\ell'} \tag{۵۴}$$

از طرفی تعادل نیروها در گره B نیز ایجاب می‌کند که رابطه ذیل برقرار باشد.

$$\sum F_Y = 0 \quad \therefore \quad \frac{p}{2} = V_B Cos\gamma + NSin\gamma \tag{۵۵}$$

با جایگذاری مقادیر نیروی محوری و برش در نقطه B به ترتیب از روابط (۵۱) و (۵۴) در داخل معادله (۵۵) داریم.

$$\frac{p}{2} = [\frac{12EIu}{\ell'\ell^2}Cos\gamma - \frac{p\ell Cos\alpha}{2\ell'}]Cos\gamma + [\frac{EA}{\ell}(uSin\gamma - 0.6\frac{u^2}{\ell})]Sin\gamma \tag{۵۶}$$

که با مقدار ساده‌سازی و استفاده از روابط هندسی، رابطه تحلیلی نیرو-تغییرمکان غیرخطی زیر حاصل می‌گردد.

$$p=[\frac{24EICos^3\gamma}{\ell^2Cos\alpha(1+Cos^2\gamma)}+\frac{2EASin^2\gamma}{1+Cos^2\gamma}](\frac{u}{\ell})-[0.12EA\frac{Sin\gamma}{1+Cos^2\gamma}](\frac{u}{\ell})^2 \quad ; \gamma=Cos^{-1}[\frac{Cos\alpha}{\sqrt{1+(\frac{u}{\ell})^2-2(\frac{u}{\ell})Sin\alpha}}] \tag{۵۷}$$

۴-۲-۲- حل به روش انرژی:

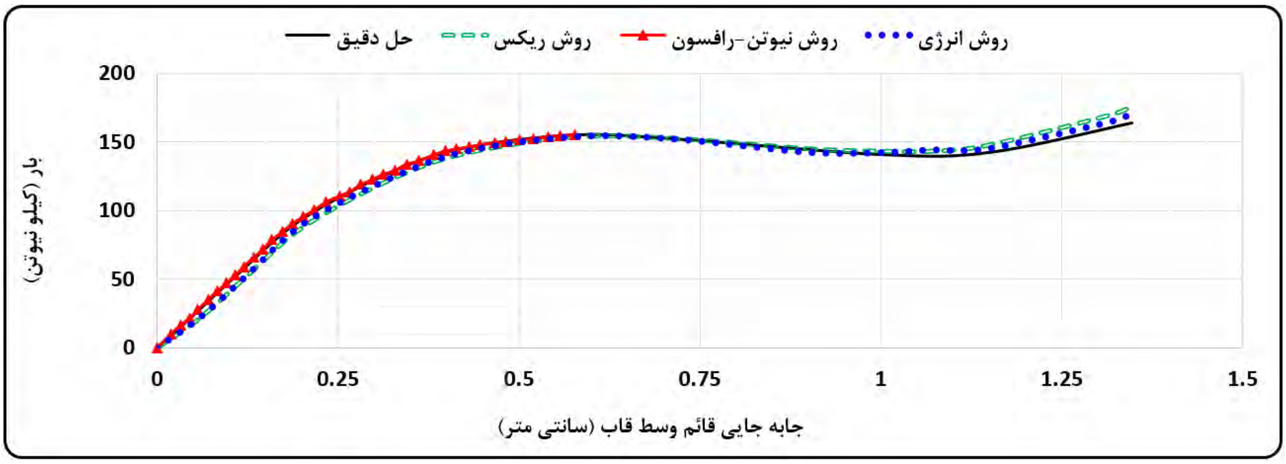
همانند مثال قبل، با تعریف یک نیروی فنر معادل، f_S ، برای سیستم به شکل زیر

$$f_S(u)=[24EI\frac{Cos^3\gamma}{\ell^2Cos\alpha(1+Cos^2\gamma)}+2EA\frac{Sin^2\gamma}{1+Cos^2\gamma}](\frac{u}{\ell})-[0.12EA\frac{Sin\gamma}{1+Cos^2\gamma}](\frac{u}{\ell})^2 \tag{۵۸}$$

سختی مماسی یا لحظه‌ای سازه، $k(t)$، با مشتق‌گیری از رابطه فوق برحسب جابه‌جایی به شکل زیر قابل حصول است.

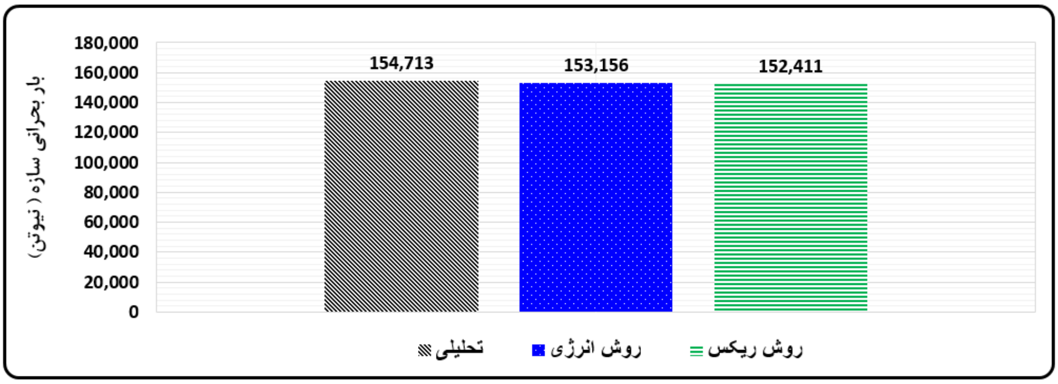
$$k(t)=\frac{\partial f_S}{\partial u} \tag{۵۹}$$

با جایگذاری رابطه فوق در رابطه تعادل انرژی و استفاده از الگوریتم داده‌شده در بخش قبل می‌توان این سیستم را تحلیل نمود که نتایج آن به همراه حل دقیق و همچنین تکنیک‌های نیوتن-رافسون و ریکس در شکل (۱۳) نمایش داده شده است.



شکل۱۳ : منحنی بار-تغییرشکل مثال ۴-۲

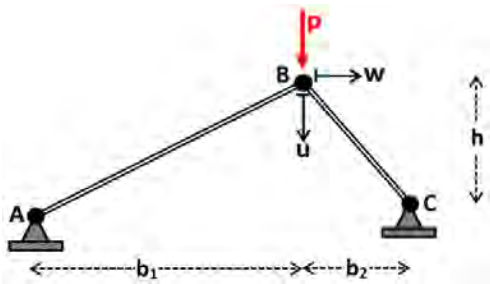
با مشاهده نتایج نشان داده‌شده در شکل (۱۳) مشاهده می‌شود که روش نیوتن-رافسون مشابه مثال قبل با صفر شدن سختی سازه (در نقطه انشعابی) همگرا نشده و برای تغییرشکل‌های بزرگ‌تر از این نقطه تکین نمی‌تواند رفتار سازه را پیش‌بینی کند. این در حالی است که هر دو روش انرژی اصلاح‌شده و روش طول قوس (ریکس) به‌خوبی با گذر از نقاط انشعابی در منحنی بار-تغییرشکل توانسته‌اند تطابق خوبی را با جواب دقیق مسئله داشته باشند. با این تفاوت که در روش انرژی تنها دو پارامتر Δt و β در تحلیل باید در ابتدا انتخاب‌شده و سپس از روی تاریخچه علامت Δ کنترل گردند، ولی در روش طول قوس پارامترهای بیشتری نظیر $\Delta\ell_{Min}$، $\Delta\ell_{Max}$، β و همچنین λ باید توسط تحلیلگر کالیبره و به کار گرفته شوند. در ادامه در شکل (۱۴)، مقدار بار کمانشی قاب ویلیامز در نظر گرفته‌شده که از روش تحلیلی به‌دست‌آمده (با محاسبه مقدار نیروی داخلی در لحظه‌ای که برای اولین بار سختی سازه صفر شده است) با مقادیر متناظر با روش‌های انرژی اصلاح‌شده و ریکس مقایسه شده که بیانگر تطابق بهتر روش انرژی با مقدار دقیق بوده است.



شکل۱۴ : مقایسه بار کمانشی محاسبه‌شده قاب ویلیامز از روش‌های انرژی اصلاح‌شده و ریکس-ومپنر با مقدار دقیق در تحلیل مثال ۴-۲

۴-۳- سازه خرپایی دوبعدی نامتقارن با هندسه غیرخطی

سازه موردنظر در اینجا درواقع یک حالت نامتقارن از مثال ۴-۱ است که به‌منظور ارزیابی کارایی روش در سیستم‌های نامتقارن آورده شده است. ابعاد هندسی این سیستم به همراه شرایط تکیه‌گاهی، بارگذاری و درجات آزادی سیستم در شکل (۱۵) نمایش داده‌شده‌اند.

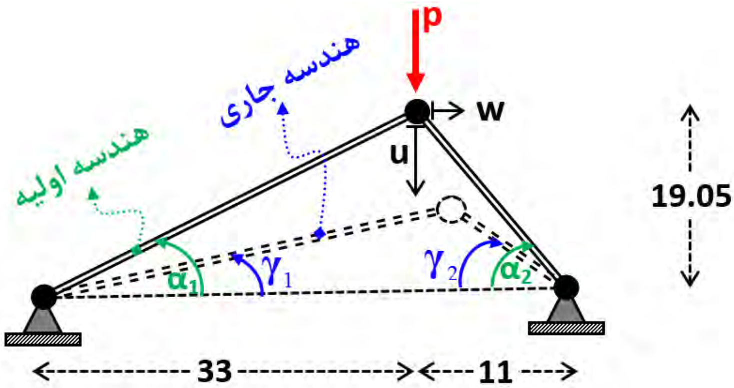


شکل۱۵ : خرپای نامتقارن با رفتار غیرخطی هندسی

در این مثال به غیر از در نظر گرفتن هندسه نامتقارن در سازه، سطح مقطع عضو BC نیز دو برابر سطح مقطع عضو AB فرض شده است. به‌طورکلی در جدول (۳) تمامی کمیت‌های در نظر گرفته‌شده در مسئله حاضر تعریف شده‌اند.

جدول ۳: ویژگی‌های در نظر گرفته‌شده برای مثال ۴-۳

نوع پارامتر	کمیت	نشانه	مقدار
هندسه سازه	ارتفاع خرپا	h	19.05 cm
	تصویر افقی عضو AB	b_1	33 cm
	طول عضو AB	ℓ_1	38.1 cm
	زاویه عضو AB با افق	α_1	30^0
	تصویر افقی عضو BC	b_2	11 cm
	طول عضو BC	ℓ_2	22 cm
	زاویه عضو BC با افق	α_2	60^0
مقطع اعضا	سطح مقطع عضو AB	A_1	99.77 cm^2
	سطح مقطع عضو BC	A_2	2×99.77 cm^2
ویژگی مصالح	مدول ارتجاعی	E	6889 kN/cm^2



شکل۱۶ : هندسه تغییرشکل‌یافته سازه تحت جابه‌جایی‌های بزرگ (ابعاد برحسب سانتی‌متر هستند)

بر مبنای شکل (۱۶)، طول اعضای AB و BC در حالت تغییرشکل‌یافته را با استفاده از رابطه فیثاغورث می‌توان با روابط زیر برحسب u و w بیان نمود.

$$\ell_{AB} = \sqrt{(19.05-u)^2 + (33+w)^2} \quad , \quad \ell_{BC} = \sqrt{(19.05-u)^2 + (11-w)^2} \tag{۶۰}$$

که از روی آن‌ها، تغییر طول محوری اعضا به‌صورت زیر نوشته می‌شوند.

$$\delta_{AB} = \sqrt{(19.05-u)^2 + (33+w)^2} - 38.1 \quad , \quad \delta_{BC} = \sqrt{(19.05-u)^2 + (11-w)^2} - 26.94 \tag{۶۱}$$

و طبق فرض ثابت بودن سختی الاستیک اعضا (صرف‌نظر از غیرخطی مادی)، بر طبق قانون هوک، عبارات ذیل برای نیروی محوری اعضا حاصل می‌شوند.

$$F_{AB} = \left(\frac{EA}{\ell}\right)_{AB} \times \delta_{AB} \quad , \quad F_{BC} = \left(\frac{EA}{\ell}\right)_{BC} \times \delta_{BC} \tag{۶۲}$$

برای ارضای شرایط تعادل در گره B در سازه تغییرشکل‌یافته، دو نیروی فوق باید با بار متمرکز خارجی p متعادل گردند. در این حالت مطابق شکل (۱۶)، اگر زاویه اعضای AB و BC با افق به ترتیب با γ_1 و γ_2 نمایش داده شوند، می‌توان نوشت.

$$\begin{cases} \sum F_X = 0 \quad \therefore \quad F_{AB} Cos\gamma_1 = F_{BC} Cos\gamma_2 \\ \sum F_Y = 0 \quad \therefore \quad F_{AB} Sin\gamma_1 + F_{BC} Sin\gamma_2 = p \end{cases} \tag{۶۳}$$

که از ترکیب آن‌ها، می‌توان نیروی محوری در اعضا برحسب بار خارجی را به‌صورت زیر بیان نمود.

$$F_{AB} = \frac{pCos\gamma_2}{Sin(\gamma_1+\gamma_2)} \quad , \quad F_{BC} = \frac{pCos\gamma_1}{Sin(\gamma_1+\gamma_2)} \tag{۶۴}$$

روابط مثلثاتی فوق در این حالت، طبق شکل (۱۶)، به‌صورت زیر حساب می‌گردند.

$$Cos\gamma_1 = \frac{33+w}{\sqrt{(19.05-u)^2+(33+w)^2}}$$

$$Cos\gamma_2 = \frac{11-w}{\sqrt{(19.05-u)^2+(11-w)^2}} \quad (۶۵)$$

$$Sin(\gamma_1+\gamma_2) = \frac{44(19.05-u)}{\sqrt{(19.05-u)^2+(33+w)^2}\sqrt{(19.05-u)^2+(11-w)^2}}$$

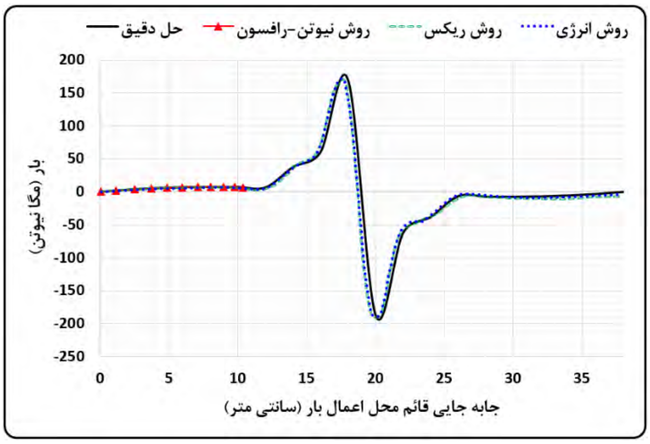
با جایگذاری روابط (۶۲) در داخل (۶۴) و استفاده از معادلات (۶۵) به ترتیب می‌توان به دو عبارت (۶۶) و (۶۷) دست‌یافت.

$$p = \frac{793716\,(19.05-u)\sqrt{(19.05-u)^2+(11-w)^2}\left[\sqrt{(19.05-u)^2+(33+w)^2}-38.1\right]}{(11-w)\sqrt{(19.05-u)^2+(33+w)^2}\sqrt{(19.05-u)^2+(11-w)^2}} \quad (۶۶)$$

و

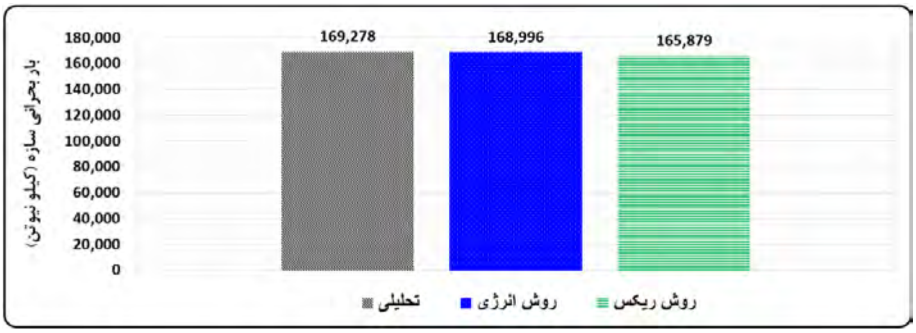
$$p = \frac{2749252\,(19.05-u)\sqrt{(19.05-u)^2+(33+w)^2}\left[\sqrt{(19.05-u)^2+(11-w)^2}-26.94\right]}{(33+w)\sqrt{(19.05-u)^2+(33+w)^2}\sqrt{(19.05-u)^2+(11-w)^2}} \quad (۶۷)$$

با ترکیب دو رابطه (۶۶) و (۶۷) و بیان p برحسب یک متغیر می‌توان جواب دقیق این مسئله را ترسیم نمود. به‌طور مثال، در اینجا با حذف کردن متغیر w از این دو معادله، نمودار بار-تغییرشکل سازه مطابق شکل (۱۷) خواهد بود. همچنین، برای اعمال روش انرژی نیز با مشتق‌گیری از رابطه نیرو-تغییرمکان و تعریف سختی مماسی می‌توان سیستم را تحلیل نمود. در ادامه، همانند مثال‌های قبلی، نتایج به‌دست‌آمده از روش‌های عددی نیوتن-رافسون، ریکس-ومپنر و روش انرژی به همراه حل تحلیلی مسئله در شکل (۱۷) نمایش داده‌شده‌اند.



شکل ۱۷ : منحنی بار-تغییرشکل مثال ۴-۳

با توجه به شکل (۱۷)، در این حالت نیز روش انرژی تطابق بسیار خوبی با روش ریکس و همچنین حل تحلیلی مسئله دارد. علاوه بر این، روش نیوتن-رافسون نیز همانند دو مثال قبلی با رسیدن به اولین نقطه انشعابی در حوالی نقطه خرابی سازه (جایی که سختی در حال صفر شدن است) متوقف‌شده و دیگر نتوانسته پاسخ سازه را تعیین کند. در شکل (۱۸) نیز بار بحرانی سازه محاسبه‌شده از روش‌های انرژی و ریکس با مقدار دقیق مسئله مقایسه گشته و همان‌طور که دیده می‌شود روش انرژی به مقدار اندکی در محاسبه مقدار بار خرابی دقیق‌تر از روش ریکس بوده است.



شکل۱۸ : مقایسه بار کمانشی محاسبه‌شده برای سازه خرپایی از روش‌های انرژی اصلاح‌شده و ریکس-ومپنر با مقدار دقیق در مثال ۴-۳

۵- نتیجه‌گیری

در تحقیق حاضر، با گسترش و اعمال روش انرژی اصلاح‌شده که در اخیراً در تئوری دینامیک سازه‌ها مطرح‌شده، بر روی مسائل شبه-استاتیک رایج در مکانیک جامدات که دارای هندسه غیرخطی و دارای نقاط انشعابی هستند، ویژگی‌های عددی این روش در مواجه با این نوع از مسائل مورد ارزیابی قرارگرفته‌اند. درمجموع مشاهدات به‌دست‌آمده از تحلیل مثال‌های عددی در نظر گرفته‌شده را می توان در قالب موارد ذیل بیان نمود:

- روش انرژی ارائه شده برخلاف روش‌های نیوتنی به‌خوبی قادر است با تشخیص صحیح مسیر تعادل در منحنی بار-تغییرشکل سازه از نقاط انشعابی عبور کرده و با صفر شدن سختی سازه در نقاط تکین دچار واگرایی نمی گردد.
- همچنین، روش عددی فوق‌الذکر نسبت به روش‌های نیرو-تغییرمکان- قید تنها نیاز به انتخاب دو پارامتر Δt و β دارد که امکان کنترل آن‌ها با توجه به مقادیر تاریخچه دلتای معادله درجه دوم ارائه‌شده در بخش سوم وجود دارد. این در حالی است که در روش‌های قیدی مانند طول قوس (ریکس) پارامترهای مختلفی مانند $\Delta\ell_{Min}$، $\Delta\ell_{Max}$، β و λ وجود دارد که تحلیلگر باید با انجام عملیات سعی و خطا، به انتخاب و کنترل آن‌ها در مسائل مختلف دارای نقاط انشعابی بپردازد.
- در نهایت، از مقایسه مقادیر پاسخ‌های به‌دست‌آمده از روش انرژی و روش ریکس با حل تحلیلی مسائل مشاهده می‌گردد که دقت روش عددی ارائه‌شده نسبت به روش طول قوس بهتر بوده و مقادیر بار کمانشی (یا خرابی) سازه به‌دست‌آمده از روش انرژی اصلاح‌شده خطای کمتری را نسبت به روش ریکس داشته‌اند.

در انتها نویسندگان این تحقیق، گسترش روش مطرح شده در تحلیل سیستم‌های دارای معادلات اندرکنشی (مانند سیستم سد-فونداسیون-مخزن) و همچنین سازه‌های دارای آسیب را به عنوان موضوعاتی برای تحقیقات آینده پیشنهاد می کنند.

فهرست علائم

LATIN		GREEK	
کمیت	نشانه	کمیت	نشانه
سطح مقطع اعضا	A	زاویه اولیه اعضا با افق	α
ضرایب معادله درجه دو	A,B,C	ضریب مشارکت سرعت در تعیین تغییرمکان	β
ماتریس ارتباط کرنش-جابه‌جایی	$\mathbf{B}$	زاویه اعضا با افق در حالت تغییرشکل یافته	γ
طول افقی اعضا	b	نمو	δ

بردار تغییرمکان سیستم	$\mathbf{D}$
بردار جابه‌جایی‌های گره‌ای المان	$\mathbf{d}^e$
کرنش‌های لاگرانژی	$\mathbf{E}$
مدول ارتجاعی مصالح	E
انرژی داخلی سازه	E_{int}
انرژی ناشی از بارگذاری	E_{ext}
کرنش‌های اویلری	$\mathbf{e}$
بردار نیروهای داخلی	$\mathbf{F}_{int}$
بردار نیروهای خارجی	$\mathbf{F}_{ext}$
بردار نیروهای نامتوازن	$\mathbf{F}_R$
نیروی مقاوم	f_S
ارتفاع خرپا	h
ممان اینرسی اعضا	I
سختی مماسی	${}^t\mathbf{k}$
طول اولیه	ℓ
فاصله دو سر عضو در حالت تغییرشکل یافته	ℓ'
بردار توابع شکل	$\mathbf{N}$
بار متمرکز	p
شبه-زمان	t
بردار تغییرمکان	$\mathbf{U}$
جابه‌جایی قائم وسط سازه	u
حجم المان	$\mathbf{V}^e$
سرعت در لحظه t	$v(t)$
جابه‌جایی افقی وسط سازه نامتقارن	w
موقعیت جاری سیستم	$\mathbf{x}$
موقعیت اولیه سیستم	$\mathbf{X}$
دلتای معادله درجه دوم سرعت/ تغییرات پارامترها	Δ
جابه‌جایی قائم نقاط A و B نسبت به هم	Δ_{AB} , Δ_{BA}
طول کمان	$\Delta\ell$
حد بالای طول قوس	$\Delta\ell_{min}$
حد پایین طول قوس	$\Delta\ell_{max}$
گام زمانی	Δt
کرنش داخل المان	$\boldsymbol{\varepsilon}^e$
دوران نقطه A	θ_A
دوران نقطه B	θ_B
ضریب بار	λ
تنش داخل المان	$\boldsymbol{\sigma}^e$

مراجع

[1] Crisfield M. A. Non-linear finite element analysis of solids and structures. Wiley; 1993.

[2] M. J. Tuner, E. H. Drill, and H. C. M. R. J. Melosh, "Large deflection of structures subject to heating and external load, J," Areo Sci, vol. 27, pp. 97–106, 1960.

[3] R. H. Gallagher, R. A. Gellatly, R. H. Mallett, and J. Padlog, "A discrete element procedure for thin-shell instability analysis.," AIAA J., vol. 5, no. 1, pp. 138–145, 1967.

[4] R. H. Gallagher and J. Padlog, "Discrete element approach to structural instability analysis," AIAA J., vol. 1, no. 6, pp. 1437–1439, 1963.

[5] K. K. Kapur and B. J. Hartz, "Stability of plates using the finite element method," J. Eng. Mech. Div., vol. 92, no. 2, pp. 177–196, 1966.

[6] I. Holand and T. Moan, "The fi finite element in plate bukling," Finite Elem. Method. Stress Anal. ed. I. Hol. al., Tapir, 1969.

[7] J. H. Argyris, Recent Advances in Matrix Methods of Structural Analysis/progress in Aeronautical Sciences. Pergamon Press, 1964.

[8] J. H. Argyris, "Continua and Discontinua, opening address to the 1-st Conf. Matrix Methods in Structural Mechanics." Wright-Patterson AFB, Dayton, Ohio, 1965.

[9] P. V Marcal, "Finite Element Analysis with Material Nonlinearities: Theory and Practice," 1969.

[10] O. C. Zienkiewicz, "The Finite Element Method in Engineering Science McGrawHill Book Company," Inc, London, 1971.

[11] Y. Yamada, N. Yoshimura, and T. Sakurai, "Plastic stress-strain matrix and its application for the solution of elastic-plastic problems by the finite element method," Int. J. Mech. Sci., vol. 10, no. 5, pp. 343–354, 1968.

[12] O. C. Zienkiewicz, S. Valliappan, and I. P. King, "Elasto-plastic solutions of engineering problems 'initial stress', finite element approach," Int. J. Numer. Methods Eng., vol. 1, no. 1, pp. 75–100, 1969.

[13] J. T. Oden, "Numerical Formulations of Nonlinear Elasticity Problems," J. Struct. Div., vol. 93, no. 3, pp. 235–356, 1967.

[14] R. H. Mallett and L. A. Schmit, "Nonlinear structural analysis by energy search," J. Struct. Div., vol. 93, no. 3, pp. 221–234, 1967.

[15] F. K. Bogner, R. L. Fox, and L. A. Schmit, "Finite deflection structural analysis using plate and shell discreteelements.," AIAA J., vol. 6, no. 5, pp. 781–791, 1968.

[16] G. C. Nayak and O. C. Zienkiewicz, "Elasto-plastic stress analysis. A generalization for various contitutive relations including strain softening," Int. J. Numer. Methods Eng., vol. 5, no. 1, pp. 113–135, 1972.

[17] M. F. and B.MASSICOTTE, "GEOMETRICAL INTERPRETATION OF THE ARC-LENGTH METHOD," Comput. Struct., vol. 46, no. 4, pp. 603–615, 1993.

[18] H. B. Coda and M. Greco, "A simple FEM formulation for large deflection 2D frame analysis based on position description," Comput. Methods Appl. Mech. Eng., vol. 193, no. 33–35, pp. 3541–3557, 2004.

[19] P. M. A. A. and T. B. T. Rabczuk, "A simplified mesh-free method for shear bands with cohesive surfaces," pp. 993–1021, 2007.

[20] A. Lorenzana, P. M. López-reyes, E. Chica, and J. M. . Teran, "A NONLINEAR MODEL FOR THE ELASTOPLASTIC ANALYSIS OF 2D FRAMES ACCOUNTING FOR DAMAGE Antol´ ın Lorenzana," Theor. Appl. Mech., vol. 49, no. 2, pp. 515–529, 2011.

[21] I. Mansouri and H. Saffari, "An efficient nonlinear analysis of 2D frames using a Newton-like technique," Arch. Civ. Mech. Eng., vol. 12, no. 4, pp. 485–492, 2012.

[22] S. Mamouri, E. Mourid, and a. Ibrahimbegovic, "Study of geometric non-linear instability of 2D frame structures," Eur. J. Comput. Mech., vol. 24, no. 6, pp. 1–23, 2015.

[23] J. Radnic, R. Markic, M. Glibic, N. Grgić, and I. Banović, “Comparison of numerical models for nonlinear static analysis of planar concrete frames based on 1D and 2D finite elements,” Materwiss. Werksttech., vol. 47, no. 5–6, pp. 472–482, 2016.

[24] J. S. Moita, A. L. Ara??jo, C. M. Mota Soares, C. a. Mota Soares, and J. Herskovits, “Geometrically nonlinear analysis of sandwich structures,” Compos. Struct., pp. 1–10, 2016.

[25] M. Crusells-Girona, F. C. Filippou, and R. L. Taylor, “A mixed formulation for nonlinear analysis of cable structures,” Comput. Struct., vol. 186, pp. 50–61, 2017.

[26] D. C. Feng, G. Wu, Z. Y. Sun, and J. G. Xu, “A flexure-shear Timoshenko fiber beam element based on softened damage-plasticity model,” Eng. Struct., vol. 140, pp. 483–497, 2017.

[27] M. Jalili Sadr Abad, M. Mahmoudi, M. Mollapour Asl, R. “Application of modified energy method in the nonlinear cyclic behavior of structures,” J. Struct. Constr. Eng., 2018.

[28] O. C. Zienkiewicz, R. L. Taylor, and D. Fox, The Finite Element Method for Solid and Structural Mechanics. 2014.

[29] R. De Borst, M. a. Crisfiel, J. J. C. Remmers, and C. V. Verhoosel, Non-Linear Finite Element Analysis of Solids and Structures. 2012.

[30] E. Riks, “An incremental approach to the solution of snapping and buckling problems,” Int. J. Solids Struct., vol. 15, no. 7, pp. 529–551, 1979.

[31] M. Crisfield, “A fast incremental/iterative solution procedure that handles ‘snap-through,’” in Computational Methods in Nonlinear Structural and Solid Mechanics, Elsevier, 1981, pp. 55–62.

[32] M. Jalili Sadr Abad, M. Mahmoudi, and E. H. Dowell, “Dynamic Analysis of SDOF Systems Using Modified Energy Method,” ASIAN J. Civ. Eng., vol. 18, no. 7, pp. 1125–1146, 2017.

[33] M. Jalili Sadr Abad, M. Mahmoudi, and E. Dowell, “Novel Technique for Dynamic Analysis of Shear-Frames Based on Energy Balance Equations,” Sci. Iran., pp. 1–31, 2018.

[34] K. Kondoh and S. N. Atluri, “Influence of local buckling on global instability: Simplified, large deformation, post-buckling analyses of plane trusses,” Comput. Struct., vol. 21, no. 4, pp. 613–627, 1985.

[35] M. a. M. Torkamani and J.-H. Shieh, “Higher-order stiffness matrices in nonlinear finite element analysis of plane truss structures,” Eng. Struct., vol. 33, no. 12, pp. 3516–3526, 2011.

[36] F. W. Williams, “An approach to the non-linear behaviour of the members of a rigid jointed plane framework with finite deflections,” Q. J. Mech. Appl. Math., vol. 17, no. 4, pp. 451–469, 1964.