

## حل معادلات ناویر - استوکس به کمک روش‌های بدون شبکه توابع پایه شعاعی

مریم عرب عامری<sup>۱</sup>، مهدیار برفه‌ئی<sup>۲</sup>

arabameri@math.usb.ac.ir

۱- استادیار دانشکده ریاضی، دانشگاه سیستان و بلوچستان

۲- استادیار دانشکده مکانیک، دانشگاه صنعتی سیرجان

### چکیده

معادلات ناویر- استوکس به طور گسترده در زمینه‌های مختلف علوم مانند مدل سازی جریان‌های اقیانوسی، جریان جاری در یک لوله، جریان‌های اطراف یک بال و به طور کلی در دینامیک سیالات کاربرد دارند. در این مقاله روش بدون شبکه توابع پایه شعاعی برای حل این معادلات بکار گرفته خواهد شد. معادلات ناویر استوکس از نوع معادلات دیفرانسیل- جبری می‌باشند. ابتدا ایده منظم سازی برای تبدیل معادلات مورد نظر به دستگاه معادلات دیفرانسیل معمولی مورد استفاده قرار می‌گیرد، سپس روش توابع پایه شعاعی برای حل دستگاه به وجود آمده بکار گرفته می‌شود. در انتها نتایج عددی ارایه شد است تا کارایی و عملکرد روش را نشان دهد.

واژگان کلیدی: معادلات ناویر- استوکس، روش‌های توابع پایه شعاعی، روش منظم‌سازی دنباله‌ای، روش‌های بدون شبکه

تاریخ دریافت مقاله :	۹۳/۰۴/۲۴
تاریخ پذیرش مقاله :	۹۴/۱۲/۲۰

## ۱ - مقدمه

معادلات ناویر-استوکس از اساسی ترین معادلات در دینامیک سیالات محاسباتی هستند. این معادلات برای شبیه سازی و حل میدان جریان بسیاری از مسایل کاربردی از جمله در توربوماشین ها، جریان حول شناورها و برخورد موج با آنها و حتی سوخت و احتراق موتورهای درون سوز و برون سوز کاربرد دارد. با توجه به اهمیت این معادلات از یکسو و امکان پذیر نبودن حل دقیق آنها از سوی دیگر، در این مقاله به دنبال ارایه یک روش عددی مناسب برای حل آنها خواهیم بود.

توابع پایه شعاعی یک ابزار بسیار کارا برای حل معادلات دیفرانسیل با مشتقات جزئی می باشند [۱-۳]. این روش ها به طور گسترده برای حل معادلات بیضوی، سهموی و هذلولوی بکار برده می شوند [۴ و ۵]. دقت بالا از مرتبه نمایی و سادگی در پیاده سازی خصوصاً در ابعاد بالا از مهمترین ویژگی آنها می باشند [۶]. همچنین روش های توابع پایه شعاعی برای حل مساله به شبکه نیاز ندارد و تنها از مجموعه ای از نقاط در دامنه استفاده می کند. از این رو روش توابع پایه شعاعی جز روش های بدون شبکه می باشد و این خاصیت سبب می شود تا بتوان روش را برای مسایل با هندسه نامنظم نیز بکار برد. در این مقاله توابع پایه شعاعی را برای حل معادلات ناویر- استوکس به کار خواهیم برد. برای این منظور معادلات ناویر- استوکس را به عنوان معادلات دیفرانسیل- جبری در نظر خواهیم گرفت [۷-۹]. در حالت کلی تابع برداری

$$F(t, x, x') = 0, \quad (1)$$

یک معادله دیفرانسیل- جبری است هرگاه  $\frac{\partial F}{\partial x}$  منفرد باشد. یکی از فرم های معروف معادلات دیفرانسیل- جبری فرم هزنبرگ بوده و به صورت زیر می باشد:

$$\frac{dx}{dt} = f(x, t) - B(t)y, \quad (2)$$

$$0 = G(t)x + r(t) \equiv g(x, t).$$

معادلات ناویر- استوکس به فرم زیر را در نظر بگیرید:

$$U_t + (U \cdot \text{grad})U = \frac{1}{\text{Re}} \Delta U - \text{grad}p + f, \quad (3)$$

$$\text{div}U = 0,$$

$$U|_{\partial\Omega} = b, \quad U|_{t=0} = a.$$

$Re$  عدد رینولدز می باشد. با مقایسه معادلات (۲) و (۳) دیده می شود که عملگر  $\text{div}$  متناظر با ماتریس  $G$  و عملگر  $\text{grad}$  متناظر با ماتریس  $B$  است. بنابراین معادلات ناویر- استوکس از نوع معادلات دیفرانسیل جبری می باشد [۱۰ و ۱۱]. یکی از راهکارها برای حل معادلات دیفرانسیل- جبری مشتق گرفتن از محدودیت جبری و رسیدن به یک سیستم از معادلات دیفرانسیل معمولی می باشد. اما مشتق گرفتن باعث بروز ناپایداری در حل عددی این معادلات خواهد شد. یکی از راهکارها برای غلبه بر این مشکل، منظم سازی است. در روش منظم سازی معادلات به گونه ای فرمولبندی می شوند که دستگاه معادلات دیفرانسیل- جبری بدون نیاز به مشتق گیری به دستگاه معادلات دیفرانسیل معمولی تبدیل می شود. در ادامه، این روش را برای معادلات ناویر- استوکس بکار خواهیم برد. منظم سازی به گونه ای است که شرایط اولیه برای فشار لازم نیست. دستگاه معادلات بدست آمده را به کمک توابع شعاعی حل می کنیم.

## ۲- منظم سازی

منظم سازی، روشی را ارایه می دهد که بدون مشتق گرفتن از یک معادله دیفرانسیل- جبری آن را به یک دستگاه معادلات دیفرانسیل معمولی تبدیل کنیم و با مشکل ناپایداری مواجه نشویم [۱۰ و ۱۱].

معادله دیفرانسیل- جبری زیر را در نظر بگیرید:

$$x' = f(x, t) - B(x, t)y, \quad (4)$$

$$0 = g(x, t).$$

اگر محدودیت  $0 = g(x, t)$  موجود در معادلات (۴) را با شرط  $\varepsilon T^{-1}(x, y)y' = g(x, t)$ ، و یا به طور معادل

با  $y' = \frac{1}{\varepsilon} T(x, y)g(x, t)$  جایگزین کنیم معادله (۴) به

یک دستگاه معادلات دیفرانسیل معمولی تبدیل می شود. در

اینجا  $\varepsilon$  و  $T(x, y)$  به ترتیب پارامتر و ماتریس منظم سازی می باشند [۱]. پارامتر  $\varepsilon$  مقداری بسیار کوچک می باشد بطوریکه  $\varepsilon T^{-1}(x, t)y \approx 0$ ، بنابراین جایگزینی

فوق محدودیت مساله را برآورد می کند. اما مشکل منظم

سازی این است که  $\varepsilon$  مقداری کوچک است و مقادیر کوچک

$\varepsilon$  باعث سخت شدن مساله می شوند. برای حل این مسایل

لازم است تا طول گام های بسیار کوچک را در روشهای صریح

و  $y^{(s)}$   $s=1,2,\dots,m$  دنباله‌ای از توابع هستند که به  $x$  و  $y$  همگرا می‌باشند. ماتریس  $T$  و پارامتر  $\varepsilon$ ، به ترتیب ماتریس و پارامتر منظم سازی می‌باشند. مقادیر  $\alpha_1$  و  $\alpha_2$  پارامترهای بام گارت نامیده می‌شوند. در صورتی که  $\alpha_1=0$  روش صریح خواهد بود. با قرار دادن  $\alpha_1=0$  و  $\alpha_2=1$  معادله (۶) به معادله زیر تبدیل می‌شود:

$$(x^{(s)})' = f(x^{(s)}, t) - B(x^{(s)}, t) \times \quad (الف)$$

$$\left( y^{(s-1)} + \frac{1}{\varepsilon} T(x^{(s)}, t) g(x^{(s)}, t) \right),$$

$$y^{(s)} = y^{(s-1)} + \frac{1}{\varepsilon} T(x^{(s)}, t) g(x^{(s)}, t). \quad (ب)$$

با توجه به (ب) می‌توان نوشت:

$$\varepsilon(y^{(s)} - y^{(s-1)}) = T(x^{(s)}, t) g(x^{(s)}, t).$$

با توجه به اینکه مقادیر  $\varepsilon$  و  $(y^{(s)} - y^{(s-1)})$  کوچک هستند رابطه زیر را داریم:

$$\varepsilon(y^{(s)} - y^{(s-1)}) \approx 0 = T(x^{(s)}, t) g(x^{(s)}, t),$$

که همان محدودیت اعمال شده در معادله (۴) است. مقادیر اولیه  $x$  باید مشخص باشند. این مقادیر همان شرایط اولیه مساله می‌باشند. همچنین یک مقدار اولیه اختیاری دلخواه برای  $y_{(0)}$  باید تعیین شود، که معمولاً  $y_{(0)} \equiv 0$  اختیار می‌شود. در ادامه الگوریتم روش آمده است.

#### ۴- الگوریتم روش منظم سازی

برای  $s=2,3,\dots,m$ ، قرار دهید  $x_0^{(s)} = x_0$ .

الف- از  $x_0^{(s)}$  استفاده کنید تا (ب) را برای بدست آوردن  $x_0^{(s)} = x_0$ ،  $s=1,2,3,\dots,m$  حل نماید.

ب- با توجه به اینکه  $\alpha_1=0$ ، با استفاده از (الف) مقدار  $x_{n+1}^{(s)}$  را محاسبه نمایید. خطای روش منظم سازی برای حل معادله (۴) عبارتست از:

$$\|x^{(m)}(t) - x(t)\| = O(\varepsilon^m) + O(h^p).$$

در اینجا  $p$  مرتبه روشی است که معادلات را با آن حل می‌شود.

#### ۵- منظم سازی دنباله‌ای برای حل معادلات ناویر- استوکس

معادلات تراکم ناپذیر ناویر- استوکس به صورت زیر است:

انتخاب کنیم. برای رفع این مشکل از تکنیک پایداری بام گارت<sup>۱</sup> استفاده می‌کنیم.

#### ۲-۱- تکنیک پایداری بام گارت

در سال ۱۹۷۰ بام گارت محدودیت (۴) را با محدودیت زیر برای یک معادله دیفرانسیل- جبری جایگزین کرد [۱۲].

$$\alpha_1 \frac{d}{dt} g(x, t) + \alpha_2 g(x, t) = 0. \quad (۵)$$

لازم به ذکر است در معادله (۵)،  $\alpha_2 > 0$  و در نتیجه مقدار  $\|g(x, t)\|$  به طور نمایی بر حسب زمان کاهش می‌یابد. تکنیک پایداری بام گارت به طور وسیع، برای حل معادلات دیفرانسیل- جبری مورد استفاده قرار گرفته است اما مشکل این تکنیک در انتخاب مقادیر مناسب پارامترها است که همیشه به راحتی صورت نمی‌گیرد. همچنین انتخاب نامناسب این پارامترها ممکن است باعث حل نه چندان مناسب مساله شود.

اما روش بام گارت ایده مهمی برای روش منظم سازی دنباله‌ای است که می‌تواند برای معادلات دیفرانسیل- جبری و به فرم (۲) مورد استفاده قرار گیرد.

#### ۳- روش منظم سازی دنباله‌ای

ایده اصلی روش منظم سازی دنباله‌ای این است که به جای حل یک مساله سخت، دنباله‌ای از معادلات را که از سختی کمتری برخوردارند حل می‌کند. روش منظم سازی می‌تواند به عنوان روشی کاملاً صریح انجام شود. در این قسمت الگوریتم این روش را ارائه می‌کنیم که به حل معادلات دیفرانسیل- جبری می‌پردازد. روش منظم سازی بر پایه ایده‌هایی از کار بام گارت و روش‌های عددی برای بهینه سازی مسایل مقید، استوار است. این روش برای معادلات دیفرانسیل- جبری با صورت زیر است:

$$(x^{(s)})' = f(x^{(s)}, t) - B(x^{(s)}, t) \times \left( y^{(s-1)} + \frac{1}{\varepsilon} T(x^{(s)}, t) \left[ \alpha_1 \frac{d}{dt} g(x^{(s)}, t) + \alpha_2 g(x^{(s)}, t) \right] \right),$$

$$y^{(s)} = y^{(s-1)} + \frac{1}{\varepsilon} T(x^{(s)}, t) \times \left[ \alpha_1 \frac{d}{dt} g(x^{(s)}, t) + \alpha_2 g(x^{(s)}, t) \right]. \quad (۶)$$

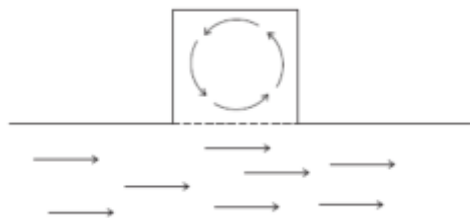
<sup>1</sup> Baumgarte

$$u_x^n(x) = \sum_{j=1}^N \lambda_j^n \varphi_x \left( \|x - x_j\|_2 \right).$$

سایر مشتقات  $u$  و همچنین مقادیر  $p, v$  و مشتقات آنها بطور مشابه بدست می‌آیند. با قرار دادن این مقادیر در معادلات (۹) به پیاده‌سازی الگوریتم SRM می‌پردازیم. در ادامه ایده منظم‌سازی دنباله‌ای را همراه با روش توابع شعاعی برای حل معادلات ناویر-استوکس بکار خواهیم برد.

#### ۶- نتایج عددی

در این قسمت روش را برای معادلات ناویر-استوکس بکار خواهیم برد. به عنوان مثال ناحیه مربعی شکل (۱) که سیال با سرعت ثابت در قسمت پایین آن حرکت می‌کند، را در نظر بگیرید.



شکل (۱) مسیر حرکت سیال.

حرکت سیال در قسمت پایین، باعث ایجاد چرخش در حفره مربعی شکل می‌شود. سرعت و فشار در این ناحیه با معادلات ناویر استوکس بیان می‌شوند. مساله را در دو حالت مختلف حل خواهیم کرد. در حالت اول جواب دقیق مساله مشخص است. با داشتن جواب دقیق در این حالت مقدار خطای مطلق را بدست می‌آوریم و نمودار خطاها را نیز رسم می‌کنیم تا کارایی روش مشخص شود. در ادامه روش را برای حل معادلاتی بکار می‌بریم که جواب دقیق آن مشخص نیست و در مسایل کاربردی بیشتر با آن مواجه هستیم.

#### مثال ۱:

معادلات را برای حالتی حل خواهیم کرد که جواب دقیق آن به صورت زیر است:

$$u = 50x^2(1-x)^2y(1-y)(1-2y)(1+e^{-t}),$$

$$v = -50y^2(1-y)^2x(1-x)(1-2x)(1+e^{-t}),$$

$$p = \left[-x\left(\frac{x}{2} + 2\right) - y\left(\frac{y}{2} - 2\right) + \frac{1}{3}\right](1+e^{-t})^2.$$

برای این منظور از ۱۰۰ نقطه یکنواخت در دامنه  $\Omega$  استفاده خواهیم کرد. مجموعه نقاط استفاده شده در این مثال در شکل (۲) رسم شده است.

$$U_t + (U \cdot \text{grad})U = \frac{1}{\text{Re}} \Delta U - \text{grad } p + f, \quad (8)$$

$$\text{div}U = 0,$$

$$U|_{\partial\Omega} = b, \quad U|_{t=0} = a.$$

در اینجا  $Re$  عدد رینولدز می‌باشد و معادلات بدون بعد می‌باشند. با پیاده‌سازی روش منظم‌سازی با  $\alpha_1 = 0$  برای معادلات فوق، دنباله‌ای از معادلات به صورت زیر بدست می‌آیند:

$$\varepsilon \left( U^{(s)} \right)_t - \text{grad} \left( \text{div} U^{(s)} \right) + \varepsilon \left( U^{(s)} \cdot \text{grad} \right) U^{(s)}$$

$$= \varepsilon \frac{1}{\text{Re}} \Delta U^{(s)} - \varepsilon \text{grad} P^{(s-1)} + \varepsilon f,$$

$$P^{(s)} = P^{(s-1)} - \frac{1}{\varepsilon} \text{div} U^{(s)}, \quad (9)$$

$$U^{(s)}|_{t=0} = a.$$

در ادامه به معرفی روش توابع پایه شعاعی می‌پردازیم که برای حل معادلات (۹) بکار خواهد رفت.

#### ۴- توابع پایه شعاعی

انواع مختلفی از توابع شعاعی برای حل معادلات دیفرانسیل با مشتقات جزئی معرفی شده‌اند [۱، ۴، ۵ و ۱۳]. یکی از معروفترین این توابع، تابع چند ربعی می‌باشد که به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\varphi(r) = \sqrt{1 + (cr)^2},$$

$C$  پارامتر شکل نام دارد و بر دقت جواب اثرگذار است [۱۴]. هر چه  $C$  کوچکتر انتخاب شود جواب مساله دقیق‌تر خواهد بود.

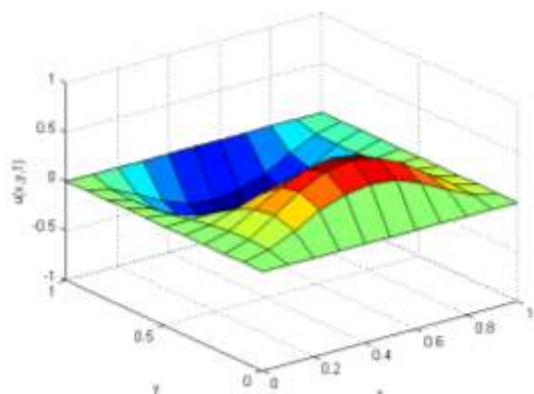
فرض کنید که  $\{x_j\}_{j=1}^N$  در ناحیه  $\Omega$  داده شده باشد. برای حل معادله به کمک توابع شعاعی، جواب در گام زمانی  $t^n$  به صورت زیر تقریب زده می‌شود:

$$u^n(x) = \sum_{j=1}^N \lambda_j^n \varphi \left( \|x - x_j\|_2 \right).$$

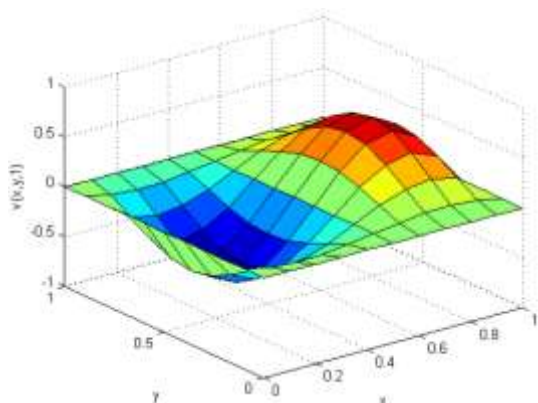
با توجه به اینکه روشی صریح برای حل معادلات به کار گرفته شده است، جواب  $u^n(x)$  را در زمان  $t^n$  داریم در نتیجه برای بدست آوردن ضرایب  $\lambda_j^n$  شرایط زیر را اعمال می‌کنیم:

$$u^n(x_i) = u_e^n(x_i), \quad i = 1..n.$$

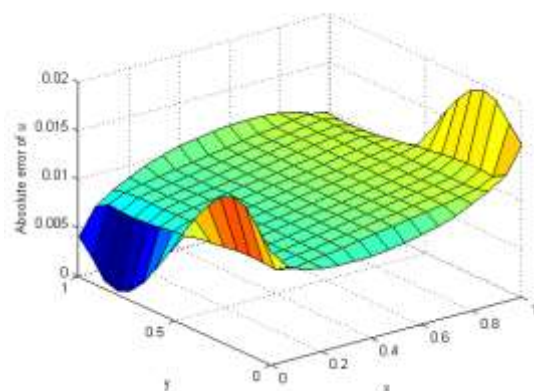
که  $u_e^n(x)$  مقدار جواب در زمان  $t^n$  است. با اعمال شرط فوق ضرایب  $\lambda_j^n$  بدست می‌آیند و می‌توان سایر مشتقات  $u^n(x, t)$  را تقریب زد. به عنوان مثال



شکل (۵) جواب تقریبی  $u$  برای مثال ۱ به ازای  $Re=100$  در زمان  $t=1$ .

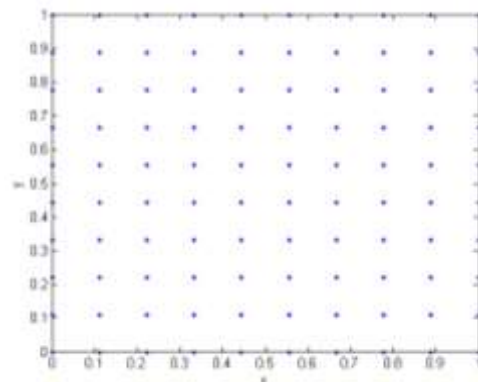


شکل (۶) جواب تقریبی  $v$  برای مثال ۱ به ازای  $Re=100$  در زمان  $t=1$ .



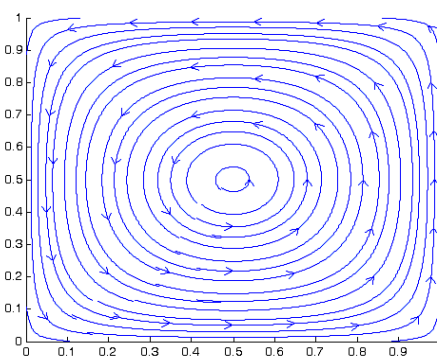
شکل (۷) خطای مطلق  $u$  برای مثال ۱ به ازای  $Re=100$  در زمان  $t=1$ .

یکی از مزیت‌های روش توابع پایه شعاعی برای حل معادلات نسبت به روش‌های تفاضلات متناهی و اجزا متناهی این است که با تعداد نقاط کمتری می‌توان جواب با دقت قابل قبول را بدست آورد. مثلاً در روش تفاضلات متناهی اگر از یک شبکه به ابعاد  $100 \times 100$  استفاده کنیم نتایج و دقت جواب مشابه دقت جواب بدست آمده در این مثال است که تنها از  $N=100$  نقطه گره‌ای استفاده شده است [۱۱].

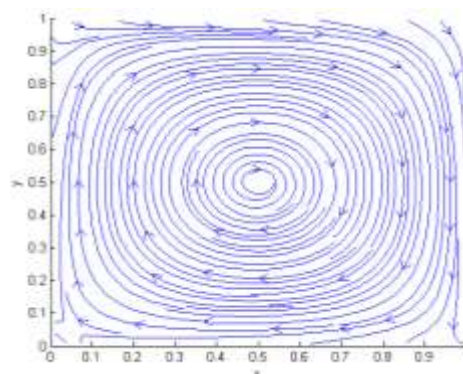


شکل (۲) مجموعه ۱۰۰ نقطه یکنواخت استفاده شده که برای حل معادلات استفاده شده است.

با انتخاب  $\Delta t = 1e-5$ ،  $\varepsilon = 1/5$  و  $Re = 100$  به حل معادلات فوق می‌پردازیم. مسیرهای واقعی و تقریبی جریان برای مساله فوق در زمان  $t=1$  در شکل‌های (۳) و (۴) رسم شده است. همچنین جواب‌های تقریبی حاصل برای  $u$  و  $v$  در شکل‌های (۵) و (۶) رسم شده است. مقدار خطای مطلق روش در زمان  $t=1$  در شکل‌های (۷) و (۸) رسم شده است.



شکل (۳) مسیر دقیق خطوط جریان برای مثال ۱ به ازای  $Re=100$  در زمان  $t=1$ .



شکل (۴) مسیر تقریبی جریان برای مثال ۱ به ازای  $Re=100$  در زمان  $t=1$  که با استفاده از توابع شعاعی بدست آمده است.

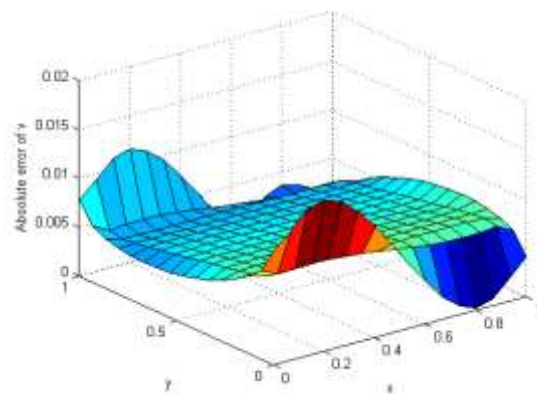
## ۷- نتیجه گیری

معادلات ناویر-استوکس از نوع معادلات دیفرانسیل- جبری می‌باشند. یکی از راهها برای حل معادلات دیفرانسیل-جبری، مشتق گرفتن و تبدیل آنها به یک دستگاه از معادلات دیفرانسیل معمولی است. از طرفی مشتق گرفتن از معادلات موجب بروز ناپایداری در حل تقریبی آنها خواهد شد. یک ایده برای تبدیل این معادلات به یک دستگاه از معادلات دیفرانسیل معمولی استفاده از تکنیک منظم سازی است. در این مقاله روش‌های توابع پایه شعاعی همراه با ایده منظم سازی دنباله‌ای برای حل معادلات ناویر- استوکس بکار گرفته شده است. نتایج عددی نشان می‌دهد که روش توابع پایه شعاعی در مقایسه با روش‌های تفاضلات متناهی با تعداد نقاط کمتر در دامنه می‌تواند جواب قابل قبول مساله را بدست آورد.

با توجه به اینکه روش‌های توابع پایه شعاعی جز روش‌های بدون شبکه می‌باشند، روش بکار رفته در این کار را می‌توان برای حل معادلات با هندسه نامنظم نیز بکار برد.

## ۷- مراجع

- [1] Barfeie, M., Soheili A. R. and Ameri, M. A., "Application of Variational Mesh Generation Approach for Selecting Centers of Radial Basis Functions Collocation Method", Engineering Analysis with Boundary Elements, Vol.37, No.12, pp.1567-1575, 2013.
- [2] Buhmann, M. D., "Radial Basis Functions: Theory and Implementations", Cambridge Monographs on Applied and Computational Mathematics, Vol.12, pp. 1-13, 2003.
- [3] Fasshauer, Gregory E., "Meshfree Approximation Methods with MATLAB", Vol. 6, World Scientific, 2007.
- [4] Kansa, E. J., "Multiquadrics-A Scattered Data Approximation Scheme with Applications to Computational Fluid Dynamics-II. Solutions to Parabolic, Hyperbolic and Elliptic Partial Differential Equations", Computers & Mathematics with Applications, Vol.19, No.8, pp.127-145, 1990.
- [5] Kansa, E. J., "Multiquadrics-a Scattered Data Approximation Scheme with Applications to Computational Fluid-Dynamics-I Surface Approximations and Partial Derivative Estimates", Computers & Mathematics with Applications, Vol.19, No.8, pp.147-161, 1990.
- [6] Yoon, J., "Spectral Approximation Orders of Radial Basis Function Interpolation on the Sobolev Space", SIAM Journal on Mathematical Analysis, Vol.33, No.4, pp.946-958, 2001.



شکل (۸) خطای مطلق  $v$  برای مثال ۱ به ازای  $Re=100$  در زمان  $t=1$ .

## مثال ۲:

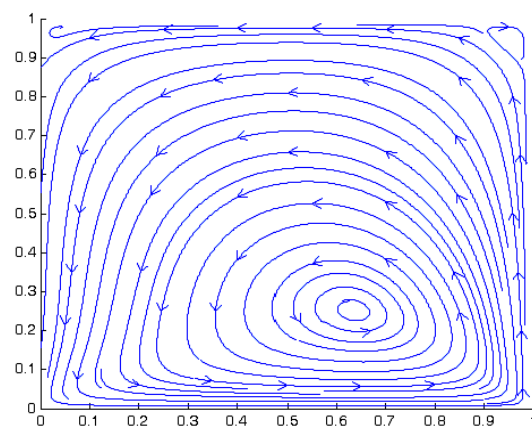
در این قسمت معادلات ناویر- استوکس را که بیشتر جنبه کاربردی دارد حل خواهیم کرد.

$$U_t + (U \cdot \text{grad})U = \frac{1}{Re} \Delta U - \text{grad } p,$$

$$\text{div}U = 0,$$

$$U|_{\partial\Omega} = b, \quad U|_{t=0} = a.$$

همانند مثال قبل از ۱۰۰ نقطه یکنواخت در دامنه  $\Omega$  استفاده خواهیم کرد. همچنین  $\Delta t = 1e-5$ ،  $\varepsilon = 1/5$  و  $Re = 100$  انتخاب شده‌اند. در شکل (۹) میدان جریان در زمان  $t = 1$  رسم شده است. با توجه به اینکه در این مثال جواب دقیق مشخص نیست اما همانطور که شکل (۹) نشان می‌دهد، روش منظم سازی دنباله‌ای توانسته است به درستی مسیر حرکت جریان سیال را مشخص کند.



شکل (۹) مسیر تقریبی جریان برای مثال ۲ به ازای  $Re=100$  در زمان  $t=1$  که با استفاده از توابع شعاعی بدست آمده است.

- [7] Ascher, U. M. and Ping L., "Sequential Regularization Methods for Higher Index DAEs with Constraint Singularities: The linear index-2 Case", *SIAM Journal on Numerical Analysis*, Vol. 33, No.5 pp.1921-1940, 1996.
- [8] Ascher, U. M. and Ping L., "Sequential Regularization Methods for Nonlinear Higher-index DAEs", *SIAM Journal on Scientific Computing*, Vol.18, No. 1, pp.160-181, 1997.
- [9] Ascher, U. M. and Linda R. P., "Computer Methods for Ordinary Differential Equations and Differential-Algebraic Equations", Vol.61, 1998.
- [10] Lin, P., "A Sequential Regularization Method for Time-Dependent Incompressible Navier--Stokes Equations", *SIAM Journal on Numerical Analysis*, Vol.34, No.3, pp.1051-1071, 1997.
- [14] مهدیار برفه‌ای، سیدمحمد حسینی، "بررسی معادلات ناویر-استوکس به عنوان معادلات دیفرانسیل-جبری و حل عددی آن با روش منظم سازی دنباله ای." ۳۱-۲۵.
- [12] Baumgarte, J., "Stabilization of Constraints and Integrals of Motion in Dynamical Systems", *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, Vol.1, No.1, pp.1-16, 1972.
- [13] Soheili, A. R., Ameri, M. A. and Barfeie, M., "RBFs Meshless Method of Lines Based on Adaptive Nodes for Burgers Equations", *Iranian Journal of Numerical Analysis and Optimization*, No.1, pp. 49-61, 2015.
- [14] Rippa, S., "An Algorithm for Selecting a Good Value for the Parameter  $c$  in Radial Basis Function Interpolation", *Advances in Computational Mathematics*, Vol.11, No.2-3, pp.193-210, 1999.