شبیهسازی عددی امواج غیرخطی با استفاده از روش PLIC VOF

محمدرضا دری^۱، کورش حجازی^۲

dori1364@mail.kntu.ac.ir

۱- کارشناس ارشد مهندسی عمران- هیدرولیک، دانشگاه صنعتی خواجه نصیرالدین طوسی ۲- استادیار مهندسی عمران، دانشگاه صنعتی خواجه نصیرالدین طوسی

چکیدہ

شبیهسازی عددی امواج غیرخطی در کاربردهای عملی از اهمیت خاصی برخوردار است. در این مقاله جزئیات توسعه یک مدل عددی دوبعدی در قائم که در آن از روش حجم سیال تکهایخطی برای ضبط سطح آزاد استفاده شده، ارائه شده است. در این مدل معادلات میانگینگیری شده نویر- استوکس به روش حجم محدود گسسته شده و با کمک روش پروجکشن حل می شوند. برای مدل سازی اثرات آشفتگی جریان از مدل $\mathcal{E} - k$ با در نظر گرفتن جملات شناوری استفاده شده است. برای صحت سنجی مدل ابتدا یک موج دامنه کوتاه ایستا در مخزن محدود شبیه سازی شده، سپس انتشار موج استوکس منظم، موج تنها و موج کوتاه غیرخطی شبیه سازی می شود. با مقایسه نتایج عددی با نتایج تحلیلی و آزمایشگاهی می توان دریافت که مدل موجود توانایی بالایی برای شبیه سازی امواج غیرخطی سطحی دارد. همچنین به وضوح می توان دید که روش حجم سیالی که برای ضبط سطح آب استفاده شده دارای دقت مناسبی است.

واژگان کلیدی : امواج غیرخطی، شبیهسازی عددی، روش پروجکشن، روش حجم محدود، روش حجم سیال.

93/11/10	تاريخ دريافت مقاله :
۹۵/۰ ۱/۳۳	تاريخ پذيرش مقاله :

۱– مقدمه

به علت مشکلات و ناتوانی در حل معادلات نویر - استوکس اخیراً شبیه سازی عددی جریان های دارای سطح آزاد با استفاده از معادلات نویر - استوکس بهطور گستردهای در , ودخانهها، دریاچهها، سـواحل و اقیانوسها به کار رفته و مورد تحقیق قرار می گیرند. در اغلب این تحقیقات به علت ناچیز فرض کردن شـــتاب قائم فشــار را بـهصـورت هیدرواستاتیک در نظر می گیرند. این فرض برای جریانهایی که در آنها حرکت افقی خیلی بیشتر از حرکت قائم است، معمولاً اعتبار دارد؛ اما در كاربردهايي مانند امواج با دوره تناوب كوتاه، وجود تغيير بستر ناگهاني و يا لايهبندي به علت گرادیان های شدید چگالی فرض فشار هیدرواستاتیک معتبر نیست [۱]. امروزه برای توسعه مدلهای مقرون به صرفه برای شبیهسازی جریانهای دارای سطح آزاد با توزیع فشار غیر هیدرواستاتیک تلاشهای زیادی صورت گرفته است. از میان روشهای استفاده شده برای حل معادلات نویر- استوکس، روش پروجکشن یکی از روشهای کارآمد است [7]. در این روش ابتدا با صرفنظر کردن از گرادیان فشار سرعتهای واسطه به دست میآیند و سپس میدان فشار با حل معادله يواسون به دست مي آيد. درنهايت با فشار محاسبه شده میدان سرعت نهایی حساب می شود.

برای تخمین سطح، بسته به طبیعت مسئله میتوان از روش ردیابی^۱ سطح یا روش ضبط^۲ سطح استفاده کرد. در روشهای ردیابی، سطح بهعنوان یک ناپیوستگی در نظر گرفته شده و حرکت آن دنبال میگردد. در این روشها از شبکههای منطبق بر مرز استفاده میگردد که در هر بار روش ضبط برای جریانهای دوفازی محاسبات در دامنه مکانی ثابت انجام میشود. در این روشها تابع سطح مشترک مکان سطح را علامتگذاری میکند و با محاسبه این تابع سطح مشترک ضبط میگردد. روشهای ردیابی سطح شامل شبکه متحرک^۳، ردیابی پیشانی^۴ و ردیابی ذره⁴ میباشند. روشهای ضبط سطح شامل روش حجم سیال⁸

⁶ Volume of Fluid

ییشانی یک چندجملهای تکهای^۸ چسبیده به سطح مشترک به کار می رود که با میدان جریان منتقل می شود. روشهای شبکه متحرک برای شبیه سازی تشکیل قطره، جریان های Roll-Coating و امواج که دارای شکست نیستند به طور موفقيت آميزي به كار رفتهاند. اشكال روشهاي شبكه متحرک و ردیابی پیشانی برای شبیه سازی امواج تیز این است که این روشها تنها تا مرز شکست می توانند امواج را محاسبه کنند. روشهای ردیابی ذرات علی رغم اینکه جز روشهای گران میباشند ولی این روشها از قبیل SPH^{۱۰} و MLPG^{۱۱} اخیراً مورد اســـتقبال قرار گرفتهاند. این روشها را معمولاً بدون شبکه^{۱۲} نیز مینامند. روشهای مذکور به دلیل دلیل عدم نیاز به ردیابی مرز شبکههای پیچیده دارای مزیت می باشند. برای مدل سازی تغییر شکل های بزرگ سطح مشترک که شامل جدایی و ادغام امواج نیز است، روشهای ضبط سطح را میتوان به کار برد. روش حجم سیال روشی بسیار مرسوم و معروف برای مدلسازی سطح در جریانهای دوفازی و سطح آزاد است و بهخوبی با شرایط طبیعی جریان همخوانی دارد؛ که علاوه بر کاربرد ساده، بقای جرم را نیز ارضاء می کند و هزینه محاسباتی کمتری نسبت به روش MAC دارد [۳].

در دو دهه اخیر مدلهای عددی زیادی برای شبیهسازی انتشار امواج غیرخطی توسعهیافته است که در آنها برای ضبط سطح آزاد از روش حجم سیال استفاده شده است. کوز و امجولزنس [۴] مدل دوبعدی RIPPLE را توسعه دادند که در این مدل از روش حجم سیال برای ضبط سطح آزاد استفاده شده است. ایواتا و همکاران [۵] برای مقایسه SOLA مدل توایشگاهی و عددی انتشار امواج از مدل -SOLA نتایج آزمایشگاهی و عددی انتشار امواج از مدل -VOF NOF اصلاح شده استفاده کردند. لین و لیو [۶] در مدل RIPPLE از مدل آشفتگی $\mathcal{F} = K$ استفاده کردند و این مدل توسعهیافته را برای شبیهسازی شکست امواج به کار بردند. هوانگ و ژیائو [۷] یک مدل بر اساس روش حجم سیال را برای شبیهسازی موج روی ساحل توسعه دادند. چن و همکاران [۸] یک مدل عددی دوبعدی در قائم که

¹⁰ Smooth Particle Hydrodynamics

¹ Tracking

² Capturing

³ Moving Mesh

⁴ Front Tracking

⁵ Particle Tracking

دو فصل نامه علمی - پژوهشی دریا فنون

⁷ Marker and Cell

⁸ Piecewise Polynomial

⁹ Steep Waves

¹¹ Meshless Local Petrov-Galerkin

¹² Meshless

$$f = \begin{bmatrix} \rho u \\ \rho u^2 + p - \sigma'_{xx} \\ \rho uv - \sigma'_{xy} \\ \rho uw - \sigma'_{xz} \end{bmatrix}$$
(°)

$$g = \begin{bmatrix} \rho v \\ \rho u v - \sigma'_{yx} \\ \rho v^{2} + p - \sigma'_{yy} \\ \rho v w - \sigma'_{yz} \end{bmatrix}$$
(*)

$$h = \begin{bmatrix} \rho w \\ \rho u w - \sigma'_{zx} \\ \rho v w - \sigma'_{zy} \\ \rho w^{2} + p - \sigma'_{zz} \end{bmatrix}$$
(Δ)

$$Q = \begin{bmatrix} 0.\\ \vec{f_e} \end{bmatrix}$$
(7)

$$\sigma_{ij}' = \mu \left(\frac{\partial u_j}{\partial x_i} + \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \right), i, j = x, y, z$$
 (Y)

سطر اول معادله (۱) رابطه پیوستگی را نشان میدهد. سطرهای دوم، سوم و چهارم همان معادلات اندازه حرکت می باشند. سیستم معادلات نویر - استوکس فوق در هر نوع جریان سیالی از آرام تا آشفته اعتبار دارد. مشخصه بارز جریان های آشفته، نوسان تمامی متغیرهای جریان (مانند فشار، چگالی، سرعت و دما) میباشد. از سویی، بیشتر جریانهای موجود از نوع آشفته میباشند. اگرچه با افزایش قدرت کامپیوترها از لحاظ سرعت و حافظه، امکان شبیهسازی عددی مستقیم^۳ نوسانات در تمامی مقیاسها با استفاده از معادلات نویر – استوکس وابسته به زمان وجود دارد، اما هنوز جريان هاى با رينولدز بالا داراى محدوديت جدی سرعت محاسبات و پیچیدگی میباشند. پس باید حرکتهای متوسط جریان را بررسی کنیم و اثرات نوسانات آشفتگی را بر حرکتهای متوسط جریان محاسبه گردد. معمولاً دو گروه مـدل آشـفتگی وجود دارنـد: گروه اول شبیه سازی گردابه های بزرگ^۴ نامیده شده و از لحاظ محاسبه مستقیم نوسانات آشفتگی در مکان و زمان مانند DNS می باشد؛ اما این محاسبات بر روی مقیاس بالاتر از مقیاس های طولی مشخصی انجام می گردد. زیر این مقیاس مشخص، آشفتگی توسط قوانین نیمه تجربی مدل می شود؛ گروه دوم، معادلات میانگین گیری شــده رینولدزی نویر- دو فصلنامه علمی – پژوهشی دریا فنون

دارای مدل آشفتگی $\varepsilon = k$ است را برای شبیه سازی امواج غیرخطی روی موج شکن توسعه دادند. در این مقاله مدل هیدرودینامیک ^۱ WISE [۹] با استفاده از روش حجم سیال برای شبیه سازی جریان های غیر ماندگار با سطح آزاد توسعه داده شده است. در مدل غیر با سطح آزاد توسعه داده شده است. در مدل غیر معادلات نویر – استوکس میانگین گیری شده (RANS) است که توسط روش حجم محدود گسسته شده و به روش پروجکشن حل می شود. همچنین در این مدل برای مدل سازی آشفتگی از دو معادله $\varepsilon = k$ استفاده شده است.

۲- معادلات حاکم

با به کارگیری قانون بقا برای سه مقدار اصلی در جریان یعنی جرم، اندازه حرکت و انرژی، مجموعه معادلات اساسی مکانیک سیالات به دست میآیند. این معادلات شامل پیچیدگیهای مختلفی هستند، بنابراین تقریبهای مختلف با هدف کاهش این پیچیدگیها ارائه شده که معادلات مختلف جریان را تشکیل میدهند.

روند سادهسازی بر اساس بررسیهای فیزیکی مرتبط با ویژگیهای دینامیکی جریان سیال میباشد. برای مثال اگر معادلات اساسی مکانیک سیالات در سیال لزج استفاده شود، معادلات نویر – استوکس و اگر در سیال غیر لزج استفاده شود، معادلات اویلر به کار میروند. معادلات نویر – استوکس در دستگاه مختصات کارتزین به فرم بقایی^۲ زیر نوشته میشوند [۱۰].

$$\frac{\partial U}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial g}{\partial y} + \frac{\partial h}{\partial z} = Q \tag{1}$$

که بردار متغیرهای بقایی U به صورت زیر تعریف می شود: $\left[\begin{array}{c} \rho \end{array}
ight]$

$$U = \begin{vmatrix} \rho u \\ \rho v \\ \rho w \end{vmatrix}$$
(٢)

که w، v، u مؤلفههای سرعت و ρ چگالی هستند. مؤلفههای بردار شاریعنی f، g و h بردار جملههای منبع Q به شکل روابط (۳)، (۴)، (۵) و (۶) میباشند که Q شامل جملات منبع که دربرگیرنده اثرات نیروهای خارجی \overline{f}_e است.

³ Direct Numerical Simulation (DNS)

⁴ Large Eddy Simulation (LES)

¹ Width Integrated Stratified Environments ² Conservative

دو فصل نامه علمی - پژوهشی دریا فنون

آشفتگی نام دارند. این مدلها بر اساس بررسیهای تئوری و دادههای تجربی به دست آمدهاند. حوزه وسیعی از مدلها، از نسبتهای جبری ساده تا معادلات انتقال برای مقادیر آشفتگی از قبیل انرژی جنبشی آشفتگی، استهلاک آشفتگی و یا حتی معادلات انتقال مؤلفههای تنش رینولدز توسعه یافته و با درجات مختلف دقت به کار میروند. یکی از مدلهای آشفتگی، مدل دو معادلهای $\mathcal{E} - \mathcal{E}$ استاندارد میباشد. در WISE از مدل آشفتگی دو معادلهای استاندارد با نیروهای شناوری استفاده شده است. درنهایت معادلات نویر –استوکس به شکل روابط زیر به دست آمده است:

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0 \qquad (1\%)$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial u^2}{\partial x} + \frac{\partial uw}{\partial z} - w_g \frac{\partial u}{\partial z} =$$

$$-\frac{\partial P^*}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial x} \left(v_T \frac{\partial u}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(v_T \frac{\partial u}{\partial z} \right) \qquad (1\%)$$

$$\frac{\partial w}{\partial t} + \frac{\partial uw}{\partial x} + \frac{\partial w^2}{\partial z} - w_g \frac{\partial w}{\partial z} = -\frac{\partial P^*}{\partial z} + \frac{\partial}{\partial x} \left(v_T \frac{\partial u}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(v_T \frac{\partial u}{\partial z} \right)$$
(1Δ)

که در آن tزمان، x و zمختصات جهت افقی و قائم، u و w مؤلفههای سرعت افقی و قائم، P^* فشار اضافی، ρ چگالی آب، g شتاب ثقل، w_g سرعت شبکه و v_T ضریب لزجت گردابهای است.

۳- روش عددی

در مدل ارائه شده در این مقاله برای مدلسازی جریان از مدل دوبعدی قائم اسبیفاده شده است. در این مدل گسسته سازی مکانی به روش حجم محدود و گسسته سازی زمانی به روش گام جزئی است. به منظور حذف نیاز به درونیابی جهت محاسبه سرعت ها در وجوه سلول و نیز برطرف نمودن مشکل ناشی از جداسازی نقاط محاسبه سرعت و فشار که در گرههای زوج و فرد قرار گرفته اند، از شبکه لغزان^۲ استفاده شده است. به طور خلاصه معادله نویر – استوکس، در هر گام زمانی به سه قسمت مجزای انتقال^۳، پخشید گی^۹ و انتشار^۵ تقسیم می شود. استوکس^۱ میباشد که در آن نوسانات آشفتگی بر اساس مدل آشفتگی مورد استفاده به شکلهای متفاوتی در معادلات منظور و محاسبات میدان جریان بر اساس مقادیر میانگین گیری شده زمانی است [۱۰].

یکی از مشخصههای مهم جریانهای آشفته افزایش لزجت جریان است. با اعمال روند میانگین گیری زمانی، مؤلفههای سرعت متوسط زمانی و نوسانی که هر دو در معادله پیوستگی در حالت غیرقابل تراکم صادق هستند، روابط زیر به دست میآیند:

$$\frac{\partial \overline{u}}{\partial x} + \frac{\partial \overline{v}}{\partial y} + \frac{\partial \overline{w}}{\partial z} = 0 \tag{(A)}$$

$$\frac{\partial u'}{\partial x} + \frac{\partial v'}{\partial y} + \frac{\partial w'}{\partial z} = 0$$
(9)

همچنین با جایگزینی تمامی متغیرهای موجود در معادلات اندازه حرکت در حالت سیال غیرقابل تراکم و انجام عملیات جبری، معادلات اندازه حرکت میانگین گیری شده رینولدزی به دست می آید:

$$\rho \left[\overline{u} \frac{\partial \overline{u}}{\partial x} + \overline{v} \frac{\partial \overline{u}}{\partial y} + \overline{w} \frac{\partial \overline{u}}{\partial z} \right] = -\frac{\partial \overline{p}}{\partial x} + \mu \nabla^2 \overline{u} - \rho \left[\frac{\partial \overline{u'^2}}{\partial x} + \frac{\partial \overline{u'v'}}{\partial y} + \frac{\partial \overline{u'w'}}{\partial z} \right] \qquad (1 \cdot)$$

$$\rho \left[\overline{u} \frac{\partial \overline{v}}{\partial x} + \overline{v} \frac{\partial \overline{v}}{\partial y} + \overline{w} \frac{\partial \overline{v}}{\partial z} \right] = \frac{\partial \overline{p}}{\partial \overline{v} + \overline{v} \nabla^{2} \overline{z}} = \left[\partial \overline{u} \frac{\overline{v}'}{v'} + \partial \overline{v''^{2}} + \partial \overline{v'w'} \right]$$
(11)

$$-\frac{\partial p}{\partial y} + \mu \nabla^2 \overline{v} - \rho \left[\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z} \right]$$
(11)
$$\rho \left[\overline{u} \frac{\partial \overline{w}}{\partial x} + \overline{v} \frac{\partial \overline{w}}{\partial z} + \overline{w} \frac{\partial \overline{w}}{\partial z} \right] =$$

$$-\frac{\partial \overline{p}}{\partial z} + \mu \nabla^2 \overline{w} - \rho \left[\frac{\partial \overline{u'w'}}{\partial x} + \frac{\partial \overline{v'v'}}{\partial y} + \frac{\partial \overline{w'^2}}{\partial z} \right]$$
(17)

جملات اضافی ایجاد شده در سمت راست در حقیقت مؤلفههای تنسور تنش، ناشی از نوسانات جریان بوده و به تنشهای رینولدز جریان آشفته معروف هستند. وجود این تنشها باعث افزایش مقاومت در مقابل تغییر شکل میگردد. ارتباط بین تنشهای رینولدز و مقادیر متوسط جریان نامشخص است. بنابراین کاربرد معادلات میانگین گیری شده رینولدزی در جریانهای آشفته، نیاز به معرفی مدلهایی برای تعیین این ارتباط دارد که مدلهای

⁴ Diffusion

⁵ Propagation

¹ Reynolds Averaged Navier-Stokes (RANS)

² Staggered

³ Advection

دو فصلنامه علمی - پژوهشی دریا فنون

برای تخمین سطح آزاد از روش حجم سیال استفاده شده است. روش حجم سیال روشی بسیار مرسوم و معروف برای مدلسازی سطح در جریانهای دوفازی و سطح آزاد است و بهخوبی با شرایط طبیعی جریان همخوانی دارد. این روش اولین بار توسط هرت و نیکولز (۱۹۸۱) پیشنهاد شد [۱۱]. در این روش سطح با استفاده از یک تابع حجم (همچنین بهعنوان تابع رنگ^۱ شیناخته می شود)، *C*، بهعنوان تعیین کننده حجمی از سلول که سیال اشغال کرده است، ضبط می شود. این روش ها برای حل معادله (۱۶) یا معادله انتقال به طریقی که سطح را به صورت دقیق تخمین بزند، طراحی شدهاند:

$$\frac{\partial C}{\partial t} + \nabla \cdot (UC) = 0 \tag{19}$$

یکی از مهمترین قسمتهای روش حجم سیال انتقال تابع حجم است و اولین قدم برای انتقال، انتخاب روش گسسته سازی این معادله است که از اهمیت ویژهای برخوردار میباشد. گسسته سازیهای از مرتبه پایین باعث میشوند که هنگام انتقال، مقادیر تابع در هر سلول به سرعت روی سلولهای مجاور دچار پخشیدگی عددی میشود و روشهای از مرتبه بالا ناپایدار هستند و همچنین منجر به نوساناتی در جوابها می شوند؛ بنابراین برای جلوگیری از این پخشیدگی عددی و در عین حال حفظ دقت تخمین سطح آب نیاز به استفاده از روشهایی است که علاوه بر حفظ دقت، وضعیت یکنواختی از تابع حجم ایجاد نماید. در این مدل از مفهوم روش یانگز برای انتقال تابع حجم استفاده می شود، زیرا علاوه بر سادگی اعمال آن، از دقت مناسبی برخوردار است [۱۲] که روند گام به گام در این روش به شرح زیر است: گام ۱. تابع حجم سیال با توجه به تراز سطح آب در تمام

سلولها تعیین می شود. گام ۲. میزان دوران سطح آب در هر سلول محاسبه می شود. گام ۳. با توجه به دوران سطح آب در هر سلول یکی از حالات چهارگانه چرخش سلول تعیین می گردد. گام ۴. با توجه به زاویه سطح آب و مقدار تابع حجم در هر سلول یکی از حالات چهارگانه محاسبه شارهای خروجی از وجوه انتخاب می شود. گام ۵. با استفاده از حالات به دست آمده در گامهای ۳ و ۴ شار خروجی از وجوه عمود بر محور x محاسبه می شود.

¹ Color Function

گام ۶. با استفاده از شارهای خروجی و ورودی به هر سلول مقدار جدید تابع حجم در نیم گام زمانی به دست می آید و مقادیر تابع حجم در تمام سلولها به هنگام می شود. گام ۷. با استفاده از مقادیر جدید تابع حجم، گامهای ۲ تا ۶ در راستای محور z ها تکرار می شود و مقادیر تابع حجم در گام زمانی جدید به دست میآید. محل تعریف مقادیر متغیرها و شماره گذاری گرهها برای هر سلول در شکل (۱) نمایش داده شده است. در این مدل، شبکه بندی از نوع اویلری انتخاب می شود که تابع حجم سیال به عنوان متغیر مستقل در نظر گرفته می شود. با مشخص بودن تراز سطح مشترک در نقاط محاسباتی شبکه اویلری می توان مقادیر تابع حجم سیال را در سلولها محاسبه نمود. با توجه به مقادیر تابع حجم سلولها را می توان به شکل زیر دسته بندی کرد: $C_{i,k} = 1$ سلول پر: • $0 < C_{i,k} < 1$: سلول سطحى• محاسبه مقادیر تابع حجم در این سلول ها با استفاده از خط

محاسبه معادیر نابع حجم در این سلول ها با اسلمانه از خط تراز سطح مشـترک که از سلول میگذرد، بهسادگی و با تقسیم سطحی که اشـغال شـده به مساحت سلول قابل محاسبه است؛ شکل (۲) نمونهای از تعیین تابع حجم سیال سلولها است.

۴- ارزیابی مدل

برای صـحت سـنجی مدل موارد زیر توسـط رایانهای با پردازشـگر Core i3-3220 با فرکانس 3.3GHz شبیهسازی شده و با نتایج تحلیلی و آزمایشگاهی مقایسه می گردد:



شکل (۱) حجم کنترل و نقاط محاسباتی.

سال سوم – بهار و تابستان ۱۳۹۵

0.0	0.0	0.0
0.0	0.1	0.5
0.3	0.8	1.0

شکل (۲) نمونهای از مقادیر تابع حجم سیال.

- نوسان موج ایستای دامنه کوتاه در مخزن
 - انتشار امواج منظم
 - انتشار موج تنها
 - انتشار موج كوتاه غيرخطى

۴–۱- نوســان موج ایســتـای دامنه کوتاه در مخزن محدود

موج ایستای دامنه کوتاه با یک گره تحت اثر گرانش بهعنوان آزمونی برای ارزیابی روش ضبط سطح توسط راد و همکاران (۱۹۹۵) به کار گرفته شد. این آزمون همچنین توسط گوپالا و ون واچم (۲۰۰۷) برای صحت سنجی روش حجم سیال استفاده شد [۱۳]. در این تحقیق آزمون نوسان موج ایستا برای صحت سنجی مدل تهیه شده به کار برده شده است و با استفاده از این آزمون روش حجم سیال مورد ارزیابی قرار گرفته است. در این مدلسازی لزجت سیال صفر در نظر گرفته است. در این مدلسازی نزد. برای مخزن به میتوان با تئوری موج خطی تخمین زد. برای مخزن به اندازه کافی عمیق شکل سطح موج ایستا به صورت تحلیلی به شکل رابطه زیر است [۱۴].

(۱۷) $\eta(x,t) = a\cos(kx)\cos(\omega t)$ (۱۷) Δa دامنه موج، k عـدد موج و ω فر Δ انس زاویـهای میباشد. در این آزمون طول موج دو برابر طول مخزن یعنی ۲ متر و دامنه موج ۲ ۰/۰ متر در نظر گرفته شـده اسـت. دامنه محاسباتی مسئله و شرایط اولیه موج ایستا در شکل (۳) آمده است. برای ایجاد موج و شرایط اولیه، رابطه (۱۷) با در نظر گرفتن زمان صـفر به شـکل رابطه (۱۸) دسـت میآید و در زمان صفر به مدل اعمال میشود.

$$\eta(x,0) = a\cos(\frac{2\pi x}{L}) \tag{1A}$$

شبکه منظم استفاده شده برای مدل سازی در هر دودو جهت دارای فواصل یکنواخت با اندازه ۰/۰۲ متر است. برای موج ایستا با توجه به طول موج ۲ متر، زمان تناوب برای مخزن با

دو فصل نامه علمی - پژوهشی دریا فنون

عمق ۱ متر تقریباً ۱/۱۳۴ ثانیه به دست میآید. با توجه به اینکه مسئله موج کوتاه در آب عمیق میباشد لذا استفاده از حل تحلیلی با مرتبه اول دارای دقت کافی است. حل تحلیلی برای فشار هیدرودینامیک P و مؤلفههای سرعت u و w به شرح زیر است [۱۴]:

$$u = a\omega \frac{\cosh k (H+z)}{\sinh kH} \sin kx \sin \omega t$$
(19)

$$w = -a\omega \frac{\sinh k (H+z)}{\sinh kH} \cos kx \sin \omega t \qquad (\Upsilon \cdot)$$

$$P = ga \frac{\cosh k (H+z)}{\cosh kH} \cos kx \sin \omega t \tag{(1)}$$

x که در روابط بالا z مختصات قائم از سطح اولیه آب و x مختصات افقی از مبدأ میباشد.

در شـکلهای (۴) و (۵) سـری زمانی ارتفاع سـطح آزاد در سـمت چپ و راسـت مخزن با نتایج تحلیلی مقایسـه شـده اسـت. در این شکلها دیده می شود که نتایج عددی با نتایج تحلیلی مطـابقت دارد و بین نتایج عددی و تحلیلی اختلاف فاز نیز وجود ندارد.

در شـکل (۶) ارتفاع سطح آزاد جریان در زمانهای ۱۸۹۰، ۰/۳۷۸ و ۱/۱۳۴ ثانیه با نتایج تحلیلی مقایسه شده است. در این شکل قابل مشاهده است که پروفیل سطح آزاد در زمانهای ذکر شده تطابق زیادی با نتایج تحلیلی دارد.





شکل (۵) مقایسه سری زمانی ار تفاع سطح آزاد نوسان موج ایستا در دیوار سمت راست مخزن بین نتایج عددی (خط توپر) و نتایج تحلیلی (دایره توپر) برای عدد کورانت ۰/۰۸۸.



0.02

Elevation (m)

-0.02

Elevation (m) t=0.378sec -0.02 0.02 Elevation (m) t=0.945sec -0.02 0.02 Elevation (m) t=1.134sec -0.02 0.4 x (m) 0.2 0.6 0.8 1.0

شکل(۶) مقایسه ارتفاع سطح آزاد نوسان موج ایستا در مخزن حاصل از نتایج عددی (دایره توپر) و نتایج تحلیلی (خط توپر) برای عدد کورانت ۰/۰۸۸.

برای ۵ دوره تناوب، اجرای کد در کورانت ۰/۰۸۸ مدت ۴۳ دقیقه طول کشید.برای بررسی بیشتر دقت و پایداری مدل گامهای زمانی مختلف به کار برده شده است و برای مقایسه خطا از معیار زیر استفاده شده است [۱]:

$$L_{CYC} = \sqrt{\frac{1}{N_{CYC}} \sum_{j=1}^{N_{CYC}} (\eta_j - \tilde{\eta}_j)^2}$$
(YY)

که $N_{CYC} = t \ / \Delta t$ سیکل زمانی، η نتایج عددی ارتفاع $N_{CYC} = t \ / \Delta t$ سطح آزاد و $\tilde{\eta}$ نتایج حل تحلیلی سطح آزاد می باشد.

خطاهای عددی حاصل از اعداد کورانت متفاوت برای مدل حاضر در جدول (۱) آورده شده است. در کورانت ۸۸/۰ نتایج نسبت به نتایج کورانت کوچکتر دارای دقت یکسانی میباشد. نتایج خوب برای گامهای زمانی بزرگتر وابستگی کمتر مدل به گام زمانی را نشان میدهد.

ناپذیر و لزج فرض شده است. عمق فلوم ۰/۴ متر و طول آن

فلوم موج دوبعدی با بستر صاف انجام می شود.

۸۰ متر است. طرح دامنه محاسباتی برای انتشار این موج در شکل (۷) آمده است. حرکت موج ساز پیستونی توسط تابع

برای بررسی همگرایی^۱ شبکه در کورانت ثابت، چهار شبکه

با ابعاد مختلف به کار برده شده است و خطاهای عددی در جدول (۲) آورده شده است که نشان دهنده همگرایی نتایج

در آزمون عددی این قسمت میدان جریان، دوبعدی، آشفته و دارای سطح آزاد فرض شده است. شبیهسازی عددی روی

که یک موج ساز پیستونی برای تولید موج در ابتدای فلوم در نظر گرفته شده است. در این آزمایشها آب سیالی تراکم

زیر توصیف میشود:

با كاهش ابعاد شبكه مي باشد.

۲-۴- انتشار موج منظم

- $X(t) = A \left[1 \cos(\omega t) \right] \tag{(YT)}$
 - که A دامنه موج ساز و artheta فرکانس زاویه ای است.

جدول (۱) مقایسه خطاهای عددی سطح آزاد در اعداد کورانت مختلف برای نوسان موج ایستا در مخزن.

ل در مدت ۱۱/۳۴ ثانیه (درصد) L _{CYC} / 2a				
گام زمانی	عدد	ديوار سمت چپ	ديوار سمت	
(ثانيه)	كورانت		راست	
•/••۴	•/٣۵٣	•/٨	• /٨٣	
•/••٢	۰/۱۷۶	• /YA	۰/۸۲	
•/••1	•/• AA	• / Y Y	۰/۸۱	
•/•••۵	•/• 44	• /YY	۰/۸۱	

جدول (۲) مقایسه خطاهای عددی سطح آزاد در عدد کورانت

ثابت برای نوسان موج ایستا در مخزن.				
(درصد) در مدت ۱۱/۳۴ ثانیه (درصد) L $_{CYC}$ / $2a$				
$\Delta x = \Delta z$	عدد	ديوار سمت	ديوار سمت	
(متر)	كورانت	چپ	راست	
•/•٨	•/• AA	٣/۵	۴	
•/•۴	•/• AA	١	۱/•۵	
• / • ۲	•/• AA	• /YY	۰/۸ ۱	
• / •)	•/• ٨٨	•/Y۵	• /YY	

¹ Convergence

دو فصل نامه علمی - پژوهشی دریا فنون

با جایگذاری متغیرها در معادله (۳۲) و اعمال آن در مرز سمت چپ حرکت موجساز پیستونی شبیهسازی می شود و موج تولید می شود. در این آزمون شبیهسازی برای دو حالت بدون شیب زمانی و با شیب زمانی انجام شده است. ارتفاع موج ۲۰/۰۲ متر، زمان تناوب ۱/۲ ثانیه و طول موج ۱/۹۲ متر است. برای شبیهسازی شبکه منظم با اندازه ۲۰/۰ و متر است. برای شبیهسازی شبکه منظم با اندازه ۲۰/۰ و دوم استوکس مقایسه شده است. برای حل استوکس مرتبه دوم، ارتفاع آب از رابطه (۳۳) به دست می آید. در شکل (۸) نتایج ارتفاع آب با نتایج تحلیلی مطابقت خوبی دارد و شیب زمانی باعث کاهش ناپایداری موج شده است.

$$\eta = \frac{H}{2}\cos(kx - \omega t) + \frac{\pi H}{8L}^2 \frac{\cosh(kd)}{\sin^3 h(kd)}$$
$$\cdot [\cosh(2kd) + 2] \cdot \cos(kx - \omega t)$$
(TT)

در این شکل اختلاف فاز بین نتایج تحلیلی و نتایج حل عددی بسیار ناچیز است. برای بررسی عملکرد شیب زمانی خطاهای عددی حاصل در جدول (۳) آمده است که نتایج سطح آزاد با حل تحلیلی استوکس مطابقت بیشتری دارد. در این نتایج دیده می شود که شیب زمانی دقت نتایج را بهبود بخشیده است.

۴-۳- انتشار موج تنها روی بستر افقی

در این آزمایش هدف شبیه سازی موج تنها می باشد. این موج دارای یک تاج است که بالای سطح آب تشکیل می شود و فاقد حضیض است. شناخت موج تنها به عنوان یک نمونه از امواج غیر خطی، اهمیت زیادی در شناخت فرآیندهای امواج در ناحیه ساحلی دارد.

جدول (۳) مقایسه خطاهای عددی سطح آزاد برای انتشار موج منظم (با ابعاد شبکه ۰/۰۴ متر و گام زمانی ۰/۰۰۹ ثانیه).

در مدت ۱۰ ثانیه (درصد) <i>L_{CYC} / 2a</i>					
مقایسه با حل تحلیلی استوکس مقایسه با حل تحلیلی خطی					
بدون شيب	با شیب ۷/۲	بدون شيب	با شیب ۷/۲		
زمانی	ثانيه	زمانی	ثانيه		
٣/٨	۲/۸	۲/٩	١/٨		



شکل (۷) طرح دامنه محاسباتی برای انتشار موج منظم.

جابه جایی موج ساز
$$S$$
، عمق آب b ، ارتفاع موج H و عدد موج k موج k موج k عروبط روابط زیر به هم مرتبط می شوند:
 $H = 2[\cosh(2kd) - 1]$

$$\overline{S} = \frac{1}{\sinh(2kd) + 2kd} \tag{(11)}$$

$$S = 2A \tag{(Y\Delta)}$$

در آغاز شبیهسازی نیز یک شیب زمانی^۱ که توسط ژائو و همکاران برای از بین بردن ناپایداری آغازی شبیهسازی امواج غیرخطی پیشنهاد شده، در حرکت موج ساز به کار گرفته شده است. موج ساز با شیب زمانی به صورت زیر اعمال می شود [۱۵]:

$$X(t) = X(t).\xi_{i}, \quad i = 1, 2, 3$$

$$\xi_{i}(t) = \begin{cases} (3\mu^{2} - 8\mu^{2} + 6)\mu^{2}, & t \le T_{r} \end{cases}$$
(YY)

$$\begin{bmatrix} 1, & t < T_r \\ \sin \mu, & t \le T_r \end{bmatrix}$$

$$\xi_2(t) = \begin{cases} \sin \mu, & t \ge T_r \\ 1, & t < T_r \end{cases}$$
(YA)

$$\xi_2(t) = \begin{cases} \mu, & t \leq T_r \\ 1, & t \leq T_r \end{cases}$$
(Y9)

$$\mu = t / T_r \tag{(T.)}$$

برای یک قطار موج مقادیر تحلیلی مرتبه اول سـطح آزاد به صورت زیر است [۱۴].

 $\eta(x,t) = a\cos(kx - \omega t)$ (۳۱) که X مکان موجساز، کخ شیب زمانی و T_r مدت شیب زمانی است؛ که در آزمایشها $\overline{\zeta}$ به علت تغییرات نرمتر استفاده شده است.

برای ایجاد موج در مدل عددی از معادله (۲۳) مشتق گرفته
تا سرعت افقی در مرز ورودی به دست آید:
$$u(x = 0, t) = A \omega \sin(\omega t)$$
 (۳۲)

¹ Time Ramp



شکل (۸) مقایسه سری زمانی ارتفاع سطح آزاد موج حاصل از شبیهسازی مدل حاضر (دایره توخالی) و حل تحلیلی مرتبه دوم استوکس (خط توپر) در x=10m با ابعاد شبکه ۰/۰۴ متر و گام زمانی ۰/۰۰۱ ثانیه.

این نوع موج برای شناخت تأثیر امواج سونامی در سواحل بهطور گسترده به صورت تحلیلی، آزمایشگاهی و عددی مطالعه شده است. بر اساس تئوری تحلیلی، موج دامنه کوتاه تنها بر روی عمق ثابت بدون تغییر در شکل، سرعت و دامنه منتشر می شود [۱۶]. حل تحلیلی موج تنها از معادله بوسینسک به دست می آید، و به صورت معادله (۳۴) می باشد:

$$\eta(x,t) = a \sec h^2 \left[\sqrt{\frac{3a}{4d^3}} (x - ct) \right]$$

$$c = \sqrt{g(d+a)}$$
(37)
(74)

که در معادلههای فوق a دامنه موج، b عمق آب، c سرعت موج تنها و t زمان است. در این آزمایش دامنه موج تنها ۱ متر و عمق آب ۱۰ متر در نظر گرفته شده است. همچنین گام زمانی ۱/۰ ثانیه، ابعاد شــبکه ۱ متر و سـرعت موج ۱۰/۳۸۸ متر بر ثانیه میباشد.

برای ایجاد موج در مدل، سـری زمانی سـرعت افقی را از رابطه (۳۶) به دسـت آورده و در مرز ورودی سـمت چپ اعمال میکنیم:

$$u(x,t) = \sqrt{gd} \frac{a}{d} \sec h^2 \left[\sqrt{\frac{3a}{4d^3}} (x - ct) \right]$$
(79)

در شکل (۹) نتایج سطح آب در زمانهای ۴۵، ۹۰، ۱۳۵ و ۱۸۰ ثانیه مقایسـه شده است که مطابقت خوبی بین نتایج تحلیلی و عددی دیده میشـود. در مدل سـرعت در وجه

بین سلولهای خالی و سلولهای سطحی نقش خیلی مهمی در دقت مدل دارد که در مدل حاضر این سرعتها از برونیابی بین سرعتهای درون سیال بهدستآمده است [۱۷]. در شکل (۱۰) مؤلفههای افقی و قائم سرعت با نتایج تحلیلی سورنسن (۱۹۹۷) مقایسه شده است [۱۸]. مطابقت بین نتایج عددی و حل تحلیلی نشان دهنده کارآیی مدل هیدرودینامیک حاضر میباشد.

۴-۴- انتشار موج کوتاه غیرخطی

انتشار موج کوتاه غیرخطی برای صحت سنجی مدل حاضر شبیهسازی می شود. این آزمایش در یک فلوم به طول ۳۵/۵۴ متر و عمق ۴۰ سانتیمتر انجام شده است که از موج ساز پارویی برای ایجاد موج در این کانال موج استفاده شده است. طرح کلی دامنه محاسباتی بکار رفته برای انتشار این موج در شکل (۱۱) نمایش داده شده است. در شکل (۱۲) در پنج مکان نتایج عددی با نتایج آزمایشگاهی چاپالین و همکاران (۱۹۹۱) مقایسه شده است [۱۹]. برای می آزمایش تئوری خطی اعتبار ندارد و در این شکل مطابقت خوبی بین نتایج عددی و آزمایشگاهی دیده می شود. برای این آزمون شبکهای یکنواخت با ابعاد ۱۰ سانتیمتر و گام زمانی ۲۰۰۵ ثانیه در نظر گرفته شده است. در این حالت برای مدت شبیهسازی ۴۰ ثانیه مدت زمان اجرای کد عددی حدود ۱۴۵ دقیقه میباشد.



شکل (۹) مقایسهی ارتفاع سطح آزاد موج تنها حاصل از شبیهسازی مدل حاضر (خط توپر) و حل تحلیلی (دایرهی توخالی) در زمانهای ۴۵، ۹۰، ۱۳۵ و ۱۸۰ ثانیه.



شکل (۱۰) مقایسهی مؤلفههای سرعت افقی (شکل بالا) و سرعت قائم (شکل پایین) موج تنهای حاصل از شبیهسازی مدل حاضر (خط توپر) با حل تحلیلی (دایرهی توخالی) در زمانهای ۴۵، ۹۰، ۱۳۵ و ۱۸۰ ثانیه.



۵- نتیجهگیری

در مقاله حاضر جزئیات توسعه مدل دوبعدی در قائم غیر هیدرواستاتیک برای شبیهسازی جریانهای با سطح آزاد آورده شده است. برای ضبط سطح آزاد از روش محبوب، کاربردی و بقایی حجم سیال استفاده شده است. در این مدل معادلات حاکم، معادلات نویر-استوکس میانگین گیری شده رینولدزی است که با روش پروجکشن در دو گام اصلی حل میشوند.





استوکس نتایج عددی دارای دقت قابل ملاحظه است و شیب زمانی به کار گرفته شده برای ایجاد موج باعث بهبود نتایج انتشار موج شده است. شبیهسازی عددی موج تنها روی بستر ثابت نیز امتحان شده است. در این آزمون نتایج سطح آب و مؤلفههای سرعت با نتایج تحلیلی تطابق خیلی خوبی دارد. درنهایت مطابقت خوب بین نتایج عددی انتشار موج کوتاه غیرخطی و نتایج آزمایشگاهی یکی از محاسن این مدل دقت آن در شبیهسازی سطح آزاد امواج است که از روش یانگز برای بازسازی سطح استفاده می کند. برای بررسی کارایی مدل آزمون های با سطح آزاد دارای شتاب قائم قابل ملاحظه شبیهسازی شده است. ابتدا برای صحت سنجی مدل آزمون موج ایستای دامنه کوتاه در مخرن محدود شبیهسازی می شود که مدل نتایج بسیار دقیقی دارد. در شبیهسازی انتشار موج Breakwater on Slope", Acta Oceanologica Sinica, Vol.29, No. 1, pp.88-99, 2010.

- [9] Hejazi, K., Soltanpour, M., and Sami, S.. "Numerical Modeling of Wave–Mud Interaction using Projection Method", Ocean Dynamics, Vol.63, No.9, pp. 1093-1111, 2013.
- [10] Hirsch, C., "Numerical Computation of Internal and External Flows: The Fundamentals of Computational Fluid Dynamics", The Fundamentals of Computational Fluid Dynamics. Butterworth-Heinemann, 2007.
- [11] Hirt, C. W. and Billy D. N., "Volume of Fluid (VOF) Method for the Dynamics of Free Boundaries", Journal of Computational Physics, Vol.39, No.1, pp.201-225, 1981.
- [12] Rudman, Murray, "Volume-Tracking Methods for Interfacial Flow Calculations", International journal for Numerical Methods in Fluids, Vol.24, No.7, pp.671-691, 1997.
- [13] Gopala, Vinay R., and Berend GM van Wachem, "Volume of Fluid Methods for Immiscible-Fluid and Free- Surface Flows." Chemical Engineering Journal1, Vol.41, No.1, pp. 204-221, 2008.
- [14] Dean, R. G., and Dalrymple R. A., "Water Wave Mechanics for Engineers and Scientists", Advanced Series on Ocean Engineering, 1991.
- [15] Zhao, X. Z., Hu, C. H. Sun Z. C., and Liang S. X., "Validation of the Initialization of a Numerical Wave Flume using a Time Ramp", Fluid Dynamics Research, Vol.42, No. 4, 2010.
- [16] Chiang, M. C., "The Applied Dynamics of Ocean Surface Waves, Vol.1, World Scientific, 1989.
- [17] Kleefsman, K. M. T., Fekken, G., Veldman, A. E. P., Iwanowski, B., and Buchner, B., "A Volume-of-Fluid Based Simulation Method for Wave Impact Problems", Journal of Computational Physics, Vol.206, No.1, pp.363-393, 2005.
- [18] Sorensen, R. M., Basic Coastal Engineering. Vol.10. Springer Science & Business Media, 2005.
- [19] Chapalain, G., Cointe R., and Temperville A.
 "Observed and Modeled Resonantly Interacting Progressive Water-Waves", Coastal Engineering, Vol.16, No. 3, pp.267-300, 1992.

نشان دهنده توانایی مدل برای شبیهسازی عددی امواج کوتاه غیرخطی با شتاب قائم قابل توجه است. با توجه بهدقت مناسب شبیهسازی سطح آزاد توسط الگوی استفاده شده برای ضبط سطح، میتوان از آن برای شبیهسازی سطح مشترک جریانهای دوفازی استفاده کرد. در ادامه این تحقیق مدل تهیه شده برای شبیهسازی جریانهای لایهبندی شده و امواج غیرخطی داخلی در حال توسعه است.

۶- مراجع

- Yuan, H., and Chin H. Wu., "A Two-Dimensional Vertical Non-Hydrostatic σ Model with an Implicit Method for Free-Surface Flows, International Journal for Numerical Methods in Fluids, Vol.44, No.8, pp.811-835, 2004.
- [2] Chorin, A. J., "Numerical Solution of the Navier-Stokes Equations", *Mathematics of computation*, *Vol.*22, No.104, pp.745-762, 1968.
- [3] Advances in Numerical Simulation of Nonlinear Water Waves, Singapore: World Scientific, 2010.
- [4] Kothe, D. B., and . Mjolsness, R. C, "RIPPLE-A New Model for Incompressible Flows with Free Surfaces", *AIAA journal*, Vol.30, No.11, pp.2694-2700, 1992.
- [5] Koichiro, I., Kawasaki, K., and Kim, D. S., "Breaking Limit, Breaking and Post-Breaking Wave Deformation Due to Submerged Structures, "Coastal EngineeringProceedings, Vol1, No.25, 1996.
- [6] Pengzhi, L., and Liu, P. L. F., "A Numerical Study of Breaking Waves in the Surf zone", Journal of Fluid Mechanics, Vol.359, pp.239-264, 1998.
- [7]Wenrui, H., and Xiao H., "Numerical Modeling of Dynamic Wave Force Acting on Escambia bay Bridge Deck During Hurricane Ivan", Journal of Waterway, port, Coastal, and Ocean Engineering, Vol.135, No.4, pp.164-175, 2009.
- [8] Jie C., Jiang C., Hu S., and H.Wenwei, "Numerical Study on the Characteristics of Flow Field and Wave Propagation Near Submerged