

شبیه‌سازی عددی امواج غیرخطی با استفاده از روش PLIC VOF

محمد رضا دری^۱، کورش حجازی^۲

dori1364@mail.kntu.ac.ir

۱- کارشناس ارشد مهندسی عمران- هیدرولیک، دانشگاه صنعتی خواجه نصیرالدین طوسی

۲- استادیار مهندسی عمران، دانشگاه صنعتی خواجه نصیرالدین طوسی

چکیده

شبیه‌سازی عددی امواج غیرخطی در کاربردهای عملی از اهمیت خاصی برخوردار است. در این مقاله جزئیات توسعه یک مدل عددی دوبعدی در قائم که در آن از روش حجم سیال تکه‌ای خطی برای ضبط سطح آزاد استفاده شده، ارائه شده است. در این مدل معادلات میانگین‌گیری شده نویر- استوکس به روش حجم محدود گسسته شده و با کمک روش پروجکشن حل می‌شوند. برای مدل‌سازی اثرات آشفتگی جریان از مدل $k - \epsilon$ با در نظر گرفتن جملات شناوری استفاده شده است. برای صحت سنجی مدل ابتدا یک موج دامنه کوتاه ایستا در مخزن محدود شبیه‌سازی شده، سپس انتشار موج استوکس منظم، موج تنها و موج کوتاه غیرخطی شبیه‌سازی می‌شود. با مقایسه نتایج عددی با نتایج تحلیلی و آزمایشگاهی می‌توان دریافت که مدل موجود توانایی بالایی برای شبیه‌سازی امواج غیرخطی سطحی دارد. همچنین به وضوح می‌توان دید که روش حجم سیالی که برای ضبط سطح آب استفاده شده دارای دقت مناسبی است.

واژگان کلیدی: امواج غیرخطی، شبیه‌سازی عددی، روش پروجکشن، روش حجم محدود، روش حجم سیال.

تاریخ دریافت مقاله :	۹۳/۱۱/۱۵
تاریخ پذیرش مقاله :	۹۵/۰۱/۲۳

۱- مقدمه

پیشانی یک چندجمله‌ای تکه‌ای^۸ چسبیده به سطح مشترک به کار می‌رود که با میدان جریان منتقل می‌شود. روش‌های شبکه متحرک برای شبیه‌سازی تشکیل قطره، جریان‌های Roll-Coating و امواج که دارای شکست نیستند به‌طور موفقیت‌آمیزی به‌کار رفته‌اند. اشکال روش‌های شبکه متحرک و ردیابی پیشانی برای شبیه‌سازی امواج تیز^۹ این است که این روش‌ها تنها تا مرز شکست می‌توانند امواج را محاسبه کنند. روش‌های ردیابی ذرات علی‌رغم اینکه جز روش‌های گران می‌باشند ولی این روش‌ها از قبیل SPH^{۱۰} و MLPG^{۱۱} اخیراً مورد استقبال قرار گرفته‌اند. این روش‌ها را معمولاً بدون شبکه^{۱۲} نیز می‌نامند. روش‌های مذکور به دلیل دلیل عدم نیاز به ردیابی مرز شبکه‌های پیچیده دارای مزیت می‌باشند. برای مدل‌سازی تغییر شکل‌های بزرگ سطح مشترک که شامل جدایی و ادغام امواج نیز است، روش‌های ضبط سطح را می‌توان به کار برد. روش حجم سیال روشی بسیار مرسوم و معروف برای مدل‌سازی سطح در جریان‌های دوفازی و سطح آزاد است و به‌خوبی با شرایط طبیعی جریان هم‌خوانی دارد؛ که علاوه بر کاربرد ساده، بقای جرم را نیز ارضاء می‌کند و هزینه محاسباتی کمتری نسبت به روش MAC دارد [۳].

در دو دهه اخیر مدل‌های عددی زیادی برای شبیه‌سازی انتشار امواج غیرخطی توسعه‌یافته است که در آن‌ها برای ضبط سطح آزاد از روش حجم سیال استفاده شده است. کوز و امجولزنس [۴] مدل دوبعدی RIPPLE را توسعه دادند که در این مدل از روش حجم سیال برای ضبط سطح آزاد استفاده شده است. ایواتا و همکاران [۵] برای مقایسه نتایج آزمایشگاهی و عددی انتشار امواج از مدل SOLA-VOF اصلاح شده استفاده کردند. لین و لیو [۶] در مدل RIPPLE از مدل آشفتگی $k - \epsilon$ استفاده کردند و این مدل توسعه‌یافته را برای شبیه‌سازی شکست امواج به کار بردند. هوانگ و ژیانو [۷] یک مدل بر اساس روش حجم سیال را برای شبیه‌سازی موج روی ساحل توسعه دادند. چن و همکاران [۸] یک مدل عددی دوبعدی در قائم که

به علت مشکلات و ناتوانی در حل معادلات نویر- استوکس اخیراً شبیه‌سازی عددی جریان‌های دارای سطح آزاد با استفاده از معادلات نویر- استوکس به‌طور گسترده‌ای در رودخانه‌ها، دریاچه‌ها، سواحل و اقیانوس‌ها به کار رفته و مورد تحقیق قرار می‌گیرند. در اغلب این تحقیقات به علت ناچیز فرض کردن شتاب قائم فشار را به‌صورت هیدرواستاتیک در نظر می‌گیرند. این فرض برای جریان‌هایی که در آن‌ها حرکت افقی خیلی بیشتر از حرکت قائم است، معمولاً اعتبار دارد؛ اما در کاربردهایی مانند امواج با دوره تناوب کوتاه، وجود تغییر بستر ناگهانی و یا لایه‌بندی به علت گرادیان‌های شدید چگالی فرض فشار هیدرواستاتیک معتبر نیست [۱]. امروزه برای توسعه مدل‌های مقرون به صرفه برای شبیه‌سازی جریان‌های دارای سطح آزاد با توزیع فشار غیر هیدرواستاتیک تلاش‌های زیادی صورت گرفته است. از میان روش‌های استفاده شده برای حل معادلات نویر- استوکس، روش پروجکشن یکی از روش‌های کارآمد است [۲]. در این روش ابتدا با صرف‌نظر کردن از گرادیان فشار سرعت‌های واسطه به دست می‌آیند و سپس میدان فشار با حل معادله پواسون به دست می‌آید. درنهایت با فشار محاسبه شده میدان سرعت نهایی حساب می‌شود.

برای تخمین سطح، بسته به طبیعت مسئله می‌توان از روش ردیابی^۱ سطح یا روش ضبط^۲ سطح استفاده کرد. در روش‌های ردیابی، سطح به‌عنوان یک ناپیوستگی در نظر گرفته شده و حرکت آن دنبال می‌گردد. در این روش‌ها از شبکه‌های منطبق بر مرز استفاده می‌گردد که در هر بار تکرار حل تا انطباق کامل بر سطح آزاد جابه‌جا می‌شود. در روش ضبط برای جریان‌های دوفازی محاسبات در دامنه مکانی ثابت انجام می‌شود. در این روش‌ها تابع سطح مشترک مکان سطح را علامت‌گذاری می‌کند و با محاسبه این تابع سطح مشترک ضبط می‌گردد. روش‌های ردیابی سطح شامل شبکه متحرک^۳، ردیابی پیشانی^۴ و ردیابی ذره^۵ می‌باشند. روش‌های ضبط سطح شامل روش حجم سیال^۶ روش دسته تراز و MAC^۷ می‌باشند. در روش‌های ردیابی

7 Marker and Cell

8 Piecewise Polynomial

9 Steep Waves

10 Smooth Particle Hydrodynamics

11 Meshless Local Petrov-Galerkin

12 Meshless

1 Tracking

2 Capturing

3 Moving Mesh

4 Front Tracking

5 Particle Tracking

6 Volume of Fluid

$$f = \begin{bmatrix} \rho u \\ \rho u^2 + p - \sigma'_{xx} \\ \rho uv - \sigma'_{xy} \\ \rho uw - \sigma'_{xz} \end{bmatrix} \quad (۳)$$

$$g = \begin{bmatrix} \rho v \\ \rho uv - \sigma'_{yx} \\ \rho v^2 + p - \sigma'_{yy} \\ \rho vw - \sigma'_{yz} \end{bmatrix} \quad (۴)$$

$$h = \begin{bmatrix} \rho w \\ \rho uw - \sigma'_{zx} \\ \rho vw - \sigma'_{zy} \\ \rho w^2 + p - \sigma'_{zz} \end{bmatrix} \quad (۵)$$

$$Q = \begin{bmatrix} 0 \\ \vec{f}_e \end{bmatrix} \quad (۶)$$

$$\sigma'_{ij} = \mu \left(\frac{\partial u_j}{\partial x_i} + \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \right), i, j = x, y, z \quad (۷)$$

سطر اول معادله (۱) رابطه پیوستگی را نشان می‌دهد. سطرهای دوم، سوم و چهارم همان معادلات اندازه حرکت می‌باشند. سیستم معادلات نویر- استوکس فوق در هر نوع جریان سیالی از آرام تا آشفته اعتبار دارد. مشخصه بارز جریان‌های آشفته، نوسان تمامی متغیرهای جریان (مانند فشار، چگالی، سرعت و دما) می‌باشد. از سویی، بیشتر جریان‌های موجود از نوع آشفته می‌باشند. اگرچه با افزایش قدرت کامپیوترها از لحاظ سرعت و حافظه، امکان شبیه‌سازی عددی مستقیم^۳ نوسانات در تمامی مقیاس‌ها با استفاده از معادلات نویر- استوکس وابسته به زمان وجود دارد، اما هنوز جریان‌های با رینولدز بالا دارای محدودیت جدی سرعت محاسبات و پیچیدگی می‌باشند. پس باید حرکت‌های متوسط جریان را بررسی کنیم و اثرات نوسانات آشفتگی را بر حرکت‌های متوسط جریان محاسبه گردد. معمولاً دو گروه مدل آشفتگی وجود دارند: گروه اول شبیه‌سازی گردابه‌های بزرگ^۴ نامیده شده و از لحاظ محاسبه مستقیم نوسانات آشفتگی در مکان و زمان مانند DNS می‌باشد؛ اما این محاسبات بر روی مقیاس بالاتر از مقیاس‌های طولی مشخصی انجام می‌گردد. زیر این مقیاس مشخص، آشفتگی توسط قوانین نیمه تجربی مدل می‌شود؛ گروه دوم، معادلات میانگین گیری شده رینولدزی نویر-

دارای مدل آشفتگی $k - \epsilon$ است را برای شبیه‌سازی امواج غیرخطی روی موج‌شکن توسعه دادند.

در این مقاله مدل هیدرودینامیک^۱ WISE [۹] با استفاده از روش حجم سیال برای شبیه‌سازی جریان‌های غیر ماندگار با سطح آزاد توسعه داده شده است. در مدل غیر هیدرواستاتیک دو بعدی در قائم WISE معادلات حاکم معادلات نویر- استوکس میانگین‌گیری شده (RANS) است که توسط روش حجم محدود گسسته شده و به روش پروجکشن حل می‌شود. همچنین در این مدل برای مدل‌سازی آشفتگی از دو معادله $k - \epsilon$ استفاده شده است.

۲- معادلات حاکم

با به‌کارگیری قانون بقا برای سه مقدار اصلی در جریان یعنی جرم، اندازه حرکت و انرژی، مجموعه معادلات اساسی مکانیک سیالات به دست می‌آیند. این معادلات شامل پیچیدگی‌های مختلفی هستند، بنابراین تقریب‌های مختلف با هدف کاهش این پیچیدگی‌ها ارائه شده که معادلات مختلف جریان را تشکیل می‌دهند.

روند ساده‌سازی بر اساس بررسی‌های فیزیکی مرتبط با ویژگی‌های دینامیکی جریان سیال می‌باشد. برای مثال اگر معادلات اساسی مکانیک سیالات در سیال لزج استفاده شود، معادلات نویر- استوکس و اگر در سیال غیر لزج استفاده شود، معادلات اوپلر به کار می‌روند. معادلات نویر- استوکس در دستگاه مختصات کارتزین به فرم بقایی^۲ زیر نوشته می‌شوند [۱۰].

$$\frac{\partial U}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial g}{\partial y} + \frac{\partial h}{\partial z} = Q \quad (۱)$$

که بردار متغیرهای بقایی U به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$U = \begin{bmatrix} \rho \\ \rho u \\ \rho v \\ \rho w \end{bmatrix} \quad (۲)$$

که u, v, w مؤلفه‌های سرعت و ρ چگالی هستند. مؤلفه‌های بردار شار یعنی f, g, h بردار جمله‌های منبع Q به شکل روابط (۳)، (۴)، (۵) و (۶) می‌باشند که Q شامل جملات منبع که دربرگیرنده اثرات نیروهای خارجی \vec{f}_e است.

³ Direct Numerical Simulation (DNS)

⁴ Large Eddy Simulation (LES)

¹ Width Integrated Stratified Environments

² Conservative

آشفته‌گی نام دارند. این مدل‌ها بر اساس بررسی‌های تئوری و داده‌های تجربی به دست آمده‌اند. حوزه وسیعی از مدل‌ها، از نسبت‌های جبری ساده تا معادلات انتقال برای مقادیر آشفته‌گی از قبیل انرژی جنبشی آشفته‌گی، استهلاک آشفته‌گی و یا حتی معادلات انتقال مؤلفه‌های تنش رینولدز توسعه یافته و با درجات مختلف دقت به کار می‌روند. یکی از مدل‌های آشفته‌گی، مدل دو معادله‌ای $k - \varepsilon$ استاندارد می‌باشد. در WISE از مدل آشفته‌گی دو معادله‌ای استاندارد با نیروهای شناوری استفاده شده است. در نهایت معادلات

نویر-استوکس به شکل روابط زیر به دست آمده است:

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0 \quad (13)$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial u^2}{\partial x} + \frac{\partial uw}{\partial z} - w_g \frac{\partial u}{\partial z} = -\frac{\partial P^*}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial x} \left(\nu_T \frac{\partial u}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\nu_T \frac{\partial u}{\partial z} \right) \quad (14)$$

$$\frac{\partial w}{\partial t} + \frac{\partial uw}{\partial x} + \frac{\partial w^2}{\partial z} - w_g \frac{\partial w}{\partial z} = -\frac{\partial P^*}{\partial z} + \frac{\partial}{\partial x} \left(\nu_T \frac{\partial u}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\nu_T \frac{\partial u}{\partial z} \right) \quad (15)$$

که در آن t زمان، x و z مختصات جهت افقی و قائم، u و w مؤلفه‌های سرعت افقی و قائم، P^* فشار اضافی، ρ چگالی آب، g شتاب ثقل، w_g سرعت شبکه و ν_T ضریب لزجت گردابه‌ای است.

۳- روش عددی

در مدل ارائه شده در این مقاله برای مدل‌سازی جریان از مدل دوبعدی قائم استفاده شده است. در این مدل گسسته‌سازی مکانی به روش حجم محدود و گسسته‌سازی زمانی به روش گام جزئی است. به منظور حذف نیاز به درون‌یابی جهت محاسبه سرعت‌ها در وجوه سلول و نیز برطرف نمودن مشکل ناشی از جداسازی نقاط محاسبه سرعت و فشار که در گره‌های زوج و فرد قرار گرفته‌اند، از شبکه لغزان^۲ استفاده شده است. به طور خلاصه معادله نویر-استوکس، در هر گام زمانی به سه قسمت مجزای انتقال^۳، پخشیدگی^۴ و انتشار^۵ تقسیم می‌شود.

استوکس^۱ می‌باشد که در آن نوسانات آشفته‌گی بر اساس مدل آشفته‌گی مورد استفاده به شکل‌های متفاوتی در معادلات منظور و محاسبات میدان جریان بر اساس مقادیر میانگین‌گیری شده زمانی است [۱۰].

یکی از مشخصه‌های مهم جریان‌های آشفته افزایش لزجت جریان است. با اعمال روند میانگین‌گیری زمانی، مؤلفه‌های سرعت متوسط زمانی و نوسانی که هر دو در معادله پیوستگی در حالت غیرقابل تراکم صادق هستند، روابط زیر به دست می‌آیند:

$$\frac{\partial \bar{u}}{\partial x} + \frac{\partial \bar{v}}{\partial y} + \frac{\partial \bar{w}}{\partial z} = 0 \quad (8)$$

$$\frac{\partial u'}{\partial x} + \frac{\partial v'}{\partial y} + \frac{\partial w'}{\partial z} = 0 \quad (9)$$

همچنین با جایگزینی تمامی متغیرهای موجود در معادلات اندازه حرکت در حالت سیال غیرقابل تراکم و انجام عملیات جبری، معادلات اندازه حرکت میانگین‌گیری شده رینولدزی به دست می‌آید:

$$\rho \left[\bar{u} \frac{\partial \bar{u}}{\partial x} + \bar{v} \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} + \bar{w} \frac{\partial \bar{u}}{\partial z} \right] = -\frac{\partial \bar{p}}{\partial x} + \mu \nabla^2 \bar{u} - \rho \left[\frac{\partial \overline{u'^2}}{\partial x} + \frac{\partial \overline{u'v'}}{\partial y} + \frac{\partial \overline{u'w'}}{\partial z} \right] \quad (10)$$

$$\rho \left[\bar{u} \frac{\partial \bar{v}}{\partial x} + \bar{v} \frac{\partial \bar{v}}{\partial y} + \bar{w} \frac{\partial \bar{v}}{\partial z} \right] = -\frac{\partial \bar{p}}{\partial y} + \mu \nabla^2 \bar{v} - \rho \left[\frac{\partial \overline{u'v'}}{\partial x} + \frac{\partial \overline{v'^2}}{\partial y} + \frac{\partial \overline{v'w'}}{\partial z} \right] \quad (11)$$

$$\rho \left[\bar{u} \frac{\partial \bar{w}}{\partial x} + \bar{v} \frac{\partial \bar{w}}{\partial y} + \bar{w} \frac{\partial \bar{w}}{\partial z} \right] = -\frac{\partial \bar{p}}{\partial z} + \mu \nabla^2 \bar{w} - \rho \left[\frac{\partial \overline{u'w'}}{\partial x} + \frac{\partial \overline{v'w'}}{\partial y} + \frac{\partial \overline{w'^2}}{\partial z} \right] \quad (12)$$

جملات اضافی ایجاد شده در سمت راست در حقیقت مؤلفه‌های تنسور تنش، ناشی از نوسانات جریان بوده و به تنش‌های رینولدز جریان آشفته معروف هستند. وجود این تنش‌ها باعث افزایش مقاومت در مقابل تغییر شکل می‌گردد. ارتباط بین تنش‌های رینولدز و مقادیر متوسط جریان نامشخص است. بنابراین کاربرد معادلات میانگین‌گیری شده رینولدزی در جریان‌های آشفته، نیاز به معرفی مدل‌هایی برای تعیین این ارتباط دارد که مدل‌های

⁴ Diffusion

⁵ Propagation

¹ Reynolds Averaged Navier-Stokes (RANS)

² Staggered

³ Advection

گام ۶. با استفاده از شارهای خروجی و ورودی به هر سلول مقدار جدید تابع حجم در نیم گام زمانی به دست می‌آید و مقادیر تابع حجم در تمام سلول‌ها به هنگام می‌شود.

گام ۷. با استفاده از مقادیر جدید تابع حجم، گام‌های ۲ تا ۶ در راستای محور z ها تکرار می‌شود و مقادیر تابع حجم در گام زمانی جدید به دست می‌آید.

محل تعریف مقادیر متغیرها و شماره‌گذاری گره‌ها برای هر سلول در شکل (۱) نمایش داده شده است. در این مدل، شبکه بندی از نوع اوپلری انتخاب می‌شود که تابع حجم سیال به عنوان متغیر مستقل در نظر گرفته می‌شود. با مشخص بودن تراز سطح مشترک در نقاط محاسباتی شبکه اوپلری می‌توان مقادیر تابع حجم سیال را در سلول‌ها محاسبه نمود. با توجه به مقادیر تابع حجم سلول‌ها را می‌توان به شکل زیر دسته بندی کرد:

• سلول خالی: $C_{i,k} = 0$

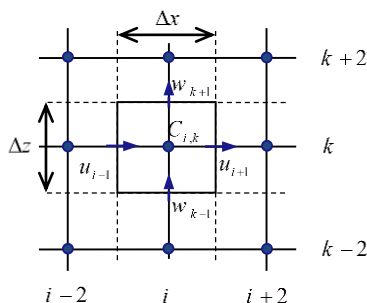
• سلول پر: $C_{i,k} = 1$

• سلول سطحی: $0 < C_{i,k} < 1$

محاسبه مقادیر تابع حجم در این سلول‌ها با استفاده از خط تراز سطح مشترک که از سلول می‌گذرد، به سادگی و با تقسیم سطحی که اشغال شده به مساحت سلول قابل محاسبه است؛ شکل (۲) نمونه‌ای از تعیین تابع حجم سیال سلول‌ها است.

۴- ارزیابی مدل

برای صحت سنجی مدل موارد زیر توسط رایانه‌ای با پردازشگر Core i3-3220 با فرکانس 3.3GHz شبیه‌سازی شده و با نتایج تحلیلی و آزمایشگاهی مقایسه می‌گردد:



شکل (۱) حجم کنترل و نقاط محاسباتی.

برای تخمین سطح آزاد از روش حجم سیال استفاده شده است. روش حجم سیال روشی بسیار مرسوم و معروف برای مدل‌سازی سطح در جریان‌های دوفازی و سطح آزاد است و به خوبی با شرایط طبیعی جریان هم‌خوانی دارد. این روش اولین بار توسط هرت و نیکولز (۱۹۸۱) پیشنهاد شد [۱۱]. در این روش سطح با استفاده از یک تابع حجم (همچنین به عنوان تابع رنگ^۱ شناخته می‌شود)، C ، به عنوان تعیین کننده حجمی از سلول که سیال اشغال کرده است، ضبط می‌شود. این روش‌ها برای حل معادله (۱۶) یا معادله انتقال به طریقی که سطح را به صورت دقیق تخمین بزند، طراحی شده‌اند:

$$\frac{\partial C}{\partial t} + \nabla \cdot (UC) = 0 \quad (16)$$

یکی از مهم‌ترین قسمت‌های روش حجم سیال انتقال تابع حجم است و اولین قدم برای انتقال، انتخاب روش گسسته سازی این معادله است که از اهمیت ویژه‌ای برخوردار می‌باشد. گسسته سازی‌های از مرتبه پایین باعث می‌شوند که هنگام انتقال، مقادیر تابع در هر سلول به سرعت روی سلول‌های مجاور دچار پخشیدگی عددی می‌شود و روش‌های از مرتبه بالا ناپایدار هستند و همچنین منجر به نوساناتی در جواب‌ها می‌شوند؛ بنابراین برای جلوگیری از این پخشیدگی عددی و در عین حال حفظ دقت تخمین سطح آب نیاز به استفاده از روش‌هایی است که علاوه بر حفظ دقت، وضعیت یکنواختی از تابع حجم ایجاد نماید. در این مدل از مفهوم روش یانگر برای انتقال تابع حجم استفاده می‌شود، زیرا علاوه بر سادگی اعمال آن، از دقت مناسبی برخوردار است [۱۲] که روند گام به گام در این روش به شرح زیر است:

گام ۱. تابع حجم سیال با توجه به تراز سطح آب در تمام سلول‌ها تعیین می‌شود.

گام ۲. میزان دوران سطح آب در هر سلول محاسبه می‌شود.

گام ۳. با توجه به دوران سطح آب در هر سلول یکی از حالات چهارگانه چرخش سلول تعیین می‌گردد.

گام ۴. با توجه به زاویه سطح آب و مقدار تابع حجم در هر سلول یکی از حالات چهارگانه محاسبه شارهای خروجی از وجوه انتخاب می‌شود.

گام ۵. با استفاده از حالات به دست آمده در گام‌های ۳ و ۴ شار خروجی از وجوه عمود بر محور x محاسبه می‌شود.

¹ Color Function

عمق ۱ متر تقریباً ۱/۱۳۴ ثانیه به دست می‌آید. با توجه به اینکه مسئله موج کوتاه در آب عمیق می‌باشد لذا استفاده از حل تحلیلی با مرتبه اول دارای دقت کافی است. حل تحلیلی برای فشار هیدرودینامیک P و مؤلفه‌های سرعت u و w به شرح زیر است [۱۴]:

$$u = a\omega \frac{\cosh k(H+z)}{\sinh kH} \sin kx \sin \omega t \quad (19)$$

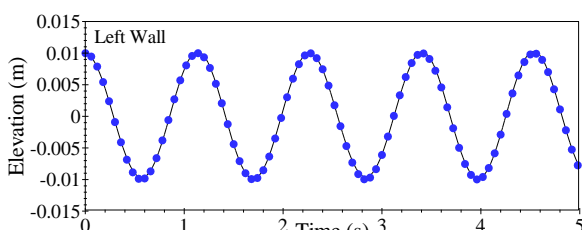
$$w = -a\omega \frac{\sinh k(H+z)}{\sinh kH} \cos kx \sin \omega t \quad (20)$$

$$P = ga \frac{\cosh k(H+z)}{\cosh kH} \cos kx \sin \omega t \quad (21)$$

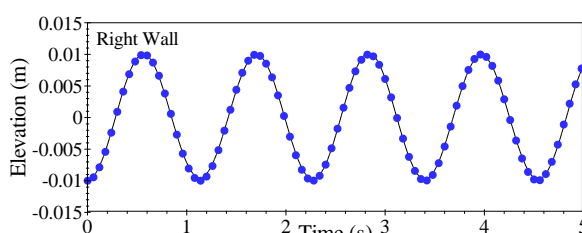
که در روابط بالا z مختصات قائم از سطح اولیه آب و x مختصات افقی از مبدأ می‌باشد.

در شکل‌های (۴) و (۵) سری زمانی ارتفاع سطح آزاد در سمت چپ و راست مخزن با نتایج تحلیلی مقایسه شده است. در این شکل‌ها دیده می‌شود که نتایج عددی با نتایج تحلیلی مطابقت دارد و بین نتایج عددی و تحلیلی اختلاف فاز نیز وجود ندارد.

در شکل (۶) ارتفاع سطح آزاد جریان در زمان‌های ۰/۱۸۹، ۰/۳۷۸، ۰/۹۴۵ و ۱/۱۳۴ ثانیه با نتایج تحلیلی مقایسه شده است. در این شکل قابل مشاهده است که پروفیل سطح آزاد در زمان‌های ذکر شده تطابق زیادی با نتایج تحلیلی دارد.



شکل (۴) مقایسه سری زمانی ارتفاع سطح آزاد نوسان موج ایستا در دیوار سمت چپ مخزن بین نتایج عددی (خط توپر) و نتایج تحلیلی (دایره توپر) برای عدد کورانت ۰/۸۸.



شکل (۵) مقایسه سری زمانی ارتفاع سطح آزاد نوسان موج ایستا در دیوار سمت راست مخزن بین نتایج عددی (خط توپر) و نتایج تحلیلی (دایره توپر) برای عدد کورانت ۰/۸۸.

0.0	0.0	0.0
0.0	0.1	0.5
0.3	0.8	1.0

شکل (۲) نمونه‌ای از مقادیر تابع حجم سیال.

- نوسان موج ایستای دامنه کوتاه در مخزن
- انتشار امواج منظم
- انتشار موج تنها
- انتشار موج کوتاه غیرخطی

۴-۱- نوسان موج ایستای دامنه کوتاه در مخزن محدود

موج ایستای دامنه کوتاه با یک گره تحت اثر گرانش به‌عنوان آزمونی برای ارزیابی روش ضبط سطح توسط راد و همکاران (۱۹۹۵) به کار گرفته شد. این آزمون همچنین توسط گوپالا و ون واچم (۲۰۰۷) برای صحت سنجی روش حجم سیال استفاده شد [۱۳]. در این تحقیق آزمون نوسان موج ایستا برای صحت سنجی مدل تهیه شده به کار برده شده است و با استفاده از این آزمون روش حجم سیال مورد ارزیابی قرار گرفته است. در این مدل‌سازی لزجت سیال صفر در نظر گرفته شده است و همچنین حرکت سیال را می‌توان با تئوری موج خطی تخمین زد. برای مخزن به اندازه کافی عمیق شکل سطح موج ایستا به‌صورت تحلیلی به شکل رابطه زیر است [۱۴].

$$\eta(x, t) = a \cos(kx) \cos(\omega t) \quad (17)$$

که a دامنه موج، k عدد موج و ω فرکانس زاویه‌ای می‌باشد. در این آزمون طول موج دو برابر طول مخزن یعنی ۲ متر و دامنه موج ۰/۰۱ متر در نظر گرفته شده است. دامنه محاسباتی مسئله و شرایط اولیه موج ایستا در شکل (۳) آمده است. برای ایجاد موج و شرایط اولیه، رابطه (۱۷) با در نظر گرفتن زمان صفر به شکل رابطه (۱۸) دست می‌آید و در زمان صفر به مدل اعمال می‌شود.

$$\eta(x, 0) = a \cos\left(\frac{2\pi x}{L}\right) \quad (18)$$

شبکه منظم استفاده شده برای مدل‌سازی در هر دودو جهت دارای فواصل یکنواخت با اندازه ۰/۰۲ متر است. برای موج ایستا با توجه به طول موج ۲ متر، زمان تناوب برای مخزن با

برای بررسی همگرایی^۱ شبکه در کورانت ثابت، چهار شبکه با ابعاد مختلف به کار برده شده است و خطاهای عددی در جدول (۲) آورده شده است که نشان دهنده همگرایی نتایج با کاهش ابعاد شبکه می باشد.

۴-۲- انتشار موج منظم

در آزمون عددی این قسمت میدان جریان، دوبعدی، آشفته و دارای سطح آزاد فرض شده است. شبیه سازی عددی روی فلوم موج دوبعدی با بستر صاف انجام می شود.

که یک موج ساز پیستونی برای تولید موج در ابتدای فلوم در نظر گرفته شده است. در این آزمایش ها آب سیالی تراکم ناپذیر و لزج فرض شده است. عمق فلوم ۰/۴ متر و طول آن ۸۰ متر است. طرح دامنه محاسباتی برای انتشار این موج در شکل (۷) آمده است. حرکت موج ساز پیستونی توسط تابع زیر توصیف می شود:

$$X(t) = A [1 - \cos(\omega t)] \quad (23)$$

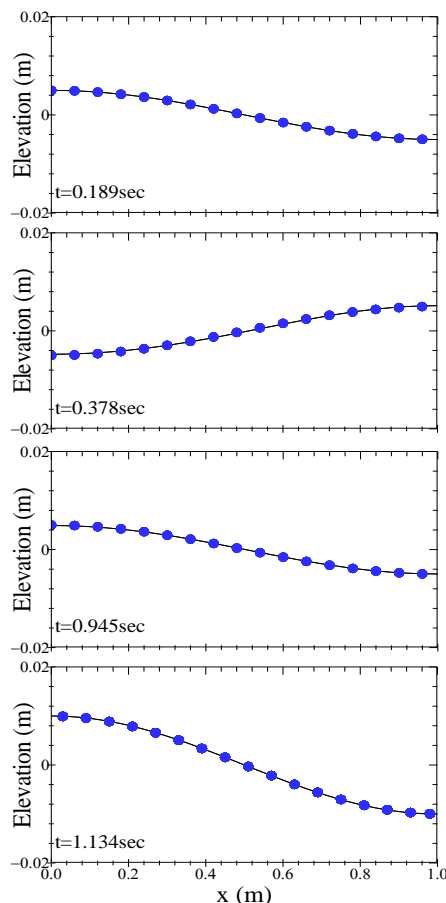
که A دامنه موج ساز و ω فرکانس زاویه ای است.

جدول (۱) مقایسه خطاهای عددی سطح آزاد در اعداد کورانت مختلف برای نوسان موج ایستا در مخزن.

$L_{CYC} / 2a$ در مدت ۱۱/۳۴ ثانیه (درصد)			
گام زمانی (ثانیه)	عدد کورانت	دیوار سمت چپ	دیوار سمت راست
۰/۰۰۴	۰/۳۵۳	۰/۸	۰/۸۳
۰/۰۰۲	۰/۱۷۶	۰/۷۸	۰/۸۲
۰/۰۰۱	۰/۰۸۸	۰/۷۷	۰/۸۱
۰/۰۰۰۵	۰/۰۴۴	۰/۷۷	۰/۸۱

جدول (۲) مقایسه خطاهای عددی سطح آزاد در عدد کورانت ثابت برای نوسان موج ایستا در مخزن.

$L_{CYC} / 2a$ در مدت ۱۱/۳۴ ثانیه (درصد)			
$\Delta x = \Delta z$ (متر)	عدد کورانت	دیوار سمت چپ	دیوار سمت راست
۰/۰۸	۰/۰۸۸	۳/۵	۴
۰/۰۴	۰/۰۸۸	۱	۱/۰۵
۰/۰۲	۰/۰۸۸	۰/۷۷	۰/۸۱
۰/۰۱	۰/۰۸۸	۰/۷۵	۰/۷۷



شکل (۶) مقایسه ارتفاع سطح آزاد نوسان موج ایستا در مخزن حاصل از نتایج عددی (دایره توپر) و نتایج تحلیلی (خط توپر) برای عدد کورانت ۰/۰۸۸.

برای ۵ دوره تناوب، اجرای کد در کورانت ۰/۰۸۸ مدت ۴۳ دقیقه طول کشید. برای بررسی بیشتر دقت و پایداری مدل گام های زمانی مختلف به کار برده شده است و برای مقایسه خطا از معیار زیر استفاده شده است [۱]:

$$L_{CYC} = \sqrt{\frac{1}{N_{CYC}} \sum_{j=1}^{N_{CYC}} (\eta_j - \tilde{\eta}_j)^2} \quad (22)$$

که $N_{CYC} = t / \Delta t$ سیکل زمانی، η نتایج عددی ارتفاع سطح آزاد و $\tilde{\eta}$ نتایج حل تحلیلی سطح آزاد می باشد.

خطاهای عددی حاصل از اعداد کورانت متفاوت برای مدل حاضر در جدول (۱) آورده شده است. در کورانت ۰/۰۸۸ نتایج نسبت به نتایج کورانت کوچک تر دارای دقت یکسانی می باشد. نتایج خوب برای گام های زمانی بزرگ تر وابستگی کمتر مدل به گام زمانی را نشان می دهد.

¹ Convergence

با جایگذاری متغیرها در معادله (۳۲) و اعمال آن در مرز سمت چپ حرکت موج ساز پیستونی شبیه سازی می شود و موج تولید می شود. در این آزمون شبیه سازی برای دو حالت بدون شیب زمانی و با شیب زمانی انجام شده است. ارتفاع موج ۰/۳۲ متر، زمان تناوب ۱/۲ ثانیه و طول موج ۱/۹۲ متر است. برای شبیه سازی شبکه منظم با اندازه ۰/۰۴ و ۰/۰۸ متر فرض شده است. در شکل (۸) نتایج با حل مرتبه دوم استوکس مقایسه شده است. برای حل استوکس مرتبه دوم، ارتفاع آب از رابطه (۳۳) به دست می آید. در شکل (۸) نتایج ارتفاع آب با نتایج تحلیلی مطابقت خوبی دارد و شیب زمانی باعث کاهش ناپایداری موج شده است.

$$\eta = \frac{H}{2} \cos(kx - \omega t) + \frac{\pi H^2}{8L} \frac{\cosh(kd)}{\sin^3 h(kd)} \cdot [\cosh(2kd) + 2] \cdot \cos(kx - \omega t) \quad (33)$$

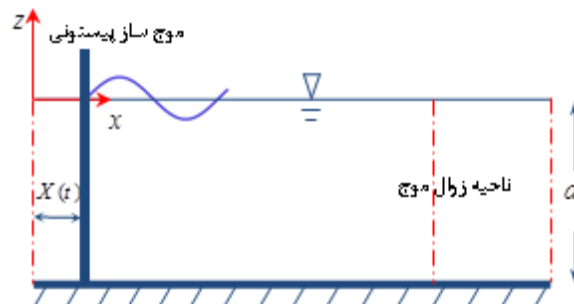
در این شکل اختلاف فاز بین نتایج تحلیلی و نتایج حل عددی بسیار ناچیز است. برای بررسی عملکرد شیب زمانی خطاهای عددی حاصل در جدول (۳) آمده است که نتایج سطح آزاد با حل تحلیلی استوکس مطابقت بیشتری دارد. در این نتایج دیده می شود که شیب زمانی دقت نتایج را بهبود بخشیده است.

۳-۴- انتشار موج تنها روی بستر افقی

در این آزمایش هدف شبیه سازی موج تنها می باشد. این موج دارای یک تاج است که بالای سطح آب تشکیل می شود و فاقد حوض است. شناخت موج تنها به عنوان یک نمونه از امواج غیرخطی، اهمیت زیادی در شناخت فرآیندهای امواج در ناحیه ساحلی دارد.

جدول (۳) مقایسه خطاهای عددی سطح آزاد برای انتشار موج منظم (با ابعاد شبکه ۰/۰۴ متر و گام زمانی ۰/۰۰۱ ثانیه).

جدول (۳) مقایسه خطاهای عددی سطح آزاد برای انتشار موج منظم (با ابعاد شبکه ۰/۰۴ متر و گام زمانی ۰/۰۰۱ ثانیه)			
$L_{CYC} / 2a$ در مدت ۱۰ ثانیه (درصد)			
مقایسه با حل تحلیلی خطی		مقایسه با حل تحلیلی استوکس	
با شیب ۷/۲	بدون شیب	با شیب ۷/۲	بدون شیب
ثانیه	زمانی	ثانیه	زمانی
۱/۸	۲/۹	۲/۸	۳/۸



شکل (۷) طرح دامنه محاسباتی برای انتشار موج منظم.

جابه جایی موج ساز S ، عمق آب d ، ارتفاع موج H و عدد موج k توسط روابط زیر به هم مرتبط می شوند:

$$\frac{H}{S} = \frac{2[\cosh(2kd) - 1]}{\sinh(2kd) + 2kd} \quad (24)$$

$$S = 2A \quad (25)$$

در آغاز شبیه سازی نیز یک شیب زمانی^۱ که توسط ژائو و همکاران برای از بین بردن ناپایداری آغازی شبیه سازی امواج غیرخطی پیشنهاد شده، در حرکت موج ساز به کار گرفته شده است. موج ساز با شیب زمانی به صورت زیر اعمال می شود [۱۵]:

$$X(t) = X(t) \cdot \xi_i, \quad i = 1, 2, 3 \quad (26)$$

$$\xi_1(t) = \begin{cases} (3\mu^2 - 8\mu^2 + 6)\mu^2, & t \leq T_r \\ 1, & t < T_r \end{cases} \quad (27)$$

$$\xi_2(t) = \begin{cases} \sin \mu, & t \leq T_r \\ 1, & t < T_r \end{cases} \quad (28)$$

$$\xi_3(t) = \begin{cases} \mu, & t \leq T_r \\ 1, & t < T_r \end{cases} \quad (29)$$

$$\mu = t / T_r \quad (30)$$

برای یک قطار موج مقادیر تحلیلی مرتبه اول سطح آزاد به صورت زیر است [۱۴].

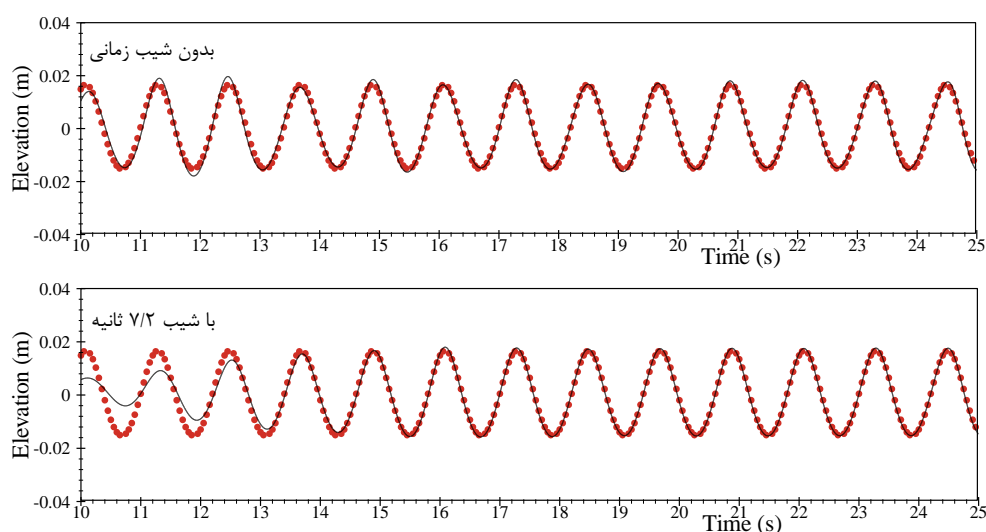
$$\eta(x, t) = a \cos(kx - \omega t) \quad (31)$$

که X مکان موج ساز، k شیب زمانی و T_r مدت شیب زمانی است؛ که در آزمایشها k_1 به علت تغییرات نرم تر استفاده شده است.

برای ایجاد موج در مدل عددی از معادله (۲۳) مشتق گرفته تا سرعت افقی در مرز ورودی به دست آید:

$$u(x=0, t) = A \omega \sin(\omega t) \quad (32)$$

¹ Time Ramp



شکل (۸) مقایسه سری زمانی ارتفاع سطح آزاد موج حاصل از شبیه‌سازی مدل حاضر (دایره توخالی) و حل تحلیلی مرتبه دوم استوکس (خط توپر) در $x=10m$ با ابعاد شبکه 0.04 متر و گام زمانی 0.001 ثانیه.

بین سلول‌های خالی و سلول‌های سطحی نقش خیلی مهمی در دقت مدل دارد که در مدل حاضر این سرعت‌ها از برون‌یابی بین سرعت‌های درون سیال به دست آمده است [۱۷]. در شکل (۱۰) مؤلفه‌های افقی و قائم سرعت با نتایج تحلیلی سورنسن (۱۹۹۷) مقایسه شده است [۱۸]. مطابقت بین نتایج عددی و حل تحلیلی نشان دهنده کارایی مدل هیدرودینامیک حاضر می‌باشد.

۴-۴- انتشار موج کوتاه غیرخطی

انتشار موج کوتاه غیرخطی برای صحت سنجی مدل حاضر شبیه‌سازی می‌شود. این آزمایش در یک فلوم به طول $35/54$ متر و عمق 40 سانتیمتر انجام شده است که از موج ساز پارویی برای ایجاد موج در این کانال موج استفاده شده است. طرح کلی دامنه محاسباتی بکار رفته برای انتشار این موج در شکل (۱۱) نمایش داده شده است. در شکل (۱۲) در پنج مکان نتایج عددی با نتایج آزمایشگاهی چاپالین و همکاران (۱۹۹۲) مقایسه شده است [۱۹]. برای این آزمایش تئوری خطی اعتبار ندارد و در این شکل مطابقت خوبی بین نتایج عددی و آزمایشگاهی دیده می‌شود. برای این آزمون شبکه‌ای یکنواخت با ابعاد 10 سانتیمتر و گام زمانی 0.005 ثانیه در نظر گرفته شده است. در این حالت برای مدت شبیه‌سازی 40 ثانیه مدت زمان اجرای کد عددی حدود 145 دقیقه می‌باشد.

این نوع موج برای شناخت تأثیر امواج سونامی در سواحل به‌طور گسترده به‌صورت تحلیلی، آزمایشگاهی و عددی مطالعه شده است. بر اساس تئوری تحلیلی، موج دامنه کوتاه تنها بر روی عمق ثابت بدون تغییر در شکل، سرعت و دامنه منتشر می‌شود [۱۶]. حل تحلیلی موج تنها از معادله بوسینسک به دست می‌آید، و به صورت معادله (۳۴) می‌باشد:

$$\eta(x,t) = a \operatorname{sech}^2 \left[\sqrt{\frac{3a}{4d^3}} (x - ct) \right] \quad (34)$$

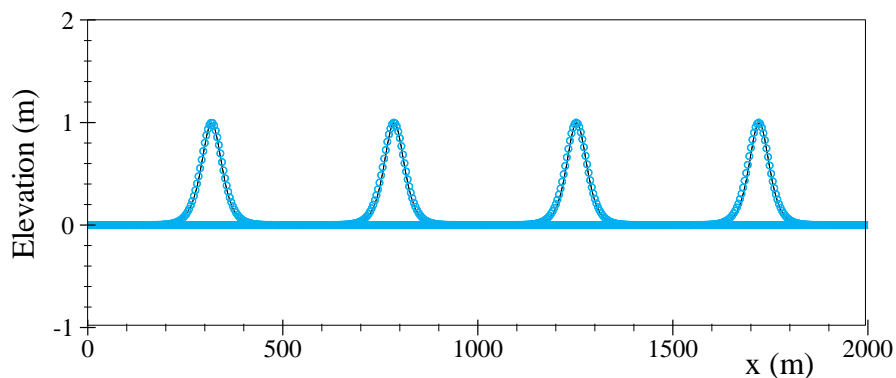
$$c = \sqrt{g(d+a)} \quad (35)$$

که در معادله‌های فوق a دامنه موج، d عمق آب، c سرعت موج تنها و t زمان است. در این آزمایش دامنه موج تنها 1 متر و عمق آب 10 متر در نظر گرفته شده است. همچنین گام زمانی 0.1 ثانیه، ابعاد شبکه 1 متر و سرعت موج $10/388$ متر بر ثانیه می‌باشد.

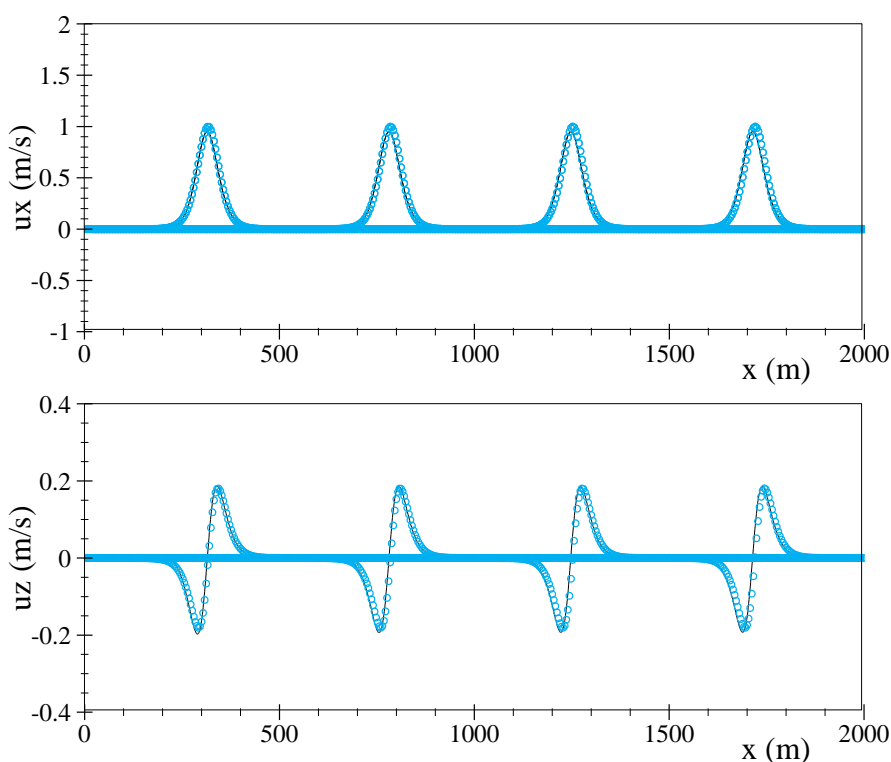
برای ایجاد موج در مدل، سری زمانی سرعت افقی را از رابطه (۳۶) به دست آورده و در مرز ورودی سمت چپ اعمال می‌کنیم:

$$u(x,t) = \sqrt{gd} \frac{a}{d} \operatorname{sech}^2 \left[\sqrt{\frac{3a}{4d^3}} (x - ct) \right] \quad (36)$$

در شکل (۹) نتایج سطح آب در زمان‌های 45 ، 90 ، 135 و 180 ثانیه مقایسه شده است که مطابقت خوبی بین نتایج تحلیلی و عددی دیده می‌شود. در مدل سرعت در وجه



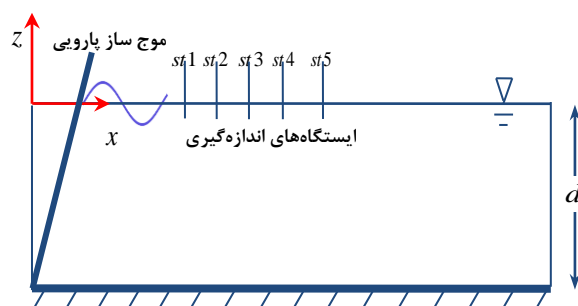
شکل (۹) مقایسه‌ی ارتفاع سطح آزاد موج تنها حاصل از شبیه‌سازی مدل حاضر (خط توپر) و حل تحلیلی (دایره‌ی توخالی) در زمان‌های ۴۵، ۹۰، ۱۳۵ و ۱۸۰ ثانیه.



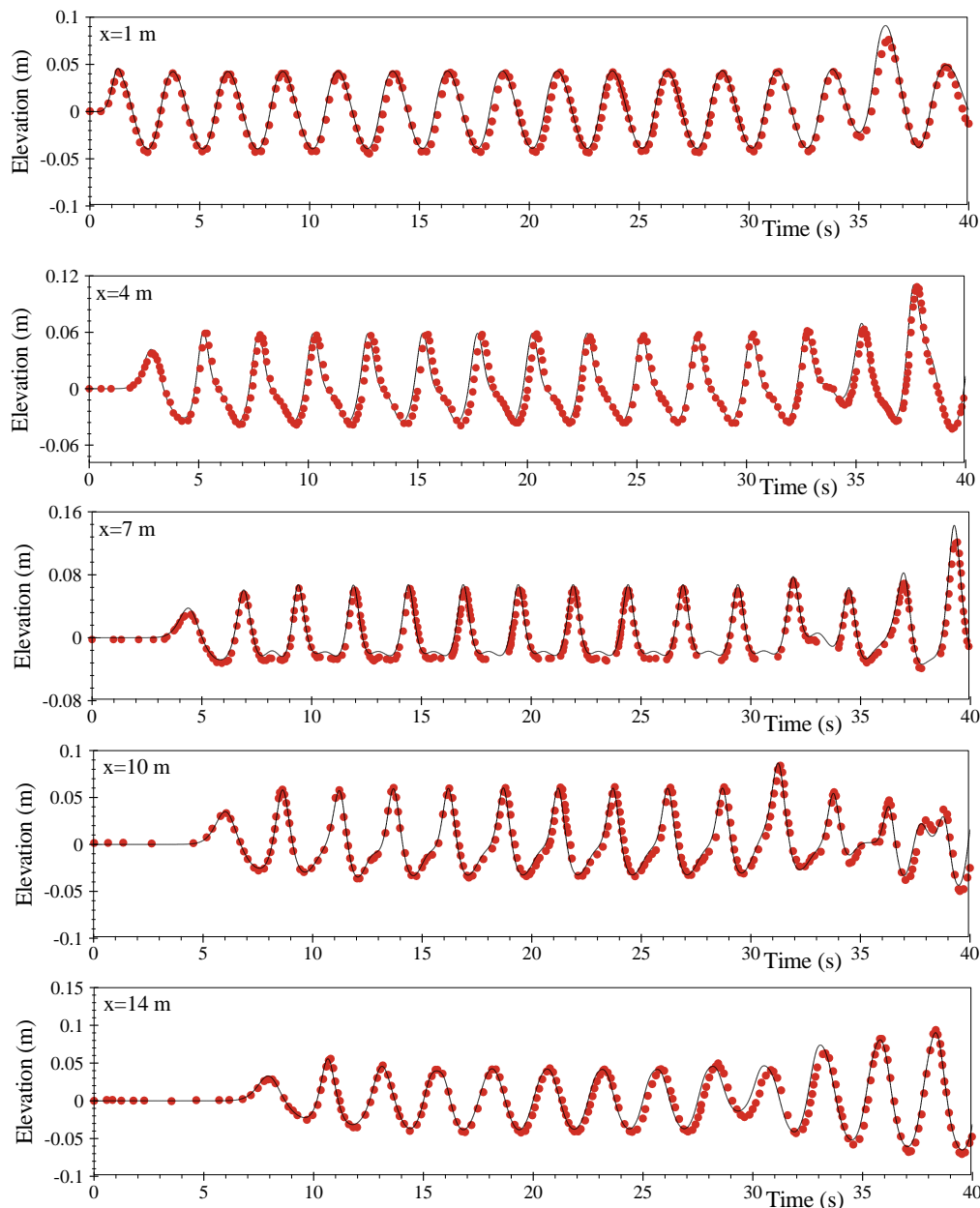
شکل (۱۰) مقایسه‌ی مؤلفه‌های سرعت افقی (شکل بالا) و سرعت قائم (شکل پایین) موج تنه‌ای حاصل از شبیه‌سازی مدل حاضر (خط توپر) با حل تحلیلی (دایره‌ی توخالی) در زمان‌های ۴۵، ۹۰، ۱۳۵ و ۱۸۰ ثانیه.

۵- نتیجه‌گیری

در مقاله حاضر جزئیات توسعه مدل دوبعدی در قائم غیر هیدرواستاتیک برای شبیه‌سازی جریان‌های با سطح آزاد آورده شده است. برای ضبط سطح آزاد از روش محبوب، کاربردی و بقایی حجم سیال استفاده شده است. در این مدل معادلات حاکم، معادلات نویر-استوکس میانگین‌گیری شده رینولدزی است که با روش پروجکشن در دو گام اصلی حل می‌شوند.



شکل (۱۱) طرح دامنه محاسباتی برای انتشار موج کوتاه غیرخطی در کانال.



شکل (۱۲) مقایسه‌ی سری زمانی تراز سطح آب موج کوتاه غیرخطی حاصل از شبیه‌سازی مدل حاضر (خط توپر) با نتایج آزمایشگاهی (دایره‌ی توپر) در مکان‌های ۱، ۴، ۷، ۱۰ و ۱۴ متر.

استوکس نتایج عددی دارای دقت قابل ملاحظه است و شیب زمانی به کار گرفته شده برای ایجاد موج باعث بهبود نتایج انتشار موج شده است. شبیه‌سازی عددی موج تنها روی بستر ثابت نیز امتحان شده است. در این آزمون نتایج سطح آب و مؤلفه‌های سرعت با نتایج تحلیلی تطابق خیلی خوبی دارد. در نهایت مطابقت خوب بین نتایج عددی انتشار موج کوتاه غیرخطی و نتایج آزمایشگاهی

یکی از محاسن این مدل دقت آن در شبیه‌سازی سطح آزاد امواج است که از روش یانگز برای بازسازی سطح استفاده می‌کند. برای بررسی کارایی مدل آزمون‌های با سطح آزاد دارای شتاب قائم قابل ملاحظه شبیه‌سازی شده است. ابتدا برای صحت سنجی مدل آزمون موج ایستای دامنه کوتاه در مخزن محدود شبیه‌سازی می‌شود که مدل نتایج بسیار دقیقی دارد. در شبیه‌سازی انتشار موج

- Breakwater on Slope”, *Acta Oceanologica Sinica*, Vol.29, No. 1, pp.88-99, 2010.
- [9] Hejazi, K., Soltanpour, M., and Sami, S., “Numerical Modeling of Wave-Mud Interaction using Projection Method”, *Ocean Dynamics*, Vol.63, No.9, pp. 1093-1111, 2013.
- [10] Hirsch, C., “Numerical Computation of Internal and External Flows: The Fundamentals of Computational Fluid Dynamics”, *The Fundamentals of Computational Fluid Dynamics*. Butterworth-Heinemann, 2007.
- [11] Hirt, C. W. and Billy D. N., “Volume of Fluid (VOF) Method for the Dynamics of Free Boundaries”, *Journal of Computational Physics*, Vol.39, No.1, pp.201-225, 1981.
- [12] Rudman, Murray, “Volume-Tracking Methods for Interfacial Flow Calculations”, *International journal for Numerical Methods in Fluids*, Vol.24, No.7, pp.671-691, 1997.
- [13] Gopala, Vinay R., and Berend GM van Wachem, “Volume of Fluid Methods for Immiscible-Fluid and Free- Surface Flows.” *Chemical Engineering Journal*, Vol.41, No.1, pp. 204-221, 2008.
- [14] Dean, R. G., and Dalrymple R. A., “Water Wave Mechanics for Engineers and Scientists”, *Advanced Series on Ocean Engineering*, 1991.
- [15] Zhao, X. Z., Hu, C. H. Sun Z. C., and Liang S. X., “Validation of the Initialization of a Numerical Wave Flume using a Time Ramp”, *Fluid Dynamics Research*, Vol.42, No. 4, 2010.
- [16] Chiang, M. C., “The Applied Dynamics of Ocean Surface Waves, Vol.1, World Scientific, 1989.
- [17] Kleefsman, K. M. T., Fekken, G., Veldman, A. E. P., Iwanowski, B., and Buchner, B., “A Volume-of-Fluid Based Simulation Method for Wave Impact Problems”, *Journal of Computational Physics*, Vol.206, No.1, pp.363-393, 2005.
- [18] Sorensen, R. M., *Basic Coastal Engineering*. Vol.10. Springer Science & Business Media, 2005.
- [19] Chapalain, G., Cointe R., and Temperville A. “Observed and Modeled Resonantly Interacting Progressive Water-Waves”, *Coastal Engineering*, Vol.16, No. 3, pp.267-300, 1992.
- نشان دهنده توانایی مدل برای شبیه‌سازی عددی امواج کوتاه غیرخطی با شتاب قائم قابل توجه است. با توجه به دقت مناسب شبیه‌سازی سطح آزاد توسط الگوی استفاده شده برای ضبط سطح، می‌توان از آن برای شبیه‌سازی سطح مشترک جریان‌های دوفازی استفاده کرد. در ادامه این تحقیق مدل تهیه شده برای شبیه‌سازی جریان‌های لایه‌بندی شده و امواج غیرخطی داخلی در حال توسعه است.

۶- مراجع

- [1] Yuan, H., and Chin H. Wu., “A Two-Dimensional Vertical Non-Hydrostatic σ Model with an Implicit Method for Free-Surface Flows, *International Journal for Numerical Methods in Fluids*, Vol.44, No.8, pp.811-835, 2004.
- [2] Chorin, A. J., “Numerical Solution of the Navier-Stokes Equations”, *Mathematics of computation*, Vol.22, No.104, pp.745-762, 1968.
- [3] *Advances in Numerical Simulation of Nonlinear Water Waves*, Singapore: World Scientific, 2010.
- [4] Kothe, D. B., and Mjolsness, R. C., “RIPPLE-A New Model for Incompressible Flows with Free Surfaces”, *AIAA journal*, Vol.30, No.11, pp.2694-2700, 1992.
- [5] Koichiro, I., , Kawasaki, K., and Kim, D. S., “Breaking Limit, Breaking and Post-Breaking Wave Deformation Due to Submerged Structures, “*Coastal Engineering Proceedings*, Vol1, No.25, 1996.
- [6] Pengzhi, L., and Liu, P. L. F., “A Numerical Study of Breaking Waves in the Surf zone”, *Journal of Fluid Mechanics*, Vol.359, pp.239-264, 1998.
- [7] Wenrui, H., , and Xiao H., “Numerical Modeling of Dynamic Wave Force Acting on Escambia bay Bridge Deck During Hurricane Ivan”, *Journal of Waterway, port, Coastal, and Ocean Engineering*, Vol.135, No.4, pp.164-175, 2009.
- [8] Jie C., , Jiang C., Hu S., and H.Wenwei, “Numerical Study on the Characteristics of Flow Field and Wave Propagation Near Submerged