شبیه‌سازی عددی یک حباب معلق شناور در جریان ترکیبی کوئت و پواسل صفحه‌ای: بررسی اثر جاذبه

امیره نوربخش[۱] ، مهرداد زکی‌زاده[۲]

nourbakhsh@basu.ac.ir

۱- استادیار دانشکده مهندسی، دانشگاه بوعلی سینا همدان
۲- دانشجوی کارشناسی ارشد دانشگاه بوعلی سینا همدان

چکیده

موقعیت تعادلی یک حباب دگردیس‌پذیر سه‌بعدی در جریان ترکیبی کوئت و پواسل بصورت عددی توسط حل کامل معادلات ناویر-استوکس مورد بررسی قرار گرفته است. میدان جریان روی یک شبکهٔ ثابت توسط یک تقریب اختلاف محدود بقائی گسسته شده است، و فصل مشترک بطور صریح توسط یک شبکهٔ نامنظم جداگانه‌ای که از طریق شبکهٔ ثابت حرکت می‌کند، بیان شده است. از آنجایی که فصل مشترک بطور پیوسته دچار تغییر شکل می‌شود، بازسازی جبهه در هر گام انتگرال‌گیری زمانی ضروری است. هدف از این پژوهش مطالعهٔ حرکت یک حباب شناور در جریان ترکیبی کوئت و پواسل با نسبت‌های چگالی و چسبندگی مخالف واحد در یک عدد رینولدز محدود می‌باشد. نتایج نشان می‌دهد که حباب صرفنظر از موقعیت اولیهٔ آن، در یک وضعیت تعادلی میان دیوارهٔ کانال و خط مرکزی قرار خواهد گرفت که به اثر سگر سیبربرگ مشهور است. نتایج در دو مجموعه ارائه شده است، در مجموعه اول شتاب جاذبه در نظر گرفته نشده است. در این حالت دیده می‌شود که تغییر شکل حباب بشدت وابسته به عدد کاپیلاری است. همچنین نتایج نشان می‌دهد که تنش برشی بر روی دیواره‌ها در حضور حباب دارای تغییراتی وابسته به موقعیت اولیهٔ حباب می‌باشد. در دومین مجموعه شتاب جاذبه به معادلات اضافه شده است، در این مورد دیده خواهد شد که تغییر شکل حباب بشدت وابسته به عدد اتوش می‌باشد. جهت اعتبار سنجی محاسبات، کار حاضر با برخی از نمونه نتایج داده‌های عددی در دسترس مقایسه شده‌اند.

واژگان کلیدی : حباب ، تنش برشی ، عدد کاپیلاری، عدد اتوش.

تاریخ دریافت مقاله :	۹۵/۰۸/۱۹
تاریخ پذیرش مقاله :	۹۶/۰۳/۲۱

۱ – مقدمه

سوسپانسیون جریان ذرات معلق، نظیر قطره، حباب و ذرهٔ صلب از میان کانال‌ها و لوله‌ها موضوع بسیاری از تحقیقات تئوری، عددی و آزمایشگاهی بوده است. از کاربردهای صنعتی حباب می‌توان به واحدهای تولید انرژی، بعنوان مثال خطوط انتقال نفت، مولدهای بخار و سیستم‌های خنک کننده اشاره نمود. ایده استفاده از سیال گازی جهت روانسازی حرکت اجسام شناور به سال‌های ۱۸۸۰ باز می‌گردد، اما اولین مطالعه کاربردی ثبت شده در این زمینه در سال ۱۹۷۳ توسط مک‌کرمیک و بتاچاریا[1] [۱] انجام پذیرفت. آنها در این مطالعه تجربی، آب را الکترولیز کردند که به دنبال آن حباب‌های هیدروژن در اطراف هیدروفویل شناور در آب آزاد گردید. نتایج نشان دادند که با افزایش شدت جریان و در نتیجه افزایش میزان هیدروژن‌های آزاد شده، سرعت مدل نسبت به حالت عادی افزایش یافته است. دلیل این اتفاق تغییر در ویسکوزیته مایع نزدیک دیوار و درهم ریخته شدن زیر لایهٔ ویسکوز توسط حباب‌ها عنوان شد. در ادامهٔ این کاربرد به عنوان مثال یکی از موارد مهم در صنایع زیر آبی، کاهش تنش‌های سطحی و بدنبال آن سرعت بالاتر و صرف نیرو و انرژی کمتر می‌باشد. یکی از راه‌های پیشنهادی، استفاده از فاز دوم می‌باشد. بدین صورت که سازه زیرآبی موردنظر که می‌تواند زیردریایی و یا اژدر باشد، بوسیلهٔ ایجاد حباب در لایهٔ مرزی بر روی بالشتکی از هوا به حرکت درآید که بوسیلهٔ راهکارهای مختلف، می‌توان این فاز دوم را ایجاد نمود. فاز دوم می‌تواند بخار آب، گازهای مختلف و یا سیالی متفاوت با سیال اول باشد. حباب‌ها از طریق گازهای محلول در آب، در اثر فعل و انفعالات شیمیایی و دمایی و یا در نتیجهٔ کاویتاسیون در جریان‌های شدید و قوی بوجود می‌آیند. همچنین از دیگر کاربردهای حباب در مهندسی شیمی می‌توان به رآکتورهای ستون گاز-مایع و رآکتورهای گاز-مایع-جامد اشاره کرد که بطور گسترده‌ای در عملیات صنعتی مورد استفاده قرار می‌گیرند [۲].

مهاجرت سوسپانسیون رقیقی از ذرات صلب شناور آزاد در جریان لوله تحت اعداد رینولدز محدود برای اولین بار توسط سگر و سیبربرگ[2] [۳،۴] مشاهده شد. مطالعات آزمایشگاهی آنها نشان داد که ذرات به دور از هر دو دیواره و خط مرکزی مهاجرت می‌کنند و موقعیت تعادلی آنها در حدود ۰/۶ شعاع لوله از محور لوله می‌باشد.

موقعیت تعادل یک نتیجه از رقابت میان نیروی دافعهٔ ناشی از دیوار و نیروی ناشی از انحناء پروفیل سرعت می‌باشد. این اثر قابل توجه سگر و سیبربرگ توسط بسیاری از کارهای تجربی تائید شده است. برای مثال گلدسمیت و ماسون[3] [۵] مشاهده کردند که یک ذرهٔ صلب در اعداد رینولدز خیلی کوچک در موقعیت شعاعی اولیه باقی می‌مانند، ولی در اعداد رینولدز محدود به یک موقعیت میانی مهاجرت می‌کنند. کارنیس و همکارانش[4] [۶] گزارش کردند که ذرات شناور آزاد در میان مسیر بین خط مرکزی و دیواره ثابت می‌شوند، همچنین موقعیت تعادل برای ذرات بزرگتر به مرکز نزدیکتر می‌شود. ژو و پوزریکیدیس[5] [۷] جریان پریودیک سوسپانسیون دوبعدی از قطرات ویسکوز را در یک کانالی که بوسیلهٔ دو صفحهٔ موازی محدود شدن است را مطالعه کردند. انها دریافتند که یک عدد کاپیلاری بحرانی وجود دارد که کمتر از آن سوسپانسیون یک حرکت تناوبی پایداری خواهد داشت ولی بالاتر از آن قطرات کشیده می‌شوند و تمایل به یکی شده دارند.

فنگ و همکارانش[6] [۷،۸] شبیه‌سازی المان محدود دوبعدی حرکت یک ذرهٔ صلب در جریان کوئت و پواسل را در اعداد رینولدز محدود مطالعه کردند. آنها مشاهده کردند که ذرات شناور آزاد اثر سگر سیبربرگ را نشان می‌دهند. همچنین نشان دادند که یک ذرهٔ شناور آزاد در جریان کوئت به سمت خط مرکزی مهاجرت خواهد کرد. کریستینی و همکارانش[7] [۹] یک الگوریتم سه بعدی برای شبیه‌سازی فرآیند شکسته شدن[8] قطره در یک جریان لزج را ارائه کردند. آنها از الگوریتم خود برای مطالعه شکستن قطره در جریان برشی استفاده کردند و با پیش‌بینی‌های آزمایشگاهی مقایسه کردند. آنها نشان دادند که شکستن هنگامی رخ می‌دهد که در جریان برشی Ca=O(1) باشد، ولی در حالت جریان عامل حرکت-شناوری، قطره جدا شده کروی باقی می‌ماند. آنوردی و تریگواسون[9] [۱۰] شبیه‌سازی دو و سه‌بعدی حباب‌های

---

[1] McCormick amd Bhattacharyya
[2] Seger and Silberberg
[3] Goldsmith and Mason
[4] Kanis and et al.
[5] Zhou and Pozrikidis
[6] Feng and et al.
[7] Cristini and et al.
[8] Breakup
[9] Unverdi and Tryggvason

شناور را در یک کانال عمودی انجام دادند. آنها در اعداد مورتون بالا (اعداد رینولدز کوچک) تقریباً یک جریان استوکس در اطراف حباب مشاهده کردند و بنابراین هیچ دنباله‌ای[1] در پشت حباب وجود نخواهد داشت و همچنین دیدند که داخل حباب از یک جفت گردابه[2] تشکیل شده است. آنها نشان دادند که در اعداد اتوش کوچک حباب‌ها تقریباً دایروی باقی می‌مانند، اما در اعداد اتوش خیلی بزرگتر حباب‌های در یک طرف تقریباً دایروی با یک پشت تقریباً صافی را نتیجه می‌دهد.

مرتضوی و تریگواسون[3] [۱۱] از روش اختلاف محدود/ردیابی جبهه برای شبیه‌سازی حرکت دو و سه‌بعدی سوسپانسیون قطرات شناور آزاد در جریان کانال با محرک فشار و در اعداد رینولدز محدود استفاده کردند. آنها توضیح دادند که در محدودهٔ اعداد رینولدز کوچک حرکت یک قطره شدیداً به نسبت چسبندگی وابسته است. دودی و باغچی[4] [۱۲] نشان دادند که با افزایش عدد کاپیلاری تغییر شکل کپسول افزایش می‌یابد، و همترازی بیشتر با محور کانال دلالت می‌کند که مهاجرت جانبی ذاتاً ناشی از انحراف از شکل کروی اولیه است.

لیو و همکارانش[5] [۱۳] اثر تعدادی حباب نسبتاً بزرگ را بر روی پسای دیواره در یک کانال بطور عددی مورد بررسی قرار دادند. نتایج آنها نشان داد که حباب‌های دگردیس‌پذیر می‌توانند بطور قابل توجهی پسا بر روی دیواره را کاهش دهند. همچنین آنها نتیجه گرفتند که افزایش عدد وبر (کاهش کشش سطحی و افزایش تغییر شکل) منجر به کاهش پسا بر روی دیواره خواهد شد. ابرویی و مرتضوی[6] [۱۴] جریان قطرات دو بعدی روی سطح شیب دار را در رینولدز محدود مورد مطالعه قرار دادند و اثر نسبت ویسکوزیته را روی رفتار جریان دوفازی بررسی نمودند. نتایج آنها نشان داد که با افزایش نسبت ویسکوزیته، موقعیت تعادل قطره به سمت دور از کف کانال حرکت می کند. پن و همکارانش[7] [۱۵] مهاجرت قطره در جریان پواسل را بصورت عددی شبیه سازی کردند و نشان دادند که عدد کاپیلاری بزرگ، قطره را به ناحیه نزدیک مرکز کانال هدایت می کند. بیاره و مرتضوی[8] [۱۶]، موقعیت تعادلی یک قطره دگردیس‌پذیر را در جریان صرفاً کوئت و یا صرفاً پواسل بصورت عددی توسط حل کامل معادلات ناویر استوکس، با استفاده از روش اختلاف محدود/ردیابی جبهه مورد بررسی قرار دادند. هدف از کار آنها مطالعهٔ حرکت یک قطرهٔ شناور غیر آزاد تحت جریان‌های مذکور بوده است. جریان قطرات معلق روی سطح شیب دار توسط مرتضوی و تفرشی[9] [۱۷] مطالعه شد. آنها اثرات عدد رینولدز، عدد کاپیلاری و نسبت چگالی را روی توزیع قطرات و انرژی نوسانی بررسی کردند و به این نتیجه رسیدند که قطرات با تغییر شکل پذیری کمتر، به سمت دور از کف کانال مهاجرت می کنند. شبیه سازی عددی رسوب گذاری قطرات تغییر شکل پذیر در یک کانال عمودی توسط امیری و مرتضوی[10] [۱۸] انجام شد. آنها نشان دادند که دافعه دیواره مکانیزم اصلی مهاجرت جانبی قطره است و قطرات به سمت مرکز کانال مهاجرت می کنند. همچنین با افزایش عدد باند، نوسانات قطره اطراف مرکز کانال قویتر می شود.

از آنجایی که کارهای قبلی نظیر آزمایشات تجربی، تحلیل-های نظری و شبیه‌سازی‌های عددی انجام شده صرفاً روی حرکت قطره در جریان کوئت و یا جریان پواسل می‌باشد، و کمتر بر روی حباب صورت پذیرفته، لذا هدف از انجام این پژوهش بررسی تاثیر همزمان هر دو جریان مذکور بر روی مهاجرت جانبی برای یک حباب تغییر شکل‌پذیر سه‌بعدی است.

۲- معادلات حاکم و معرفی اعداد بدون بعد

معادلهٔ ناویر-استوکس چندفازی، امتزاج‌ناپذیر، لزج، تراکم‌ناپذیر و غیر دائم برای هر دو سیال (الگو تک سیالی[11]) بصورت زیر می‌باشد [۱۰،۱۹]:

$$\frac{\partial \rho \mathbf{u}}{\partial t} + \nabla \cdot \rho \mathbf{u}\mathbf{u} = -\nabla p + \nabla \cdot \mu(\nabla \mathbf{u} + \nabla \mathbf{u}^{T}) + \sigma \int k_f \mathbf{n}_f \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}_f) dA_f \qquad (۱)$$

در اینجا $\mathbf{u}$ میدان سرعت، p فشار، و ρ ، μ به ترتیب میدان‌های چگالی و چسبندگی هستند. δ یک تابع دلتای سه‌بعدی، k انحناء و $\mathbf{n}_f$ بردار یکهٔ عمود بر جبهه می‌باشد. $\mathbf{x}$ موقعیت بر روی شبکهٔ اویلری و $\mathbf{x}_f$ موقعیت بر روی شبکهٔ

1 Wake
2 Vortex
3 Mortazavi and Tryggvason
4 Doddi and Bagchi
5 Lu and et al.
6 Aberuee and Mortazavi.
7 Pan and et al.
8 Bayareh and Mortazavi
9 Mortazavi and Tafreshi
10 Amiri and Mortazavi
11 Single-fluid model

لاگرانژی یا جبهه را نشان می‌دهد. نیروی کشش سطحی توسط یک تابع دلتا به معادلات ممنتوم اضافه شده است که تنها روی سطح حباب ($\mathbf{x} = \mathbf{x}_f$) غیر صفر است.
با انتگرال‌گیری مولفه‌های قائم معادلهٔ (۱) روی یک حجم کوچکی از فصل مشترک، اغلب جملات صفر می‌شوند و حد حجم بینهایت کوچک آن عبارت است از [۱۹]:

$$[-p\mathrm{I} + \mu(\nabla\mathbf{u} + \nabla\mathbf{u}^{T})] \cdot \mathbf{n} = \sigma k \mathbf{n} \qquad (۲)$$

که در اینجا براکت، پرش در عبور از فصل مشترک را مشخص می‌کند. این عبارت نشان می‌دهد که تنش‌های قائم توسط کشش سطحی موازنه شده‌اند.

این معادلات با شرط تراکم‌ناپذیری تکمیل می‌شوند:

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = 0 \qquad (۳)$$

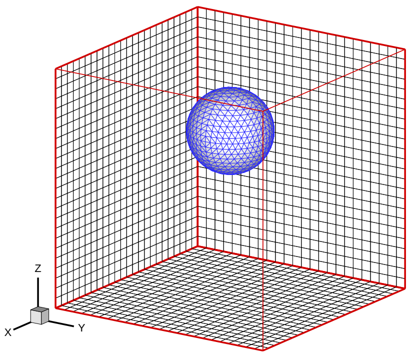
در اینجا میدان‌های چگالی و چسبندگی یک ذرهٔ مادی ثابت باقی می‌مانند، بنابراین خواهیم داشت:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla\rho = 0 \qquad (۴)$$

$$\frac{\partial \mu}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla\mu = 0 \qquad (۵)$$

این معادلهٔ نشان می‌دهد که ρ و μ در داخل هر سیال ثابت باقی می‌ماند. اعداد بدون بعد حاکم بر جریان توسط بی‌بعد سازی معادلهٔ ناویر–استوکس بدست می‌آید. این اعداد عبارت اند از : عدد رینولدز Re، عدد کاپیلاری $Ca = U_c\mu_o/\sigma$، عدد وبر $We = \rho_o U_c^2 d/\sigma$، نسبت چسبندگی سیال حباب به سیال محیط اطراف $\lambda = \mu_i/\mu_o$، نسبت چگالی سیال حباب به سیال محیط اطراف $\alpha = \rho_i/\rho_o$، نسبت هندسی $\xi = a/H$، که نسبت شعاع ذره به ارتفاع کانال می‌باشد. عدد رینولدز را به طرق مختلفی می‌توان تعریف کرد: عدد رینولدز بالک $Re_b = \rho_o U_c H/\mu_o$، عدد رینولدز بر مبنای سرعت ماکزیمم در کانال و قطر حباب $Re_d = \rho_o U_c d/\mu_o$. عدد فرود در حضور جاذبه وارد محاسبات خواهد شد و بصورت $Fr = gH/U_c^2$ تعریف می‌شود. در اینجا U_c سرعت ماکزیمم در کانال، و a شعاع اولیهٔ حباب می‌باشد. هندسهٔ جریان و شبکه‌بندی در شکل (۱) نشان داده شده است. a شعاع اولیهٔ حباب و H ارتفاع کانال می‌باشد. کانال بوسیلهٔ دو دیواره در جهت z محدود شده است. دیوارهٔ پایین ساکن و دیوارهٔ بالایی متحرک با سرعت U می‌باشد. دامنهٔ محاسباتی در جهات x و y پریودیک هستند.
جریان بوسیلهٔ یک گرادیان فشاری که از دو قسمت تشکیل شده از طریق کانال رانده می‌شود [۱۱]:

$$\nabla p = \nabla p_0 + \nabla p' \qquad (۶)$$

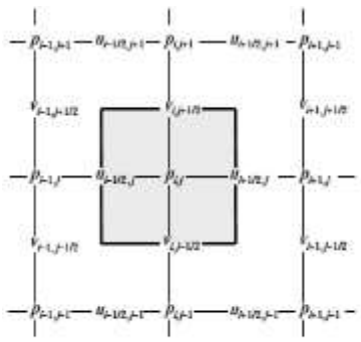


شکل (۱) شبکه‌بندی و هندسهٔ جریان برای شبیه‌سازی حرکت یک حباب در یک کانال با شرط مرزی پریودیک.

که در رابطهٔ (۶) ∇p_0 گرادیان فشار ثابت تعیین شدهٔ خارجی در نبود حباب، و $\nabla p'$ گرادیان فشار اختلالی در حضور حباب می‌باشد. سرعت در ابتدا معادل با پروفیل سرعت جریان ترکیبی کوئت و پواسل متناظر با گرادیان فشار ثابت تحمیل شده اگر هیچ حبابی داخل کانال نباشد، فرض می‌گردد.

۳- روش عددی

معادلات ناویر–استوکس بطور عددی توسط روش تصویرسازی اختلاف محدود استاندارد روی یک شبکهٔ کارتزینی جابجا شده حل شده است (شکل(۲) را ببینید). متغیرهای اسکالر نظیر فشار در مراکز سلول‌های حجم معیار ذخیره می‌شوند در حالیکه متغیرهای سرعت یا ممنتوم در وجوه سلول قرار گرفته‌اند. استفاده از یک شبکهٔ جابجا شده از ایجاد یک میدان فشار شکسته جلوگیری می‌کند.
همهٔ مشتقات مکانی توسط اختلاف مرکزی مرتبهٔ دوم ارزیابی شده‌اند و انتگرال‌گیری توسط یک روش پیش‌بینی تصحیح مرتبهٔ دوم انجام شده است. معادلهٔ فشار از آنجایی که چگالی یکسان نیست، غیر قابل تفکیک می‌باشد، و توسط روش تکراری بالا تخفیف (SOR) حل شده است. برخی از جزئیات گسسته‌سازی به شرح زیر است.



شکل (۲) شبکه‌بندی جابجا شدهٔ مورد استفاده.

روش تصویرسازی یک روش صریح است که معمولاً برای مسائل جریان سیال تراکم‌ناپذیر استفاده می‌شود. شکل اصلی آن مرتبهٔ اول در زمان می‌باشد که می‌توان به مراتب بالاتر تبدیل کرد (مثلاً روش روش پیش‌بینی اصلاح کنندهٔ مورد استفاده در کار حاضر). معادلهٔ ناویر-استوکس را می‌توان به صورت زیر بازنویسی کرد:

$$\frac{\partial(\rho\mathbf{u})}{\partial t} = -\nabla p + E(\mathbf{u}) \quad (۷)$$

که در معادلهٔ فوق $E(u)$ عبارت است از:

$$E(\mathbf{u}) = -\nabla\cdot\rho\mathbf{u}\mathbf{u} + \nabla\cdot\mu(\nabla\mathbf{u} + \nabla\mathbf{u}^T) + \sigma\int k_f\mathbf{n}_f\delta(\mathbf{x}-\mathbf{x}_f)dA_f \quad (۸)$$

حال اگر معادلهٔ (۷) نسبت به زمان گسسته شود:

$$\frac{\rho^{n+1}\mathbf{u}^{n+1} - \rho^n\mathbf{u}^n}{\Delta t} = -\nabla_h p + E(\mathbf{u}) \quad (۹)$$

در معادلهٔ فوق h بیانگر یک تقریب عددی از گرادیان می‌باشد. در روش تصویرسازی مورد استفاده، معادلهٔ (۷) به دو معادلهٔ زیر تقسیم می‌شود:

$$\frac{\rho^{n+1}\mathbf{u}^* - \rho^n\mathbf{u}^n}{\Delta t} = E(\mathbf{u}) \quad (۱۰)$$

$$\frac{\rho^{n+1}\mathbf{u}^{n+1} - \rho^{n+1}\mathbf{u}^*}{\Delta t} = -\nabla_h p \quad (۱۱)$$

که در رابطهٔ فوق $\mathbf{u}^*$ سرعت موقت نامیده می‌شود. شرایط تراکم‌ناپذیری را نیز می‌توان به صورت زیر نوشت:

$$\nabla\cdot\mathbf{u}^{n+1} = 0 \quad (۱۲)$$

با تقسیم طرفین معادلهٔ (۸) بر ρ^{n+1} و گرفتن دیورژانس از آن به یک معادلهٔ پواسون برای فشار خواهیم رسید:

$$\frac{\nabla\cdot\mathbf{u}^{n+1} - \nabla\cdot\mathbf{u}^*}{\Delta t} = -\nabla\cdot\left(\frac{1}{\rho^{n+1}}\nabla_h p\right) \quad (۱۳)$$

اولین جمله در صورت معادلهٔ (۱۳) از شرط تراکم‌ناپذیری صفر است، در نتیجه معادلهٔ (۱۳) را به صورت زیر می‌توان بازنویسی کرد:

$$\nabla\cdot\left(\frac{1}{\rho^{n+1}}\nabla_h p\right) = \frac{1}{\Delta t}\nabla\cdot\mathbf{u}^* \quad (۱۴)$$

که معادلهٔ پواسون برای فشار بدست می‌آید. بنابراین در روش تصویرسازی با فرض اینکه ρ^{n+1} قبلاً با استفاده از روش ردیابی جبهه بدست آمده است، ابتدا $\mathbf{u}^*$ بکمک معادلهٔ (۹) یافته می‌شود. سپس بکمک معادلهٔ (۱۲) فشار بدست می‌آید. درنهایت می‌توان $\mathbf{u}^{n+1}$ را با استفاده از معادلهٔ زیر یافت:

$$\mathbf{u}^{n+1} = \mathbf{u}^* - \Delta t\frac{\nabla_h p}{\rho^{n+1}} \quad (۱۵)$$

انتگرال‌گیری زمانی مرتبهٔ دوم با استفاده از الگوریتم پیش-بینی-اصلاح ساخته می‌شود. اگر متغیرهای مکانی جبهه و میدانی جریان سیال، یعنی $\mathbf{x}_f$ و $\rho\mathbf{u}$ را با نماد Ψ نشان دهیم، آنگاه معادلات را می‌توان بر حسب $\partial\Psi/\partial t = F$ نوشت که در آن F سمت راست معادلات این متغیرها را نشان می‌دهد. این معادلات می‌توانند در گام پیش‌بینی بصورت $\Psi_p^{n+1} - \Psi^n/\Delta t = F^n$ گسسته شده باشند. در نتیجه یک انتگرال‌گیری ساده نتیجه می‌دهد:

$$\Psi_p^{n+1} = \Psi^n + \Delta t F^n \quad (۱۶)$$

سپس گام اصلاح شونده انجام می‌شود:

$$\Psi_c^{n+1} = \Psi^n + \frac{\Delta t}{2}\left(F^n + F_p^{n+1}\right) \quad (۱۷)$$

در برنامه‌نویسی، مقدار Ψ^n در هر گام زمانی ذخیره شده، سپس دو گام زمانی مرتبهٔ اول گرفته می‌شود:

$$\Psi_p^{n+2} = \Psi_p^{n+1} + \Delta t F_p^{n+1} \quad (۱۸)$$

آنگاه از نتایج قدیم و جدید میانگین گرفته می‌شود:

$$\Psi_c^{n+1} = \frac{1}{2}\left(\Psi^n + \Psi_p^{n+2}\right) \quad (۱۹)$$

این روش باعث می‌شود که گسترش کد مرتبهٔ اول به مرتبهٔ دوم ساده باشد.

۳-۱- طرح ردیابی جبهه

برای جابجایی میدان‌های ناپیوستهٔ چگالی و چسبندگی، و همچنین برای محاسبهٔ نیروهای کشش سطحی، سطح حباب توسط المان‌های محاسباتی جداگانه‌ای (شکل (۱) را ببینید) نشان داده می‌شود که در پژوهش حاضر به عنوان جبهه[1] یا فصل مشترک[2] نام برده شده است. شبکهٔ جبهه یک بعد کمتر از شبکهٔ ساکن سیال است و توسط سرعت‌هایی که از شبکهٔ سیال درون‌یابی شده است، جابجا می‌شود.

برای تزریق نیروهای کشش سطحی از روشی که معمولاً بنام روش مرز غوطه‌ور[3] خوانده می‌شود، استفاده شده است که توسط پسکین[4] [۲۰] معرفی شده است. در این روش مرز بینهایت نازک میان دو سیال، توسط یک تابع توزیع هموارکننده تقریب زده شده که برای توزیع نیروهای کشش سطحی بر روی نقاط شبکهٔ نزدیک به جبهه بگونه‌ای استفاده شده است که کل نیروها ثابت باقی بمانند. بنابراین جبهه یک ضخامتی در حدود سه تا چهار فاصلهٔ اندازه شبکه را خواهد

[1] Front
[2] Interface
[3] Immersed Boundary Method
[4] Peskin

داشت. از آنجایی که این ضخامت در طول زمان ثابت باقی می‌ماند، هیچ گونه انتشار خطای عددی وجود نخواهد داشت. برای ساختن میدان‌های چگالی و چسبندگی از جبهه، از یک روشی که توسط آنوردی و تریگواسون [۱۰] ارائه شده است، استفاده می‌شود، که بر اساس توزیع پرش این کمیت‌ها بر روی شبکهٔ ثابت بر مبنای روش پسکین می‌باشد. در روش ردیابی جبهه یک تابع نشانگر[1] $I(x)$ استفاده شده است که برای سیال بیرونی صفر و برای سیال درون حباب مقدار یک را دارا می‌باشد و با استفاده از موقعیت نقاط روی سطح حباب ساخته شده است.

عناصر اصلی این روش به شرح زیر است:

۱- پرش انجام شده در تابع نشانگر توسط وجه مشترک، به نزدیکترین نقاط شبکه منتشر شده است. این توزیع یک میدان گرادیانی تولید می‌کند که در همه جا به جز نزدیکی وجه مشترک صفر است، و یک ضخامت محدودی دارد. انتشار پرش به شبکه طوری انجام شده است که انتگرال حجمی گرادیان (یا پرش) پایستار مانده است. بنابراین، $\mathbf{G}(\mathbf{x})$ گرادیان تابع نشانگر ارزیابی شده در نقطهٔ x از شبکهٔ ساکن است، و D یک تابع توزیعی که تعیین می‌کند چه کسری از مقدار وجه مشترک باید به هر نقطه از شبکه برود، می‌باشد. در نتیجه:

$$\mathbf{G}(\mathbf{x}) = \sum_f D(\mathbf{x} - \mathbf{x}_f) n_f \Delta s_f \qquad (۲۰)$$

که در رابطهٔ فوق $\mathbf{n}_f$ بردار قائم وارد بر سطح Δs_f است که مرکز آن در $\mathbf{x}_f$ واقع می‌باشد.

۲- با مشتق گیری عددی بکمک اختلاف محدود مرکزی مرتبهٔ دوم، دیورژانس میدان گرادیان تابع نشانگر $(\nabla \cdot \mathbf{G})$ پیدا خواهد شد، درنتیجه لاپلاسین تابع نشانگر پیدا خواهد شد. این مقدار نیز مجدداً بجز در نزدیکی فصل مشترک صفر می‌باشد.

۳- برای پیدا کردن تابع نشانگر در کل میدان محاسباتی، یک حلال معادلهٔ پواسون استفاده خواهد شد:

$$\nabla^2 I = \nabla \cdot \mathbf{G} \qquad (۲۱)$$

در اینجا سمت راست مراحل (۱) و (۲) محاسبه شده‌اند. لاپلاسین نیز توسط اختلاف محدود مرتبهٔ دوم تقریب زده شده است. این رویکرد منجر به یک میدان برای $I(\mathbf{x})$ می‌شود که در هر سیال ثابت است، اما یک ضخامت محدود به منطقهٔ انتقال در اطراف فصل مشترک دارد. در محاسبات ارائه شده در اینجا از تابع توزیع زیر استفاده شده است:

$$D(\mathbf{x} - \mathbf{x}_f) = \begin{cases} \dfrac{1}{4h^{\Omega}} \prod_{\gamma=1}^{\Omega} \left[1 + \mathrm{Cos}\dfrac{\pi}{2h}(\mathbf{x} - \mathbf{x}_f^{\gamma})\right] & ,\gamma = 1,\Omega \\ 0 & \text{در غیر اینصورت} \end{cases} \qquad (۲۲)$$

که در اینجا h عرض شبکهٔ اویلری و ۳یا۲=Ω اشاره به دو یا سه بعد دارد. در رابطهٔ فوق شرط انجام محاسبات برقراری شرط $|\mathbf{x} - \mathbf{x}_f^{\gamma}| < ۲h$ می‌باشد. این شرط بیان می‌کند که یک انتقال هموار در درون یک دایره به قطری با اندازهٔ چهار فاصلهٔ شبکه خواهیم داشت.

نیروهای کشش سطحی از انحناء فصل مشترک بدست می‌آیند:

$$F_f = \sigma k_f \mathbf{n}_f \Delta s_f \qquad (۲۳)$$

که در آن σ ضریب کشش سطحی، k_f انحناء فصل مشترک در مرکز حجم المان f می‌باشد. این نیرو سپس بر روی شبکه به همان طریق گرادیان تابع نشانگر توزیع شده است. بدین ترتیب یک میدان نیرو–شبکه ایجاد خواهد شد:

$$F(x) = \sum_f D(\mathbf{x} - \mathbf{x}_f) F_f \qquad (۲۴)$$

برای درون‌یابی سرعت‌های نقاط بر روی فصل مشترک از سرعت‌های شبکهٔ اویلری، از همان تابع توزیع توصیف شده استفاده می‌شود. به این ترتیب سرعت در نقطهٔ i– ام از فصل مشترک برابر است با:

$$u_f = \sum_i D(\mathbf{x} - \mathbf{x}_f) u_i \qquad (۲۵)$$

سپس فصل مشترک توسط انتگرال‌گیری از معادلهٔ زیر جابجا خواهد شد:

$$\frac{d\mathbf{x}_f}{dt} = u_f \qquad (۲۶)$$

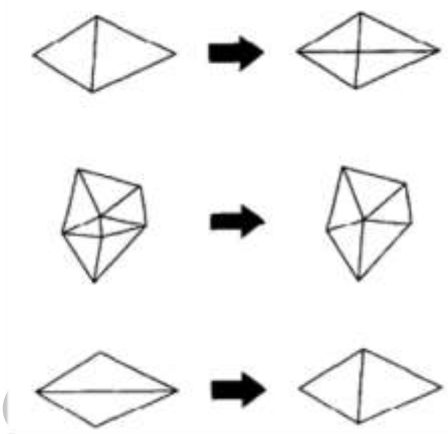
درنتیجه نقاط گسسته شده در فصل مشترک با جریان جابجا می‌شوند و خود فصل مشترک نیز توسط اتصال این نقاط تشکیل شده است. بنابراین اگر یک انتگرالگیری اویلری صریح مرتبهٔ اول استفاده شود:

$$\mathbf{x}_f^{n+1} = \mathbf{x}_f^n + v_f^n \Delta t \qquad (۲۷)$$

با تغییر شکل فصل مشترک، برخی از اجزای نقاط محاسباتی حذف شده‌اند و بخش‌های دیگری ممکن است با نقاط اضافه

[1] Indicator

پر شوند. برای حفظ یک کیفیت مناسب، باید عناصر محاسباتی تغییر شکل، حذف یا اضافه شوند. این روش برای شبیه‌سازی برخورد دو حباب در حال صعود توسط آنوردی و تریگواسون [۱۰] استفاده شده است. شکل (۳) این سه عملیات را بطور شماتیک به تصویر می‌کشد:

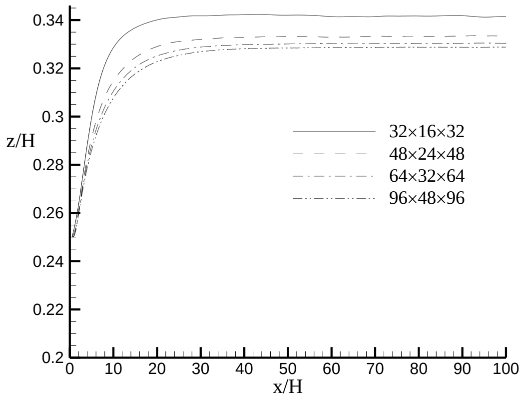


شکل (۳) عملیات اساسی در بازسازی مجدد فصل مشترک: الف) افزودن یک نقطه توسط تنصیف بزرگترین طول یک المان بزرگ. ب) حذف نقاط برای از بین بردن المان‌های کوچک و نقاط اضافی. ج) تغییر شکل المان‌ها برای از بین بردن المان‌ها با محیط بزرگ و مساحت کوچک [۱۰].

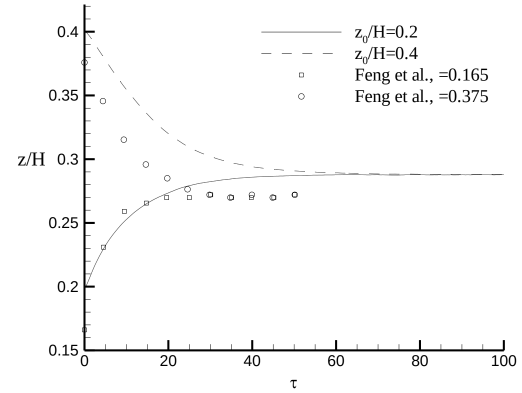
۴- نتایج

۴-۱-مطالعهٔ شبکه

در این بخش یک آزمون کیفیت برای بررسی استقلال نتایج از کیفیت شبکه انجام شده است. شکل (۴) موقعیت جانبی در مقابل زمان بی‌بعد را برای چهار شبکه با اندازه‌های ۳۲×۱۶×۳۲، ۴۸×۲۴×۴۸، ۶۴×۳۲×۶۴ و ۹۶×۴۸×۹۶ نشان می‌دهد.



شکل (۴) اثر کیفیت شبکه بر روی مهاجرت جانبی یک حباب در جریان ترکیبی برشی ساده و پوآسوی برای یک حباب در چهار شبکهٔ مختلف.



شکل (۵) مقایسه با شبیه‌سازی انجام شده توسط فنگ و همکارانش [۸] برای جریان پوآسوی.

شرایط جریان عبارت‌اند از: Re_d=۱۰، Ca=۰/۹، α=λ=۰/۸ و ξ=۰/۱۲۵. همچنین ابعاد دامنهٔ محاسباتی ۱×۰/۵×۱ فرض شده است.

از آنجایی که اختلاف در نتایج بدست آمده توسط شبکهٔ ۶۴×۳۲×۶۴ با ۹۶×۴۸×۹۶ کمتر از نتایج حاصل از شبکهٔ ۳۲×۱۶×۳۲ با ۶۴×۳۲×۶۴ می‌باشد، برای دستیابی به یک شبکه با کیفیت و همچنین صرفه‌جویی در زمان، برای کلیهٔ شبیه‌سازی‌های انجام شده در این پژوهش از شبکهٔ ۶۴×۳۲×۶۴ استفاده شده است.

۴-۲-تأثیر موقعیت اولیه بر روی مهاجرت جانبی

نتایج عددی ارائه شده در این بخش با جریان پایه یعنی جریان پواسل موجود در گزارش‌های عددی ارائه شده مقایسه خواهد شد تا وجه تسمیه و افتراق آنها با شبیه‌سازی عددی انجام شده در این پژوهش مشخص شود. برای این منظور نتایج را با شبیه‌سازی عددی که توسط فنگ و همکارانش [۸] برای ذرات شناور آزاد بدست آمده مقایسه خواهیم کرد. نتیجهٔ مهمی که می‌توان از انجام این شبیه‌سازی‌ها بدست آورد اینست که در جریان ترکیبی کوئت و پواسل نیز اثر سگر سیبربرگ مشاهده می‌شود، ولی بدلیل اینکه در جریان مدنظر پروفیل میدان سرعت متقارن نمی‌باشد، موقعیت تعادلی کمی متفاوت از شبیه‌سازی‌های انجام شده در این راستا خواهد بود. همانطور که در منحنی‌های مهاجرت می‌توان مشاهده کرد، فاصلهٔ تعادلی از دیواره بالا z_{eq}/H=۰/۲۲۴ و از دیوار پایین z_{eq}/H=۰/۲۸۸ خواهد بود، که نسبت به کارهای انجام گرفته متفاوت می‌باشد. علت این تفاوت را بایستی در انحناء پروفیل سرعت جستجو کرد. از آنجایی که پروفیل سرعت در جریان ترکیبی کوئت و پوآسوی

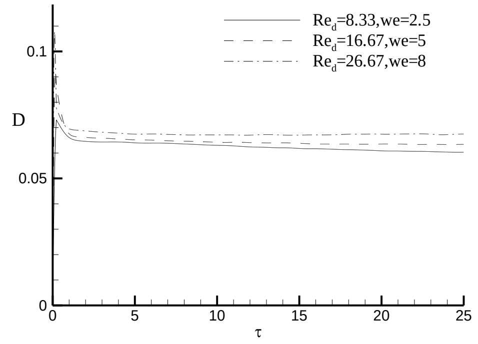
متمایل به نیمهٔ بالایی کانال می‌باشد، تاثیر انحناء پروفیل سرعت نسبت به مورد جریان پواسل قویتر بوده و موقعیت تعادلی در فاصلهٔ نزدیکتری نسبت به دیواره بالایی خواهد بود، و به طور مشابه در نیمهٔ پایینی کانال چون تاثیر پروفیل سرعت نسبت به جریان پوآسوی کمتر است، موقعیت تعادلی در وضعیت نزدیکتری نسبت به خط مرکزی کانال مستقر خواهد شد.

برای بررسی تحولات در شکل یک حباب در میدان جریان، یک معیار اسکالر از تغییر شکل (تغییر شکل تیلور) استفاده می‌شود که نرخ تغییر شکل تیلور نام دارد، [۲۱]:

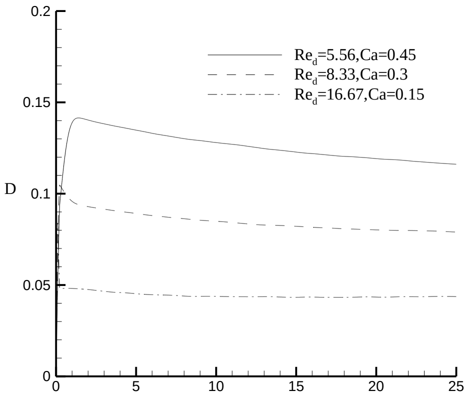
$$D = \frac{L - b}{L + b} \qquad (۲۸)$$

که در آن L و b به ترتیب اندازهٔ بزرگترین و کوچکترین فاصلهٔ سطح از مرکز می‌باشد. برای انتخاب پارامتر بدون بعد مناسب برای کشش سطحی (یعنی عدد وبر و یا عدد کاپیلاری) دو مجموعه شبیه‌سازی انجام شده است. بدین منظور با ثابت نگه داشتن یکی از این دو و تغییر عدد دیگر، تغییر شکل محاسبه می‌گردد. از آنجایی که عدد وبر و عدد کاپیلاری توسط $Ca = We/Re$ به هم مرتبط هستند، برای بررسی تاثیر عدد وبر، با توجه به ارتباط میان عدد رینولدز و عدد کاپیلاری، برای اینکه عدد کاپیلاری ثابت باشد، باید عدد رینولدز تغییر کند. در شکل (۶) تاثیر عدد وبر بر روی تغییر شکل حباب آمده است. از این شکل می‌توان دریافت، زمانیکه عدد کاپیلاری ثابت است و عدد رینولدز تغییر می‌کند (Re_d=۸/۳۳ ، Re_d=۱۶/۶۷ و Re_d=۲۶/۶۷) اندازهٔ تغییر شکل تغییر چندانی نمی‌کند.

یک مجموعهٔ دیگری از شبیه‌سازی‌ها با فرض ثابت بودن وبر و تغییر عدد رینولدز (Re_d=۵/۵۶ ، Re_d=۸/۳۳ و Re_d=۱۶/۶۷) انجام شده است.



شکل (۶) تغییر شکل یک حباب تحت جریان ترکیبی برشی ساده و پواسل در کاپیلاری ثابت Ca=۰/۳.



شکل (۷) تغییر شکل یک حباب تحت جریان ترکیبی برشی ساده و پواسل در وبر ثابت We=۲/۵.

مشاهده می‌شود در این حالت تغییرات کمیت اسکالر تیلور برای سنجش تغییر شکل نسبت به حالت قبل بیشتر می‌باشد. بنابراین می‌توان گفت که در اعداد رینولدز محدود تغییر شکل یک حباب قویاً تابع عدد کاپیلاری است.

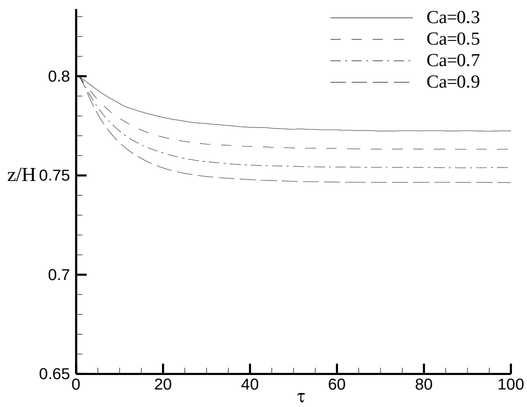
۴-۳- تاثیر عدد کاپیلاری

همانطور که ذکر شده است، در اعداد رینولدز محدود، از میان دو عدد بدون بعد دربرگیرندهٔ کشش سطحی، عدد کاپیلاری پارامتر مناسبتری نسبت به عدد وبر می‌باشد. این مطلب را می‌توان با توجه به نمودار تغییر شکل تیلور که در شکل (۷) آمده است، مشاهده کرد.

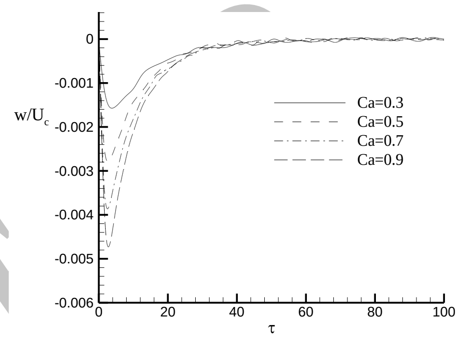
اثر تغییر شکل روی موقعیت تعادلی عرضی حباب با استفاده از اعداد کاپیلاری مختلف (Ca=۰/۳، Ca=۰/۵، Ca=۰/۷ و Ca=۰/۹) مورد بررسی قرار گرفته است. شکل (۸) موقعیت عرضی را در مقابل زمان بی‌بعد برای یک حباب در Re_d=۱۰ ، α=λ=۰/۸ و ξ=۰/۱۲۵ ارائه می‌کند.

همانطور که از این شکل مشخص است، با افزایش عدد کاپیلاری موقعیت تعادلی به سمت خط مرکزی حرکت می‌کند. بعبارت دیگر می‌توان گفت که هر چه عدد کاپیلاری دارای مقدار بزرگتری باشد، نرخ تغییر شکل حباب نیز بیشتر خواهد بود و همچنین می‌توان نتیجه گرفت که نرخ مهاجرت نیز افزایش می‌یابد، یعنی با افزایش عدد کاپیلاری حباب برای رسیدن به یک وضعیت تعادلی زمان کمتری را احتیاج خواهد داشت.

اثر عدد کاپیلاری بر روی نرخ مهاجرت یا همان سرعت عرضی حباب را در شکل (۹) می‌توان مشاهده کرد. همانگونه که قبلاً بحث شد، با افزایش عدد کاپیلاری نرخ مهاجرت حباب افزایش خواهد یافت.



شکل (۸) تاثیر عدد کاپیلاری بر روی مهاجرت جانبی.



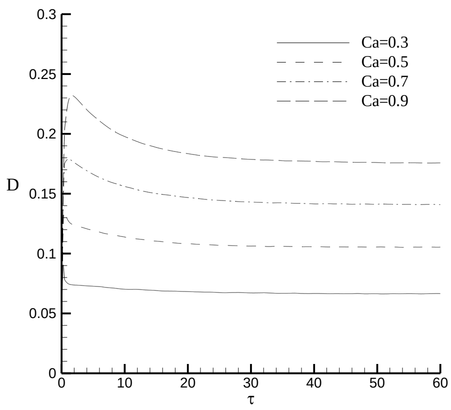
شکل (۹) تاثیر عدد کاپیلاری بر روی نرخ مهاجرت حباب.

شکل (۱۰) نشان می‌دهد که با افزایش عدد کاپیلاری، یا بعبارت دیگر کاهش ضریب کشش سطحی، نرخ تغییر شکل حباب هم بیشتر خواهد بود، که این مهم ناشی از افزایش تنش‌های چسبندگی در طول مرز حباب است. در شکل‌های (۱۱) و (۱۲) می‌توان خطوط جریان را به ترتیب برای دو حباب با Ca=۰/۳ و Ca=۰/۷ مشاهده کرد. پارامترهای جریان Re$_d$=۱۰ ، α=λ=۰/۸ و ξ=۰/۱۲۵ هستند. محاسبات روی یک دامنه با ابعاد ۱×۰/۵×۱ و با استفاده از شبکهٔ ۶۴×۳۲×۶۴ انجام شده است. الگوی جریان برای هر دو حباب تقریباً مشابه هستند ولی با افزایش عدد کاپیلاری، حباب تغییر شکل بیشتری می‌یابد و خطوط جریان کمی متفاوت خواهند شد.

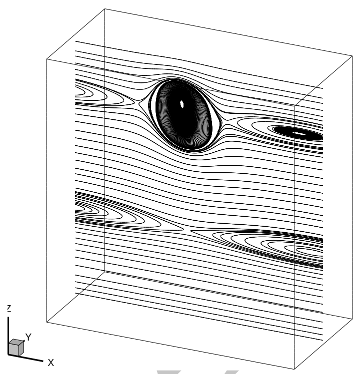
۴-۴- تاثیر حضور حباب بر روی تنش برشی دیواره

در این بخش به تاثیر حضور حباب بر تنش برشی بر روی دیوارهٔ کانال پرداخته می‌شود. تنش برشی بر روی دیوارهٔ بالایی را با (τ_{wt}) و تنش برشی بر روی دیوارهٔ پایینی را با (τ_{wb})نمایش خواهیم داد. حالت بدون حباب جریان به کمک حل تحلیلی حساب خواهد شد. همچنین جهت بی‌بعدسازی تنش‌ها از کمیت $\tau_0 = \frac{dp}{dx} \cdot x_l$ استفاده شده است. در ابتدا به بررسی تاثیر موقعیت اولیهٔ حباب بر روی تنش برشی خواهیم پرداخت.

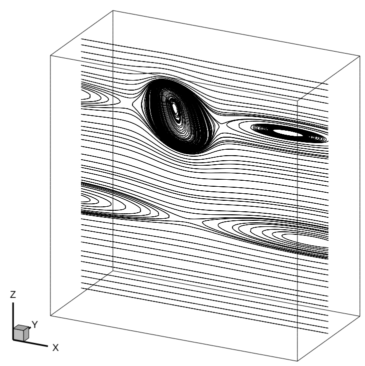
پارامترهای بدون بعد فرض شده در اینجا عبارتند از: α=λ=۰/۹، Re$_d$=۱۰ و ξ=۰/۱۲۵. برای این منظور اگر حباب از موقعیت اولیه‌ای واقع در نیمهٔ پایینی کانال رها شود، در اینصورت تنش برشی بیشتری در مقایسه با حالتی که حباب وجود ندارد وارد خواهد شد.



شکل (۱۰) تاثیر عدد کاپیلاری بر روی تغییر شکل تیلور.



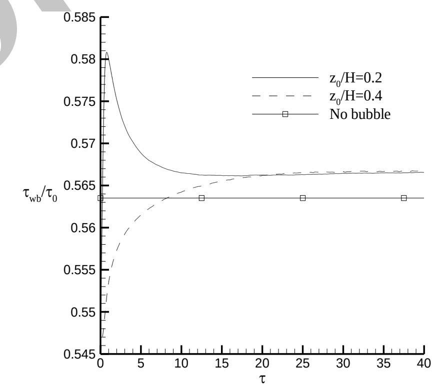
شکل (۱۱) خطوط جریان در مقطع میانی در جهت y برای یک حباب با اعداد کاپیلاری Ca=۰/۳.



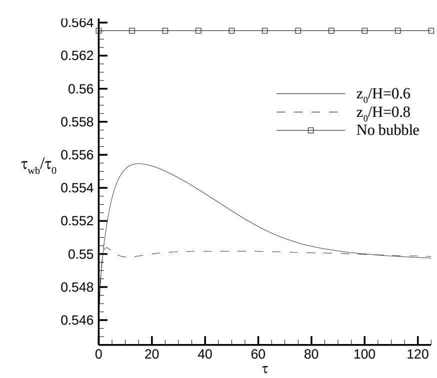
شکـــل (۱۲) خطوط جریان در مقطع میانی در جهت y برای یک حباب با اعداد کاپیلاری Ca=۰/۹.

همانطور که در شکل (۱۳) مشخص است، حباب‌هایی که از موقعیت اولیهٔ z_0/H=۰/۲ و z_0/H=۰/۴ رها شده هستند، مقدار تنش برشی بیشتری بر روی سطح دیوارهٔ پایین تحمل می‌کنند.

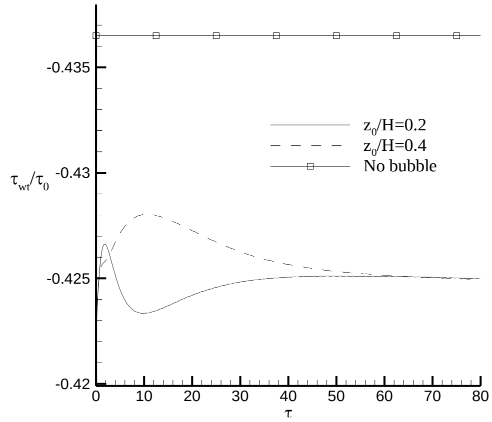
در حالی که حباب‌هایی که از موقعیت اولیه‌ی z_0/H=۰/۶ و z_0/H=۰/۸ رها شده‌اند (شکل (۱۴))، تنش برشی کمتری بر روی دیوارهٔ پایین در مقایسه با حالت بدون حباب وارد خواهد شد. حال به وضعیت تنش برشی بر روی دیوارهٔ بالایی خواهیم پرداخت. در اینجا عکس وضعیت قبل مشاهده می‌شود. یعنی حباب‌هایی که از موقعیت ابتدائی z_0/H=۰/۲ و z_0/H=۰/۴ رها شده هستند، مقدار قدر مطلق تنش برشی کمتری بر روی دیوارهٔ بالایی را در مقایسه با حالت بدون حباب تحمل می‌کنند. در شکل (۱۵) این حالت نمایش داده شده است. شکل (۱۶) حباب‌هایی که از موقعیت ابتدائی z_0/H=۰/۶ و z_0/H=۰/۸ رها شده‌اند را نشان می‌دهد. همانطور که مشخص است، در این حالت تنش برشی بر روی دیوارهٔ بالایی در مقایسه با حالت بدون حباب بیشتر می‌باشد.



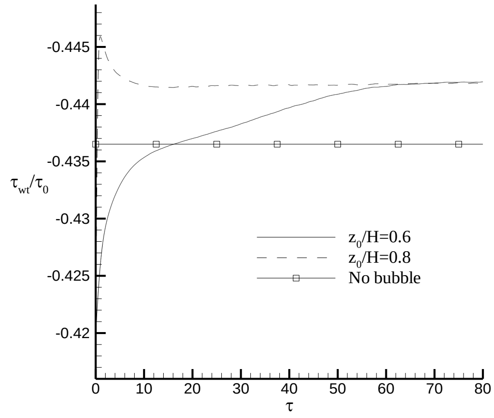
شکل (۱۳) تاثیر موقعیت اولیهٔ حباب بر روی تنش برشی بر روی دیوارهٔ پایین. حباب از موقعیت اولیهٔ z_0/H=۰/۲ و ۰/۴ =z_0/H رها شده است.



شکل (۱۴) تاثیر موقعیت اولیهٔ حباب بر روی تنش برشی بر روی دیوارهٔ پایین. حباب از موقعیت اولیهٔ z_0/H=۰/۶ و ۰/۸ =z_0/H رها شده است.



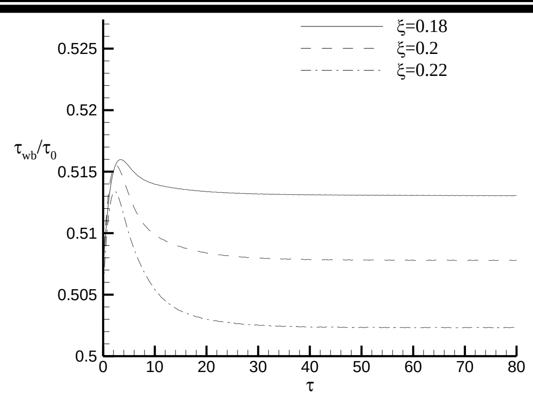
شکل (۱۵) تاثیر موقعیت اولیهٔ حباب بر روی تنش برشی بر روی دیوارهٔ بالایی. حباب از موقعیت اولیهٔ z_0/H=۰/۲ و ۰/۴ =z_0/H رها شده است.



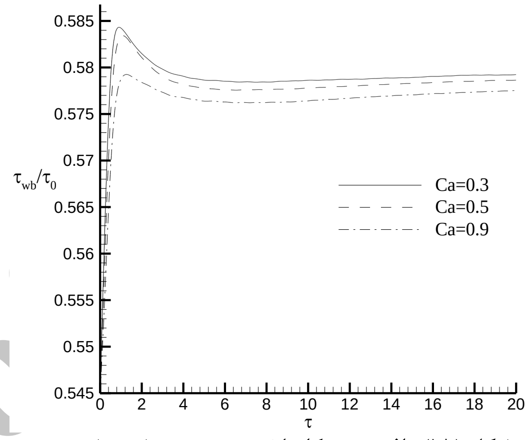
شکل (۱۶) تاثیر موقعیت اولیهٔ حباب بر روی تنش برشی بر روی دیوارهٔ بالایی. حباب از موقعیت اولیهٔ z_0/H=۰/۶ و ۰/۸ =z_0/H رها شده است.

سپس به بررسی تاثیر شعاع حباب یا همان نسبت هندسی بر روی تنش برشی بر روی دیواره خواهیم پرداخت. برای تحلیل این مورد، سه حباب که از موقعیت اولیهٔ z_0/H=۰/۷ رها شده‌اند (با نسبت‌های هندسی نسبتاً بزرگ، به ترتیب، ۰/۱۸=ξ، ۰/۲=ξ و ۰/۲۲=ξ) را در نظر می‌گیریم.

سایر پارامترهای حاکم عبارت‌اند از: ۰/۸=λ=α، ۱۰=Re_d و ۰/۲=Ca. اثر افزایش شعاع حباب را بر روی تنش برشی بر روی صفحهٔ پایین می‌توان در شکل (۱۷) مشاهده کرد. همانگونه که در شکل (۱۷) مشخص است، با افزایش شعاع حباب، تنش برشی بر روی صفحهٔ پایینی کاهش خواهد یافت. تاثیر عدد کاپیلاری بر روی تنش برشی در شکل (۱۸) نشان داده شده است. همانطور که مشخص است، با افزایش عدد کاپیلاری یا بعبارتی کاهش کشش سطحی حباب، مقدار تنش برشی بر روی دیوارهٔ پایین کاهش خواهد یافت.



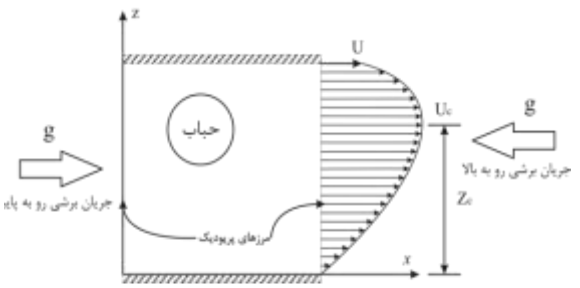
شکل (۱۷) تاثیر شعاع حباب بر روی تنش برشی روی دیوارهٔ پایین.



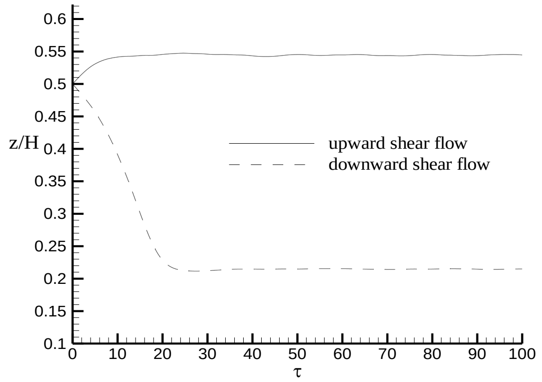
شکل (۱۸) تاثیر عدد کاپیلاری بر روی تنش برشی روی دیوارهٔ پایین.

۴-۵- شبیه‌سازی حباب با درنظر گرفتن نیروی شناوری

اگر جهت جریان موافق با جهت شتاب ثقل باشد، آنرا جریان برشی رو به پایین، و اگر جهت جریان در خلاف جهت جریان باشد، آنرا جریان برشی رو به بالا می‌توان نامید [۲۲] (شکل (۱۹)). برای بررسی تاثیر جهت جاذبه بر روی مهاجرت جانبی حباب تحت جریان ترکیبی برشی ساده و پواسل، دو مجموعه شبیه‌سازی تحت اعداد بدون بعد: Re_d=۱۰، Ca=۰/۱، α=λ=۰/۸ و Fr=۳۰ انجام شده است. در شکل (۲۰) می‌توان نمودار مهاجرت جانبی که توسط ارتفاع کانال بی‌بعد شده است را بر حسب زمان بدون‌بعد، برای دو حباب که از موقعیت اولیهٔ z_0/H=۰/۵ رها شده‌اند، مشاهده کرد. همانگونه که مشخص است، تحت جریان برشی رو به بالا، حباب بطرف دیوارهٔ متحرک حرکت خواهد کرد، در حالیکه حباب تحت جریان برشی رو به پایین بطرف دیوارهٔ ساکن مهاجرت می‌کند. علت این موضوع را باید در سرعت لغزشی جستجو کرد.



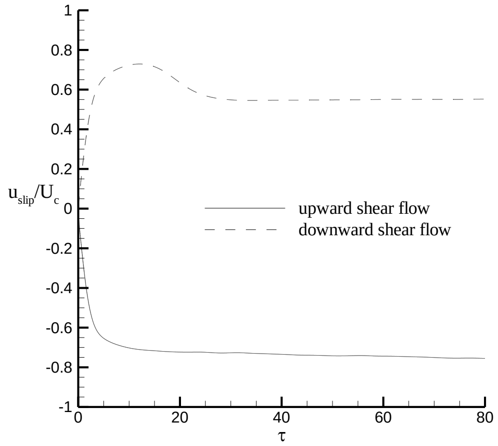
شکل (۱۹) شماتیک جریان برشی رو به بالا و جریان برشی رو به پایین.



شکل (۲۰) بررسی تاثیر جهت جاذبه بر روی مهاجرت عرضی حباب.

در شکل (۲۱) سرعت لغزشی بر حسب زمان بدون‌بعد رسم شده است. حباب تحت جریان برشی رو به بالا، از جریان سیال مختل‌نشده عقب خواهد ماند (سرعت لغزشی منفی است). در نتیجه برآ بعلت اینرسی بسمت دیوار متحرک خواهد بود و حباب را بسمت بالا تا جایی هل می‌دهد که نیروی ناشی از انحناء پروفیل سرعت و روانسازی دیواره با نیروی ناشی از برآ اینرسی موازنه شود. در نتیجه حباب در یک وضعیت تعادلی کمی بالاتر از میان کانال (z_{eq}/H=۰/۵۴۱) تثبیت خواهد شد. در حالیکه حباب تحت جریان برشی رو به پایین، از جریان سیال مختل نشده جلو می‌افتد (سرعت لغزشی مثبت است).

در نتیجه برآ بعلت اینرسی بسمت دیوار ساکن فشار وارد خواهد کرد و حباب بسمت دیوارهٔ ساکن تا جایی حرکت می‌کند که نیروی ناشی از انحناء پروفیل سرعت و نیروی ناشی از برآ اینرسی با روانسازی دیواره موازنه شود. در این ناحیه چون تاثیر انحناء پروفیل سرعت و برآ اینرسی بیشتر می‌باشد، باعث خواهد شد که حباب در فاصلهٔ تعادلی کمتری نسبت به دیواره در مقایسه با مورد قبل، تثبیت گردد (z_{eq}/H=۰/۲۱۵).



شکل (۲۱) تاثیر جهت نیروی گرانش بر روی سرعت لغزشی بر حسب زمان بدون‌بعد.

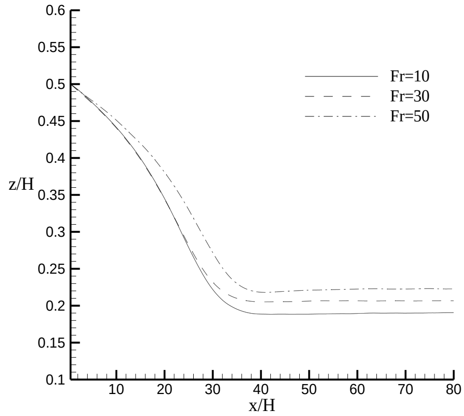
۴-۵-۱- تاثیر عدد فرود

در این بخش تاثیر عدد فرود در موقعیت تعادل جانبی حباب برای حالت جریان برشی رو به پایین تحت پارامترهای حاکم بدون بعد: Re_d=۱۰، α=λ=۰/۸۵، Ca=۰/۱ و نسبت هندسی ξ=۰/۱۲۵ مورد مطالعه قرار گرفته است. شکل (۲۲) موقعیت تعادلی حباب را برای اعداد فرود Fr=۱۰، Fr=۳۰ و Fr=۵۰ نشان می‌دهد.

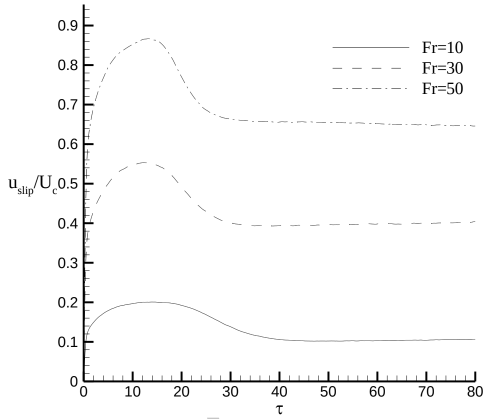
در شکل (۲۲) مشاهده می‌شود که با افزایش عدد فرود، حباب در یک وضعیت تعادلی نزدیکتری نسبت به خط مرکزی حرکت خواهد کرد. علت این موضوع در این است که در اعداد فرود بزرگ، سرعت لغزشی (شکل (۲۳)) بسیار بزرگ می‌شود، بنابراین نیروی دافعهٔ دیواره افزایش می‌یابد (اثر روانسازی افزایش می‌یابد) [۲۳]. در شکل (۲۴) می‌توان نرخ تغییر شکل را بر حسب زمان بی‌بعد مشاهده کرد. همانطور که مشخص است با افزایش عدد فرود تغییر شکل طی دورهٔ گذرا افزایش یافته و سپس در حالت پایدار بسمت یک مقدار ثابتی میل خواهد نمود.

۴-۵-۲- تاثیر عدد اتوش

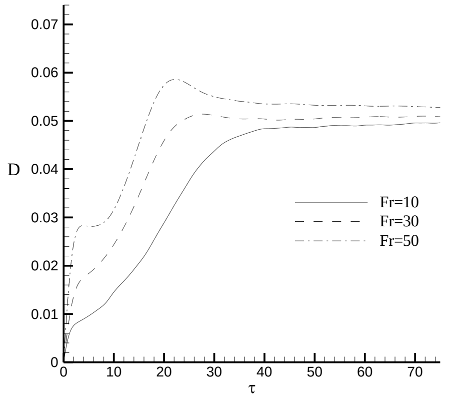
در این بخش به بررسی تاثیر عدد اتوش بر روی تغییر شکل حباب خواهیم پرداخت. همانطور که قبلاً به آن اشاره شد، آنوردی و تریگواسون [۱۰] نشان دادند که تغییر شکل حباب شدیداً به عدد اتوش وابسته است و عدد مورتون تاثیر چندانی بر روی تغییر شکل حباب نخواهد داشت. در نتیجه در این بخش به بررسی تاثیر این دو عدد بر روی شکل حباب خواهیم پرداخت. عدد مورتون فقط شامل خواص سیال است و عدد اتوش اندازهٔ بدون بعد حباب می‌باشد [۱۰]. عدد مورتون بصورت $M = g\mu_o^4/\rho_o\sigma^3$ و عدد اتوش (همچنین عدد باند نیز خوانده می‌شود) به صورت $Eo = \rho_o g d^3/\sigma$ تعریف می‌شود. در اینجا سه شبیه‌سازی برای حباب در یک عدد مورتون ثابت $M=10^{-2}$ آورده شده است. در شکل (۲۵) می‌توان نتایج را برای سه عدد اتوش Eo=۱، Eo=۱۰ و Eo=۱۰۰ مشاهده کرد.



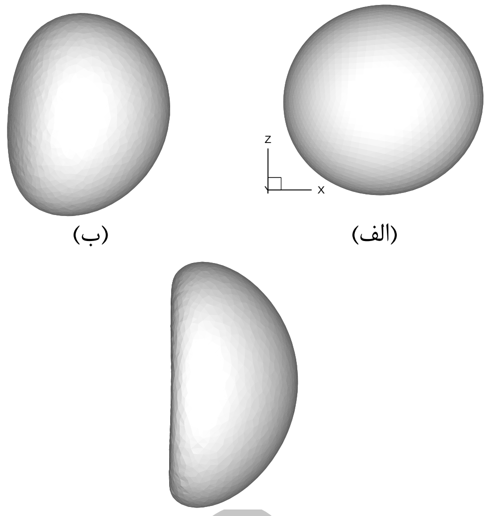
شکل (۲۲) تاثیر عدد فرود بر روی مهاجرت جانبی بر حسب موقعیت محوری



شکل (۲۳) تاثیر عدد فرود بر روی سرعت لغزشی بر حسب زمان بی‌بعد.



شکل (۲۴) تاثیر عدد فرود بر روی تغییر شکل تیلور بر حسب زمان بی‌بعد.



شکل (۲۵) تاثیر عدد اتوش بر روی شکل حباب. الف) Eo=۱، ب) Eo=۱۰ و ج) Eo=۱۰۰.

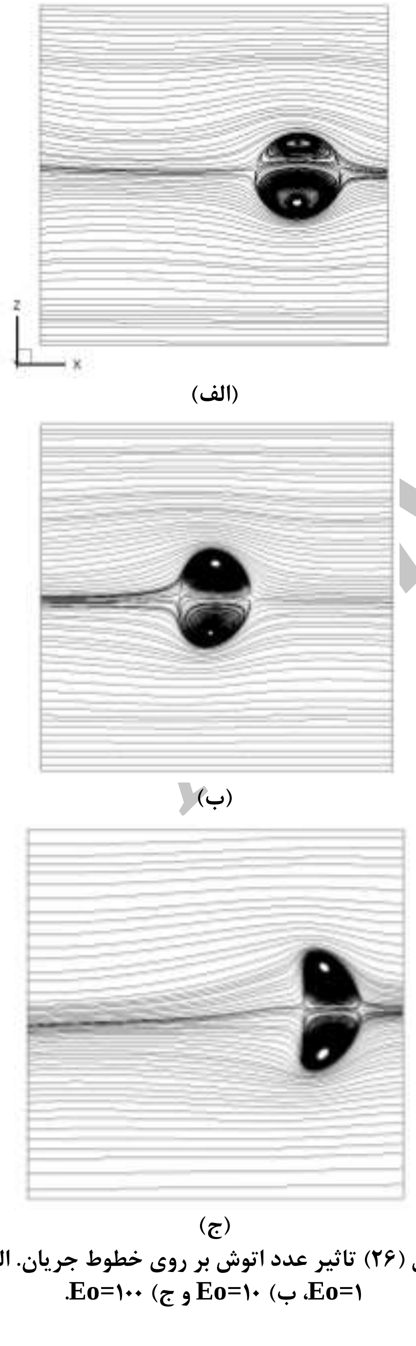
همانطور که مشخص است، با افزایش عدد اتوش، حباب از یک شکل تقریباً کروی در عدد اتوش Eo=۱، به یک شکل تا حدودی بیضوی در عدد اتوش Eo=۱۰ خواهد رسید. با افزایش بیشتر عدد اتوش، حباب به شکل کلاه بیضوی تبدیل خواهد شد. این پدیده را به طور کیفی می‌توان در شبیه-سازی‌های دو بعدی و همچنین سه‌بعدی انجام شده توسط آنوردی و تریگواسون [۱۰] برای یک حباب در حال صعود مشاهده کرد.

در اینجا هیچ وضعیت حالت پایداری برای حباب مشاهده نشده است و حباب طی یک مسیر ناپایدار زیگزاگی و کج و معوج در کانال حرکت خواهد کرد. این پدیده همچنین برای اعداد مورتون کوچک در شبیه‌سازی آنوردی و تریگواسون [۱۰] دیده شده است. در شکل (۲۶) می‌توان خطوط جریان را برای سه حباب بالا مشاهده کرد.

همانطور که مشخص است، الگوی جریان هر سه حباب تقریباً مشابه هم می‌باشد. در اینجا حباب از یک جفت گردابه تشکیل می‌شود که در خلاف جهت یکدیگر در حال چرخش هستند. از آنجایی که عدد رینولدز در اینجا برابر با R_{ed}=۱۰ می‌باشد، حرکت حباب شبیه به جریان خزشی می‌باشد و هیچ گردابه‌ای در پشت حباب مشاهده نشده است.

۵- نتیجه‌گیری

در پژوهش حاضر یک مطالعۀ سه‌بعدی از حرکت یک حباب در جریان ترکیبی کوئت و پواسل بطور عددی انجام شده است. بر اساس نتایج بدست آمده می توان دریافت گرفت که در جریان ترکیبی کوئت و پواسل نیز تمامی حباب‌ها صرفنظر از موقعیت اولیۀ، به یک موقعیت تعادلی در حوالی نیمۀ بین خط مرکزی کانال و دیواره مهاجرت می‌کنند که به اثر سگر سیبربرگ مشهور است، ولی از آنجایی که پروفیل سرعت متقارن نمی‌باشد، موقعیت تعادلی بدست آمده در اینجا کمی با نتایج حاصل از جریان پواسل متفاوت می‌باشد. تایج نشان می‌دهد که از میان دو عدد بدون بعد وبر و کاپیلاری که هر دو شامل کشش سطحی می‌باشند، تغییر شکل حباب شدیداً وابسته به عدد کاپیلاری است. مشاهده شده است که تغییر شکل حباب یک تابع افزایشی با عدد کاپیلاری است.



شکل (۲۶) تاثیر عدد اتوش بر روی خطوط جریان. الف) Eo=۱، ب) Eo=۱۰ و ج) Eo=۱۰۰.

در نتیجه با افزایش عدد کاپیلاری نرخ مهاجرت افزایش یافته و حباب سریعتر در یک موقعیت نزدیکتری نسبت به خط مرکزی کانال مستقر خواهد شد. تنش برشی بر روی دیواره‌ها در حضور حباب، دارای تغییراتی وابسته به موقعیت اولیهٔ حباب می‌باشد. نتایج نشان داد که با افزایش شعاع حباب و یا افزایش عدد کاپیلاری، تنش برشی بر روی دیواره پایین کاهش می‌یابد. از میان عدد اتوش و عدد مورتون، تغییر شکل حباب وابسته به عدد اتوش می‌باشد. برای عدد اتوش کوچک، حباب تقریباً کروی می‌ماند، با افزایش عدد اتوش حباب تا حدودی بیضوی می‌شود. با افزایش بیشتر عدد اتوش شکل حباب شبیه به یک کلاه بیضوی می‌شود. خطوط جریان نشان می‌دهند که حباب متشکل از دو گردابه می‌باشد که در خلاف جهت هم درگردش می‌باشند و همچنین در عدد مورتون پایین فرض شده در این تحقیق هیچ دنباله‌ای در پشت حباب‌ها مشاهده نشده است و حباب درون سیال مشابه جریان استوکس حرکت می‌کند.

۶- مراجع

[1] Mcormick, M. E., Bhattacharyya, R., "Naval Engineers Journal", Drag Reduction of a submersible hull by electrolysis., Vol.85, pp.11-16. 1973.

[2] Esmaeeli, A., Tryggvason, G., "Journal of Fluid Mechanics", Direct Numerical Simulations of Bubbly Flows. Part 1. Low Reynolds Number Arrays., Vol.377, pp.313-345, 1998.

[3] Segre, G., Silberberg, A., "Behaviour of Macroscopic Rigid Spheres in Poiseuille Flow. Part 1. Determination of local concentration by statistical Analysis of Particle Passages Through Crossed Light Beams, J. Fluid Mech, Vol.14, pp.115-135. 1962.

[4] Segre, G., Silberberg, A., "Behaviour of Macroscopic Rigid Spheres in Poiseuille Flow. Part 2. Experimental Results and Interpretation., J. Fluid Mech., Vol.14, pp.136-157.1962.

[5] Goldsmith, H. L., Mason, S. G., "The Flow of Suspensions Through Tubes. I. Single Spheres, Rods, and Discs.", J. Colloid Sci., Vol.17, pp.448-476.1962.

[6] Karnis, A., Goldsmith, H. L., and Mason, S. G., "The Flow of Suspensions Through Tubes: V. Inertial Effects.", The Canadian Journal of Chemical Engineering, Vol.44, pp.181-93.1966.

[7] Feng, J., Hu, H. H., Joseph, D. D., "Direct Simulation of Initial Value Problems for the Motion of Solid Bodies in a Newtonian Fluid. Part 1. Sedimentation.", J. Fluid Mech., Vol.261, pp.95–134, 1994.

[8] Feng, J., Hu, H.H., Joseph, D.D., "Direct Simulation of Initial Value Problems for the Motion of Solid Bodies in a Newtonian Fluid. Part 2. Couette and Poiseuille flows.", J. Fluid Mech., Vol.277, pp.271–301, 1994.

[9] Cristini V., Blawzdziewicz J. and Loewenberg M., Drop breakup in three dimensional viscous flws.", J. Physics Fluids, Vol.10, pp.1781-1783,1998.

[10] Unverdi, S. O., and Tryggvason, G., "A Front-Tracking Method for Viscous, Incompressible, Multi-Fluid Flows.", Journal of computational physics, Vol.100, pp.25-37, 1992.

[11] Mortazavi, S., Tryggvason, G.R., "A Numerical Study of the Motion of Drops in Poiseuille Flow. Part 1. Lateral migration of one drop.", J. Fluid Mech., Vol.411, pp.325–350, 2000.

[12] Doddi, S. K., and Bagchi, P., "Lateral Migration of a Capsule in a Plane Poiseuille Flow in a Channel", International Journal of Multiphase Flow, Vol.34, pp.966-986, 2008.

[13] Lu, J., Fernández, A. and Tryggvason, G., "The Effect of Bubbles on the Wall Drag in a Turbulent Channel Flow", Physics of Fluids (1994-present), Vol.17, pp.95-102, 2005.

[14] Aberuee, M., Mortazavi, S. "Theoretical and Computational Fluid Dynamics", Effect of Viscosity Ratio on the Motion of Drops Flowing on an Inclined Surface, pp.1-18. 2017.

[15] Pan, D. Y., Lin, Y, Q., Zhang, L. X., Shao. X. M., "Journal of Hydrodynamics, Ser. B" Motion and Deformation of Immiscible Droplet in Plane Poiseuille Flow at Low Reynolds Number, ,Vol.28, No. 4, pp.702-708, 2016.

[16] Bayareh, M., Mortazavi, S., "Equilibrium Position of a Buoyant Drop in Couette and Poiseuille Flows at Finite Reynolds Numbers", Journal of Mechanics, Vol.29, pp.53-58, 2013.

[17] Mortazavi. S, Tafreshi, M. M., "On the Behavior of Suspension of Drops on an Inclined Surface", Physica A, Vol.392, pp.58–71, 2013.

[18] Amiri, M, Mortazavi, S, "Three-Dimensional Numerical Simulation of Sedimenting Drops Inside a Vertical Channel", International Journal of Multiphase Flow, Vol.56, pp.40–53, 2013.

[19] Tryggvason, G., Bunner, B., Esmaeeli, A., Juric, D., Al-Rawahi, N., Tauber, W., and Jan, Y. J., " A Front Tracking Method for the Computations of Multiphase Flow., Journal of

Computational Physics, Vol.169, pp.708-759. 2001.
[20] Peskin, C. S., “Numerical Analysis of Blood Flow in the Heart”, Journal of Computational Physics, Vol. 25, pp.220-252, 1977.
[21] Taylor, G. I., “The Formation of Emulsions in Definable Fields of Flow, Proceedings of the Royal Society of London, Series A, Containing Papers of a Mathematical and Physical Character, pp.501-523, 1934.
[22] Bayareh, M., and Mortazavi, S., “A Numerical Study of the Motion of a Single Drop in Simple Shear flow: Density Ratio Effects”, In Mechanical and Electrical Technology (ICMET), pp.11-14, 2010.
[23] Goodarzi, S., and Mortazavi, S., “Numerical Simulation of a Buoyant Suspending Drop in Plane Couette Flow: the Equilibrium Position of the Drop”, IJST, Vol.36, pp.69-82, 2012.