

## تأثیر ثابت / متغیر بودن چگالی فاز مایع در مدل‌سازی عددی جریان دوفازی لایه‌ای-موجی با استفاده از مدل دو سیالی تک فشار

وحید شگری<sup>۱</sup>، مسعود فلاحتی نقیعی<sup>۲</sup>

shokri.vhd@iausari.ac.ir

۱- استادیار گروه مهندسی مکانیک، دانشگاه آزاد اسلامی، واحد ساری  
۲- دانشجوی دکتری گروه مهندسی مکانیک، دانشگاه آزاد اسلامی، واحد ساری

### چکیده

در این مقاله یک مطالعه عددی جهت بررسی تأثیر ثابت / متغیر بودن چگالی فاز مایع در مدل دو سیالی تک فشار انجام شده است. معادلات مدل دو سیالی با بکارگیری الگوریتم عددی تسخیر شاک پایستار بصورت عددی حل شده‌اند. مدل‌سازی عددی به اینصورت بوده است که، مدل دو سیالی یک بار با فرض ثابت بودن چگالی فاز مایع و یک بار با فرض متغیر بودن چگالی فاز مایع حل شده است. برای بررسی تأثیر ثابت / متغیر بودن چگالی فاز مایع سه مسأله نمونه با شرایط فشار متفاوت بکارگیری شده است. نتایج نشان داده‌اند در شرایط فشار اتمسفر تغییرات چگالی فاز مایع قابل صرف نظر کردن است و تأثیری در دقت نتایج مدل دو سیالی تک فشار ندارد. در شرایطی که گرادیان شدید فشار بر مسأله حاکم باشد متغیر بودن چگالی فاز مایع در مدل دو سیالی تک فشار سبب انحراف نتایج عددی شده است. بنابراین، در شرایطی که گرادیان شدید فشار بر مسأله حاکم است مدل دو سیالی تک فشار با فرض ثابت بودن چگالی فاز مایع، مدل دقیق تری است.

واژگان کلیدی: مدل دوسیالی، مدل‌سازی عددی، تراکم‌پذیری مایع.

تاریخ دریافت مقاله : ۹۸/۰۲/۰۵  
تاریخ پذیرش مقاله : ۹۸/۰۹/۲۶

۱- مقدمه

جریان دو فازی در بسیاری از کاربردهای صنعتی نظیر صنایع نفت و گاز، نیروگاه های هسته ای، نیروگاه های حرارتی، صنایع پتروشیمی و انتقال نفت و گاز از سکوهای نفتی دور از ساحل دارای اهمیت می باشد. تعداد زیادی از میدان های نفتی و گازی دور از ساحل و در عمق زیاد کشف شده یا درحال مطالعه برای کشف می باشند. توسعه روزافزون میدان های نفتی نیازمند توسعه در مورد تحلیل و انتقال جریان های دو فازی می باشد. بنابراین ضرورت پیش بینی دقیق تر جریان های دو فازی در داخل خطوط لوله انتقال احساس می شود.

یکی از پارامترهای مهم در مدلسازی عددی جریانهای دوفازی بکارگیری مدل ریاضی مناسب می باشد. مدل های ریاضی جریان دو فازی را می توان در سه گروه از دیدگاه اوپلری طبقه بندی نمود: مدل هموزن پایدار<sup>۱</sup> [۱]، مدل شار رانشی<sup>۲</sup> [۲] و مدل دو سیالی<sup>۳</sup> [۳]. در پژوهش حاضر تمرکز بر روی مدل دو سیالی است. اساس مدل دو سیالی، وجود دو سری معادلات بقاء برای بالانس جرم، مومنتوم و انرژی برای هر فاز می باشد.

برای بکارگیری مدل دو سیالی و بسته شدن سیستم معادلات نیاز به روابط ساختاری مناسب و فرضیات مناسب، برای فشار فازها، دمای فازها، تراکم پذیری فازها و انتقال جرم بین فازها می باشد. هدف پژوهش حاضر بررسی اثر تراکم پذیری فاز مایع در مدل دو سیالی و تاثیر آن بر دقت نتایج عددی بدست آمده می باشد. برای تحلیل جریان های دو فازی تراکم پذیر دما ثابت، مدل دو سیالی در دو فرم ارائه شده است: مدل دو سیالی تک فشار، مدل دو سیالی دو فشار. کورتس و همکاران [۴]، با بکارگیری متد اغتشاش چگالی ساختار ویژه معادلات جریان دو فازی را مورد مطالعه قرار دادند. آنها در حل معادلات مدل دو سیالی، فشار فاز مایع را با فشار فاز گاز برابر در نظر گرفتند و همچنین فاز مایع را تراکم ناپذیر و فاز بخار را گاز کامل در نظر گرفتند.

سانگ و ایشی [۵]، خوش رفتاری مدل دو سیالی یک بعدی تراکم ناپذیر را مورد بررسی قرار داده اند. در تحقیق آنها فشار فاز گاز و فاز مایع برابر فرض شده است و همچنین فاز گاز و فاز مایع تراکم ناپذیر در نظر گرفته شده است. اوج و فلاتن

[۶]، طرح های ترکیبی جداسازی بردار شار را برای حل مدل دو سیالی تک فشار بکارگیری کردند. آنها در بکارگیری طرح های ترکیبی جداسازی بردار شار، چگالی فاز مایع و چگالی فاز گاز را متغییر فرض کردند.

عیسی و کمپف [۷]، با فرض تراکم پذیری فاز گاز و تراکم ناپذیری فاز مایع از مدل دو سیالی تک فشار برای "شبیه سازی جریان اسلاگ در لوله های افقی و کمی شیب دار" استفاده کردند. آنها در مدلشان فشار فاز گاز در فصل مشترک را برابر فشار مایع در فصل مشترک در نظر گرفتند و تغییر فشار فاز مایع در راستای قائم را بصورت هیدرواستاتیکی در نظر گرفتند. اومگا اساما [۱]، برای مدلسازی عددی جریان های دوفازی از مدل دو سیالی استفاده کرده است و در مدل دو سیالی از فرضیات فشار ارائه شده توسط عیسی و کمپف [۷]، استفاده کرده است.

او با فرض تراکم پذیری فاز گاز و تراکم ناپذیری فاز مایع مدلسازی عددی را با روش عددی جداسازی بردار شار که بر مبنای حلگر ریمن است انجام داده است. لیائو و همکاران [۸]، پایداری عددی مدل دو سیالی نزدیک به محدوده بدرفتار را با فرض تراکم ناپذیری دو فاز گاز و مایع بررسی کرده اند. ایشان از فرضیات فشار ارائه شده توسط عیسی و کمپف، [۷]، در تحقیق خود استفاده کردند با این تفاوت که، آنها در مدلشان از ترم تصحیح فشار در فاز گاز صرفه نظر نکردند. عیسی و همکاران [۹]، به منظور بهبود روابط ساختاری برای افزودن حباب گاز و برش سطحی در مدلسازی رژیم جریان اسلاگ در لوله های افقی از مدل دو سیالی بکارگیری کردند. آنها از فرضیات فشار ارائه شده توسط عیسی و کمپف [۷]، استفاده کردند و همچنین فاز مایع را تراکم ناپذیر و فاز گاز را تراکم پذیر در نظر گرفتند و برای محاسبه آن از رابطه گاز ایده ال استفاده کردند.

هانیانگ و لیژن [۱۰] و انصاری و شکری [۱۱]، برای مدلسازی عددی جریان دو فازی لایه ای گاز-مایع از مدل دو سیالی گذرا استفاده کردند. آنها در تحقیقشان فاز گاز و فاز مایع را تراکم ناپذیر در نظر گرفتند. تحلیل یک مدل دو سیالی یک بعدی تراکم ناپذیر که شامل دیفیوژن مصنوعی است توسط هولمس [۱۲]، انجام شده است. هولمس [۱۳]، برای شبیه سازی عددی موج های غلطان<sup>۴</sup> در لوله جریان دو

<sup>3</sup> Two Fluid Model

<sup>4</sup> Roll-waves

<sup>1</sup> Homogeneous Equilibrium Model

<sup>2</sup> Drift Flux Model

فشار با فرض تراکم پذیری فاز مایع استفاده شده است. با توجه به بررسی های صورت گرفته، در هیچ مرجعی مقایسه ای بین مدل دو سیالی تک فشار با فرض تراکم پذیری فاز مایع و مدل دو سیالی تک فشار با فرض تراکم ناپذیری فاز مایع انجام نشده است، که مقایسه، مدل دو سیالی تک فشار با فرض تراکم ناپذیری فاز مایع و مدل دو سیالی تک فشار با فرض تراکم پذیری فاز مایع در مدلسازی عددی جریان های دوفازی گاز- مایع نوآوری مقاله حاضر می باشد.

## ۲- معادلات حاکم

مدل دو سیالی بر اساس دو سری معادلات بقاء برای بالانس جرم و مومنتوم برای دو سیال فرموله شده است، که یک سیال را فاز گاز و سیال دیگر را فاز مایع تعریف خواهیم کرد. مدل ایزنتروپیک و هیچ معادله انرژی در نظر گرفته نشده است. در این قسمت معادلات حاکم بر مدل دو سیالی ارائه شده است، فرضیات حاکم عبارتند از:

- از اثرات اصطکاک دیوار با فازها و اصطکاک فصل مشترک صرف نظر شده است.
  - تنها نیروی حجمی، نیروی گرانشی است.
  - انتقال جرم بین فازها صرف نظر شده است.
- معادلات حاکم بر مدل دو سیالی تک فشار شامل دو معادله پیوستگی و دو معادله مومنتوم می باشد که معادلات (۱) و (۲) به ترتیب معادله بقای جرم گاز و معادله بقای جرم مایع هستند و معادلات (۳) و (۴) به ترتیب معادله بقای مومنتوم گاز و معادله بقای مومنتوم مایع هستند [۲۱-۲۳].

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho_g R_g) + \frac{\partial}{\partial x}(\rho_g R_g u_g) = 0 \quad (1)$$

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho_l R_l) + \frac{\partial}{\partial x}(\rho_l R_l u_l) = 0 \quad (2)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t}(\rho_g R_g u_g) + \frac{\partial}{\partial x}(\rho_g R_g u_g^2) = \\ - \frac{\partial}{\partial x}((P_g - P_{gi})R_g) - \\ R_g \frac{\partial P_{gi}}{\partial x} - \rho_g R_g G \sin \beta + F_{gw} + F_i \end{aligned} \quad (3)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t}(\rho_l R_l u_l) + \frac{\partial}{\partial x}(\rho_l R_l u_l^2) = - \frac{\partial}{\partial x}((P_l - \\ P_{li})R_l) - R_l \frac{\partial P_{li}}{\partial x} - \rho_l R_l G \sin \beta + F_{lw} - F_i \end{aligned} \quad (4)$$

که در روابط فوق برای فاز k ام (k = g) فاز گاز است و k = l فاز مایع است،  $\rho_k$  چگالی فاز k ام،  $R_k$  کسر حجمی فاز k ام،  $u_k$  سرعت فاز k ام،  $P_k$  فشار فاز k ام،  $P_{ki}$  فشار فاز k ام در

فازی از مدل دو سیالی با فرض تراکم ناپذیری فازها استفاده کرده است. انصاری و شکری [۱۴]، برای مدلسازی عددی آغازش جریان اسلاگ در کانال افقی از مدل دو سیالی با فرض تراکم ناپذیری فازها استفاده کرده اند. انصاری و دارمی زاده [۱۵]، تجزیه و تحلیل ناپایداری های هیدرودینامیکی جریان اسلاگ با استفاده از مدل دو سیالی پنج معادله ای هیپربولیک انجام شده است. آنها در مدل دو سیالی فرض کردند فاز گاز و فاز مایع تراکم پذیری هستند. با به کار گیری مدل دو سیالی، مقایسه طرح های از خانواده آ یو اس ام<sup>۱</sup> صریح و ضمنی برای جریان چند فازی تراکم پذیر انجام شده است [۱۶].

شکری و اسماعیلی [۱۷]، مقایسه اثر مدل هیدرودینامیکی و مدل هیدرو استاتیکی برای ترم تصحیح فشار موجود در مدل دو سیالی تک فشار انجام شده است. بونزانیان و همکاران [۱۸]، با اعمال ترم دیفیوژن مجازی به معادلات مدل دو سیالی تراکم ناپذیر، اثر دیفیوژن مجازی در شکل گیری و رشد جریان لخته مایع در لوله افقی و لوله شیب دار را بررسی کردند. مارکو فراری و همکاران [۱۹]، برای تسخیر لخته مایع در لوله، از مدل دوسیالی پنج معادله ای (مدل دو فشار)، گذرا، هیپربولیک استفاده کردند. آنها بیان کردن مدل دوسیالی پنج معادله ای در تمام نقاط هیپربولیک است و در مدلسازی عددی رژیم جریان لخته ای به ازای همه مقادیر سرعت برای فاز گاز و فاز مایع ناپایداری های نامحدود و غیر فیزیکی دیده نشده است.

نتو و همکاران [۲۰]، با استفاده از مدل انتقال لحظه ای آماری، میانگین و مقادیر انحراف استاندارد اندازه حساب های هوا و طول جریان اسلاگ را در جریان های افقی، شیب دار و عمودی بررسی کردند.

مدل دو سیالی با فرض تراکم پذیری فاز گاز و تراکم ناپذیری فاز مایع حل شده است. در حل عددی جریان های دو فازی به دلیل فصل مشترک تغییر شکل پذیر، خواص سیال در عبور از این فصل مشترک بصورت ناپیوسته تغییر می کنند. انتخاب مدل مناسب که بتواند این ناپیوستگی ها را در عبور از فصل مشترک پیش بینی کند بسیار مهم می باشد. از مروری بر مقالات فوق معلوم شده است که در مدلسازی عددی جریان های دو فازی گاز- مایع، از مدل دو سیالی تک فشار با فرض تراکم ناپذیری فاز مایع و مدل دو سیالی تک

<sup>1</sup> AUSM

$$-C_g^2 P_{0,l}(\rho_{0,g} - R_g \rho_g) - C_l^2 P_{0,g}(\rho_{0,l} - R_l \rho_l) + P_{0,g} P_{0,l} + P^2 = 0$$

با حل معادله درجه دوم بالا و انتخاب ریشه مثبت آن، فشار بدست می آید. مقادیر سرعت صوت فازها و مقادیر مرجع فشار و چگالی فازها در جدول (۱) ارائه شده است.

### ۳- روش حل عددی معادلات

معادلات مدل دو سیالی تک فشار را می توان با بکارگیری الگوریتم عددی تسخیر شاک پایستار به صورت رابطه (۱۳) بازنویسی کرد تا برای گسسته سازی عددی مناسب باشد [۲۹].

$$\frac{\partial Q}{\partial t} + \frac{\partial F}{\partial x} = \underbrace{H \frac{\partial R_k}{\partial x}}_{\text{غیر پایستار}} + S \quad (13)$$

Q بردار متغیرهای پایستار است. F بردار فلاکس پایستار است. دو بردار S و H به ترتیب بردار ترم چشمه و بردار فشار فصل مشترک (ترم غیر پایستار) می باشند. بردارهای مدل دو سیالی تک فشار بصورت ذیل می باشد.

$$S = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -\rho_g R_g g \sin \beta + F_{gw} + F_i \\ -\rho_g R_g g \sin \beta + F_{kw} - F_i \end{pmatrix} \quad H = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ P_i \\ P_i \end{pmatrix} \quad (14)$$

$$F = \begin{pmatrix} \rho_g R_g u_g \\ \rho_l R_l u_l \\ \rho_g R_g u_g^2 + R_g P \\ \rho_l R_l u_l^2 + R_l P \end{pmatrix} \quad Q = \begin{pmatrix} \rho_g R_g \\ \rho_l R_l \\ \rho_g R_g u_g \\ \rho_l R_l u_l \end{pmatrix}$$

الگوریتم عددی تسخیر شاک پایستار بر پایه روش گسسته سازی صریح است. بنابراین، در رابطه (۱۳) برای گسسته سازی ترم مشتق زمان از تقریب پیشرو استفاده شده است و برای گسسته سازی مشتق مکان از تقریب مرکزی استفاده شده است. برای سیستم معادلات (۱۳) فرم گسسته سازی شده معادله بصورت زیر درمی آید [۲۹]:

$$Q_j^{n+1} = Q_j^n + \frac{\Delta t}{\Delta x} (F_{j-1/2}^{nForce} - F_{j+1/2}^{nForce}) + \Delta t \left( \underbrace{H \frac{\partial R_k}{\partial x}}_{\text{غیر پایستار}} \right) + \Delta t S_j \quad (15)$$

### ۳-۱ روش عددی فورس

فلاکس فورس عددی فورس است. روش فورس یک روش مرتبه اول مرکزی می باشد و در این روش ترم فلاکس به صورت زیر محاسبه می شود [۲۹]. در واقع روش فورس

فصل مشترک است و  $\beta$  شیب لوله می باشد. نیروی اصطکاک هر فاز با دیوارها  $F_{kw}$  (علامت دیوار لوله است) و  $F_i$  نیروی اصطکاک فازها در فصل مشترک می باشد. G شتاب جاذبه است. در مدل ارائه شده، فشار فاز گاز با فشار فاز مایع برابر است  $(P_g = P_l = P)$  و فشار فازها در فصل مشترک نیز با هم برابرند  $(P_{gi} = P_{li} = P_i)$ . بنابراین، معادلات (۳) و (۴) به فرم زیر باز نویسی شده است.

$$\frac{\partial}{\partial t} (\rho_g R_g u_g) + \frac{\partial}{\partial x} (\rho_g R_g u_g^2 + R_g P) = P_i \frac{\partial R_g}{\partial x} - \rho_g R_g G \sin \beta + F_{gw} + F_i \quad (5)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} (\rho_l R_l u_l) + \frac{\partial}{\partial x} (\rho_l R_l u_l^2 + R_l P) = P_i \frac{\partial R_l}{\partial x} - \rho_l R_l G \sin \beta + F_{lw} - F_i \quad (6)$$

در معادلات مومنتوم ترم  $P - P_i$  را با  $\Delta P$  نشان می دهند و به آن ترم تصحیح فشار گفته می شود و رابطه ذیل برای محاسبه این ترم ارائه شده است [۲۴].

جدول (۱) مقادیر مرجع و ثابت مورد استفاده در زیر مدل

ترمودینامیکی.

کمیت	مایع	گاز
چگالی مرجع	$10^3 \text{ (kg/m}^3\text{)}$	0
فشار مرجع	$10^5 \text{ (pa)}$	0
سرعت صوت	$10^6 \text{ (m/s}^2\text{)}$	$10^5 \text{ (m/s}^2\text{)}$

### ۲-۱ روش تعدیل فشار لحظه ای

برای در نظر گرفتن تراکم پذیری فاز مایع نیاز به رابطه دیگر می باشد تا تعداد معادلات با تعداد مجهولات برابر باشند. با بکارگیری روش تعدیل فشار لحظه ای، رابطه مورد نیاز به مجموعه روابط اضافه می شود و می توان تراکم پذیری فاز مایع را در نظر گرفت. در روش تعدیل فشار لحظه ای فشار فاز گاز و فشار فاز مایع برابر در نظر گرفته شده است، بنابراین با فرضیات فشار مدل دو سیالی تک فشار یکسان است. اوج و فلاتن (۲۰۰۳) [۶]، رابطه (۱۱) را برای تعدیل فشار لحظه ای ارائه کردند.

$$\frac{R_g \rho_g}{\rho_g(P)} + \frac{R_l \rho_l}{\rho_l(P)} = 1 \quad (11)$$

به جای چگالی های مخرج کسر، رابطه (۹) جایگذاری شده است و در نهایت معادله درجه دوم زیر برای محاسبه ترم فشار بدست می آید.

$$P [C_l^2 (\rho_{0,l} - R_l \rho_l) + C_g^2 (\rho_{0,g} - R_g \rho_g) - (P_{0,l} + P_{0,g})] - C_g^2 C_l^2 (R_g \rho_g \rho_{0,l} + R_l \rho_l \rho_{0,g} - \rho_{0,g} \rho_{0,l}) \quad (12)$$

CFL عدد کورانت-فردریچز لوی است. در تحقیق حاضر مقدار عدد کورانت-فردریچز-لوی بین ۰/۲ تا ۰/۵ در نظر گرفته شده است.  $\lambda_{max}^n$  بیشترین مقدار سرعت موج در میدان حل در زمان  $n$  می باشد. بیشترین مقدار سرعت موج برای مدل دو سیالی، برابر است با بیشترین مقدار مشخصه معادلات حاکم در میدان حل.

$$\lambda_{max}^n = \max_j \left\{ \max_k |\lambda_j^k| \right\} \text{ for } j \quad (27)$$

$$= 1, \dots, M \quad k = 1, \text{Neq}$$

Neq تعداد معادلات سیستم می باشد.  $\lambda_i^k$  سرعت موج در هر شبکه محاسباتی می باشد. مقدار مشخصه مدل دوسیالی تک فشار در رابطه (۲۸) ارائه شده است که در آن رابطه (۲۹) تا (۳۲) بر قرار است [۶، ۱۷ و ۲۵].

$$\lambda_{\{1,2\}} = u_p \pm C_m, \quad \lambda_{\{3,4\}} = u_u \pm v \quad (28)$$

$$u_p = \frac{R_g \rho_1 u_g + R_1 \rho_g u_1}{R_g \rho_1 + R_1 \rho_g} \quad (29)$$

$$u_u = \frac{R_g \rho_1 u_1 + R_1 \rho_g u_g}{R_g \rho_1 + R_1 \rho_g} \quad (30)$$

$$v = \sqrt{\frac{\Delta P_i (R_g \rho_1 + R_1 \rho_g) - R_g R_1 \rho_1 \rho_g (u_g - u_1)^2}{(R_g \rho_1 + R_1 \rho_g)^2}} \quad (31)$$

$$C_m = \sqrt{\frac{R_g \rho_1 + R_1 \rho_g}{\left(\frac{\partial \rho_g}{\partial P}\right) R_g \rho_1 + \left(\frac{\partial \rho_1}{\partial P}\right) R_1 \rho_g}} \quad (32)$$

#### ۴- مدل سازی عددی

در این قسمت جهت مشاهده اثر تراکم پذیری فاز مایع بر دقت جواب ها، سه مسأله نمونه، شیر آب، لوله شاک سرعت نسبی بزرگ و لوله شاک تامی با استفاده از مدل دو سیالی مورد تحلیل قرار گرفته است که به ترتیب یک مسأله نمونه اول لوله عمودی و دو مسأله نمونه دوم لوله افقی هستند.

#### ۴-۱- مسأله شیر آب

این سیستم شامل یک لوله عمودی، به ارتفاع ۱۲ متر و قطر ۱ متر می باشد. در لحظه اولیه سرعت آب ۱۰ متر بر ثانیه و سرعت هوا صفر، کسر حجمی آب ۰/۸ است. فشار در انتهای لوله ۱۰۰۰۰۰ پاسکال می باشد. چگالی هوا ۱ کیلو گرم بر متر مکعب است و چگالی آب ۱۰۰۰ کیلو گرم بر متر مکعب است [۱۴]. حل تحلیلی مسأله شیر آب در مرجع (اوج و فلاتن، ۲۰۰۵) ارائه شده است. جواب های مرجع از مقاله

متوسط فلاکس های روش عددی لاکس-فریدریچز و روش عددی ریچمایر می باشد.

$$F_{j+1/2}^{nForce} = \frac{1}{2} (F_{j+1/2}^{nLF} + F_{j+1/2}^{nRI}) \quad (16)$$

$F_{j+1/2}^{nLF}$  فلاکس روش عددی لاکس-فریدریچز می باشد و  $F_{j+1/2}^{nRI}$  فلاکس روش عددی ریچمایر می باشد. در روش لاکس-فریدریچز ترم فلاکس به صورت زیر محاسبه می شود [۳۰]:

$$F_{j+1/2}^{nLF} = \frac{1}{2} (F_{j+1}^n + F_j^n) - \frac{\Delta x}{2\Delta t} (Q_{j+1}^n - Q_j^n) \quad (17)$$

در روش ریچمایر ترم فلاکس به صورت زیر محاسبه می شود [۳۰]:

$$F_{j+1/2}^{nRI} = F(Q_{j+1/2}^{n+1/2}) \quad (18)$$

$$Q_{j+1/2}^{n+1/2} = \frac{1}{2} (Q_j^n + Q_{j+1}^n) - \frac{\Delta t}{2\Delta x} (F_j^n - F_{j+1}^n) \quad (19)$$

معادلات مدل دوسیالی دارای ترم غیر پایستار  $H \partial R_k / \partial x$  می باشد که باید به صورت مناسبی گسسته سازی شود. عدم گسسته سازی مناسب این ترم سبب ایجاد ناپایداری در جوابها می شود [۱۷]. الگوریتم تسخیر شاک پایستار از یک ساختار پایستار پیروی می کند، بنابراین نیاز است ترم غیر پایستار  $H \partial R_k / \partial x$  بصورت مجزا گسسته شود. برای گسسته سازی ترم غیر پایستار  $H \partial R_k / \partial x$  رابطه ذیل ارائه شده است [۱۷].

$$H \frac{\partial R_g}{\partial x} = H R_g R_1 \frac{\partial BG}{\partial x} \quad (20)$$

$$H \frac{\partial R_1}{\partial x} = H R_1 R_g \frac{\partial BL}{\partial x} \quad (21)$$

ترم مشتق  $\partial BG / \partial x$  و  $\partial BL / \partial x$  با استفاده از تقریب مرکزی گسسته سازی شده است [۱۷].

$$H R_g R_1 \frac{\partial BG}{\partial x} = H R_g R_1 \frac{BG_{i+1} - BG_{i-1}}{2\Delta x} \quad (22)$$

$$H R_1 R_g \frac{\partial BL}{\partial x} = H R_1 R_g \frac{BL_{i+1} - BL_{i-1}}{2\Delta x} \quad (23)$$

که

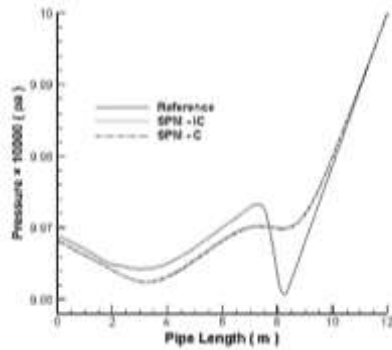
$$BG = \log \left( \frac{R_g}{R_1} \right) \quad (24)$$

$$BL = \log \left( \frac{R_1}{R_g} \right) \quad (25)$$

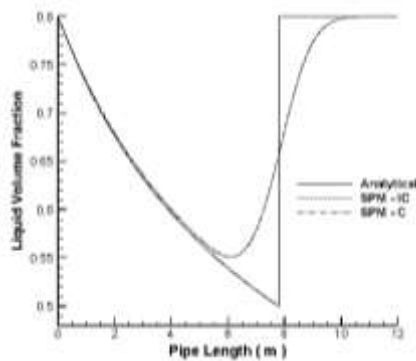
#### ۳-۲- محاسبه گام زمانی

برای محاسبه گام زمانی، ابتدا  $\Delta x$  اندازه گام مکانی مشخص می شود سپس با استفاده از رابطه زیر،  $\Delta t$  یا اندازه گام زمانی محاسبه می شود [۳۱]:

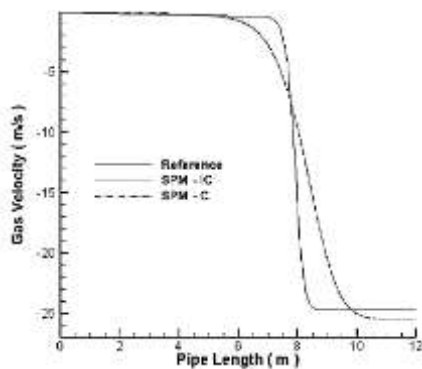
$$\Delta t = CFL \frac{\Delta x}{\lambda_{max}^n} \quad (26)$$



شکل (۱) مسأله شیر آب. مقایسه مدل تک فشار تراکم ناپذیر و مدل تک فشار تراکم پذیر. پروفیل فشار.



شکل (۲) مسأله شیر آب. مقایسه مدل تک فشار تراکم ناپذیر و مدل تک فشار تراکم پذیر. پروفیل کسر حجمی فاز مایع.



شکل (۳) مسأله شیر آب. مقایسه مدل تک فشار تراکم ناپذیر و مدل تک فشار تراکم پذیر. پروفیل سرعت فاز گاز.

#### ۴-۳- لوله شاک سرعت نسبی بزرگ

این مسأله شامل یک لوله به طول ۱۰۰ متر است که در مکان ۵۰ متری توسط دیافراگمی به دو قسمت تقسیم می شود و دو انتهای لوله بسته می باشد. مشخصات این مسأله و شرایط اولیه در سمت چپ و راست دیافراگم در جدول (۲) ارائه شده است [۴، ۱۷]. جواب های مرجع لوله شاک سرعت نسبی بزرگ از مقاله [۲۵] استخراج شده است.

(لوج و فلاتن، ۲۰۰۵) استخراج شده است. در پژوهش حاضر مدل دو سیالی تک فشار با فرض تراکم ناپذیری فاز مایع با عنوان مدل تک فشار تراکم ناپذیر و به اختصار (SPM - IC) در نظر گرفته شده است و مدل دو سیالی تک فشار با فرض تراکم پذیری فاز مایع با عنوان مدل تک فشار تراکم پذیر و به اختصار (SPM - C) در نظر گرفته شده است. در مدلسازی عددی مسأله شیر آب تعداد شبکه محاسباتی، زمان محاسباتی و عدد کورانت فریدریچز لوی به ترتیب ۳۲۰۰، ۰/۶ ثانیه و ۰/۵ در نظر گرفته شده است.

$$\Delta P = P_k - P_{ki} = \delta \frac{R_l R_g \rho_l \rho_g}{\rho_g R_l + \rho_l R_g} (u_g - u_l)^2 \quad (7)$$

مقدار  $\delta$ ، ۱/۲ در نظر گرفته شده است [۲۵]. برای برای بسته شدن سیستم معادلات روابط دیگری نیز لازم است. اولین رابطه قید هندسی است که بیان می کند مجموع کسر حجمی های دو فاز، برابر واحد است [۲۶، ۲۷]:

$$R_l + R_g = 1 \quad (8)$$

علاوه بر معادله (۸)، برای بسته شدن سیستم معادلات، زیر مدل ترمودینامیکی نیز لازم است. برای فاز  $k$  ام، رابطه خطی زیر برای بیان رابطه بین چگالی و فشار در نظر گرفته شده است [۲۸]:

$$\rho_k = \rho_{0,k} + \frac{P_k - P_{0,k}}{C_k^2} \quad (9)$$

$P_{0,k}$  و  $\rho_{0,k}$  به ترتیب مقادیر مرجع برای چگالی و فشار هستند.  $C_k$  سرعت صوت در هر فاز می باشد و به صورت زیر در نظر گرفته می شود [۲۸]:

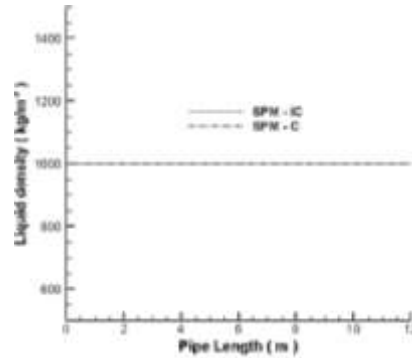
$$\frac{\partial P_k}{\partial \rho_k} = C_k^2 \quad (10)$$

مقادیر سرعت صوت فازها، مقادیر مرجع فشار و چگالی فازها در جدول (۱) ارائه شده است [۲۵]. در شکل (۴) پروفیل تغییرات چگالی فاز مایع، نتایج یکسان برای مدل تک فشار تراکم ناپذیر و مدل تک فشار تراکم پذیر نشان داده است. مسأله شیر آب در شرایط فشار اتمسفر قرار دارد، بنابراین در شرایط فشار اتمسفر چگالی فاز مایع تغییر نکرده است. با توجه به عدم تغییر چگالی فاز مایع، نتایج عددی یکسان برای پروفیل تغییرات فشار، پروفیل کسر حجمی فاز مایع، پروفیل سرعت فاز گاز به ترتیب در شکل های (۱)، (۲) و (۳) نشان داده شده است.

بنابراین در مسأله شیر آب که در شرایط فشار اتمسفری قرار دارد نتایج عددی مدل تک فشار تراکم ناپذیر با مدل تک فشار تراکم پذیر یکسان شده است.

چگالی فاز گاز و پروفیل تغییرات چگالی فاز مایع به ترتیب در شکل‌های (۵) و (۶) نشان داده است.

افزایش ۲/۵ برابری فشار نسبت به فشار اتمسفر در مسأله سرعت نسبی بزرگ، در مدل تک فشار تراکم پذیر سبب متراکم شدن فاز مایع شده است که در شکل (۷) شاهد رشد کمتر پروفیل کسر حجمی فاز مایع در مدل تک فشار تراکم پذیر نسبت به مدل تک فشار تراکم ناپذیر می باشیم. در اثر متراکم شدن فاز مایع فضای لازم جهت انبساط فاز گاز ایجاد شده است. بنابراین در شکل (۵) شاهد کاهش چگالی فاز گاز و در شکل (۶) شاهد افزایش چگالی فاز مایع در مدل تک فشار تراکم پذیر می باشیم. نتایج در شکل (۸) نشان داده است، پروفیل تغییرات فشار در مدل تک فشار تراکم پذیر افت کمی نسبت به مدل تک فشار تراکم ناپذیر داشته است. نتایج عددی نشان داده است در مسأله سرعت نسبی بزرگ، تراکم پذیری فاز مایع در مدل تک فشار تراکم پذیر سبب انحراف نتایج عددی نسبت به حل مرجع مسأله شده است.



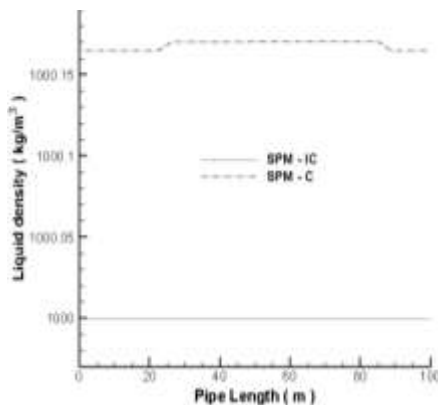
شکل (۴) مسأله شیر آب. مقایسه مدل تک فشار تراکم ناپذیر و مدل تک فشار تراکم پذیر. پروفیل چگالی فاز مایع.

در مدل‌سازی عددی مسأله لوله شاک سرعت نسبی بزرگ تعداد شبکه محاسباتی، زمان محاسباتی و عدد کورانت فریدریچز لوی به ترتیب ۱۶۰۰، ۰/۱ ثانیه و ۰/۵ در نظر گرفته شده است.

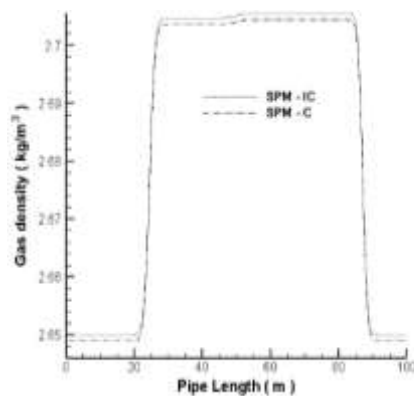
شرایط اولیه فشار در مسأله لوله شاک سرعت نسبی بزرگ ۲۶۵۰۰۰ پاسکال می باشد و تقریباً ۲/۵ برابر شرایط اولیه فشار در مسأله شیر آب می باشد. نتایج پروفیل تغییرات

جدول (۲) شرایط اولیه مسأله لوله شاک سرعت نسبی بزرگ و مسأله لوله شاک تامی.

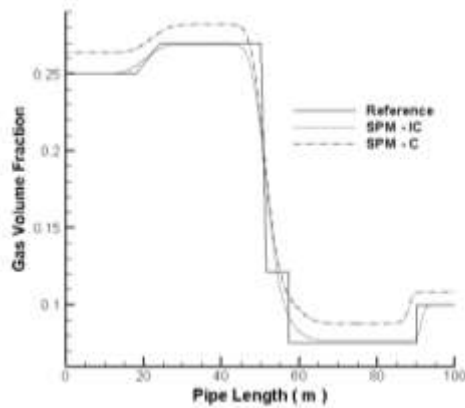
کمیت	لوله شاک سرعت نسبی بزرگ		لوله شاک تامی	
	راست	چپ	راست	چپ
کسر حجمی گاز	0.3	0.29	0.1	0.25
سرعت مایع	1 (m/s)	1 (m/s)	0	0
سرعت گاز	50 (m/s)	65 (m/s)	0	0
فشار	265 (kpa)	265 (kpa)	10 (mpa)	20 (mpa)
چگالی مایع	1000 (kg/m <sup>3</sup> )	1000(kg/m <sup>3</sup> )	1000 (kg/m <sup>3</sup> )	1000 (kg/m <sup>3</sup> )
چگالی گاز	2.65 (kg/m <sup>3</sup> )	2.65(kg/m <sup>3</sup> )	100 (kg/m <sup>3</sup> )	200 (kg/m <sup>3</sup> )



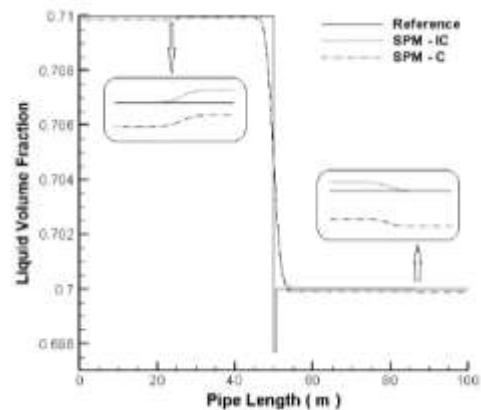
شکل (۶) مسأله سرعت نسبی بزرگ. مقایسه مدل تک فشار تراکم ناپذیر و مدل تک فشار تراکم پذیر. پروفیل تغییرات چگالی فاز مایع.



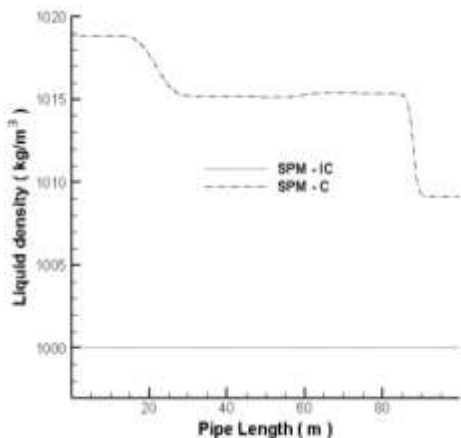
شکل (۵) مسأله سرعت نسبی بزرگ. مقایسه مدل تک فشار تراکم ناپذیر و مدل تک فشار تراکم پذیر. پروفیل تغییرات چگالی فاز گاز.



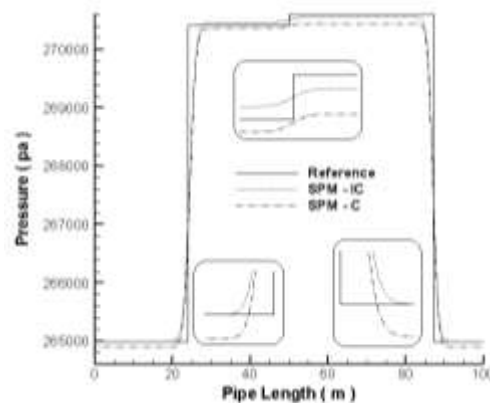
شکل (۱۱) مسأله تامی. مقایسه مدل تک فشار تراکم ناپذیر و مدل تک فشار تراکم پذیر. پروفیل کسر حجمی فاز گاز.



شکل (۷) مسأله سرعت نسبی بزرگ. مقایسه مدل تک فشار تراکم ناپذیر و مدل تک فشار تراکم پذیر. پروفیل کسر حجمی فاز مایع.



شکل (۱۲) مسأله تامی. مقایسه مدل تک فشار تراکم ناپذیر و مدل تک فشار تراکم پذیر. پروفیل تغییرات فشار.

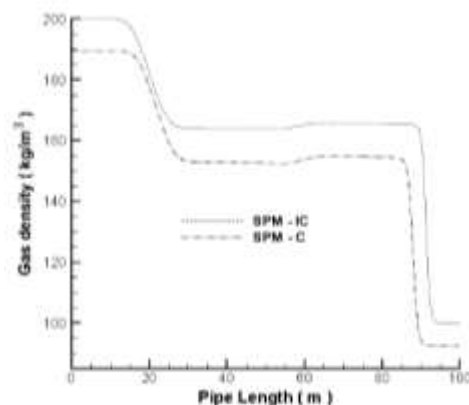


شکل (۸) مسأله سرعت نسبی بزرگ. مقایسه مدل تک فشار تراکم ناپذیر و مدل تک فشار تراکم پذیر. پروفیل تغییرات فشار.

مشخصات این مسأله و شرایط اولیه در سمت چپ و راست دیافراگم در جدول (۲) ارائه شده است [۳۲]. جواب های مرجع لوله شاک تامی از مقاله [۲۵] استخراج شده است. در مدلسازی عددی مسأله لوله شاک تامی تعداد شبکه محاسباتی، زمان محاسباتی و عدد کورانت فریدریچز لوی به ترتیب ۱۶۰۰، ۰/۸، ۰/۲ در نظر گرفته شده است. در شرایط اولیه مسأله لوله شاک تامی گرادیان شدید فشار در دو طرف دیافراگم وجود دارد. نتایج پروفیل تغییرات چگالی فاز ها در شکل های (۹) و (۱۰) نشان داده است، زمانی که در دو طرف دیافراگم گرادیان شدید فشار داشته باشیم، در مدل تک فشار تراکم پذیر چگالی فاز مایع در اثر متراکم شدن فاز مایع افزایش یافته است. در اثر متراکم شدن فاز مایع این شرایط ایجاد میشود تا پروفیل کسر حجمی فاز گاز رشد بیشتری داشته باشد که نتایج پروفیل کسر حجمی

#### ۴-۴- لوله شاک تامی

این سیستم یک لوله طول ۱۰۰ متری دارد که در مکان ۵۰ متری توسط دیافراگمی به دو قسمت تقسیم می شود و دو انتهای لوله بسته است.



شکل (۹) مسأله تامی. مقایسه مدل تک فشار تراکم ناپذیر و مدل تک فشار تراکم پذیر. پروفیل تغییرات چگالی فاز گاز.



در مدل تک فشار تراکم پذیر سبب انحراف نتایج عددی نسبت به حل مرجع مسأله لوله شاک تامی شده است. در مسأله لوله شاک تامی گرادیان شدید فشار بر مسأله حاکم است و تغییرات چگالی فاز مایع قابل توجه است. در اثر گرادیان شدید فشار فاز مایع متراکم شده است و این امکان به وجود می آید تا فاز گاز انبساط پیدا کند و کسر حجمی فاز گاز افزایش یابد. در اثر متراکم شدن فاز مایع، چگالی فاز مایع افزایش و در اثر انبساط فاز گاز، چگالی فاز گاز کاهش یافته است. با توجه به معادله (۱۲)، افت فشار در نتایج عددی مدل تک فشار تراکم پذیر ناشی از تغییرات چگالی و تغییرات کسر حجمی فازها در مدل تک فشار تراکم پذیر است.

#### ۶- مراجع

- [1] Omgba-Essama, C., Numerical Modelling of Transient Gas-Liquid Flows (Application to Stratified & Slug Flow Regimes), Thesis, 2004.
- [2] Ishii, M., "Thermo-Fluid Dynamic Theory of Two-Phase Flow", Eyrolles, Paris 1975.
- [3] Ishii, M., Mishima, K., "Two-Fluid Model and Hydrodynamic Constitutive Relations", Nuclear Engineering and Design, Vol.82, No.2, pp.107-126, 1984.
- [4] Cortes, J., Debussche, A., Toumi, I., "A Density Perturbation Method to Study the Eigenstructure of Two-Phase Flow Equation Systems", Journal of Computational Physics, Vol.147, No.2, pp.463-484, 1998.
- [5] Song, J.H., Ishii, M., "The Well-Posedness of Incompressible One-Dimensional Two-Fluid Model", International Journal of Heat and Mass Transfer, Vol.43, No.12, pp.2221-2231, 2000.
- [6] Evje, S., Flåtten, T., "Hybrid Flux-Splitting Schemes for a Common Two-Fluid Model", Journal of Computational Physics, Vol.192, No.1, pp.175-210, 2003.
- [7] Issa, R., Kempf, M., "Simulation of Slug Flow in Horizontal and Nearly Horizontal Pipes with the Two-Fluid Model", International journal of Multiphase Flow, Vol.29, No.1, pp.69-95, 2003.
- [8] Liao, J., "Modeling Two-Phase Transport During Cryogenic Chilledown in a Pipeline: University of Florida Gainesville, FL, 2005.
- [9] Issa, R., Bonizzi, M., Barbeau, S., "Improved Closure Models for Gas Entrainment and Interfacial Shear for Slug Flow Modelling in Horizontal Pipes", International journal of Multiphase Flow, Vol.32, No.10, pp.1287-1293, 2006.
- [10] Hanyang, G., Liejin, G., "Stability of Stratified Gas-Liquid Flow in Horizontal and Near Horizontal Pipes\*\* Supported by the National Natural Science Foundation of China (No.

فاز گاز برای مدل تک فشار تراکم ناپذیر و مدل تک فشار تراکم پذیر در شکل (۱۱) نشان داده است.

در مدل تراکم ناپذیر، پروفیل فشار با استفاده از معادله خطی (۱۰) محاسبه شده است. نتایج در شکل (۱۲) نشان داده است، پروفیل تغییرات فشار در مدل تک فشار تراکم پذیر افت بیشتری نسبت به مدل تک فشار تراکم ناپذیر داشته است. در مدل تک فشار تراکم پذیر فشار با استفاده معادله غیر خطی (۱۲) محاسبه شده است. معادله (۱۲) تابع متغیرهای جریان است  $(P = P(\rho_g R_g, \rho_l R_l))$ ، بنابراین تغییرات چگالی و تغییرات کسر حجمی فازها بر محاسبه ترم فشار تاثیر گذاشته است و سبب افت فشار شده است. با توجه به اینکه در مسأله لوله شاک تامی گرادیان شدید فشار وجود دارد، میزان تغییرات چگالی فاز مایع در مدل تک فشار تراکم پذیر زیاد بود و سبب انحراف نتایج عددی مدل تک فشار تراکم پذیر نسبت به حل مرجع شده است.

برای ارزیابی کمیت نتایج بدست آمده، پروفیل تغییرات فشار در ناحیه دیافراگم که ناپیوستگی بین فازها شکل می گیرد مورد بررسی قرار گرفته است. در مسأله شیر آب مقادیر تغییرات فشار بدست آمده در مدل تک فشار تراکم ناپذیر با مدل تک فشار تراکم پذیر یکسان است.

در مسأله لوله شاک سرعت نسبی بزرگ مقدار تغییرات فشار بدست آمده در ناحیه دیافراگم در مدل تک فشار تراکم پذیر دارای انحراف کمتر از ۰/۰۵ درصد نسبت به مدل تک فشار تراکم ناپذیر است و در مسأله لوله شاک تامی مقدار تغییرات فشار بدست آمده در ناحیه دیافراگم در مدل تک فشار تراکم پذیر دارای انحراف تقریباً ۷ درصد نسبت به مدل تک فشار تراکم ناپذیر است.

#### ۵- جمع بندی

فشار حاکم بر مسأله شیر آب برابر فشار اتمسفر است و شرایط فشار حاکم بر مسأله لوله شاک سرعت نسبی بزرگ تقریباً ۲/۵ برابر فشار اتمسفر است. بررسی ها نشان داده است، در مسأله شیر آب و مسأله لوله شاک سرعت نسبی بزرگ نتایج مدل تک فشار تراکم ناپذیر و مدل تک فشار تراکم پذیر تقریباً یکسان بوده است. بنابراین، زمانی که شرایط فشار حاکم بر مسأله برابر فشار اتمسفر باشد یا در محدود فشار اتمسفر باشد تغییرات چگالی فاز مایع قابل توجه نمی باشد و قابل صرف نظر کردن است. نتایج عددی متغیرهای جریان نشان داده است تراکم پذیری فاز مایع

- [22] Emamzadeh M., Issa, R.I., "A Model for Predicting the Transition Between Stratified and Annular Flow in Horizontal Pipes", *Multiphase Science and Technology*, Vol.25, No.1, 2013.
- [23] Figueiredo, A.B., Baptista, R.M., de, F.B. Freitas Rachid, Bodstein G.C., "Numerical Simulation of Stratified-Pattern Two-Phase Flow in Gas Pipelines using a Two-Fluid Model", *International Journal of Multiphase Flow*, Vol.88, pp.30-49, 2017.
- [24] Ndjinga, M., Chalons, C., "Numerical Simulation of an Incompressible Two-Fluid Model", in: *Finite Volumes for Complex Applications VII- Elliptic, Parabolic and Hyperbolic Problems*, Eds., pp.919-926, 2014.
- [25] Evje, S., Flåtten, T., "Hybrid Central-Upwind Schemes for Numerical Resolution of Two-Phase Flows", *ESAIM: Mathematical Modelling and Numerical Analysis*, Vol.39, No.2, pp.253-273, 2005.
- [26] Abood, S., Abdulwahid M., Almudhaffar M., "Comparison Between the Experimental and Numerical Study of (air-oil) Flow Patterns in Vertical Pipe", *Case Studies in Thermal Engineering*, Vol.14, pp.100424, 2019.
- [27] Ban, S., Pao W., Nasif M.S., "Numerical Simulation of Two-Phase Flow Regime in Horizontal Pipeline and its Validation", *International Journal of Numerical Methods for Heat & Fluid Flow*, Vol.28, No.6, pp.1279-1314, 2018.
- [28] Munkejord S.T., Hammer M., "Depressurization of CO<sub>2</sub>-Rich Mixtures in Pipes: Two-Phase Flow Modelling and Comparison with Experiments", *International Journal of Greenhouse Gas Control*, Vol.3, pp. 398-411, 2015.
- [29] Toro, E. F., "Riemann Solvers and Numerical Methods for Fluid Dynamics: a Practical Introduction", Springer Science & Business Media, 2013.
- [30] Hirsch, C., "Numerical Computation of Internal and External Flows: The Fundamentals of Computational Fluid Dynamics: Butterworth-Heinemann, 2007.
- [31] Shekari, Y., Hajidavalloo, E., "Application of Osher and PRICE-C Schemes to Solve Compressible Isothermal Two-Fluid Models of Two-Phase Flow", *Computers & Fluids*, Vol.86, pp.363-379, 2013.
- [32] Toumi, I., "An Upwind Numerical Method for Two-Fluid Two-Phase Flow Models", *Nuclear Science and Engineering*, Vol.123, No.2, pp.147-168, 1996.
- [11] Ansari, M., Shokri, V., "New Algorithm for the Numerical Simulation of Two-Phase Stratified Gas-Liquid Flow and its Application for Analyzing the Kelvin-Helmholtz Instability Criterion with Respect to Wavelength Effect", *Nuclear Engineering and Design*, Vol.237, No.24, pp.2302-2310, 2007.
- [12] Holmås, H., Sira, T., Nordsveen, M., Langtangen, H., Schulkes, R., "Analysis of a 1D Incompressible Two-Fluid Model Including Artificial Diffusion", *IMA Journal of Applied Mathematics*, Vol.73, No.4, pp.651-667, 2008.
- [13] Holmås, H., "Numerical Simulation of Transient Roll-Waves in Two-Phase Ripe Flow", *Chemical Engineering Science*, Vol.65, No.5, pp.1811-1825, 2010.
- [14] Ansari M., Shokri V., "Numerical Modeling of Slug Flow Initiation in a Horizontal Channels using a Two-Fluid Model", *International Journal of Heat and Fluid Flow*, Vol.32, No.1, pp.145-155, 2011.
- [15] Ansari, M., Daramizadeh, A., "Slug Type Hydrodynamic Instability Analysis using a Five Equations Hyperbolic Two-Pressure, Two-Fluid Model", *Ocean Engineering*, Vol.52, pp.1-12, 2012.
- [16] Zeng, Q., Aydemir, N., Lien, F., Xu, T., "Comparison of Implicit and Explicit AUSM-Family Schemes for Compressible Multiphase Flows", *International Journal for Numerical Methods in Fluids*, Vol.77, No.1, pp.43-61, 2015.
- [17] Shokri, V., Esmaili, K., "Comparison of the Effect of Hydrodynamic and Hydrostatic Models for Pressure Correction Term in Two-Fluid Model in Gas-Liquid Two-Phase Flow Modeling", *Journal of Molecular Liquids*, Vol.237, pp.334-346, 2017.
- [18] Bonzanini, A., Picchi, D., Poesio, P., "Simplified Compressible Two-Fluid Model with Artificial Diffusion for Slug Flow Capturing in Horizontal and Nearly Horizontal Pipes", *Energies*, Vol.10, No.9, pp.1372, 2017.
- [19] Ferrari, M. Bonzanini, Poesio A.P., "A 5-Equation, Transient, Hyperbolic, 1-dimensional Model for Slug Capturing in Pipes", *International Journal for Numerical Methods in Fluids*, Vol.85, No.6, pp.327-362, 2017.
- [20] Netto, J.F., Gonçalves, G., Freire A.S., "Statistical Moments Transport Model for the prediction of slug flow properties", *International Journal of Multiphase Flow*, Vol.120, pp.103086, 2019.
- [21] Emamzadeh, M., Issa, R. I., "One Dimensional Model for Numerical Simulation of Annular Flow in Horizontal and Vertical Pipes", *Multiphase Science and Technology*, Vol.25, No.1, 2013.