طراحی یک روش کنترل مد لغزشی انتگرالی تطبیقی برای پایدارسازی زمان محدود و مقاوم پرنده چهارملخه

علیرضا مدیرروستا[۱]، دانشجوی کارشناسی ارشد؛ مهدی خدابنده[۲]، استادیار

۱- دانشکده مهندسی برق - دانشگاه صنعتی همدان - همدان - ایران - alirezamodirrousta@stu.hut.ac.ir
۲- دانشکده مهندسی برق - دانشگاه صنعتی همدان - همدان - ایران - khodabandeh@hut.ac.ir

چکیده: در این مقاله، پایدارسازی زمان محدود، برای یک ربات پرنده چهارملخه (Quadrotor) بر مبنای یک روش کنترل مد لغزشی انتگرالی تطبیقی با سطح لغزش ترمینال غیر تکین ارائه شده است. در ابتدا مدل سیستم معرفی شده و به دو سیستم با تحریک کامل و با تحریک محدود تقسیم می‌شود. سپس کنترل‌کننده جدیدی بر مبنای هندسه همگنی و کنترل مد لغزشی برای این دو سیستم ارائه می‌شود. هدف از این روش، ارائه یک کنترل‌کننده مقاوم نسبت به اغتشاش خارجی و عدم قطعیت‌های نامعلوم سیستم است. برای بهبود و بالا بردن دقت ردیابی و عملکرد کنترل‌کننده در حضور اغتشاش خارجی انتگرال خطا به‌عنوان متغیر جدید حالت به مجموعه خطاهای ردیابی سیستم اضافه شده است. در پایان، برای اثبات کارایی و مقاوم بودن کنترل‌کننده پیشنهادی، نتایج شبیه‌سازی و مقایسه در حضور اغتشاشات خارجی و عدم قطعیت ارائه شده است.

واژه‌های کلیدی: پرنده چهارملخه، کنترل مد لغزشی انتگرالی تطبیقی، پایدارسازی زمان محدود، عدم‌قطعیت روی اینرسی، اغتشاش خارجی.

Design of an Adaptive Integral Sliding Mode Control for Robust and Finite Time Stabilization for a Quadrotor

Alireza Modirrousta[1], MSc Student; Mehdi Khodabandeh[2], Assistant Professor

1- Faculty of Electrical Engineering, Hamedan University of Technology, Hamedan, Iran, Email: alirezamodirrousta@stu.hut.ac.ir
2- Faculty of Electrical Engineering, Hamedan University of Technology, Hamedan, Iran, Email: khodabandeh@hut.ac.ir

Abstract: In this paper, finite time stabilization for a quadrotor has been presented based on an adaptive sliding mode control with nonsingular terminal surface. The introduced system model has been divided into the full actuated and under actuated system. Then, a new controller based on homogeneity geometry and sliding mode control has been proposed for these two subsystems. The main purpose of the control scheme is proposing a robust controller against the unknown uncertainty and external disturbance. The integral error has been added into the set of tracking errors to raise the tracking accuracy and to improve the controller performance against external disturbance. Finally, the results of the simulation and comparison study in the presence of inertia uncertainty and external disturbance have been presented to demonstrate the robustness and high performance of the controller.

Keywords: Quadrotor, Adaptive integral sliding mode control, Finite time stabilization, Inertia uncertainty, External disturbance.

تاریخ ارسال مقاله: ۱۳۹۳/۰۵/۲۵
تاریخ اصلاح مقاله: ۱۳۹۳/۰۷/۲۰، ۱۳۹۳/۰۹/۱۱ و ۱۳۹۳/۱۰/۰۷
تاریخ پذیرش مقاله: ۱۳۹۳/۱۲/۲۷

نام نویسنده مسئول: مهدی خدابنده
نشانی نویسنده مسئول: ایران - همدان - بلوار شهید فهمیده - خیابان مردم - دانشگاه صنعتی همدان.

۱- مقدمه

پرنده بدون سرنشین[1] (UAV) چهارملخه یکی از پرکاربردترین خودروهای بدون سرنشین است که اخیراً مورد توجه محققان قرار گرفته است. ازجمله کاربردهای پرنده چهارملخه در هدایت، نقشه‌برداری از مناطق صعب‌العبور، رهایی و نجات، اجرای قانون و حمل‌ونقل است [۳-۱]. علاوه بر این، در این زمینه هنوز چالش‌های زیادی در مهندسی ازجمله در مهندسی برق، مکانیک و کنترل وجود دارد. پرنده چهارملخه جزو هواپیماهایی با امکان فرود و برخاست عمودی[2] (VTOL) طبقه‌بندی می‌شوند. این نوع از پرنده‌ها مزایای زیادی نسبت به هواپیماهای ملخ‌دار گذشته و متداول دارند. در پرنده چهارملخه، حرکت‌های طولی توسط تغییر سرعت در ملخک جلویی و عقبی به‌دست می‌آید. جابه‌جایی عرضی توسط ملخک‌های سمت چپ و راست ایجاد می‌شود و جابه‌جایی در محور عمودی توسط اختلاف بین هر جفت از ملخک‌ها ایجاد می‌شود. به‌طور مثال دو ملخک در جهت عقربه‌های ساعت و دوتای دیگری در خلاف جهت آن می‌چرخند و ایجاد شتاب در محور عمودی می‌کنند.

این نوع از خودروها دارای تحریک محدود[3] می‌باشند. به‌طور مثال با وجود ۶ درجه آزادی برای سیستم تنها چهار عملگر برای کنترل آن وجود دارد. این چهار تحریک‌کننده گشتاور و نیروی ناشی از الکتروموتورهای مرتبط با هر ملخک می‌باشند. بنابراین روش‌های مرسوم برای کنترل سیستم‌های مکانیکی با تحریک کامل ازجمله رباتهای مختلف در اینجا به‌طور مستقیم قابل استفاده نیست [۴]. برای دست‌یابی به هدف پرواز هوشمند با عملکرد و کیفیت بالا نیاز به مدل‌سازی سیستم وجود دارد. روش‌های مدل‌سازی غیر خطی در سال‌های اخیر توسعه یافته است و در این مقاله از مدل پرنده به‌دست‌آمده در مقالات [۷-۵] استفاده شده است. مدل‌سازی به‌کاررفته بر اساس روش لاگرانژ و برخی از فرض‌های معمول و عملی به‌کار گرفته‌شده در آن است. در اینجا برخی از روش‌های مختلفی را که در سال‌های اخیر برای کنترل پرنده چهارملخه استفاده شده است؛ مرور می‌کنیم. در میان روش‌هایی که برای کنترل پرنده بدون سرنشین چهارملخه به‌کار گرفته شده است، روش خطی‌سازی فیدبک [۱۰-۸] و روش پس‌گام[4][۱۱] بیشترین کاربرد و استفاده را داشته‌اند. اگرچه زمانی که اطلاعات دقیقی نسبت به دینامیک سیستم وجود نداشته باشد و یا اگر سیستم در معرض اغتشاشات خارجی و نویز قرار داشته باشد، استفاده از مدل ساده این روش‌ها عملاً مناسب نیست، زیرا که دینامیک‌های مدل‌نشده و اغتشاش خارجی سبب ناپایداری در حرکت پرنده می‌شوند و امکان جبران اثر آن‌ها توسط این روش وجود ندارد. در میان روش‌های کنترل غیر خطی، روش کنترل مد لغزشی[5] به‌علت مقاومت بالا مناسب به نظر می‌رسد. بنابراین در ادامه به بررسی روش‌های مبتنی بر کنترل مد لغزشی می‌پردازیم. روش متداول کنترل لغزشی برای بهبود عملکرد مقاوم کنترل‌کننده پرواز پرنده چهارملخه در [۱۲] به‌کار رفته است. در این مقاله به‌علت وجود تابع علامت در سیگنال کنترل، نوسان شدیدی در نقطه تعادل سطح لغزش وجود دارد. با وجود این‌که این روش مقاوم است ولی نیاز به اطلاع از اندازه کران بالای نامعینی‌ها و اغتشاش سیستم، این روش را ناکارآمد کرده است. همچنین در این مقاله به ازای هر درجه آزادی و به کمک ساختن ورودی کنترل مجازی، از یک سطح لغزش تعریف استفاده شده است و در انتها باید مقادیر عملی وضعیت پرنده از روی ورودی‌های مجازی به‌دست آورده شوند. در بسیاری از مقالات دیگر که برخی در ادامه معرفی می‌شوند، از روش مشابه و یا روابط دینامیک معکوس برای ایجاد ورودی کنترل مجازی استفاده شده است. در [۱۳] از روش کنترل مد لغزشی ساده و کنترل تطبیقی برای پایدارسازی و کنترل وضعیت پرنده و تخمین برخی از پارامترهای نامعلوم سیستم استفاده شده است. در مرجع [۱۴]، به کمک روش کنترل مد لغزشی و طراحی رویتگر برای اغتشاش، مقاومت سیستم در برابر اغتشاش و عدم قطعیت بهبود یافته است و دیگر نیازی به بالا بردن بهره برای جبران اثر و تغییرات ناشی از اغتشاش نیست و کنترل‌کننده طراحی‌شده به‌سرعت این تغییرات را جبران می‌کند. در مرجع [۱۵] نیز یک روش کنترل مد لغزشی مرتبه دو برای سیستم با تحریک محدود پرنده ارائه شده است، البته اغتشاش تنها روی مدل حرکت انتقالی پرنده در نظر گرفته شده است. در این روش، محدوده مشخصی برای تعیین پارامترهای سطح لغزش وجود دارد که بر اساس این مقادیر پایداری سطح لغزش برقرار خواهد بود. بنابراین، عدم امکان استفاده از این مقادیر در محدوده‌های مختلف برای سطح لغزش، سبب کاهش شدید انعطاف‌پذیری کنترل‌کننده و رفتار پرنده می‌شود. مقاله [۱۶]، کنترل‌کننده‌ای بر پایه تکنیک پس گام بلوکی با الگوریتم پیچش فوق‌العاده[6] کنترل مد لغزشی ترکیب شده است تا ردیابی مسیر حرکتی پرنده برقرار شود. روش کنترل مد لغزشی مرتبه بالاتر[7] برای افزایش مقاومت سیستم در مقابل دینامیک‌های مدل نشده و پارامترهای نامعین ارائه شده و همچنین برای رؤیت و تخمین اغتشاش در [۱۷] ارائه شده است. مرجع [۱۸] نیز روش‌های کنترل مد لغزشی به نام پیچش فوق‌العاده را برای کنترل حرکت پرنده ارائه کرده است، در این روش نیز، برای هر خروجی یک کنترل‌کننده در نظر گرفته شده است. در این مقاله از دو انتگرال‌گیر برای افزایش درجه نسبی سیستم و ایجاد مشتق‌گیر مقاوم استفاده شده است. همچنین به‌تازگی روش کنترل مد لغزشی برای سیستم‌های با تحریک محدود بهبود داده شده است [۱۹]. در مقاله [۲۰] کنترل‌کننده‌ای مقاوم بر این اساس و با سطح لغزش متداول برای سیستم‌هایی با درجه بالاتر طراحی شده است.

کنترل مد لغزشی به‌علت خطای کم و سادگی کاربرد آن، یکی از مهم‌ترین روش‌های کنترل غیر خطی است [۲۱]. درواقع روش مد لغزشی به دو قسمت: اول انتخاب سطح لغزش پایدار و دوم انتخاب قانون کنترل مناسب تقسیم می‌شود. در این مقاله روش کنترل مد لغزشی با یک سطح لغزش انتگرالی غیر تکین ترمینال و پایداری زمان محدود برای یک هواپیمای چهارملخه بدون سرنشین به‌گونه‌ای ارائه

شده است که نسبت به اغتشاشات خارجی و عدم قطعیت کران‌دار پارامترهای مشخص‌شده مقاوم باشد. همچنین با در نظر گرفتن چند تقریب منطقی مدل سیستم به‌گونه‌ای به‌دست آمده که از حداقل پیچیدگی ممکن در طراحی کنترل‌کننده برای سیستم با تحریک محدود برخوردار باشد. در این مقاله، پس از ارائه سطح لغزش فوق، با استفاده از کنترل تطبیقی و طراحی قانون کنترل مناسب، یک کنترل‌کننده مقاوم برای تمام سیستم طراحی می‌شود. درواقع به کمک این روش نیازی به اطلاعاتی از کران بالای اغتشاشات سیستم و عدم قطعیت‌های تعریف‌شده نیست. همچنین یک متغیر انتگرالی به متغیرها و حالت‌های سیستم اضافه می‌گردد تا دقت ردیابی و عملکرد روش ارائه‌شده را در برابر اغتشاش و عدم قطعیت بهبود دهد. واضح است که متناسب با متغیر انتگرالی اضافه‌شده، تعریف سطح لغزش نیز تغییر پیدا کرده است. علاوه بر این، یک کران بالا برای عدم قطعیت در نظر گرفته‌شده و مقادیر ثابت نامعلوم آن به کمک کنترل تطبیقی تخمین زده شده است. همچنین قانون کنترل در حضور سطح لغزش ناتکین ترمینال انتگرالی برای سیستم با تحریک محدود، طوری بهبود داده شده است که علاوه بر این‌که اغتشاش را در محل سیگنال کنترل (که در معادلات مربوط به متغیرهای حالت شامل زوایای رول[8] و پیچ[9] وارد می‌شود) لحاظ کرده، اثر اغتشاش را برای متغیرهای موقعیت x وy نیز در نظر گرفته است.

سازمان‌دهی مقاله بدین شرح است: در بخش دوم، نمایش سیستم در مدل فضای حالت سیستم معرفی شده است، کنترل‌کننده ارائه‌شده برای حرکت عرضی، طولی و عمودی سیستم در بخش سوم معرفی می‌گردد. در بخش چهارم، شبیه‌سازی‌های عددی به‌عمل آمده تا مؤثر بودن استراتژی کنترلی پیشنهادی را در حضور اغتشاشات خارجی اثبات نماید. در بخش پنجم نیز نتیجه‌گیری به‌دست‌آمده از روش طراحی‌شده تشریح می‌شود.

۲- مدل پرنده چهارملخه

برای محاسبه دینامیک پرنده از روش لاگرانژین [۵] استفاده شده است. همچنین ماتریس انتقال از $[\phi\theta\psi]^T$ به $[pqr]^T$ به‌صورت

$$\begin{bmatrix} p \\ q \\ r \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -\sin\theta \\ 0 & \cos\phi & \sin\phi\cos\theta \\ 0 & -\sin\phi & \cos\phi\cos\theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\phi} \\ \dot{\theta} \\ \dot{\psi} \end{bmatrix}$$

بیان می‌شود که $[\phi\theta\psi]^T$ سرعت زاویه پرنده را در چارچوب مرجع نشان می‌دهد. ϕ، θ و ψ زوایای اویلر[10] هستند که به‌ترتیب به آن‌ها زوایای رول، پیچ و یاو[11] گفته می‌شود. به‌طور مشابه، $[pqr]^T$ سرعت زاویه‌ای را در چارچوب بدنه پرنده نشان می‌دهد.

از آن‌جایی‌که دینامیک چهار روتور بسیار سریع‌تر از دینامیک سیستم اصلی است، در اینجا از آن صرف‌نظر شده است. می‌توان در نظر گرفت که سرعت زاویه‌ای در دو قاب مرجع و قاب پرنده، یکی است. این فرض زمانی که پرنده در حالت شناور[12] و یا حالت شبیه آن پرواز می‌کند، جایی که پرنده چهارملخه معمولاً به این شکل پرواز می‌کند، قابل قبول است.

مدل پرنده چهارملخه در چارچوب اختیاری نسبت به چارچوب مرجع برای حرکت انتقالی و دورانی همان‌طور که در بسیاری از مقالات مرجع مانند [۱] و [۱۲-۵]، [۱۵]، [۱۹، ۲۰] آمده است؛ با در نظر گرفتن فرض‌های ساده و عملی فوق مطابق با معادلات زیر به‌دست‌آمده می‌آید. در ابتدا معادلات حرکت انتقالی معرفی می‌گردد:

$$\begin{cases} \ddot{x} = \dfrac{1}{m}(\cos\phi\sin\theta\cos\psi + \sin\phi\sin\psi)u_1 \\ \ddot{y} = \dfrac{1}{m}(\cos\phi\sin\theta\sin\psi - \sin\phi\cos\psi)u_1 \\ \ddot{z} = \dfrac{1}{m}(\cos\phi\cos\theta)u_1 - g \end{cases} \quad (۱)$$

واضح است که x، y و z بیانگر موقعیت نسبی پرنده در مختصات دکارتی می‌باشند.

تذکر (۱): برای ساده‌نویسی و اجتناب از طولانی شدن روابط تابعیت زمان برای متغیرها حذف شده است.

همچنین معادلات حرکت دورانی پرنده چهارملخه به‌شکل زیر قابل بیان است:

$$\begin{cases} \ddot{\phi} = \dot{\theta}\dot{\psi}\dfrac{I_y - I_z}{I_x} + \dfrac{J_r}{I_x}\dot{\theta}\Omega_r + \dfrac{l}{I_x}u_2 \\ \ddot{\theta} = \dot{\psi}\dot{\phi}\dfrac{I_z - I_x}{I_y} - \dfrac{J_r}{I_x}\dot{\phi}\Omega_r + \dfrac{l}{I_y}u_3 \\ \ddot{\psi} = \dot{\phi}\dot{\theta}\dfrac{I_x - I_y}{I_z} + \dfrac{l}{I_z}u_4 \end{cases} \quad (۲)$$

در عمل شرایط زیر برای زوایای اویلر برقرار است:

$$\phi \in (-\pi/2, \pi/2), \theta \in (-\pi/2, \pi/2), \psi \in (-\pi, \pi)$$

که در آن، $\Omega_r = \Omega_1 - \Omega_2 + \Omega_3 - \Omega_4$ و Ω_i سرعت زاویه‌ای ملخک iام را برای i=1, 2, 3, 4 نشان می‌دهد. I_x، I_y و I_z اینرسی متناسب با محورهای دکارتی را نشان می‌دهند. همچنین سیگنال کنترل در معادلات (۱) و (۲) به‌شکل زیر به‌دست آورده می‌شوند:

$$\begin{aligned} u_1 &= (F_1 + F_2 + F_3 + F_4) \\ u_2 &= (-F_2 + F_4) \\ u_3 &= (-F_1 + F_3) \\ u_4 &= d(-F_1 + F_2 + F_3 + F_4)/b \end{aligned} \quad (۳)$$

که در آن، $F_i = b\Omega_i^2$ نیروی پرتابی تولیدشده به‌وسیله چهار ملخک هواپیما یا پرنده را نشان می‌دهد. در واقع این نیرو است که ورودی واقعی سیستم دینامیکی را تشکیل می‌دهد و در نهایت به کمک کنترل‌کننده طراحی‌شده سبب پایداری حرکت پرنده می‌شود. همچنین b و d به‌ترتیب نشان‌دهنده ضریب بالابری[13] و عامل تغییر مقیاس نیرو به گشتاور می‌باشند.

۳- طراحی کنترل‌کننده برای پرنده چهارملخه

در این بخش، مدل پرنده به دو مجموعه با تحریک کامل و دیگری مدل با تحریک محدود تقسیم می‌کنیم. حرکت عمودی سیستم شامل حرکت انتقالی در محور z و حرکت چرخشی حول آن (زاویه یاو) به‌عنوان سیستم کاملاً تحریک‌شده در نظر گرفته می‌شود. ازآنجایی‌که حرکت انتقالی و چرخشی حول محور x و y تنها توسط دو تحریک‌کننده قابل کنترل هستند، این مجموعه را که از ۴ خروجی مفروض تنها دو ورودی کنترل دارد، سیستم با تحریک محدود می‌نامیم. خروجی هریک از این سیستم‌ها توسط یک کنترل‌کننده غیر خطی هدایت می‌شود که هر دو کنترل‌کننده بر اساس کنترل مد لغزشی انتگرالی ناتکین ترمینال، کنترل تطبیقی و متناسب با مرتبه آن طراحی می‌شوند.

۳-۱- طراحی کنترل‌کننده برای سیستم با تحریک کامل

همان‌طور که گفته شد، مدل پرنده چهارملخه را می‌توان به دو سیستم تحریک محدود و تحریک کامل تقسیم کرد، در این بخش یک کنترل‌کننده و پایدارسازی برای سیستم شامل حرکت و دوران حول محور z طراحی می‌شود.

مدل سیستم با تحریک کامل به‌کمک اضافه کردن متغیر کمکی انتگرالی و در نظر گرفتن خطای ردیابی به‌شکل زیر قابل بیان است:

$$\begin{aligned}
&\dot{\xi}_1 = e_1\\
&\dot{e}_1 = e_2\\
&\dot{e}_2 = f_1 + g_1U_1 + d_1\\
&e_1 = \left[z - z_d, \psi - \psi_d\right]^T, e_2 = \left[\dot{z} - \dot{z}_d, \dot{\psi} - \dot{\psi}_d\right]^T
\end{aligned} \qquad (۴)$$

متغیرهای خطای حالت سیستم کاملاً تحریک‌شده می‌باشند و $\left[z_d, \psi_d\right]^T$ مقادیر مطلوب ارتفاع و دوران حول محور z هستند و همچنین داریم:

$$g_1 = \left[\frac{1}{m}(\cos\phi\cos\theta), 0; 0, \frac{l}{I_z}\right],$$

$$f_1 = \left[-g - \ddot{z}_d, \dot{\phi}\dot{\theta}\frac{I_x - I_y}{I_z} - \ddot{\psi}_d\right]^T,$$

$U_1 = \left[u_1, u_4\right]^T$ و $d_1 = \left[d_z, d_\psi\right]^T$ اثر اغتشاش خارجی روی پرنده است.

فرض (۱): تمام اغتشاش‌های در نظر گرفته‌شده روی دینامیک سیستم کران‌دار بوده و در شرط $\left|d_z\right| < \rho_2, \left|d_\psi\right| < \rho_1$ صدق می‌کنند. به‌طوری که ρ_1 و ρ_2 اعدادی ثابت، مثبت و نامشخص هستند و بقیه پارامترها بعداً تعریف می‌شوند.

حال با در نظر گرفتن قضیه زیر به طراحی سطح لغزش مناسب برای سیستم می‌پردازیم.

قضیه (۱) [۲۲]: فرض کنید که $k_1, k_2, ..., k_n > 0$ به‌گونه‌ای انتخاب شوند که چندجمله‌ای $s^n + k_n s^{n-1} + ... + k_2 s + k_1 = 0$ پایدار هورویتز باشد، حال سیستم زیر را در نظر بگیرید:

$$\begin{aligned}
\dot{x}_1 &= x_2\\
\dot{x}_2 &= x_3\\
&\ldots\\
\dot{x}_{n-1} &= x_n\\
\dot{x}_n &= \omega_{nom}
\end{aligned}$$

به ازای فیدبک زیر و مقادیر درستی از $0 < \alpha < 1$، سیستم در زمان محدودی در نقطه تعادل خود به پایداری می‌رسد:

$$\omega_{nom} = -k_1 sign(x_1)\left|x_1\right|^{\alpha_1} - .... - k_n sign(x_n)\left|x_n\right|^{\alpha_n} \qquad (۵)$$

که در آن، $\alpha_{i-1} = \frac{\alpha_i \alpha_{i+1}}{2\alpha_{i+1} - \alpha_i}$ برای i=2, ..., n و $\alpha_n = 1, \alpha_{n+1} = \alpha$ برقرار می‌باشد.

برای بهبود ردیابی سیستم و همگرایی زمان محدود خطاهای سیستم به‌سمت نقطه تعادل صفر کافی است دو سطح لغزش انتگرالی ناتکین ترمینال بر اساس قضیه (۱) به‌شکل زیر تعریف کنیم:

$$s_{1,2} = e_2 - e_2(0) - \int_0^t \omega_{1,2} d\tau \qquad (۶)$$

که در آن، $s_{1,2} = \left[s_1, s_2\right]^T$ سطوح لغزشی متناسب با خطای ردیابی ارتفاع و دوران حول محور z هستند. همچنین واضح است که داریم:

$$\dot{s}_{1,2} = \dot{e}_2 - \omega_{1,2} \qquad (۷)$$

که در آن، $\omega_{1,2} = \left[\omega_1, \omega_2\right]^T$ متناسب با ω_{nom} تعریف‌شده در قضیه (۱) و معادلات (۴) می‌باشد.

$$\begin{aligned}
&\omega_1 = -k_1\left|\xi_z\right|^{\alpha_1} sign(\xi_z) - k_2\left|e_z\right|^{\alpha_2} sign(e_z)\\
&- k_3\left|\dot{e}_z\right|^{\alpha_3} sign(\dot{e}_z)\\
&\omega_2 = -k_1\left|\xi_\psi\right|^{\alpha_1} sign(\xi_\psi) - k_2\left|e_\psi\right|^{\alpha_2} sign(e_\psi)\\
&- k_3\left|\dot{e}_\psi\right|^{\alpha_3} sign(\dot{e}_\psi)
\end{aligned} \qquad (۸)$$

که e_z و e_ψ به‌ترتیب همان درایه اول و دوم بردار e_1 بوده که در آن، مقادیر α طبق قضیه (۱) به‌دست می‌آیند و sign تابع علامت است.

به‌کمک قضیه (۱) و انتخاب سطح لغزش (۶) پایداری زمان محدود خطاهای سیستم با انتخابی مناسب از مقادیر α_i و k_i برقرار خواهد شد، حال قانون کنترل را به‌کمک کنترل مد لغزشی و کنترل تطبیقی به‌گونه‌ای به‌دست می‌آوریم که سطح لغزش در زمانی محدود به نقطه تعادل خود همگرا شده و در نهایت خطاهای ردیابی در حضور اغتشاش در زمانی محدود صفر شوند. بنابراین، قانون کنترلی به‌شکل زیر ارائه می‌گردد:

$$U_1 = U_{eq1} + U_{sw1} \qquad (۹)$$

به‌طوری که $U_{eq1} = g_1^{-1}\left(-f_1 + \omega_{1,2}\right)$ و داریم:

$$U_{sw1} = g_1^{-1}\left(-\hat{G}sign\left(s_{1,2}\right)\right) \qquad (۱۰)$$

به‌طوری که $\hat{G} = [\hat{G}_1, \hat{G}_2]^T$ پارامترهای تطبیقی بوده و قانون تطبیق آن در هر لحظه از رابطه زیر به‌دست می‌آید:

$$\dot{\hat{G}} = S^{1,2}.q \qquad (۱۱)$$

که در آن، $S^{1,2} = diag[|s_1|,|s_2|]$ ، $q = [q_1, q_2]^T$ عددی مثبت و بین صفر و یک است. با توجه به تعریف $U_1 = [u_1, u_4]^T$ رابطه مربوط به محاسبه قانون کنترل u_1 به‌شکل زیر به‌دست می‌آید. محاسبه u_4 نیز به‌شکل مشابه می‌باشد.

$$u_1 = \frac{m}{(\cos\phi\cos\theta)}(g + r) \qquad (۱۲)$$

$$r = \omega_1 + u_{swz}$$
$$u_{swz} = -\hat{G}_1 sign(s_1) \qquad (۱۳)$$

ω_1 از معادله (۸) به‌دست می‌آید و بقیه پارامترها متناسب با درایه‌های متناظر معادله (۴) تعریف می‌شوند.

برای این‌که نشان دهیم سیستم معرفی‌شده در زمان محدودی پایدار است متغیر z را در نظر گرفته و پایداری سطح لغزش انتگرالی معرفی‌شده برای آن بررسی می‌شود. بدیهی است که پایداری سطح لغزش دیگر برای ردیابی متغیر ψ به‌طور مشابه اثبات می‌شود که از بیان آن خودداری می‌کنیم.

اثبات: تابع لیاپانوف زیر را در نظر می‌گیریم:

$$V_1 = \frac{1}{2}s_1^2 + \frac{1}{2}\tilde{G}_1^2$$

فرض می‌شود تغییرات پارامتر تطبیقی آهسته است و $\tilde{G}_1 = \hat{G}_1 - G_1$ خطای مقدار تخمین زده می‌باشد، با مشتق گرفتن از تابع لیاپانوف نسبت به زمان و به‌کار گرفتن معادله (۴) و معادلات (۷) تا (۱۰) داریم:

$$\dot{V}_1 = s_1\dot{s}_1 + \dot{\hat{G}}\tilde{G}_1 = s_1\left(-\hat{G}_1 sign(s_1) + d_z\right) + \dot{\hat{G}}_1\tilde{G}_1$$
$$\dot{V}_1 \le -|s_1|\tilde{G}_1 - |s_1|(G_1 - d_z) + q_1|s_1|\tilde{G}_1$$
$$\dot{V}_1 \le -\tilde{G}_1(|s_1| - q_1|s_1|) - |s_1|(G_1 - d_z) \qquad (۱۴)$$

طبق روابط بالا به‌ازای مقداری مناسب از G_1 که به‌ازای آن داشته باشیم $|d_z| < G_1$ و $\tilde{G}_1 > 0$ و با انتخاب مناسب q_1 به‌گونه‌ای که داشته باشیم $1 - q_1 > 0$ می‌توان نشان داد که داریم [۲۴]:

$$\dot{V}_1 < -\min(\beta_1/\sqrt{2}, \beta_2/\sqrt{2})V_1^{1/2} \qquad (۱۵)$$

که در آن، داریم $\beta_1 = |s_1| - q_1|s_1|$ و $\beta_2 = G_1 - d_z$ ، رابطه (۱۵) نشان می‌دهد که با فرض این‌که رابطه $G_1 > \rho_1$ برقرار باشد، مقدار تخمین‌زده‌شده و سطح لغزش در زمانی محدود به نقطه تعادلشان همگرا می‌شوند [۲۴، ۲۵]. در نتیجه خطای ردیابی و یا پایداری سیستم در زمانی محدود به صفر همگرا می‌شود.

۳-۲- طراحی کنترل‌کننده برای سیستم با تحریک محدود

در این بخش، پیش از این‌که به معرفی کنترل‌کننده طراحی‌شده بپردازیم، مدل حرکت عرضی و طولی پرنده چهارملخه را بازنویسی و اصلاح می‌کنیم. کنترل‌کننده حرکت و دوران در طول محور z در بخش قبل طراحی شد. پارامترهای ثابت برای این کنترل‌کننده را می‌توان به‌شکلی انتخاب کرد که سرعت همگرایی خطاهای e_1, e_2 بیشتر شده و در یک زمان به اندازه کافی کوچک، حالت‌های z, ψ به مقادیر مطلوبشان همگرا شوند و داریم:

$$r \to 0, \psi \to \psi_d \qquad (۱۶)$$

بنابراین، با جایگذاری معادله (۱۲) در معادله (۱) و با در نظر گرفتن این فرض که زوایای پیچ و رول در محدوده‌ای کوچک تغییر می‌کنند یعنی $\tan(\theta) \approx \theta, \tan(\phi) \approx \phi$ و با استفاده از معادله (۱۶) که منطقی و عملی نیز می‌باشد، معادلات سیستم با تحریک محدود در معادلات (۱) و (۲) که توصیف‌کننده حرکت عرضی و طولی می‌باشند به‌شکل زیر در می‌آیند [۲۶]:

$$\dot{y}_1 = y_2$$
$$\dot{y}_2 = f_2 + d_2$$
$$\dot{y}_3 = y_4$$
$$\dot{y}_4 = f_3 + g_2U_2 + d_3 \qquad (۱۷)$$

که در آن، داریم:

$$U_2 = [u_3, u_2]^T, y_1 = [x, y]^T, y_2 = [\dot{x}, \dot{y}]^T,$$
$$y_3 = [\theta, \phi]^T, y_4 = [\dot{\theta}, \dot{\phi}]^T, g_2 = diag[\frac{l}{I_y}, \frac{l}{I_x}],$$
$$f_2 = [\theta.g, -g.\phi]^T$$

و همچنین بر اساس معادلات (۲) داریم:

$$f_3 = [\dot{\psi}\dot{\phi}\frac{I_z - I_x}{I_y} - \frac{J_r}{I_x}\dot{\phi}\Omega, \dot{\theta}\dot{\psi}\frac{I_y - I_z}{I_x} + \frac{J_r}{I_x}\dot{\theta}\Omega_r]^T$$

اغتشاش خارجی مؤثر روی هریک از خروجی‌های سیستم نیز با $d_2 = [d_x, d_y]^T$ و $d_3 = [d_\theta, d_\phi]^T$ نشان داده شده است.

در واقع معادلات بالا نوعی از معادلات خطی‌سازی شده سیستم است که هدف ردیابی یک موقعیت خاص توسط پرنده با تغییرات کم و مناسب در زوایای اویلر آن می‌باشد. حالا با اضافه کردن متغیر کمکی انتگرال‌گیر که برای بهبود دقت ردیابی استفاده شده، معادلات خطای ردیابی سیستم را بدون در نظر گرفتن اغتشاش به‌شکل زیر بازنویسی می‌کنیم:

$$
\begin{aligned}
&\dot{\xi}_2 = E_1 = y_d - y_1 \\
&E_2 = \dot{E}_1 = \dot{y}_d - y_2 \\
&E_3 = \dot{E}_2 = \ddot{y}_d - f_2 \\
&E_4 = \dot{E}_3 = \dddot{y}_d - Q \\
&Q = \frac{\partial f_2}{\partial y_1} y_2 + \frac{\partial f_2}{\partial y_2} f_2 + \frac{\partial f_2}{\partial y_3} y_4
\end{aligned}
\qquad (۱۸)
$$

که $E_1 = [E_x, E_y]^T = [x_d - x, y_d - y]^T$ می‌باشد. روابط بالا خطای ردیابی بوده و اغتشاش d_2 که در اثبات پایداری اضافه می‌شود در آن درج نشده است.

حال برای بهبود و جبران اثر نامعلوم اغتشاش مثل حالت قبل از کنترل‌کننده مد لغزشی تطبیقی استفاده می‌کنیم. با توجه به معادلات (۱۷) و (۱۸) برای حرکت عرضی و طولی تنها از سطح لغزش زیر استفاده می‌شود:

$$s = E_4 - E_4(0) - \int_0^t \omega_{3,4} d\tau \qquad (۱۹)$$

$$\dot{s} = \dot{E}_4 - \omega_{3,4} \qquad (۲۰)$$

که $s = [s_3, s_4]^T$ و $\omega_{3,4}$ مانند بخش قبل و از روی معادله (۱۴) و قضیه (۱) به‌دست می‌آید.

بنابراین، قانون کنترل به‌شکل زیر در می‌آید:

$$
\begin{aligned}
&U_2 = U_{eq2} + U_{sw2} \\
&U_{eq2} = \left(\frac{\partial f_2}{\partial y_3} g_2\right)^{-1} \left(\begin{array}{l} \frac{d^4}{dt^4} y_d - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial f_2}{\partial y_1} y_2\right) - \\ \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial f_2}{\partial y_2} f\right) - \frac{\partial f_2}{\partial y_3} f_3 - \omega_{3,4} \end{array} \right) \\
&u_{sw2} = \left(\frac{\partial f_2}{\partial y_3} g_2\right)^{-1} \left(-\hat{F} sign(s)\right)
\end{aligned}
\qquad (۲۱)
$$

که در آن، عبارت $\frac{\partial f_2}{\partial y_3} g_2$ غیر صفر و معکوس‌پذیر می‌باشد. همچنین در معادلات بالا $\omega_{3,4}$ بر اساس قضیه (۱) و معادلات (۱۸) به‌راحتی به‌دست می‌آیند. $\hat{F}$ بردار بهره‌های متغیر با زمان سیگنال کنترل سوئیچینگ است و قانون تطبیق به‌شکل زیر به‌دست می‌آید:

$$\dot{\hat{F}} = S^{3,4} . p \qquad (۲۲)$$

که در آن، $S^{3,4} = diag[|s_3|,|s_4|]$ و $p = [p_1, p_2]^T$ مانند بخش قبل عددی ثابت، مثبت و بین صفر و یک است.

اثبات پایداری این کنترل‌کننده نیز مانند بخش قبل و معادلات (۱۴) و (۱۵) می‌باشد و از تکرار آن پرهیز می‌کنیم. بنابراین، به‌وسیله کنترل‌کننده طراحی‌شده برای حرکت عرضی و طولی پرنده چهارملخه خطای حرکت انتقالی و دورانی پرنده حول محور x و y در زمانی محدود به صفر همگرا می‌شود.

۴- بهبود کنترل‌کننده به‌کمک آنالیز عدم قطعیت روی اینرسی

دست‌یابی به یک مدل دقیق برای دینامیک سیستم بسیار سخت بوده و کاهش وابستگی کنترل‌کننده به مدل سیستم سبب بهبود عملکرد آن در شرایط مختلف و مخصوصاً زمانی که اغتشاش و نامعینی هردو باهم وجود دارند، می‌شود. این موضوع برای انواع ربات و سازه‌های مختلف صادق و برقرار است، به‌طور مثال در مقاله [۲۷] این موضوع برای سیستم‌های موشکی در نظر گرفته شده است و به‌کمک کنترل‌کننده تطبیقی دیگری، کنترل‌کننده بهبود یافته است. برای افزایش کارایی کنترل‌کننده در حضور اغتشاش و عدم قطعیت، در این بخش بهره متغیر با زمان کنترل‌کننده به‌شکلی مناسب بهبود پیدا می‌کند.

پارامترهای عدم قطعیت را برای اینرسی بدنه[14] پرنده حول محور x، y و z و روی اینرسی ناشی از پره‌های روتورها[15] به‌شکل زیر در نظر می‌گیریم:

$$
\begin{aligned}
&I_x = \bar{I}_x + \Delta I_x \\
&I_y = \bar{I}_y + \Delta I_y \\
&I_z = \bar{I}_z + \Delta I_z \\
&J_{ri} = \bar{J}_r + \Delta J_r
\end{aligned}
\qquad (۲۳)
$$

که در آن، $\bar{I}_x$، $\bar{I}_y$، $\bar{I}_z$ و $\bar{J}_r$ مقادیر عددی معلوم و پارامترهای ΔI_x، ΔI_y، ΔI_z و ΔJ_r مقادیر نامعلومی هستند که سبب ایجاد عدم قطعیت و در نهایت نامعینی روی سیستم می‌شوند.

فرض (۲): فرض می‌کنیم مقادیر نامعلوم ΔI_x، ΔI_y، ΔI_z و ΔJ_r کران‌دار بوده و در شرط زیر صدق می‌کنند:

$$
\begin{aligned}
&|\Delta I_x| < J_1 \\
&|\Delta I_y| < J_2 \\
&|\Delta I_z| < J_3 \\
&|\Delta J_r| < J_4
\end{aligned}
\qquad (۲۴)
$$

بنابراین، معادله (۲) به‌شکل زیر در می‌آید:

$$
\begin{cases}
\ddot{\phi} = \dot{\theta}\dot{\psi} \frac{\bar{I}_y - \bar{I}_z}{\bar{I}_x} + \frac{\bar{J}_r}{\bar{I}_x} \dot{\theta}\Omega_r + \frac{l}{\bar{I}_x} u_2 + \Delta_\phi \\
\ddot{\theta} = \dot{\psi}\dot{\phi} \frac{\bar{I}_z - \bar{I}_x}{\bar{I}_y} - \frac{\bar{J}_r}{\bar{I}_x} \dot{\phi}\Omega_r + \frac{l}{\bar{I}_y} u_3 + \Delta_\theta \\
\ddot{\psi} = \dot{\phi}\dot{\theta} \frac{\bar{I}_x - \bar{I}_y}{\bar{I}_z} + \frac{l}{\bar{I}_z} u_4 + \Delta_\psi
\end{cases}
\qquad (۲۵)
$$

که مقادیر Δ_ϕ، Δ_θ و Δ_ψ توابع عدم قطعیت برحسب مشتقات زوایای اویلر و مقادیر نامعلوم اینرسی (۲۳) متناسب با دینامیک پرنده می‌باشند. بنابراین فرض زیر کاملاً منطقی است:

با در نظر گرفتن فرض (۲) و معادله‌های (۲) و (۲۵)، مقادیر نامعینی ناشی از عدم قطعیت اینرسی مدل پرنده کران‌دار بوده و در شرایط زیر صدق می‌کنند:

$$\begin{cases} |\Delta_\phi| < \varsigma_1|\dot{\theta}||\dot{\psi}| + \varsigma_2|\dot{\theta}||\Omega_r| \\ |\Delta_\theta| < \varsigma_3|\dot{\psi}||\dot{\phi}| + \varsigma_4|\dot{\phi}||\Omega_r| \\ |\Delta_\psi| < \varsigma_5|\dot{\phi}||\dot{\theta}| \end{cases} \quad (۲۶)$$

که ضرایب ς_i $(i=1,...,5.)$ پارامترهای مثبت، نامعلوم و نشان‌دهنده کران بالای عدم قطعیت می‌باشند. در حالت کلی می‌توان نتیجه گرفت:

$$\begin{cases} |\Delta_\phi| < \hat{c}_1\|\dot{E}\|^2 + \hat{c}_2\|\dot{E}\|\|\Omega_r\| \\ |\Delta_\theta| < \hat{c}_3\|\dot{E}\|^2 + \hat{c}_4\|\dot{E}\|\|\Omega_r\| \\ |\Delta_\psi| < \hat{c}_5\|\dot{E}\|^2 \end{cases} \quad (۲۷)$$

که در آن، $E=[\phi,\theta,\psi]^T$ می‌باشد. در رابطه بالا، $\hat{c}_i$ $(i=1,...,5)$ مقادیر نامعلومی می‌باشد که به‌کمک مکانیزم تطبیقی تخمین زده می‌شود و مانع از تغییرات گسترده در پایداری سیستم در حضور عدم قطعیت این پارامترها می‌شود.

قوانین تطبیق به‌شکل زیر ارائه می‌گردند:

$$\begin{aligned} \dot{\hat{c}}_1 &= \eta_1\|\dot{E}\|^2|s_4| \\ \dot{\hat{c}}_2 &= \eta_2\|\dot{E}\|\|\Omega_r\||s_4| \\ \dot{\hat{c}}_3 &= \eta_3\|\dot{E}\|^2|s_3| \\ \dot{\hat{c}}_4 &= \eta_4\|\dot{E}\|\|\Omega_r\||s_3| \\ \dot{\hat{c}}_5 &= \eta_5\|\dot{E}\|^2|s_2| \end{aligned}$$

$$0 < \eta_i < 1, i = 1,2,3,4,5 \quad (۲۸)$$

بنابراین، به‌طور مثال برای کنترل حرکت پرنده در طول و حول محورهای x و y قانون کنترل (۲۱) و (۱۰) به‌شکل زیر بازنویسی می‌شود:

$$u_{sw} = \left(\frac{\partial f_2}{\partial y_3} g_2\right)^{-1}(-M(t))$$

که در آن، داریم $M(t)=[M_1 sign(s_3), M_2 sign(s_4)]^T$ و داریم:

$$\begin{aligned} M_1 &= g.\hat{F}_2 + \hat{c}_3\|\dot{E}\|^2 + \hat{c}_4\|\dot{E}\|\|\Omega_r\| + N_1|\ddot{E}_x|^{\alpha_4} \\ M_2 &= g.\hat{F}_1 + \hat{c}_1\|\dot{E}\|^2 + \hat{c}_2\|\dot{E}\|\|\Omega_r\| + N_2|\ddot{E}_y|^{\alpha_4} \end{aligned} \quad (۲۹)$$

N_1, N_2 اعدادی مثبت و بزرگ‌تر از $2k_4$ می‌باشند. عبارات آخر در روابط (۲۹) برای جبران اثر اغتشاش d_2 روی خروجی $\dot{y}_2$ اضافه شده است.

فرض (۳): از آن‌جایی که اغتشاش کران‌دار در نظر گرفته شده است فرض می‌کنیم روابط زیر برقرار باشد:

$$|d_x|^{\alpha_4} < \rho_3, |d_y|^{\alpha_4} < \rho_4 \quad (۳۰)$$

$$|d_\theta| < \rho_5, |d_\phi| < \rho_6 \quad (۳۱)$$

تذکر (۲): برای محاسبه و ساده‌سازی عملیات ریاضی و با توجه به معادلات (۱۷) و (۱۸) داریم:

$$\begin{aligned} &\frac{\partial f_2}{\partial y_1} \approx 0_{2\times 2} \\ &\frac{\partial f_2}{\partial y_2} \approx 0_{2\times 2} \\ &\frac{\partial f_2}{\partial y_3} = \begin{bmatrix} g & 0 \\ 0 & -g \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (۳۲)$$

اثبات پایداری قانون کنترل بهبودیافته (۲۹) و (۲۰) بسیار شبیه معادلات (۱۴) می‌باشد، به‌طوری که داریم:

$$\begin{aligned} V &= \frac{1}{2}s^T s + \frac{1}{2}g\sum_{i=1}^{2}\tilde{F}_i^2 + \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{4}\tilde{c}_i^2 \\ \dot{V} &= s^T\left(-Msign(s) + \Gamma + \frac{\partial f_2}{\partial y_3}d_3 + \frac{\partial f_2}{\partial y_3}\Delta\right) + g\sum_{i=1}^{2}\dot{\hat{F}}_i\tilde{F}_i + \sum_{i=1}^{4}\dot{\hat{c}}_i \end{aligned} \quad (۳۳)$$

که در آن، $\Delta=[\Delta_\theta,\Delta_\phi]^T$ و $\Gamma=[\Gamma_1,\Gamma_2]^T$ می‌باشد و داریم:

$$\begin{aligned} \Gamma_1 &= |\ddot{E}_x + d_x|^{\alpha_4} sign(\ddot{E}_x + d_x) - |\ddot{E}_x|^{\alpha_4} sign(\ddot{E}_x) \\ \Gamma_2 &= |\ddot{E}_y + d_y|^{\alpha_4} sign(\ddot{E}_y + d_y) - |\ddot{E}_y|^{\alpha_4} sign(\ddot{E}_y) \end{aligned} \quad (۳۴)$$

از آن‌جایی که داریم:

$$\begin{aligned} &|s||\dot{E}_2 + d_2|^{\alpha_3} sign(\dot{E}_2 + d_2) \le |s||\dot{E}_2 + d_2|^{\alpha_3} \\ &|\dot{E}_2 + d_2|^{\alpha_3} \le |\dot{E}_2|^{\alpha_3} + |d_2|^{\alpha_3} \end{aligned} \quad (۳۵)$$

بنابراین با توجه به فرض (۲)، رابطه (۲۶) و (۲۷) و روابط ذکرشده در ضمیمه نتیجه می‌شود که:

$$
\begin{aligned}
\dot{V} \le & -\widetilde{F}_2 g(|s_3| - p_1|s_3|) - |s_3| g\left(F_2 - \frac{k_4}{g}|d_x|^{\alpha_4} + d_\theta\right) \\
& -\widetilde{c}_3\left(\|\dot{E}\|^2|s_3| - \eta_3\|\dot{E}\|^2|s_3|\right) - \left(-2k_4|s_3|\|\ddot{E}_x|^{\alpha_4} + N_1|s_3|\|\ddot{E}_x|^{\alpha_4}\right) \\
& -|s_3|\|\dot{E}\|^2(c_3 - \varsigma_3) - \widetilde{c}_4\|\Omega_r\|(\|\dot{E}\||s_3| - \eta_4\|\dot{E}\||s_3|) \\
& -|s_3|\|\dot{E}\|\|\Omega_r\|(c_4 - g\,\varsigma_4) - \widetilde{F}_1 g(|s_4| - p_2|s_4|) - \\
& |s_4| g\left(F_1 - \frac{k_4}{g}|d_y|^{\alpha_4} + d_\phi\right) - \widetilde{c}_1\left(\|\dot{E}\|^2|s_4| - \eta_1\|\dot{E}\|^2|s_4|\right) \\
& -\left(-2k_4|s_4|\|\ddot{E}_y|^{\alpha_4} + N_2|s_4|\|\ddot{E}_y|^{\alpha_4}\right) - |s_4|\|\dot{E}\|\|\Omega_r\|(c_2 - \varsigma_2) \\
& -\widetilde{c}_2\|\Omega_r\|(\|\dot{E}\||s_4| - \eta_2\|\dot{E}\||s_4|) - |s_4|\|\dot{E}\|^2(c_1 - \varsigma_1)
\end{aligned} \quad (۳۶)
$$

$$
\begin{aligned}
\dot{V} \le & -\beta_1|\widetilde{c}_1| - \beta_2|\widetilde{c}_2| - \beta_3|\widetilde{c}_4| - \beta_4|\widetilde{c}_4| \\
& -\beta_5|\widetilde{F}_1| - \beta_6|\widetilde{F}_2| - \beta_7|s_3| - \beta_8|s_4| \le -\mu V^{1/2}
\end{aligned} \quad (۳۷)
$$

مقادیری از F و همچنین همیشه مقادیری از c وجود دارند که:

$$
\begin{aligned}
F_1 &> \frac{k_4}{g}|d_x|^{\alpha_4} + |d_\theta| \\
F_2 &> \frac{k_4}{g}|d_y|^{\alpha_4} + |d_\phi|
\end{aligned} \quad (۳۸)
$$

اگر $1-\eta_i > 0, (i=1,2)$، $1-p_i > 0, (i=1,2)$ و $c_i > \varsigma_i$ برقرار باشند، داریم:

$$\mu = \min(\sum_{i=1}^{8} \beta_i / \sqrt{2})$$

به‌طوری‌که برای معادله بالا β_iها با همگرایی پارامترهای تطبیقی همواره مثبت هستند [۲۴].

با وجود آن‌که عناصر تانسور لختی یا اینرسی ممکن است مقادیر کمی باشند اما به‌علت حضور اغتشاش و تغییرات ناگهانی متغیرهای مدل، عدم قطعیت‌های موجود ممکن است سبب تضعیف عملکرد کنترل‌کننده شوند. بدین منظور و برای کاهش وابستگی کنترل‌کننده به مدل سیستم، قانون کنترل توسط معادله (۲۹) بهبود داده شده است. حال برای بررسی عملکرد کنترل‌کننده در حضور عدم‌قطعیت و اغتشاش، مدل و کنترل‌کننده شبیه‌سازی شده و نتایج آن بررسی می‌شود.

تذکر (۳): بدیهی است با توجه به معادلات بالا پایداری حرکت در حول محور z (ψ)، در حضور اغتشاش و عدم قطعیت‌های یادشده به‌شکل مشابهی با تغییرات مناسب در قانون کنترل (۱۰) و به‌کمک رابطه (۲۹) به‌دست می‌آید.

تذکر (۴): برای جلوگیری از نوسان شدید[۱۶] توسط کنترل‌کننده طراحی‌شده در سیگنال تحریک از تابع زیر استفاده می‌شود [۲۸]:

$$sign(s) = \frac{s}{\|s\| + \delta} \quad (۳۹)$$

که δ عددی مثبت و به اندازه کافی کوچک است.

۵- نتایج شبیه‌سازی

در این بخش، شبیه‌سازی‌های عددی برای اثبات کارایی کنترل‌کننده طراحی‌شده ارائه می‌گردند. پارامترهای پرنده چهارملخه در جدول ۱ آمده است، همچنین پارامترهای طراحی به‌ترتیب برای کنترل‌کننده معرفی‌شده در بخش اول و دوم به شرح زیر می‌باشند:

$$k_1 = 1; k_2 = 3; k_3 = 3; \quad (۴۰)$$

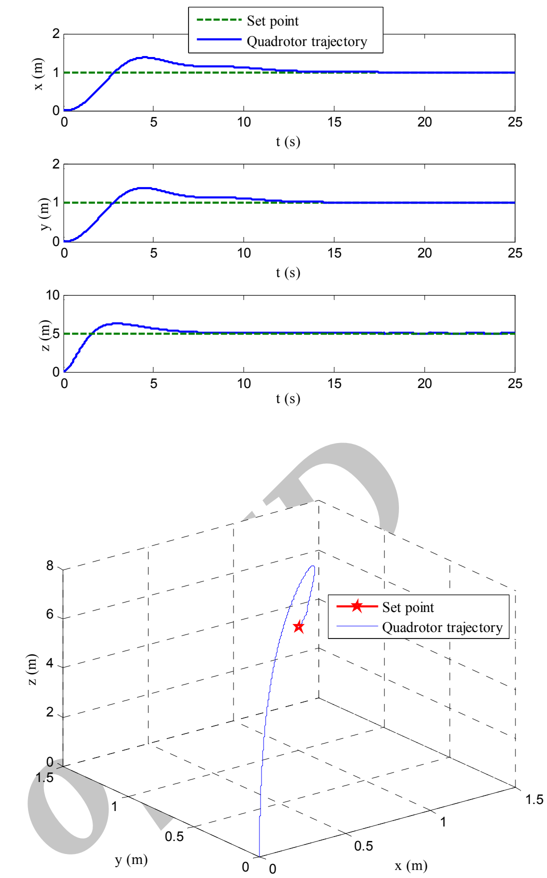
$$k_1 = 1; k_2 = 5; k_3 = 10; k_4 = 7; k_5 = 5 \quad (۴۱)$$

مقادیر $\alpha = 1/3$ انتخاب شده و بقیه مقادیر از روی قضیه (۱) به‌دست آورده شده است. بازه بهره تطبیق برای قانون تطبیق در معادله (۱۱) و (۲۱) نیز ۰/۵ در نظر گرفته شده است. نقطه (۵ ,۱ ,۱) به‌عنوان مقصد پرنده در نظر گرفته شده است. همچنین یک نویز خروجی به‌شکل یک موج سینوسی با دامنه ۰/۱ و فرکانس ۱۰۰ هرتز و یک اغتشاش خارجی با همان دامنه و فرکانس π برای حرکت انتقالی و حرکت دورانی پرنده در نظر گرفته شده است. مشابه این فرض برای اغتشاش در [۲۹] نیز استفاده شده است. عدم‌قطعیت روی عناصر تانسور لختی و اینرسی مدل ۲۵ درصد در نظر گرفته می‌شود.

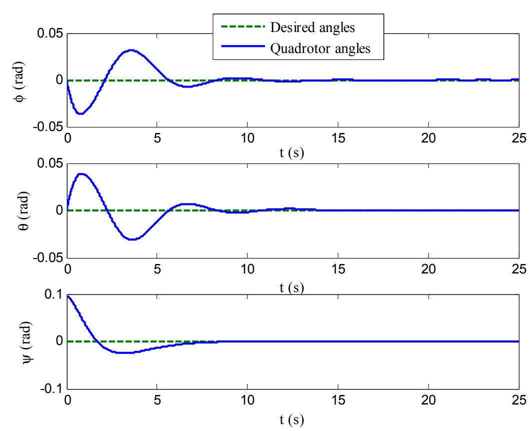
برای اثبات کارایی روش کنترل‌کننده و مدل سیستم به‌کمک برنامه MATLAB شبیه‌سازی شده است. شکل ۱ حرکت پرنده را در مختصات دکارتی را به‌کمک روش ارائه‌شده در مقاله و شکل ۲ حرکت دورانی آن را به‌کمک کنترل‌کننده طراحی‌شده در این مقاله نشان می‌دهد. پاسخ حالت گذرای سیستم بسیار وابسته به انتخاب پارامترهای سطح لغزش و در نتیجه کنترل‌کننده (۴۰) و (۴۱) دارد. همان‌طور که بیان شد، این پارامترها باید در شرایط قضیه (۱) صدق کنند.

شکل ۳ ورودی‌های کنترل را نشان می‌دهد. استفاده از تذکر (۱) سبب شده است سیگنال و ورودی تحریک فاقد نوسان شدید در فرکانس‌های مختلف باشد. شکل‌های ۴ و ۵ به‌ترتیب سرعت زاویه‌ای و خطی پرنده را نشان می‌دهد که بعد از زمان مشخصی به صفر همگرا می‌شوند. در نهایت، شکل‌های ۶ تا ۸ پارامترهای تطبیقی سیستم را نشان می‌دهند. ضرایب ثابت روابط تطبیقی ۰/۵ انتخاب شده‌اند. پارامترهای تطبیقی نیز بعد از گذشت زمان محدودی به مقدار مطلوب و مورد نیاز برای جبران اثرهای اغتشاش و عدم قطعیت رسیده‌اند.

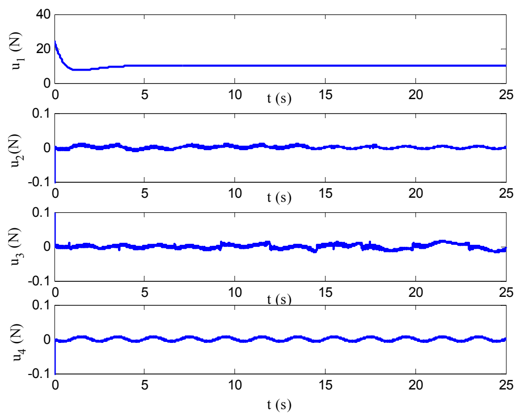
سیگنال کنترل نشان‌داده‌شده در شکل ۳ به نسبت سیگنال کنترل در مقالات مرجع دیگری نظیر[۱۹، ۲۰] مناسب‌تر و عملی‌تر بوده و در عمل به‌راحتی قابل پیاده‌سازی می‌باشد. البته بسته به توانایی تجهیزات سیستم کنترل‌کننده در ساختن سیگنال کنترل و دقت مورد نیاز در ردیابی، می‌توان پارامترهای مختلفی برای تذکر (۴) در نظر گرفت که به‌تبع آن دقت ردیابی و سیگنال کنترل دست‌خوش تغییر می‌شود.



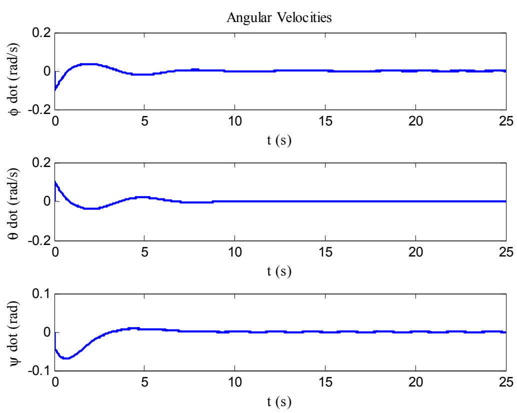
شکل ۱: ردیابی نقطه (۵، ۱، ۱) متر در حرکت انتقالی پرنده؛ شکل اول: توسط کنترل‌کننده معرفی‌شده و شکل دوم: حرکت سه‌بعدی آن



شکل ۲: ردیابی حرکت دورانی پرنده



شکل ۳: سیگنال ورودی کنترل



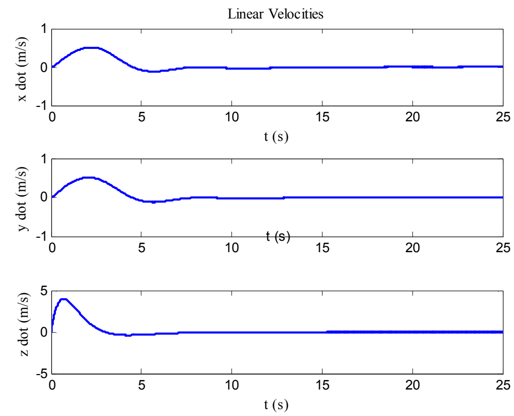
شکل ۴: سرعت زاویه‌ای پرنده چهارملخه

در نهایت برای اثبات کارای سیستم مقایسه‌ای بین روش به‌کار گرفته‌شده در مقاله [۲۰] و روش ارائه‌شده در این مقاله در حضور اغتشاش خارجی تعریف‌شده، صورت گرفته است. در واقع در مقاله [۲۰] اثر کشیدگی هوا و اغتشاش در نظر گرفته شده است و در این مقاله اغتشاش و نامعینی. بنابراین برای مقایسه از اثر کشیدگی هوا و نامعینی صرف‌نظر شده و تنها اغتشاش در نظر گرفته شده است. پارامترهای ثابت کنترل‌کننده در محدوده پارامترهای مقاله [۲۰] و مانند زیر فرض شده و برای بهبود پاسخ سیستم از α برابر۰/۷۵ استفاده شده است.

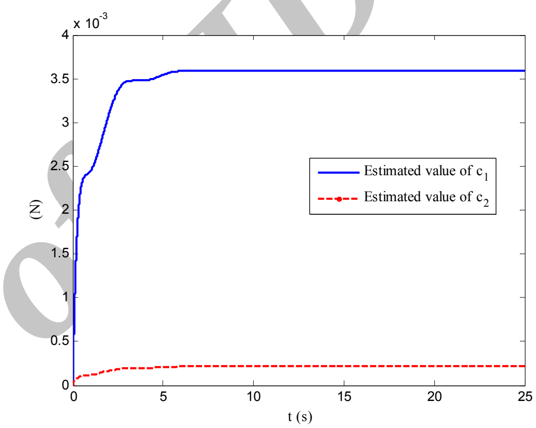
پارامترهای دینامیک پرنده مانند مقاله [۲۰] در نظر گرفته شده است. داریم:

$$k_1 = 1; k_2 = 10; k_3 = 10; \qquad (۴۲)$$

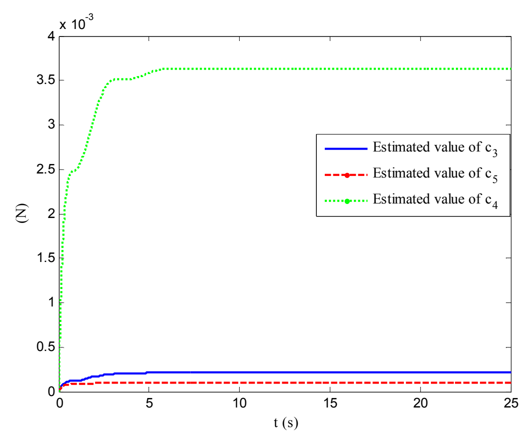
$$k_1 = 1; k_2 = 20; k_3 = 20; k_4 = 10; k_5 = 10 \qquad (۴۳)$$



شکل ۵: سرعت خطی پرنده چهارملخه



شکل ۶: بخشی از پارامترهای تخمین زده توسط کنترل تطبیقی

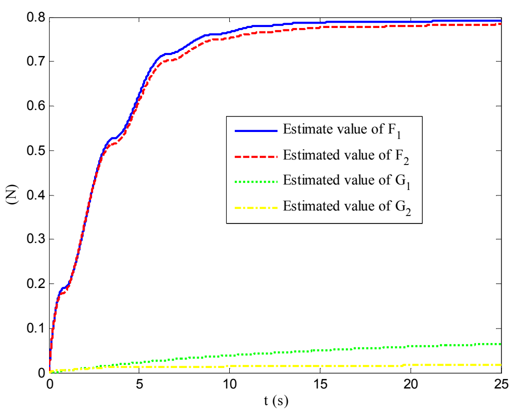


شکل ۷: بخشی از پارامترهای تخمین زده توسط کنترل تطبیقی

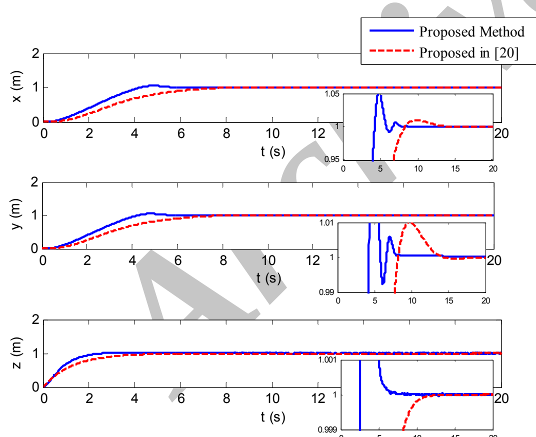
مقایسه عملکرد کنترل‌کننده ارائه‌شده در مقاله [۲۰] با روش ارائه‌شده در این مقاله، در شکل ۹ ذکر شده است. همان‌طور که مشخص است، در این مقاله دقت ردیابی بهبود یافته و پاسخ این مقاله سریع‌تر به نقطه مطلوب رسیده است البته باید توجه داشت که پاسخ مقاله [۲۰] میزان فراجهش کمتری در این حالت دارد.

جدول ۱: پارامترهای مدل پرنده

کمیت	علامت	مقدار
جرم پرنده چهارملخه	m	۱kg
فاصله مرکز جرم و ملخک‌ها	l	۰/۲۳m
شتاب	g	۹/۸۱ m/s^2
ممان اینرسی حول محور x	I_x	۰/۰۰۷۵ m^2
ممان اینرسی حول محور y	I_y	۰/۰۰۷۵ m^2
ممان اینرسی حول محور z	I_z	۰/۰۱۳ kg m^2
ممان اینرسی حول محور ملخک	J_r	۰/۰۰۰۰۶۵ kg m^2



شکل ۸: بخشی از پارامترهای تخمین زده توسط کنترل تطبیقی



شکل ۹: مقایسه پاسخ زمانی سیستم برای ردیابی خروجی x و y بین روش ارائه‌شده در این مقاله و روش ارائه‌شده در مقاله [۲۰]

۶- نتیجه‌گیری

در این مقاله، یک کنترل مد لغزشی انتگرالی ناتکین غیر ترمینال تطبیقی با حداقل سطح لغزش ممکن برای هواپیمای چهارملخه کوچک با تحریک محدود و در حضور اغتشاش و عدم قطعیت طراحی می‌شود. برای بالا بردن دقت ردیابی متغیر انتگرال خطا به مجموعه خطاهای سیستم اضافه شده است. همچنین روابط قانون کنترل با

توجه به حضور اغتشاش روی تمام خروجی‌های سیستم فاقد تحریک کامل در مقایسه با روش‌های مشابه کنترل مد لغزشی ناتکین غیر ترمینال بهبود یافته است. برای بهبود عملکرد کنترل‌کننده یک کران بالا برای عدم قطعیت در نظر گرفته شده و ضرایب آن به کمک کنترل تطبیقی تخمین زده شده است. در نهایت به کمک شبیه‌سازی و مقایسه، اعتبار کنترل‌کننده طراحی‌شده مورد ارزیابی قرار گرفته است. نتایج شبیه‌سازی نشان می‌دهد که با وجود حضور اغتشاش و عدم قطعیت روی عناصر تانسور لختی و اینرسی روتور، ردیابی به‌خوبی صورت گرفته و پرنده به نقطه مطلوب رسیده است.

پیوست

معادله (۲۶) را در نظر بگیرید، رابطه (۲۷) به‌راحتی توسط رابطه‌های زیر به‌دست می‌آید:

$$\begin{cases} \left|\dot\theta\dot\psi\right| \le \frac{1}{2}\left(\dot\theta^2+\dot\psi^2\right) \\ \left|\dot\phi\dot\psi\right| \le \frac{1}{2}\left(\dot\phi^2+\dot\psi^2\right) \\ \left|\dot\theta\dot\phi\right| \le \frac{1}{2}\left(\dot\theta^2+\dot\phi^2\right) \\ \dot\theta\dot\psi+\dot\phi\dot\psi+\dot\theta\dot\phi \le \left|\dot\theta\dot\psi+\dot\phi\dot\psi+\dot\theta\dot\phi\right| \le \left|\dot\theta\dot\psi\right|+\left|\dot\phi\dot\psi\right|+\left|\dot\theta\dot\phi\right| \end{cases} \tag{۴۴}$$

در نتیجه از جمع سه رابطه اول معادله بالا به‌دست می‌آید:

$$\begin{cases} \left|\dot\theta\dot\psi\right|+\left|\dot\phi\dot\psi\right|+\left|\dot\theta\dot\phi\right| \le \mathrm{Z} \\ \mathrm{Z}=\frac{1}{2}\left(\dot\theta^2+\dot\psi^2\right)+\frac{1}{2}\left(\dot\phi^2+\dot\psi^2\right)+\frac{1}{2}\left(\dot\theta^2+\dot\phi^2\right) \\ \dot E^2=\mathrm{Z} \end{cases} \tag{۴۵}$$

مراجع

[1] G.V. Raffo, M.G. Ortega, and F.R. Rubio, “An integral predictive/nonlinear H infinity control structure for a quadrotor helicopter,” *Automatica,* vol. 46, pp. 29-39, 2010.

[2] L. Garcia-Delgado, A. Dzul, V. Santibáñez, and M. Llama, “Quadrotors formation based on potential functions with obstacle avoidance,” *IET Control Theory and Application*, vol. 6, no.12, pp. 787-802, 2012.

[3] G.M. Hoffmann, H. Huang, S.L. Waslander, and C.J. Tomlin, “Quadrotor helicopter flight dynamics and control: theory and experiment,” *AIAA Guidance, Navigation and Control Conf. Exhibit*, 1–20, South Carolina, USA, 2007.

[4] I. Fantoni, and R. Lozano, *Non-linear Control for Underactuated Mechanical Systems*, Springer-Verlag, London, 2002.

[5] A. Das, K. Subbarao, and F. Lewis, “Dynamic inversion with zero-dynamics stabilization for quadrotor control,” *IET Control Theory and Applications*, 2008.

[6] L.D. Cowling, O.A. Yakimenko, J.F. Whidborne, and A.K. Cooke, “A prototype of an autonomous controller for a quadrotor UAV,” *Proceedings of ECC07*, 2007.

[7] P. Castillo, R. Lozano and A. E. Dzul, “Modelling and Control of Mini-Flying Machines”, Springer-Verlag, London, 2005.

[8] V. Mistler, A. Benallegue, and N.K. M’Sirdi, “Exact linearization and non-interacting control of a 4 rotors helicopter via dynamic feedback,” *10th IEEE International Workshop on Robot–Human Interactive Communication Paris*, 2001.

[9] E. Altug, J.P. Ostrowski, and R. Mahony, “Control of a quadrotor helicopter using visual feedback,” *IEEE International Conference on Robotics and Automation*, 2002.

[10] B. Bijnens, Q.P. Chu, J.M. Voorsluijs, and J.A. Mulder, “Adaptive feedback linearization flight control for a helicopter UAV,” *AIAA Guidance, Navigation, and Control Conference and Exhibit*, 15–18, 2005.

[11] S. Bouabdallah, and R. Siegwart, “Backstepping and sliding-mode techniques applied to an indoor micro quadrotor,” *Proceedings of IEEE International Conference on Robotics and Automation*, pp. 2247–2252, 2005.

[12] H. Bouadi, M. Bouchoucha, and M. Tadjine, “Modelling and stabilizing control laws design based on sliding mode for an UAV type-quadrotor,” *Engineering Letters*, vol. 15, no. 2, 2007.

[13] D. Lee, H.J. Ki, and S. Sastry, “Feedback linearization vs. adaptive sliding mode control for a quadrotor unmanned aerial vehicle,” *International Journal of Control, Automation and Systems*, vol. 7, no. 3, pp. 419-428, 2009.

[14] L. Besnarda, Y.B. Shtessel, and B. Landrum, “Quadrotor vehicle control via sliding mode controller driven by sliding mode disturbance observer,” *Journal of the Franklin Institute*, vol. 349, pp. 658-684, 2012.

[15] E.H. Zheng, L.L. Xiong, and L.L. Luo, "Second order sliding mode control for a quadrotor," *ISA Transactions*, 2014.

[16] L. Luque-Vega, B. Castillo-Toledo, and A.G. Loukianov, “Robust block second order sliding mode control for a quadrotor,” *Journal of the Franklin Institute*, vol. 349, no. 2, pp. 719–39, 2012.

[17] A. Benallegue, A. Mokhtari, and L. Fridman, “High-order sliding-mode observer for a quadrotor UAV,” *International Journal of Robust Nonlinear Control*, vol. 18, pp. 427–440, 2008.

[18] L. Derafa, A. Benallegue, and L. Fridman, “Super twisting control algorithm for the attitude tracking of a four rotors UAV,” *Journal of the Franklin Institute*, vol. 349, no. 2, pp. 685–99, 2012.

[19] R. Xu, and Ü. Özgüner, “Sliding mode control of a class of underactuated systems,” *Automatica*, vol. 44, pp. 233–41, 2010.

[20] J.J. Xiong, and E.H. Zheng, “Position and attitude tracking control for a quadrotor UAV,” *ISA Transactions*, vol. 53, no. 3, pp. 725-731, 2014.

[21] S.S. Chong, X. Yu, and M. Zhihong, “A robust adaptive sliding mode controller for robotic manipulators,” *IEEE Workshop on Variable Structure Systems*, pp. 31-35, 1996.

[22] S.P. Bhat, and D.S. Bernstein, “Finite-time stability of continuous autonomous systems,” *SIAM Journal of Control and Optimization*, vol. 38, pp. 751–766, 1996.

[23] S.P. Bhat, and D.S. Bernstein, “Geometric homogeneity with applications to finite-time stability, Mathematics of Control,” *Signals and Systems*, vol. 17, no. 2, pp. 101 – 127, 2005.

[24] F. Plestan, Y. Shtessel, V. Bregeault, and A. poznyak, “New methodologies for adaptive sliding mode control”, *International Journal of Control*, vol. 9, no. 83, pp. 1907-1919, 2010.

[25] S.P. Bhat, and D.S. Bernstein, “Finite-time stability of continuous autonomous systems,” *SIAM Journal of Control and Optimization*, vol. 38, pp. 751–766, 2003.

[26] G. Carrillo, R.L. Dzul López, A.E. Lozano, and R.C. Pégard, 213, *Quad Rotorcraft Control*, Springer publishing, 2013.

[27] Y. Xia, K. Lu, Z. Zhu, and M. Fu, “Adaptive back-stepping sliding mode attitude control of missile systems,” *International Journal of Robust and Nonlinear Control*, vol. 23, pp. 1966-1717, 2013.

[28] Zh. Hongmei, and Zh. Guoshan, “Adaptive backstepping sliding mode control for nonlinear systems with input saturation,” *Transaction of Tianjin University*, vol. 18, pp. 046-051, 2012.

[29] S. Yu, X. Yu, B. Shirinzadeh, and Z. Man, “Continuous finite-time control for robotic manipulators with terminal sliding mode,” *Automatica*, vol. 41, pp. 1957–1964, 2005.

زیرنویس‌ها

1 Unmanned Aerial Vehicle
2 Vertical Take Off and Landing
3 Under actuated
4 Back-stepping
5 Sliding mode control
6 Super twisting
7 High order sliding mode
8 Roll
9 Pitch
10 Euler
11 Yaw
12 Hover
13 Lift coefficient
14 Body inertia
15 Propeller/rotor inertia
16 Chattering