

مطالعه تحلیلی دو رویکرد حرکت عملگرها در شبکه‌های حسگر و عملگر بی سیم

سعید پاشازاده، دانشیار

دانشکده مهندسی برق و کامپیوتر - دانشگاه تبریز - تبریز - ایران - pashazadeh@tabrizu.ac.ir

چکیده: عملگرهای متحرک خودمختار به دلیل داشتن کاربردهای فراوان موردتوجه محققین هستند. نحوه استقرار و حرکت عملگرها در محیط اهمیت بسیاری در سرویس دهی به رخدادهای دارد. در این مقاله دو رویکرد به نام‌های استقرار در مرکز و استقرار در محل تعیین محل قرارگیری عملگر و نحوه حرکت آن در محیط معرفی شده است. تابع چگالی احتمالی فاصله طی شده توسط یک عملگر برای سرویس دهی به رخدادهای محیط در دو رویکرد مذکور به صورت قدم به قدم استخراج و اثبات ریاضی شده است. نمودارهای حاصل از شبیه‌سازی‌ها و توابع به دست آمده به طور توأم ترسیم شده و نشان می‌دهد که نتایج دو روش به طور کامل باهم همخوانی دارند. نتایج شبیه‌سازی‌ها نشان می‌دهد که متوسط جابجایی عملگر در رویکرد استقرار در مرکز نسبت به رویکرد استقرار در محل بیش تر است؛ در عوض متوسط فاصله رخدادهای از مرکز ناحیه کم تر از متوسط فاصله رخدادهای تا محل رخداد قبلی است. در ادامه، سرویس دهی به رخدادهای به صورت مسئله تئوری صف بیان شده و روابط مورد نیاز برای تعیین متوسط طول صف انتظار، متوسط زمان گردش کار، کمینه سرعت مورد نیاز برای حرکت عملگر و بیشینه ابعاد ناحیه تحت نظارت استخراج شده است. در انتها، رویکردهای پیشنهادی با منطقه بندی ناحیه و انتساب یک عملگر برای هر منطقه توسعه داده شده است. نتایج شبیه‌سازی رویکرد استقرار در محل نشان می‌دهد که اگر نزدیک ترین عملگر برای سرویس دهی به هر رخداد گسیل شود، نسبت به حالتی که فقط عملگر انتسابی به منطقه رخداد حق گسیل شدن دارد، متوسط فاصله طی شده کم تر خواهد بود.

واژه‌های کلیدی: عملگر متحرک، رویکرد استقرار و حرکت، اثبات ریاضی، تئوری صف، شبیه‌سازی.

Analytic Study of Two Movement Strategies of Actors in Wireless Sensor and Actor Networks

S. Pashazadeh, Associate professor

Faculty of Electrical and Computer Engineering, University of Tabriz, Tabriz, Iran, Email: pashazadeh@tabrizu.ac.ir

Abstract: Autonomous mobile actors are under attention of researchers for having numeral applications. The way of placement and movement of actors in environment is very important for appropriate service of events. Two approaches, named settlement in center and settlement in place are introduced in this paper for evaluating placement location and movement method of actors in environment. Probability mass function of traversed distance for servicing events of environment by an actor for two approaches are mathematically proved step by step. Diagrams of simulations' results and functions are drawn simultaneously and show that results of both methods completely confirms. Simulations' results show that average displacement of actor in settlement in center approach in comparison with settlement in place approach is more; instead, average distance of events from center of area is less than average distance from location of previous event. In remaining, service of the events by a mobile actor is presented as a queuing theory problem and required relations for determining average length of waiting queue, average turnaround time, required minimum movement speed of actor and maximum dimension of surveillance area are extracted. At last, proposed approaches are extended by defining regions and assigning an actor for each region. Simulations results show that in place settlement approach, if nearest actor to each event is sent for servicing it, average displacement distance is less than the state that only assigned actor of each region has permission to be sent for servicing.

Keywords: Mobile actor, movement and placement approach, mathematical proof, queuing theory, simulation.

تاریخ ارسال مقاله: ۱۳۹۴/۸/۲۵

تاریخ اصلاح مقاله: ۱۳۹۴/۱۱/۲۳

تاریخ پذیرش مقاله: ۱۳۹۵/۱/۲۹

نام نویسنده مسئول: سعید پاشازاده

نشانی نویسنده مسئول: ایران - تبریز - بلوار ۲۹ بهمن - دانشگاه تبریز - دانشکده مهندسی برق و کامپیوتر

۱- مقدمه

شبکه‌های حسگر و عملگر بی‌سیم از دو نوع گره تشکیل می‌شوند؛ (۱) گره‌های حسگر که ثابت هستند و عملیات جمع‌آوری اطلاعات از محیط را انجام می‌دهند و (۲) گره‌های عملگر که توانایی حرکت دارند و بسته به تجهیزات نصب‌شده، قادر به ایجاد تغییرات در محیط هستند. در صورت نصب حسگر، گره‌های عملگر نیز قادر به جمع‌آوری اطلاعات از محیط هستند. گره‌ها از طریق فرستنده/گیرنده بی‌سیم باهم ارتباط برقرار کرده و از منبع تغذیه باتری استفاده می‌کنند [۱]. یکی از چالش‌هایی که شبکه‌های حسگر و عملگر بی‌سیم با آن مواجه هستند ایجاد هماهنگی توزیعی برای مدیریت شبکه با انتخاب یک یا چند عملگر مناسب جهت رسیدگی به رخدادها است [۲]. رویکردهای مختلفی در رابطه با شیوه حرکت دادن عملگرها و محل استقرار آن‌ها در محیط مطرح است و در این مقاله به این موضوع پرداخته خواهد شد.

در بسیاری از مطالعات انجام‌شده فرض بر این است که گره‌های عملگر نیز مانند گره‌های حسگر توانایی حس کردن دارند. این امر اجازه می‌دهد که در صورت اتمام باتری یک حسگر، بتوان نقصان پوشش حسی را با حرکت دادن یک عملگر به آن قسمت جبران کرد. همچنین با اتمام باتری یک حسگر ممکن است که ارتباط شبکه قطع شود و یک عملگر با قرار گرفتن در محل مناسب می‌تواند ارتباط شبکه را برقرار نماید. بدین ترتیب گره عملگر برای پشتیبانی از کیفیت پوشش حسی و اتصال شبکه می‌تواند مورد استفاده قرار گیرد [۳]. هماهنگی در شبکه‌های حسگر و عملگر بی‌سیم اهمیت بسیاری دارد و از جنبه‌های مختلف قابل بررسی است. هماهنگی معمولاً به دو گروه (۱) هماهنگی بین حسگر و عملگر و (۲) هماهنگی بین عملگر با عملگر تقسیم بندی می‌شود [۴، ۵]. در هماهنگی عملگر با عملگر بحث انتخاب مناسب‌ترین عملگر برای رسیدگی به رخدادها با توجه به عوامل مختلف مانند صرفه‌جویی در مصرف انرژی، سرعت عمل در سرویس‌دهی به رویدادها، تحمل پذیری خرابی و تخصیص پویای کارها به عملگرها مطرح است [۶].

در مرجع [۷] مسئله موقعیت‌یابی عملگر به این صورت مطرح شده است که بر اساس شعاع ارتباطی گره‌ها، مناسب‌ترین محل برای قرارگرفتن سرخوشه محاسبه می‌شود و سپس عملگر مناسب انتخاب شده و در این محل قرار می‌گیرد تا نقش سرخوشه را به عهده بگیرد. موقعیت‌یابی عملگرها یک نیاز پایه در بحث هماهنگی است. یک روش برای تعیین موقعیت این است که عملگر مجهز به دستگاه موقعیت‌یاب جهانی باشد که هزینه عملگر را بالا می‌برد. روش دیگر این است که عملگر امواج خاصی ارسال کند و گره‌های حسگر با توجه به شدت این امواج با استفاده از تکنیک‌های مناسب مانند فیلتر کالمن موقعیت عملگر را تعیین کنند [۸]. در برخی کاربردها، محیط ناشناخته فرض شده و موانعی در محیط وجود دارند. بنابراین برنامه‌ریزی برای مسیر در چنین کاربردهای یکی از چالش‌های مهم است. موانعی می‌توانند ثابت یا

متحرک در نظر گرفته شوند. در مرجع [۹] یک روش برای برنامه‌ریزی مسیر حرکت با فرض موانع ثابت و کاشی‌بندی محیط ارائه شده است. حرکت دادن حسگرهای متحرک برای ایجاد پوشش حسی مناسب در یک فضای بسته با استفاده از رویکرد مبتنی بر حوزه-پتانسیلی در مرجع [۱۰] مورد مطالعه قرار گرفته است. در این مقاله فرض شده است که حسگرهای متحرک همگی در ابتدا در یک محل خاص قرار گرفته‌اند. سپس گره‌ها طوری حرکت داده می‌شوند که در نهایت هر گره توسط دیوارها و گره‌های دیگر محدود شود. برخی محققین بر این باور هستند که اگر تواتر وقوع رخدادها در بخش‌هایی از حوزه تحت نظارت بیش‌تر است، بهتر است که حسگرهای بیش‌تری در این بخش‌ها قرارگیرد تا دقت نظارت افزایش پیدا کند. برای این امر دو رویکرد توزیعی برای حرکت دادن گره‌های حسگر متحرک پیشنهاد شده است [۱۱]. با در نظر گرفتن معادلات سینماتیک عملگرهای متحرک و اطلاعاتی که حسگرها می‌توانند در رابطه با موقعیت عملگرها از محیط به دست آورند می‌توان با استفاده از فیلترهای کالمن یا ذره‌ای دقت موقعیت‌یابی و حرکت عملگرها را در محیط افزایش داد [۱۲]. بررسی همزمان ارتباط بین گره‌ها و هماهنگی آن‌ها با توجه به محدودیت انرژی در مرجع [۱۳] مورد بررسی قرار گرفته و برای پیش‌بینی محل حرکت عملگرها توسط گره‌های حسگر از فیلتر کالمن استفاده شده است.

اکثر مطالعات انجام‌شده روی هماهنگی عملگرها مبتنی بر شبیه‌سازی هستند و استفاده از مدل‌سازی احتمالی و استخراج فرمول‌ها و روابط به‌صورت تحلیلی رویکردهای است که کم‌تر مورد توجه واقع شده است. مشکل بودن تحلیل ریاضی و پیچیدگی کاربردها از مهم‌ترین دلایل عدم گرایش به این روش‌ها است. استفاده از تحلیل ریاضی و استخراج فرمول در تعیین کران بالای خطای همگام‌سازی زمان در کاربرد ردیابی دو بعدی اهداف، نمونه موفقیت‌آمیزی از کاربرد این روش‌ها است [۱۴].

به علت سرباز بالای مدیریت متمرکز توسط گره چاهک در شبکه‌های حسگر و عملگر بی‌سیم سعی می‌شود تا از الگوریتم‌های توزیع‌شده برای مدیریت گره‌ها استفاده شود. کارهای مختلفی در رابطه با مدیریت توزیع‌شده گره‌های حسگر انجام شده است که از آن جمله می‌توان به مدیریت پوشش بصری اشاره کرد. در مرجع [۱۵] یک الگوریتم توزیع‌شده برای پوشش چندجانبه از یک هدف توسط گره‌های حسگر بصری ارائه شده است.

موقعیت‌یابی گره‌ها در بسیاری از کاربردهای شبکه‌های حسگر و عملگر بی‌سیم ضروری است. در مرجع [۱۶] یک روش تقریبی جدید برای موقعیت‌یابی مکان گره‌ها برحسب متوسط تعداد گام ارتباطی با گره‌های مرجع با فرض دو شعاع ارتباطی برای گره‌ها ارائه شده است. آقای اوتا و همکارانش در مرجع [۱۷] رویکردی بنام ORACLE جهت مدیریت حرکت عملگرها در محیط ارائه داده‌اند. رویکرد پیشنهادی آن‌ها بر این مبنا استوار است که عملگرها می‌توانند با استفاده از روش تخمین بیش‌ترین شباهت^۱ محل رخداد بعدی را

شده است که گره‌ها با توزیع یکنواخت دوبعدی در محیط پخش شده‌اند [۲۳-۱۸].

فرض بر این است که یک روبات یا عملگر در ناحیه تحت کنترل قرار دارد و در صورت بروز رخداد به‌طور خودکار به سمت محل حادثه حرکت کرده و اقدام به انجام عملیات برای سرویس‌دهی به رخداد می‌کند. رویکرد اول این است که همواره عملگر در مرکز ناحیه تحت کنترل قرار داشته باشد تا با طی کردن متوسط فاصله کم، در زمانی کوتاه خود را به محل رخداد برساند و مأموریت خود را انجام دهد. ایده این رویکرد از اینجا ناشی می‌شود که میانگین توزیع جغرافیایی محل رخدادها منطبق بر مرکز ناحیه تحت کنترل است که با نقطه c در شکل ۱ نمایش داده شده است. بنابر این اگر عملگر در مرکز ناحیه قرار داشته باشد، نسبت به موقعیت‌های دیگر فاصله کوتاه‌تری برای رسیدن به محل رخداد خواهد داشت. این رویکرد را از این پس رویکرد استقرار در مرکز می‌نامیم. در این رویکرد لازم است که عملگر، هر بار پس از انجام مأموریت به نقطه c برگردد و این امر هزینه‌بر است.

در کاربردهایی مانند شبکه‌های حسگر و عملگر بی‌سیم که منبع تغذیه عملگرها باتری است و محدودیت انرژی مطرح است، رویکرد اول به نظر می‌رسد در کل باعث جابجایی زیاد عملگر می‌شود و مصرف انرژی بالایی خواهد داشت. رویکرد دیگر این است که عملگر پس از انجام مأموریت در آن محل باقی بماند و منتظر رخداد بعدی باشد. چه بسا رخداد بعدی در نزدیکی رخداد قبلی رخ دهد. در این صورت عملگر سریع به محل رخداد خواهد رسید و مصرف انرژی نیز پایین خواهد بود. در صورتی که رخداد بعدی در گوشه دیگری از ناحیه تحت نظارت رخ دهد، رویکرد دوم با طی کردن پاره خطی که محل دو رخداد متوالی را به هم وصل می‌کند با طی کردن فاصله زیادی به محل مأموریت بعدی می‌رسد. از این پس رویکرد دوم را با نام رویکرد استقرار در محل می‌نامیم. در این مقاله مدنظر است که دو رویکرد مطرح شده از دیدگاه‌های مختلف و با معیارهای کمی متفاوت مقایسه شوند. برای این منظور، دو رویکرد مطرح شده به‌طور مجزا شبیه‌سازی شده و مدل احتمالی آن‌ها با اثبات توابع چگالی احتمالی^۲ متغیرهای تصادفی مربوطه ارائه شده است.

۳- روش‌های استقرار گره عملگر

در این بخش از مقاله دو روش مختلف استقرار گره عملگر که در بخش قبل معرفی شدند به‌طور تحلیلی مورد بررسی قرار گرفته و تابع توزیع احتمالی میزان جابجایی عملگر برای هر روش استقرار به همراه اثبات ریاضی ارائه می‌شود.

۳-۱- رویکرد استقرار در مرکز

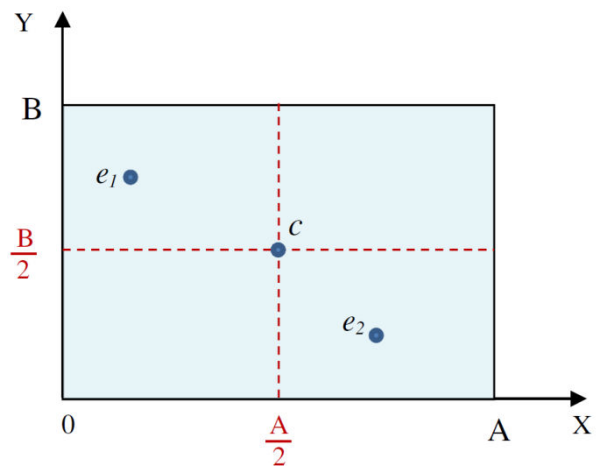
برای ارزیابی رویکرد استقرار در مرکز لازم است که تابع چگالی احتمالی فاصله رخدادها نسبت به مرکز ناحیه تحت نظارت محاسبه شود. محاسبه این تابع چگالی احتمالی در این مقاله به‌صورت مرحله‌ای انجام شده است. فرض شده است که رخدادها با توزیع یکنواخت دو

پیش‌بینی کرده و جهت سرویس‌دهی سریع و کاهش مصرف انرژی به محلی که احتمال رخداد آتی در آن وجود دارد حرکت کنند.

در مرجع [۱۸] موضوع پوشش حسی درجه k برای ناحیه مربعی و دایره‌ای شکل که گره‌های حسگر در آن با توزیع پواسون یا یکنواخت توزیع شده‌اند با در نظر گرفتن شرایط مرزی به‌صورت تحلیلی مورد بررسی قرار گرفته است. شعاع حسی گره‌های حسگر و تعداد آن‌ها پارامترهای مستقل این تحلیل است. تعداد مقالاتی که به‌صورت تحلیلی به بررسی شبکه‌های حسگر و عملگر پرداخته‌اند بسیار محدود است.

۲- بیان مسئله

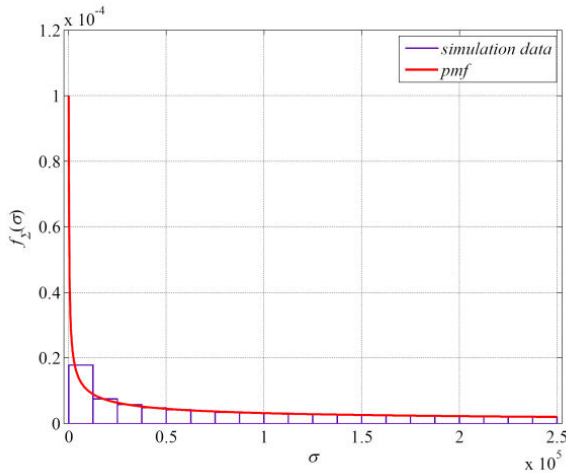
در این مقاله دو رویکرد مختلف برای مدیریت نحوه قرارگیری و حرکت یک عملگر در محیط تحت نظارت از طریق مدل‌سازی احتمالی و اثبات ریاضی در کنار شبیه‌سازی رایانه‌ای مورد بررسی قرار گرفته است. فرض می‌کنیم که حوزه تحت نظارت و کنترل یک ناحیه دوبعدی مستطیلی طبق شکل ۱ است که مختصات X و Y آن در محدوده $[A, B]$ که $A \geq B$ است. فرض می‌کنیم که رخدادها با توزیع یکنواخت دوبعدی در ناحیه تحت نظارت رخ می‌دهند و فاصله زمانی بین رخدادها نسبتاً زیاد است.



شکل ۱: محیط تحت نظارت و کنترل و دو رخداد نمونه در آن

به‌عنوان یک مثال کاربردی می‌توان فرض کرد که تعداد زیادی گره حسگر توسط هواپیما با توزیع تقریباً یکنواخت در محیط تحت نظارت پخش شده‌اند و در این حوزه یک عملگر قرار دارد. عوامل محیطی متعددی ممکن است باعث بروز خرابی در گره‌های حسگر شوند. به‌عنوان مثال ممکن است یک گره حسگر تصویری در اثر برخورد یک حیوان از وضعیت استقرار بر روی پایه خارج شود. وظیفه گره عملگر حضور در کنار گره حسگر و رسیدگی به آن است. با فرض توزیع یکنواخت دوبعدی برای استقرار گره‌های حسگر و با توجه به اینکه هر رخداد مربوط به یک حسگر است، می‌توان فرض کرد که توزیع جغرافیایی محل رخدادها توزیع یکنواخت دوبعدی است. در بسیاری از مقالات که در زمینه مدیریت گره‌های حسگر بی‌سیم ارائه شده فرض

دیگر بهتر است تعداد تکرار فرایند بیشتر شود تا صحت معادله تحلیل بدست آمده مشخص تر نمایش داده شود. طبق لم ۱ تابع چگالی احتمالی مجذور فاصله طولی رخدادها نسبت به مرکز ناحیه تحت نظارت قابل محاسبه است. این تابع چگالی احتمالی همچنین برای مجذور فاصله عرضی رخدادها نسبت به نقطه c نیز صادق است. در قدم دوم لازم است که تابع چگالی احتمالی جمع مجذور فاصله طولی و عرضی رخدادها نسبت به نقطه c با کمک نتایج لم ۱ محاسبه شود. این تابع بیانگر، چگالی احتمالی توزیع مجذور فاصله رخدادها نسبت به نقطه c است و رابطه آن در لم ۲ اثبات شده است.



شکل ۲: هیستوگرام حاصل از شبیه سازی و منحنی تابع چگالی احتمالی متغیر تصادفی Σ

لم ۲: تابع چگالی احتمالی متغیر تصادفی $Z = \Sigma_1 + \Sigma_2$ طبق رابطه (۵) است:

$$f_z(z) = \begin{cases} \frac{\pi}{AB} & , z \in \left[0, \frac{B^2}{4}\right] \\ \frac{\pi}{AB} - \frac{2}{AB} \tan^{-1}\left(\frac{2\sqrt{z - \frac{B^2}{4}}}{B}\right) & , z \in \left[\frac{B^2}{4}, \frac{A^2}{4}\right] \\ \frac{2}{AB} \left(\tan^{-1}\left(\frac{A}{2\sqrt{z - \frac{A^2}{4}}}\right) - \tan^{-1}\left(\frac{2\sqrt{z - \frac{B^2}{4}}}{B}\right)\right) & , z \in \left[\frac{A^2}{4}, \frac{A^2 + B^2}{4}\right] \end{cases} \quad (5)$$

اثبات: در برخی از کتاب های آمار احتمال کاربردی، مثال هایی از محاسبه تابع چگالی احتمالی یک متغیر تصادفی که ترکیب دو یا چند متغیر تصادفی مستقل باشد بیان شده است [۲۴]. طبق لم ۱، تابع چگالی احتمالی متغیرهای تصادفی مستقل هم نوع Σ_1 و Σ_2 را داریم. ابتدا حالتی را بررسی می کنیم که محدوده متغیر تصادفی Z در بازه $\left[0, \frac{B^2}{4}\right]$ است. تابع توزیع احتمالی متغیر تصادفی Z توسط محاسبه انتگرال تابع چگالی احتمالی توأم متغیرهای تصادفی Σ_1 و Σ_2 بر روی ناحیه D به شرح بعد محاسبه می شود:

بعدی در محدوده تحت نظارت رخ می دهند. بنابراین می توان فرض کرد که طول و عرض جغرافیایی رخدادها مستقل از هم بوده و به ترتیب از توزیع یکنواخت در بازه $[0, A]$ و $[0, B]$ پیروی می کند. فرض کنید متغیر تصادفی X بیانگر مختصات X (طول) یک رخداد نسبت به مبدأ مختصات باشد.

تابع توزیع تجمعی^۲ متغیر تصادفی X که به اختصار تابع توزیع نیز نامیده می شود با فرض بزرگ بودن A طبق رابطه (۱) است.

$$F_X(x) = P(X \leq x) \approx \frac{x}{A}, \quad x \in [0, A] \quad (1)$$

تابع چگالی احتمالی متغیر تصادفی X طبق رابطه (۲) خواهد بود.

$$f_X(x) \approx \frac{1}{A}, \quad x \in [0, A] \quad (2)$$

قدم اول محاسبه تابع چگالی احتمالی مجذور فاصله طولی رخدادها نسبت به نقطه c است. فرمول این تابع در لم ۱ ارائه و اثبات شده است.

لم ۱: تابع چگالی احتمالی متغیر تصادفی $\Sigma = (X - \frac{A}{2})^2$ طبق رابطه (۳) است.

$$f_\Sigma(\sigma) = \frac{1}{A\sqrt{\sigma}}, \quad \sigma \in \left[0, \frac{A^2}{4}\right] \quad (3)$$

اثبات: طبق تعریف متغیر تصادفی X و تابع توزیع احتمالی خواهیم داشت:

$$\begin{aligned} F_\Sigma(\sigma) &= P(\Sigma \leq \sigma) \\ &= P\left(\left(X - \frac{A}{2}\right)^2 \leq \sigma\right) \\ &= P\left(-\sqrt{\sigma} \leq X - \frac{A}{2} \leq \sqrt{\sigma}\right) \\ &= P\left(\frac{A}{2} - \sqrt{\sigma} \leq X \leq \frac{A}{2} + \sqrt{\sigma}\right) \\ &= F_X\left(\frac{A}{2} + \sqrt{\sigma}\right) - F_X\left(\frac{A}{2} - \sqrt{\sigma}\right) \\ &= \frac{\sqrt{\sigma} + \frac{A}{2}}{A} - \frac{-\sqrt{\sigma} + \frac{A}{2}}{A} = \frac{2\sqrt{\sigma}}{A} \end{aligned} \quad (4)$$

با مشتق گیری از تابع توزیع فوق نسبت به σ ، تابع چگالی احتمالی متغیر تصادفی Σ طبق رابطه (۳) خواهد بود.

در این مقاله از نرم افزار Matlab نسخه ۲۰۱۰ برای انجام شبیه سازی ها استفاده شده است و در تمام شبیه سازی های انجام شده مقادیر پارامترها $A=2000$ و $B=1000$ فرض شده است. شکل ۲ هیستوگرام حاصل از اجرای شبیه سازی پس از 4×10^4 تکرار به همراه شکل منحنی تابع چگالی احتمالی متغیر تصادفی Σ را نمایش می دهد. وقتی تعداد تکرار یک فرایند تصادفی به سمت بی نهایت میل می کند هیستوگرام نتایج شبیه سازی آن به معادله توزیع احتمالی همگرا می شود. هیستوگرام برخی متغیرهای تصادفی، در تعداد تکرار پایین تطابق خوبی با معادله توزیع احتمالی نمایش می دهند ولی برای برخی

هنگامی که متغیر تصادفی Z در محدوده $\left[\frac{B^2}{4}, \frac{A^2}{4}\right]$ باشد، تابع چگالی احتمالی این متغیر تصادفی توسط انتگرال تابع توزیع تصادفی توأم متغیر تصادفی Σ_1 و Σ_2 بر روی ناحیه‌های E_1 و E_2 به شرح زیر قابل محاسبه است:

$$F_Z(z) = \iint_{E_1} f_{\Sigma_1, \Sigma_2} dA + \iint_{E_2} f_{\Sigma_1, \Sigma_2} dA \quad (۹)$$

$$E_1, E_2 = \{(\sigma_1, \sigma_2) | \sigma_1 - \sigma_2 \leq z, z \in \left[\frac{B^2}{4}, \frac{A^2}{4}\right]\}$$

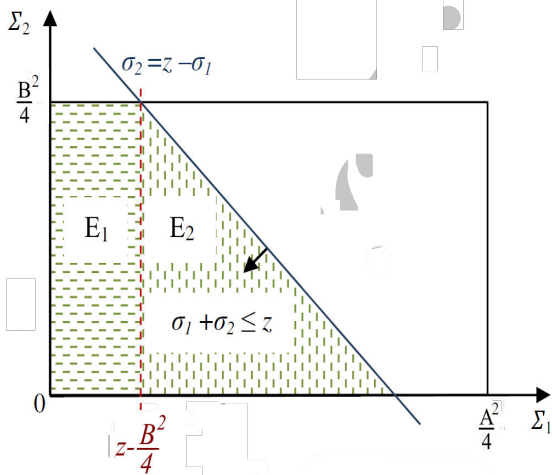
شکل ۴ ناحیه‌های انتگرال‌گیری E_1 و E_2 را نمایش می‌دهد. انتگرال روی ناحیه E_1 به شکل بعد قابل محاسبه است:

$$\iint_{E_1} f_{\Sigma_1, \Sigma_2} dA = \int_0^{z - \frac{B^2}{4}} \int_0^{\frac{B^2}{4}} \frac{1}{AB\sqrt{\sigma_1\sigma_2}} d\sigma_2 d\sigma_1$$

$$= \frac{1}{AB} \int_0^{z - \frac{B^2}{4}} \frac{1}{\sqrt{\sigma_1}} \left(2\sqrt{\sigma_2} \Big|_{\sigma_2=0}^{\sigma_2 = \frac{B^2}{4}} \right) d\sigma_1 \quad (۱۰)$$

$$= \frac{1}{A} \int_0^{z - \frac{B^2}{4}} \frac{1}{\sqrt{\sigma_1}} d\sigma_1 = \frac{2\sqrt{\sigma_1}}{A} \Big|_{\sigma_1=0}^{\sigma_1 = z - \frac{B^2}{4}}$$

$$= \frac{2}{A} \sqrt{z - \frac{B^2}{4}}$$



شکل ۴: ناحیه انتگرال‌گیری برای محاسبه تابع توزیع متغیر تصادفی Z برای

$$\text{مقادیر } \frac{B^2}{4} \leq z \leq \frac{A^2}{4}$$

برخی از فرمول‌های مهم برای محاسبه انتگرال نامعین توابع خاص از مرجع [۲۵] قابل دسترس است. انتگرال روی ناحیه E_2 به شکل زیر قابل محاسبه است:

$$F_Z(z) = \iint_D f_{\Sigma_1, \Sigma_2} dA, z \in \left[0, \frac{B^2}{4}\right] \quad (۶)$$

$$D = \{(\sigma_1, \sigma_2) | \sigma_1 - \sigma_2 \leq z\}$$

شکل ۳ مشخصات ناحیه انتگرال‌گیری D را نمایش می‌دهد. انتگرال به شکل زیر قابل محاسبه است:

$$F_Z(z) = \int_0^z \int_0^{z - \sigma_1} \frac{1}{A\sqrt{\sigma_1}} \times \frac{1}{B\sqrt{\sigma_2}} d\sigma_2 d\sigma_1$$

$$= \frac{1}{AB} \int_0^z \int_0^{z - \sigma_1} \frac{d\sigma_2 d\sigma_1}{\sqrt{\sigma_1\sigma_2}}$$

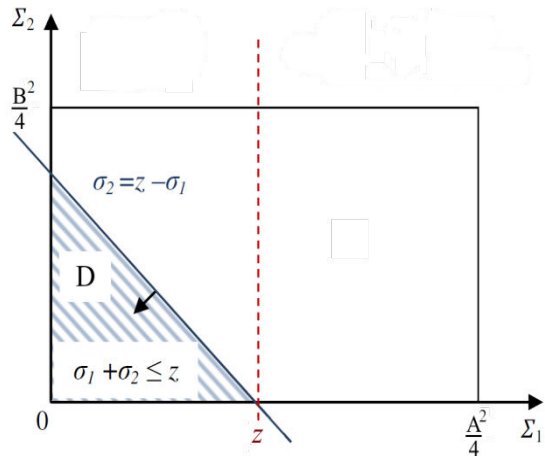
$$= \frac{1}{AB} \int_0^z \frac{1}{\sqrt{\sigma_1}} \left(2\sqrt{\sigma_2} \Big|_{\sigma_2=0}^{\sigma_2 = z - \sigma_1} \right) d\sigma_1 \quad (۷)$$

$$= \frac{2}{AB} \int_0^z \frac{\sqrt{z - \sigma_1}}{\sqrt{\sigma_1}} d\sigma_1$$

$$= \frac{2}{AB} \left(\sqrt{\sigma_1(z - \sigma_1)} \Big|_{\sigma_1=0}^{\sigma_1 = z} \right) + \frac{z}{2} \int_0^z \frac{d\sigma_1}{\sqrt{(z - \sigma_1)\sigma_1}}$$

$$= \frac{z}{AB} \int_0^z \frac{d\sigma_1}{\sqrt{(z - \sigma_1)\sigma_1}} = \frac{2z}{AB} \left(\tan^{-1} \sqrt{\frac{\sigma_1}{z - \sigma_1}} \Big|_{\sigma_1=0}^{\sigma_1 = z} \right)$$

$$= \frac{2z}{AB} \left[\tan^{-1}(\infty) - \tan^{-1}(0) \right] = \frac{z\pi}{AB}$$



شکل ۳: ناحیه انتگرال‌گیری برای محاسبه تابع توزیع متغیر تصادفی Z برای

$$\text{مقادیر } 0 \leq z \leq \frac{B^2}{4}$$

تابع چگالی احتمالی متغیر تصادفی Z در محدوده $\left[0, \frac{B^2}{4}\right]$ با

محاسبه مشتق تابع توزیع فوق نسبت به z به شکل رابطه (۸) است.

$$f_Z(z) = \frac{\pi}{AB}, z \in \left[0, \frac{B^2}{4}\right] \quad (۸)$$

با محاسبه مشتق تابع توزیع فوق نسبت به z تابع چگالی احتمالی متغیر تصادفی Z در محدوده $\left[\frac{B^2}{4}, \frac{A^2}{4}\right]$ به شکل رابطه (۱۳) به دست می‌آید.

$$f_Z(z) = \frac{\pi}{AB} - \frac{2}{AB} \tan^{-1} \left(\frac{2}{B} \sqrt{z - \frac{B^2}{4}} \right) \quad (13)$$

هنگامی که متغیر تصادفی Z در محدوده $\left[\frac{A^2}{4}, \frac{A^2+B^2}{4}\right]$ باشد،

تابع چگالی احتمالی این متغیر تصادفی توسط انتگرال تابع توزیع تصادفی توأم متغیر تصادفی Σ_1 و Σ_2 بر روی ناحیه‌های F_1 و F_2 به شرح زیر قابل محاسبه است:

$$F_Z(z) = \iint_{F_1} f_{\Sigma_1, \Sigma_2} dA + \iint_{F_2} f_{\Sigma_1, \Sigma_2} dA \quad (14)$$

$$F_1, F_2 = \{(\sigma_1, \sigma_2) | \sigma_1 - \sigma_2 \leq z, z \in \left[\frac{A^2}{4}, \frac{A^2+B^2}{4}\right]\}$$

شکل ۵ ناحیه‌های انتگرال گیری F_1 و F_2 را نمایش می‌دهد. انتگرال روی ناحیه F_1 مانند ناحیه E_1 بوده و به شکل زیر قابل محاسبه است:

$$\iint_{F_1} f_{\Sigma_1, \Sigma_2} dA = \int_0^z \int_0^{\frac{B^2+B^2}{4}} \frac{1}{AB\sqrt{\sigma_1\sigma_2}} d\sigma_2 d\sigma_1 = \frac{2}{A} \sqrt{z - \frac{B^2}{4}} \quad (15)$$

انتگرال روی ناحیه F_2 به شکل زیر قابل محاسبه است.

$$\iint_{F_2} f_{\Sigma_1, \Sigma_2} dA = \int_{z - \frac{B^2}{4}}^{\frac{A^2}{4}} \int_0^{z - \sigma_1} \frac{1}{AB\sqrt{\sigma_1\sigma_2}} d\sigma_2 d\sigma_1 =$$

$$\frac{1}{AB} \int_{z - \frac{B^2}{4}}^{\frac{A^2}{4}} \frac{1}{\sqrt{\sigma_1}} \left(2\sqrt{\sigma_2} \Big|_{\sigma_2=0}^{\sigma_2=z-\sigma_1} \right) d\sigma_1 = \frac{2}{AB} \int_{z - \frac{B^2}{4}}^{\frac{A^2}{4}} \frac{\sqrt{z - \sigma_1}}{\sqrt{\sigma_1}} d\sigma_1 =$$

$$\frac{2}{AB} \left(\sqrt{(z - \sigma_1)\sigma_1} \Big|_{\sigma_1=z - \frac{B^2}{4}}^{\frac{A^2}{4}} + \frac{z}{2} \int_{z - \frac{B^2}{4}}^{\frac{A^2}{4}} \frac{d\sigma_1}{\sqrt{(z - \sigma_1)\sigma_1}} \right) =$$

$$\frac{2}{AB} \left(\sqrt{\left(z - \frac{A^2}{4}\right) \frac{A^2}{4}} - \sqrt{\left(z - \frac{B^2}{4}\right) \frac{B^2}{4}} \right) + \frac{z}{AB} \int_{z - \frac{B^2}{4}}^{\frac{A^2}{4}} \frac{d\sigma_1}{\sqrt{(z - \sigma_1)\sigma_1}} =$$

$$\frac{\sqrt{z - \frac{A^2}{4}}}{B} - \frac{\sqrt{z - \frac{B^2}{4}}}{A} + \frac{z}{AB} \left(2 \tan^{-1} \left(\sqrt{\frac{\sigma_1}{z - \sigma_1}} \right) \Big|_{\sigma_1=z - \frac{B^2}{4}}^{\frac{A^2}{4}} \right) =$$

$$\frac{\sqrt{z - \frac{A^2}{4}}}{B} - \frac{\sqrt{z - \frac{B^2}{4}}}{A} + \frac{2z}{AB} \left(\tan^{-1} \left(\frac{A}{2\sqrt{z - \frac{A^2}{4}}} \right) - \tan^{-1} \left(\frac{2}{B} \sqrt{z - \frac{B^2}{4}} \right) \right) \quad (16)$$

$$\iint_{E_2} f_{\Sigma_1, \Sigma_2} dA = \int_{z - \frac{B^2}{4}}^z \int_0^{z - \sigma_1} \frac{1}{AB\sqrt{\sigma_1\sigma_2}} d\sigma_2 d\sigma_1$$

$$= \frac{1}{AB} \int_{z - \frac{B^2}{4}}^z \frac{1}{\sqrt{\sigma_1}} \left(2\sqrt{\sigma_2} \Big|_{\sigma_2=0}^{\sigma_2=z-\sigma_1} \right) d\sigma_1$$

$$= \frac{2}{AB} \int_{z - \frac{B^2}{4}}^z \frac{\sqrt{z - \sigma_1}}{\sqrt{\sigma_1}} d\sigma_1 \quad (11)$$

$$= \frac{2}{AB} \left(\sqrt{(z - \sigma_1)\sigma_1} \Big|_{\sigma_1=z - \frac{B^2}{4}}^z + \frac{z}{2} \int_{z - \frac{B^2}{4}}^z \frac{d\sigma_1}{\sqrt{(z - \sigma_1)\sigma_1}} \right)$$

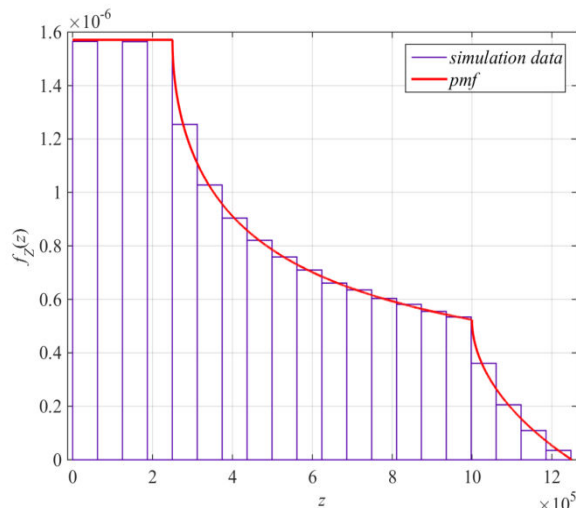
$$= \frac{-2}{AB} \sqrt{\left(z - \frac{B^2}{4}\right) \frac{B^2}{4}} + \frac{z}{AB} \left(2 \tan^{-1} \left(\sqrt{\frac{\sigma_1}{z - \sigma_1}} \right) \Big|_{\sigma_1=z - \frac{B^2}{4}}^z \right)$$

$$= \frac{-1}{A} \sqrt{z - \frac{B^2}{4}} + \frac{z\pi}{AB} - \frac{2z}{AB} \tan^{-1} \left(\frac{2}{B} \sqrt{z - \frac{B^2}{4}} \right)$$

تابع توزیع متغیر تصادفی Z در محدوده $\left[\frac{B^2}{4}, \frac{A^2}{4}\right]$ با جمع دو انتگرال محاسبه شده بر روی ناحیه‌های E_1 و E_2 به شکل زیر خواهد بود.

$$F_Z(z) = \iint_{E_1} f_{\Sigma_1, \Sigma_2} dA + \iint_{E_2} f_{\Sigma_1, \Sigma_2} dA =$$

$$\sqrt{z - \frac{B^2}{4}} + \frac{z\pi}{AB} - \frac{2z}{AB} \tan^{-1} \left(\frac{2}{B} \sqrt{z - \frac{B^2}{4}} \right) \quad (12)$$



شکل ۶: هیستوگرام حاصل از شبیه‌سازی و منحنی تابع چگالی احتمالی متغیر تصادفی Z

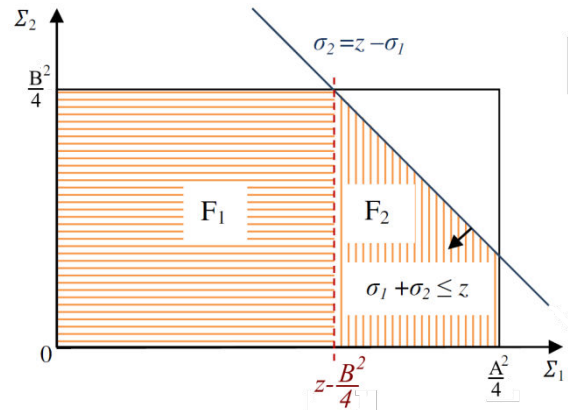
قضیه ۱: تابع چگالی احتمالی فاصله رخدادها نسبت به مرکز ناحیه تحت کنترل طبق رابطه (۱۹) است.

$$f_{\phi}(\phi) = \begin{cases} \frac{2\phi\pi}{AB}, & \phi \in \left[0, \frac{B}{2}\right] \\ \frac{2\phi\pi}{AB} - \frac{4\phi}{AB} \tan^{-1}\left(\frac{2\sqrt{\phi^2 - \frac{B^2}{4}}}{B}\right), & \phi \in \left[\frac{B}{2}, \frac{A}{2}\right] \\ \frac{4\phi}{AB} \left(\tan^{-1}\left(\frac{A}{2\sqrt{\phi^2 - \frac{A^2}{4}}}\right) - \tan^{-1}\left(\frac{2\sqrt{\phi^2 - \frac{B^2}{4}}}{B}\right) \right), & \phi \in \left[\frac{A}{2}, \frac{\sqrt{A^2+B^2}}{2}\right] \end{cases} \quad (19)$$

اثبات: تابع توزیع چگالی احتمالی متغیر تصادفی Z در لم ۲ اثبات شد. لازم است تابع توزیع چگالی احتمالی متغیر تصادفی $\Phi = \sqrt{Z}$ را محاسبه کنیم. طبق تعریف خواهیم داشت:

$$F_{\phi}(\phi) = P(\Phi \leq \phi) = P(\sqrt{Z} \leq \phi) = P(Z \leq \phi^2) = F_z(\phi^2) = \begin{cases} \frac{\phi^2\pi}{AB}, & \phi^2 \in \left[0, \frac{B^2}{4}\right] \\ \frac{\sqrt{\phi^2 - \frac{B^2}{4}}}{A} + \frac{\phi^2\pi}{AB} - \frac{2\phi^2}{AB} \tan^{-1}\left(\frac{2\sqrt{\phi^2 - \frac{B^2}{4}}}{B}\right), & \phi^2 \in \left[\frac{B^2}{4}, \frac{A^2}{4}\right] \\ \frac{\sqrt{\left(\phi^2 - \frac{A^2}{4}\right)}}{B} + \frac{\sqrt{\left(\phi^2 - \frac{B^2}{4}\right)}}{A} + \frac{2\phi^2}{AB} \left(\tan^{-1}\left(\frac{A}{2\sqrt{\phi^2 - \frac{A^2}{4}}}\right) - \tan^{-1}\left(\frac{2\sqrt{\phi^2 - \frac{B^2}{4}}}{B}\right) \right), & \phi^2 \in \left[\frac{A^2}{4}, \frac{A^2+B^2}{4}\right] \end{cases} \quad (20)$$

با مشتق‌گیری از تابع توزیع فوق نسبت به ϕ ، تابع چگالی احتمالی متغیر تصادفی Φ طبق رابطه (۱۹) خواهد بود.



شکل ۵: ناحیه انتگرال‌گیری برای محاسبه تابع توزیع متغیر تصادفی Z برای

$$\frac{A^2}{4} \leq z \leq \frac{A^2+B^2}{4}$$

تابع توزیع متغیر تصادفی Z در محدوده $\left[\frac{A^2}{4}, \frac{A^2+B^2}{4}\right]$ با جمع دو انتگرال محاسبه‌شده بر روی ناحیه‌های F_1 و F_2 به شکل زیر خواهد بود:

$$F_z(z) = \iint_{F_1} f_{\Sigma_1, \Sigma_2} dA + \iint_{F_2} f_{\Sigma_1, \Sigma_2} dA = \sqrt{z - \frac{A^2}{4}} + \sqrt{z - \frac{B^2}{4}} + \frac{2z}{AB} \left(\tan^{-1}\left(\frac{A}{2\sqrt{z - \frac{A^2}{4}}}\right) - \tan^{-1}\left(\frac{2\sqrt{z - \frac{B^2}{4}}}{B}\right) \right) \quad (17)$$

با محاسبه مشتق تابع توزیع فوق نسبت به تابع چگالی احتمالی متغیر تصادفی Z در محدوده $\left[\frac{A^2}{4}, \frac{A^2+B^2}{4}\right]$ به شکل رابطه (۱۸) به دست می‌آید.

$$f_z(z) = \frac{2}{AB} \left(\tan^{-1}\left(\frac{A}{2\sqrt{z - \frac{A^2}{4}}}\right) - \tan^{-1}\left(\frac{2\sqrt{z - \frac{B^2}{4}}}{B}\right) \right) \quad (18)$$

تابع چگالی احتمالی متغیر تصادفی Z طبق رابطه‌های (۸) و (۱۳) و (۱۸) به شکل رابطه (۵) خواهد بود.

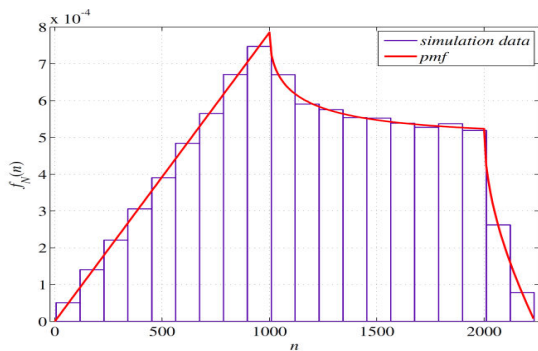
شکل ۶ هیستوگرام حاصل از اجرای شبیه‌سازی پس از ۱۰^۵ تکرار به همراه شکل منحنی تابع چگالی احتمالی متغیر تصادفی Z را نمایش می‌دهد.

طبق لم ۲ تابع چگالی احتمالی مجذور فاصله رخدادها نسبت به مرکز ناحیه تحت نظارت قابل محاسبه است. در قدم سوم لازم است که با استفاده از نتایج لم ۲، تابع چگالی فاصله رخدادها نسبت به نقطه c را محاسبه کنیم. با تعریف متغیر تصادفی جدید که جذر مجذور فاصله متغیر تصادفی است این امر در قضیه ۱ صورت پذیرفته است.

$$\begin{aligned}
 F_N(n) &= P(N \leq n) = \\
 &= P(2\Phi \leq n) = P\left(\Phi \leq \frac{n}{2}\right) = F_\Phi\left(\frac{n}{2}\right) = \\
 &\begin{cases} \frac{n^2\pi}{4AB}, & \frac{n^2}{4} \in \left[0, \frac{B^2}{4}\right] \\ \frac{\sqrt{n^2-B^2}}{2A} + \frac{n^2\pi}{4AB} - \frac{n^2}{2AB} \tan^{-1}\left(\frac{\sqrt{\phi^2-B^2}}{B}\right), & \frac{n^2}{4} \in \left[\frac{B^2}{4}, \frac{A^2}{4}\right] \\ \frac{\sqrt{n^2-A^2}}{2B} + \frac{\sqrt{n^2-B^2}}{2A} + \frac{n^2}{4} \left[\tan^{-1}\left(\frac{A}{\sqrt{n^2-A^2}}\right) - \tan^{-1}\left(\frac{\sqrt{n^2-B^2}}{B}\right) \right], & \frac{n^2}{4} \in \left[\frac{A^2}{4}, \frac{A^2+B^2}{4}\right] \end{cases} \quad (22)
 \end{aligned}$$

با مشتق‌گیری از تابع توزیع فوق نسبت به n ، تابع چگالی احتمالی متغیر تصادفی N طبق رابطه (۲۱) خواهد بود.

شکل ۸ هیستوگرام حاصل از اجرای شبیه‌سازی پس از 10^5 تکرار به همراه شکل منحنی تابع چگالی احتمالی متغیر تصادفی N را نمایش می‌دهد. با در دست بودن تابع چگالی احتمالی فاصله رفت و برگشت عملگر به محل رخدادهای می‌توان امید ریاضی آن را محاسبه کرد. نتایج 10^5 بار شبیه‌سازی، میانگین مقادیر این متغیر تصادفی را $1186/8$ و انحراف معیار استاندارد آن را $508/52$ نشان می‌دهد.



شکل ۸: هیستوگرام حاصل از شبیه‌سازی و منحنی تابع چگالی احتمالی متغیر تصادفی N

۲-۳- رویکرد استقرار در محل

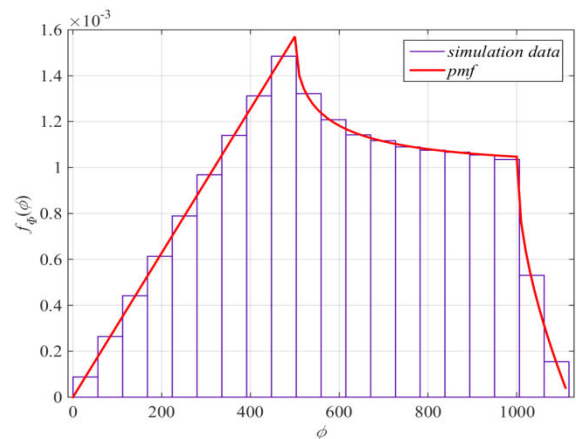
برای ارزیابی رویکرد استقرار در محل لازم است که تابع چگالی احتمالی فاصله رخدادهای متوالی نسبت به هم محاسبه شود. قدم اول محاسبه تابع چگالی احتمالی فاصله طولی دو رخداد متوالی است.

لم ۳: اگر X_1 و X_2 دو متغیر تصادفی مستقل با تابع چگالی احتمالی معادله (۲) باشند، آنگاه تابع چگالی احتمالی متغیر تصادفی $M=X_1-X_2$ طبق معادله (۲۳) خواهد بود.

$$f_M(m) = \begin{cases} \frac{(A+m)}{A^2}, & m \in [-A, 0] \\ \frac{1}{A} - \frac{m}{A^2}, & m \in [0, A] \end{cases} \quad (23)$$

اثبات: ابتدا حالتی را در نظر می‌گیریم که مقادیر متغیر تصادفی M در محدوده $[-A, 0]$ است. تابع توزیع این متغیر تصادفی با محاسبه

شکل ۷ هیستوگرام حاصل از اجرای شبیه‌سازی پس از 10^5 تکرار به همراه شکل منحنی تابع چگالی احتمالی متغیر تصادفی Φ را نمایش می‌دهد. با در دست داشتن تابع چگالی احتمالی فاصله رخدادهای از مرکز می‌توان میانگین (امید ریاضی) و انحراف معیار آن را محاسبه کرد. نتایج شبیه‌سازی‌ها، میانگین فاصله رخدادهای از مرکز ناحیه تحت نظارت را مقدار $593/7$ و انحراف معیار آن $254/4$ نشان می‌دهد. میانگین و انحراف معیار فاصله رفت و برگشت طبق قوانین احتمال دو برابر میانگین و انحراف معیار فاصله رفت خواهد بود که رابطه آن در قضیه ۱ اثبات شد. در ادامه تابع چگالی احتمالی فاصله رفت و برگشت عامل توسط قضیه ۲ با استفاده از نتایج قضیه ۱ استخراج شده است.



شکل ۷: هیستوگرام حاصل از شبیه‌سازی و منحنی تابع چگالی احتمالی متغیر تصادفی Φ

قضیه ۲: تابع چگالی احتمالی فاصله رفت و برگشت عملگر از مرکز ناحیه تحت کنترل به محل رخدادهای طبق رابطه (۲۱) است.

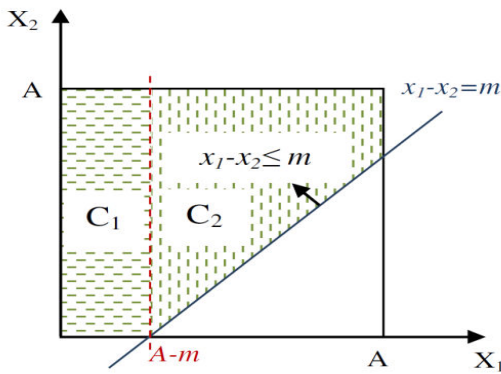
$$f_N(n) = \begin{cases} \frac{\pi n}{2AB}, & n \in [0, B] \\ \frac{\pi n}{2AB} - \frac{n}{AB} \tan^{-1}\left(\frac{\sqrt{n^2-B^2}}{B}\right), & n \in [B, A] \\ \frac{n}{AB} \left(\tan^{-1}\left(\frac{A}{\sqrt{n^2-A^2}}\right) - \tan^{-1}\left(\frac{\sqrt{n^2-B^2}}{B}\right) \right), & n \in [A, \sqrt{A^2+B^2}] \end{cases} \quad (21)$$

اثبات: تابع توزیع چگالی احتمالی متغیر تصادفی Φ در قضیه ۱ اثبات شد. اکنون لازم است تابع توزیع چگالی احتمالی متغیر تصادفی $N=2\Phi$ را محاسبه کنیم. طبق تعریف خواهیم داشت:

$$F_M(m) = \int_0^m \int_0^A \frac{1}{A^2} dx_2 dx_1 + \int_{mx_1-m}^A \int_0^A \frac{1}{A^2} dx_2 dx_1$$

$$= \frac{1}{A^2} \int_0^m A dx_1 + \frac{1}{A^2} \int_0^m (A - x_1 + m) dx_1 \quad (27)$$

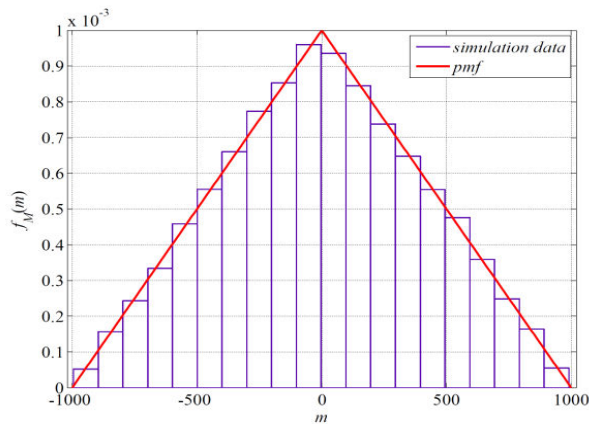
$$= \frac{m}{A} + \frac{1}{A^2} \left((A+m)x_1 - \frac{x_1^2}{2} \Big|_{x_1=0}^{x_1=m} \right) = \frac{1}{2} - \frac{m^2}{2A^2} + \frac{m}{A}$$



شکل ۱۰: ناحیه انتگرال گیری برای محاسبه تابع توزیع متغیر تصادفی M برای مقادیر $0 \leq m \leq A$

با مشتق گیری نسبت به m از دو تابع توزیع به دست آمده برای متغیر تصادفی M در دو بازه مجزا، تابع چگالی احتمالی آن طبق رابطه (۲۳) به دست می آید.

در شکل ۱۱ هیستوگرام حاصل از اجرای شبیه سازی پس از 4×10^4 تکرار به همراه شکل منحنی تابع چگالی احتمالی متغیر تصادفی M ترسیم شده است. طبق لم ۳ تابع چگالی احتمالی فاصله طولی رخدادهای متوالی نسبت به هم قابل محاسبه است. این تابع چگالی احتمالی برای محاسبه فاصله عرضی رخدادهای متوالی نسبت به هم نیز صادق است. در قدم دوم لازم است که با استفاده از نتایج لم ۳ تابع چگالی احتمالی مجذور این فاصله محاسبه شود. این رابطه در لم ۴ محاسبه شده است.



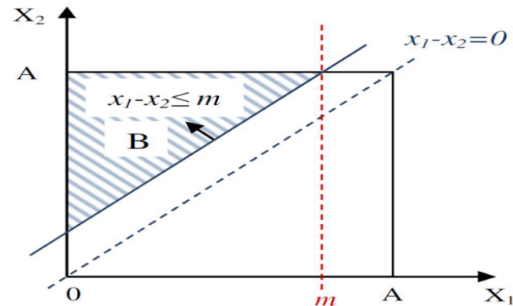
شکل ۱۱: هیستوگرام حاصل از شبیه سازی و منحنی تابع چگالی احتمالی متغیر تصادفی M

انتگرال تابع چگالی احتمالی توأم دو متغیر تصادفی مستقل X_1 و X_2 بر روی ناحیه B به شرح زیر قابل محاسبه است:

$$F_M(m) = \iint_B f_{X_1, X_2} dA, \quad m \in [-A, 0] \quad (24)$$

$$B = \{(x_1, x_2) | x_1 - x_2 \leq m\}$$

شکل ۹ مشخصات ناحیه انتگرال گیری B را نمایش می دهد.



شکل ۹: ناحیه انتگرال گیری برای محاسبه تابع توزیع متغیر تصادفی M برای مقادیر $-A \leq m \leq 0$

این انتگرال به شکل زیر قابل محاسبه است:

$$F_M(m) = \int_0^{A+m} \int_{x_1-m}^A \frac{1}{A^2} dx_2 dx_1$$

$$= \frac{1}{A^2} \int_0^{A+m} \left(x_2 \Big|_{x_2=x_1-m}^{x_2=A} \right) dx_1$$

$$= \frac{1}{A^2} \int_0^{A+m} (A - x_1 + m) dx_1$$

$$= \frac{1}{A^2} \left((A+m)x_1 - \frac{x_1^2}{2} \Big|_{x_1=0}^{x_1=A+m} \right) = \frac{(A+m)^2}{2A^2} \quad (25)$$

اکنون حالتی را بررسی می کنیم که مقادیر متغیر تصادفی M در محدوده $[0, A]$ است. تابع توزیع این متغیر تصادفی توسط محاسبه مجموع انتگرال های تابع چگالی احتمالی توأم متغیرهای تصادفی X_1 و X_2 بر روی ناحیه C_1 و C_2 به شرح زیر قابل محاسبه است:

$$F_M(m) = \iint_{C_1} f_{X_1, X_2} dA + \iint_{C_2} f_{X_1, X_2} dA, \quad m \in [0, A] \quad (26)$$

$$C_1, C_2 = \{(x_1, x_2) | x_1 - x_2 \leq m\}$$

شکل ۱۰ ناحیه های انتگرال گیری C_1 و C_2 را نمایش می دهد. این انتگرال به شکل زیر قابل محاسبه است:

$$f_R(r) = \begin{cases} \frac{1}{AB} \left(\frac{r}{AB} - \frac{2\sqrt{r}}{B} - \frac{2\sqrt{r}}{A} + \pi \right) & , r \in [0, B^2] \\ \frac{1}{AB} \left(\frac{2\sqrt{r-B^2}}{B} - \frac{2\sqrt{r}}{B} - \frac{B}{A} \right) + \frac{2}{AB} \left(\frac{\pi}{2} - \tan^{-1} \frac{\sqrt{r-B^2}}{B} \right) & , r \in [B^2, A^2] \\ \frac{1}{AB} \left(\frac{2\sqrt{r-A^2}}{A} + \frac{2\sqrt{r-B^2}}{B} - \frac{r}{AB} - \frac{A}{B} - \frac{B}{A} \right) + \frac{2}{AB} \left(\tan^{-1} \frac{A}{\sqrt{r-A^2}} - \tan^{-1} \frac{\sqrt{r-B^2}}{B} \right) & , r \in [A^2, A^2+B^2] \end{cases} \quad (30)$$

اثبات: طبق لم ۴، تابع چگالی احتمالی متغیر تصادفی T را داریم. ابتدا حالتی را بررسی می‌کنیم که محدوده متغیر تصادفی R بازه $[0, B^2]$ است. تابع توزیع متغیر تصادفی R با محاسبه انتگرال تابع توزیع تصادفی توأم دو متغیر تصادفی مستقل T_1 و T_2 بر روی ناحیه D به شرح زیر قابل محاسبه است:

$$F_R(r) = \iint_D f_{T_1, T_2} dA \quad , r \in [0, B^2] \quad (31)$$

$$D = \{(t_1, t_2) | t_1 - t_2 \leq r\}$$

شکل ۱۳ مشخصات ناحیه انتگرال گیری D را نمایش می‌دهد. انتگرال به شکل زیر قابل محاسبه است:

$$\begin{aligned} F_R(r) &= \int_0^{r-t_1} \int_0^{t_1} \frac{1}{AB} \left(\frac{1}{\sqrt{t_2}} - \frac{1}{B} \right) \left(\frac{1}{\sqrt{t_1}} - \frac{1}{A} \right) dt_2 dt_1 \\ &= \frac{1}{AB} \int_0^r \int_0^{r-t_1} \left(\frac{1}{\sqrt{t_1}\sqrt{t_2}} - \frac{1}{A\sqrt{t_2}} - \frac{1}{B\sqrt{t_1}} + \frac{1}{AB} \right) dt_2 dt_1 \\ &= \frac{1}{AB} \int_0^r \left(\frac{2\sqrt{t_2}}{\sqrt{t_1}} - \frac{2\sqrt{t_2}}{A} + \frac{t_2}{AB} - \frac{t_2}{B\sqrt{t_1}} \Big|_{t_2=0}^{t_2=r-t_1} \right) dt_1 \\ &= \frac{1}{AB} \int_0^r \left(\frac{2\sqrt{r-t_1}}{\sqrt{t_1}} - \frac{2\sqrt{r-t_1}}{A} + \frac{r-t_1}{AB} - \frac{r-t_1}{B\sqrt{t_1}} + \frac{t_1}{B\sqrt{t_1}} \right) dt_1 \\ &= \frac{1}{AB} \left(2\sqrt{(r-t_1)t_1} + \frac{4\sqrt{(r-t_1)^3}}{3A} + \frac{r-t_1}{AB} - \frac{t_1^2}{2AB} - \frac{2r\sqrt{t_1}}{B} + \frac{2\sqrt{t_1^3}}{3B} \Big|_{t_1=0}^{t_1=r} \right) \\ &+ \frac{r}{AB} \int_0^r \frac{dt_1}{\sqrt{t_1}(r-t_1)} \\ &= \frac{1}{AB} \left(\frac{r^2}{2AB} - \frac{4\sqrt{r^3}}{3B} - \frac{4\sqrt{r^3}}{3A} \right) + \frac{r}{AB} \left(2 \tan^{-1} \sqrt{\frac{t_1}{r-t_1}} \Big|_{t_1=0}^{t_1=r} \right) \\ &= \frac{1}{AB} \left(\frac{r^2}{2AB} - \frac{4\sqrt{r^3}}{3B} - \frac{4\sqrt{r^3}}{3A} + \pi r \right) \end{aligned} \quad (32)$$

تابع چگالی احتمالی متغیر تصادفی R در محدوده $[0, B^2]$ با محاسبه مشتق تابع توزیع فوق نسبت به r به شکل رابطه (۳۳) خواهد بود.

$$f_R(r) = \frac{1}{AB} \left(\frac{r}{AB} - \frac{2\sqrt{r}}{B} - \frac{2\sqrt{r}}{A} + \pi \right) \quad , r \in [0, A^2] \quad (33)$$

لم ۴: تابع چگالی احتمالی متغیر تصادفی $T=M^2$ طبق رابطه (۲۸) است.

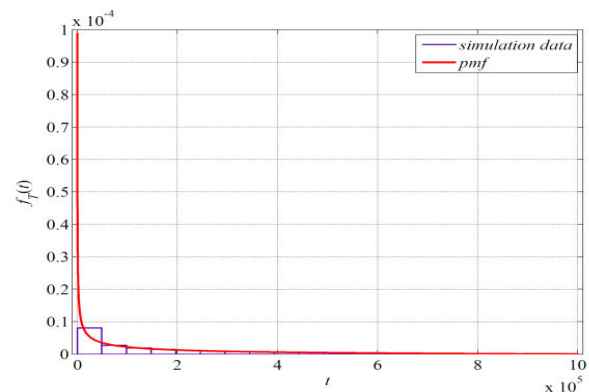
$$f_T(t) = \frac{1}{A} \left(\frac{1}{\sqrt{t}} - \frac{1}{A} \right) \quad , t \in [0, A^2] \quad (28)$$

اثبات: در لم ۳، تابع چگالی احتمالی متغیر تصادفی M بیان شد. طبق تعریف متغیر تصادفی T و تابع توزیع احتمالی داریم:

$$\begin{aligned} F_T(t) &= P(T \leq t) = P(M^2 \leq t) \\ &= P(-\sqrt{t} \leq M \leq \sqrt{t}) \\ &= F_M(\sqrt{t}) - F_M(-\sqrt{t}) \\ &= \frac{1}{2} - \frac{(\sqrt{t})^2}{2A^2} + \frac{\sqrt{t}}{A} - \frac{(A-\sqrt{t})^2}{2A^2} = \\ &= \frac{2\sqrt{t}}{A} - \frac{t}{A^2} \quad , t \in [0, A^2] \end{aligned} \quad (29)$$

با مشتق گیری از تابع توزیع فوق نسبت به t تابع چگالی احتمالی متغیر تصادفی T طبق رابطه (۲۸) به دست می‌آید.

شکل ۱۲ هیستوگرام حاصل از اجرای شبیه‌سازی پس از 10^5 تکرار به همراه شکل منحنی تابع چگالی احتمالی متغیر تصادفی T را نمایش می‌دهد.



شکل ۱۲: هیستوگرام حاصل از شبیه‌سازی و منحنی تابع چگالی احتمالی متغیر تصادفی T

طبق لم ۴ تابع چگالی احتمالی مجذور فاصله طولی یا عرضی رخدادهای متوالی قابل محاسبه است. مجذور فاصله طولی و عرضی، هر دو از تابع چگالی احتمالی یکسانی پیروی می‌کنند. در قدم سوم لازم است تابع چگالی احتمالی جمع مجذور فاصله طولی و عرضی رخدادهای متوالی محاسبه شود. این تابع بیانگر چگالی احتمالی مجذور فاصله بین رخدادهای خواهد بود و با استفاده از نتایج لم ۴ در لم ۵ اثبات شده است.

لم ۵: تابع چگالی احتمالی متغیر تصادفی $R=T_1+T_2$ طبق رابطه (۳۰) است:

انتگرال روی ناحیه E_2 به شکل زیر قابل محاسبه است:

$$\begin{aligned} \iint_{E_2} f_{T_1, T_2} dA &= \int_{r-B^2}^r \int_0^{r-t_1} \frac{1}{AB} \left(\frac{1}{\sqrt{t_2}} - \frac{1}{B} \right) \left(\frac{1}{\sqrt{t_1}} - \frac{1}{A} \right) dt_2 dt_1 = \\ &= \frac{1}{AB} \int_{r-B^2}^r \left(\frac{2\sqrt{t_2}}{\sqrt{t_1}} - \frac{2\sqrt{t_2}}{A} + \frac{t_2}{AB} - \frac{t_2}{B\sqrt{t_1}} \Big|_{t_2=0}^{t_2=r-t_1} \right) dt_1 = \\ &= \frac{1}{AB} \int_{r-B^2}^r \left(\frac{2\sqrt{r-t_1}}{\sqrt{t_1}} - \frac{2\sqrt{r-t_1}}{A} + \frac{r}{AB} - \frac{t_1}{AB} - \frac{r}{B\sqrt{t_1}} + \frac{\sqrt{t_1}}{B} \right) dt_1 = \\ &= \frac{1}{AB} \left(2\sqrt{(r-t_1)t_1} + \frac{4\sqrt{(r-t_1)^3}}{3A} + \frac{rt_1}{AB} - \frac{t_1^2}{2AB} - \frac{2r\sqrt{t_1}}{B} + \frac{2\sqrt{t_1^3}}{3B} \Big|_{t_1=r-B^2}^{t_1=r} \right. \\ &+ \left. \frac{r}{AB} \int_{r-B^2}^r \frac{dt_1}{\sqrt{(r-t_1)t_1}} \right) \\ &= \frac{1}{AB} \left(\frac{-4\sqrt{r^3}}{3B} - \frac{4B\sqrt{r-B^2}}{3} - \frac{5B^3}{6A} + \frac{4r\sqrt{r-B^2}}{3B} \right) + \\ &= \frac{2r}{AB} \left(\tan^{-1} \frac{\sqrt{t_1}}{\sqrt{r-t_1}} \Big|_{t_1=r-B^2}^{t_1=r} \right) = \\ &= \frac{1}{AB} \left(\frac{-4\sqrt{r^3}}{3B} - \frac{4B\sqrt{r-B^2}}{3} - \frac{5B^3}{6A} + \frac{4r\sqrt{r-B^2}}{3B} \right) + \\ &= \frac{2r}{AB} \left(\frac{\pi}{2} - \tan^{-1} \frac{\sqrt{r-B^2}}{B} \right) \end{aligned}$$

تابع توزیع متغیر تصادفی R در محدوده $[B^2, A^2]$ با جمع دو انتگرال محاسبه شده بر روی ناحیه‌های E_1 و E_2 به شکل زیر است:

$$\begin{aligned} F_R(r) &= \iint_{E_1} f_{T_1, T_2} dA + \iint_{E_2} f_{T_1, T_2} dA \\ &= \frac{1}{AB} \left(\frac{2B\sqrt{r-B^2}}{3} + \frac{4r\sqrt{r-B^2}}{3B} - \frac{4\sqrt{r^3}}{3B} - \frac{rB}{A} + \frac{B^3}{6A} \right) \\ &+ \frac{2r}{AB} \left(\frac{\pi}{2} - \tan^{-1} \frac{\sqrt{r-B^2}}{B} \right) \end{aligned} \quad (37)$$

با محاسبه مشتق تابع توزیع فوق نسبت به r تابع چگالی احتمالی متغیر تصادفی R در محدوده $[B^2, A^2]$ به شکل رابطه (۳۸) خواهد بود.

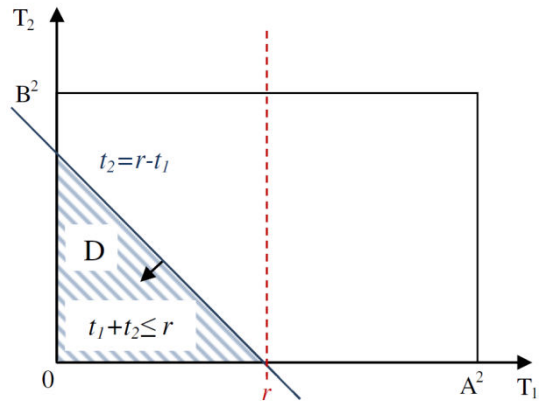
$$\begin{aligned} f_R(r) &= \frac{1}{AB} \left(\frac{2\sqrt{r-B^2}}{B} - \frac{2\sqrt{r}}{B} - \frac{B}{A} \right) \\ &+ \frac{2}{AB} \left(\frac{\pi}{2} - \tan^{-1} \frac{\sqrt{r-B^2}}{B} \right), r \in [B^2, A^2] \end{aligned} \quad (38)$$

هنگامی که متغیر تصادفی r در محدوده $[B^2, A^2]$ باشد، تابع چگالی احتمالی این متغیر تصادفی توسط انتگرال تابع توزیع تصادفی توأم متغیرهای تصادفی T_1 و T_2 بر روی ناحیه‌های F_1 و F_2 به شرح زیر قابل محاسبه است:

$$F_Z(z) = \iint_{F_1} f_{T_1, T_2} dA + \iint_{F_2} f_{T_1, T_2} dA \quad (39)$$

$$F_1, F_2 = \{(t_1, t_2) | t_1 - t_2 \leq r, r \in [A^2, A^2 + B^2]\}$$

شکل ۱۵ ناحیه‌های انتگرال گیری F_1 و F_2 را نمایش می‌دهد.



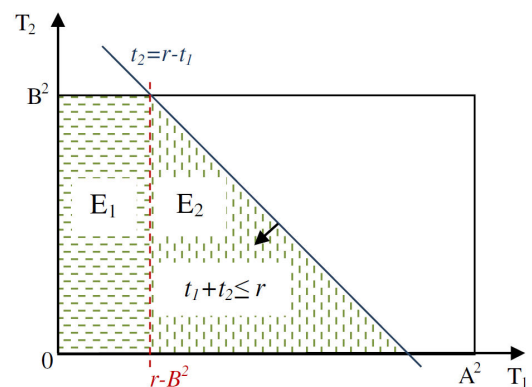
شکل ۱۳: ناحیه انتگرال گیری برای محاسبه تابع توزیع متغیر تصادفی R برای مقادیر $0 \leq r \leq B^2$

هنگامی که متغیر تصادفی R در محدوده $[B^2, A^2]$ باشد تابع توزیع آن توسط انتگرال تابع چگالی احتمالی توأم دو متغیر تصادفی T_1 و T_2 بر روی ناحیه‌های E_1 و E_2 به شرح زیر قابل محاسبه است:

$$\begin{aligned} F_R(r) &= \iint_{E_1} f_{T_1, T_2} dA + \iint_{E_2} f_{T_1, T_2} dA, r \in [B^2, A^2] \\ E_1, E_2 &= \{(t_1, t_2) | t_1 - t_2 \leq r\} \end{aligned} \quad (34)$$

شکل ۱۴ ناحیه‌های انتگرال گیری E_1 و E_2 را نمایش می‌دهد. انتگرال روی ناحیه E_1 به شکل زیر قابل محاسبه است:

$$\begin{aligned} \iint_{E_1} f_{T_1, T_2} dA &= \int_0^{r-B^2} \int_0^{r-t_1} \frac{1}{AB} \left(\frac{1}{\sqrt{t_2}} - \frac{1}{B} \right) \left(\frac{1}{\sqrt{t_1}} - \frac{1}{A} \right) dt_2 dt_1 \\ &= \frac{1}{AB} \int_0^{r-B^2} \left(\frac{2\sqrt{t_2}}{\sqrt{t_1}} - \frac{2\sqrt{t_2}}{A} + \frac{t_2}{AB} - \frac{t_2}{B\sqrt{t_1}} \Big|_{t_2=0}^{t_2=r-t_1} \right) dt_1 \\ &= \frac{1}{AB} \int_0^{r-B^2} \left(\frac{B}{\sqrt{t_1}} - \frac{B}{A} \right) dt_1 \\ &= \frac{1}{AB} \left(2B\sqrt{t_1} - \frac{Bt_1}{A} \right) \Big|_{t_1=0}^{t_1=r-B^2} \\ &= \frac{1}{AB} \left(2B\sqrt{r-B^2} - \frac{B(r-B^2)}{A} \right) \end{aligned} \quad (35)$$

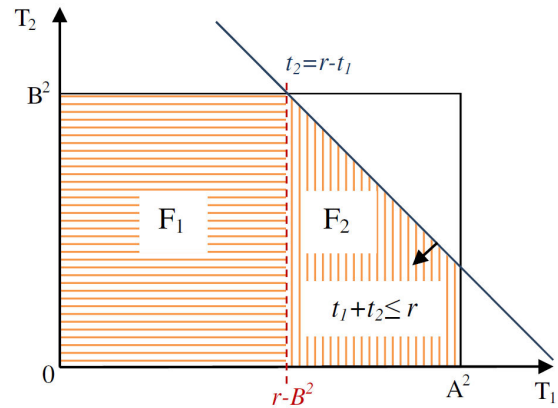


شکل ۱۴: ناحیه انتگرال گیری برای محاسبه تابع توزیع متغیر تصادفی R برای مقادیر $B^2 \leq r \leq A^2$

$$\iint_{F_1} f_{T_1, T_2} dA = \int_0^{r-B^2} \int_0^{r-t_1} \frac{1}{AB} \left(\frac{1}{\sqrt{t_2}} - \frac{1}{B} \right) \left(\frac{1}{\sqrt{t_1}} - \frac{1}{A} \right) dt_2 dt_1$$

$$= \frac{1}{AB} \left(2B\sqrt{r-B^2} - \frac{B(r-B^2)}{A} \right) \quad (40)$$

انتگرال روی ناحیه F_2 به شکل زیر قابل محاسبه است:



شکل ۱۵: ناحیه انتگرال گیری برای محاسبه تابع توزیع متغیر تصادفی R

برای مقادیر $A^2 \leq r \leq A^2 + B^2$

انتگرال روی ناحیه F_1 مانند ناحیه E_1 بوده و به شکل زیر قابل

محاسبه است:

$$\iint_{F_2} f_{T_1, T_2} dA = \int_{r-B^2}^{A^2} \int_0^{r-t_1} \frac{1}{AB} \left(\frac{1}{\sqrt{t_2}} - \frac{1}{B} \right) \left(\frac{1}{\sqrt{t_1}} - \frac{1}{A} \right) dt_2 dt_1$$

$$= \frac{1}{AB} \int_{r-B^2}^{A^2} \left(\frac{2\sqrt{t_2}}{\sqrt{t_1}} - \frac{2\sqrt{t_2}}{A} + \frac{t_2}{AB} - \frac{t_2}{B\sqrt{t_1}} \Big|_{t_2=0}^{t_2=r-t_1} \right) dt_1$$

$$= \frac{1}{AB} \int_{r-B^2}^{A^2} \left(\frac{2\sqrt{r-t_1}}{\sqrt{t_1}} - \frac{2\sqrt{r-t_1}}{A} + \frac{r-t_1}{AB} - \frac{r-t_1}{B\sqrt{t_1}} + \frac{\sqrt{t_1}}{B} \right) dt_1$$

$$= \frac{1}{AB} \left(2\sqrt{(r-t_1)t_1} + \frac{4\sqrt{(r-t_1)^3}}{3A} + \frac{rt_1}{AB} - \frac{t_1^2}{2AB} - \frac{2r\sqrt{t_1}}{B} + \frac{2\sqrt{t_1^3}}{3B} \Big|_{t_1=r-B^2}^{t_1=A^2} \right) + \frac{r}{AB} \int_{r-B^2}^{A^2} \frac{dt_1}{\sqrt{(r-t_1)t_1}} \quad (41)$$

$$= \frac{1}{AB} \left(2\sqrt{(r-t_1)t_1} + \frac{4\sqrt{(r-t_1)^3}}{3A} + \frac{rt_1}{AB} - \frac{t_1^2}{2AB} - \frac{2r\sqrt{t_1}}{B} + \frac{2\sqrt{t_1^3}}{3B} \Big|_{t_1=r-B^2}^{t_1=A^2} \right) + \frac{2r}{AB} \left(\tan^{-1} \sqrt{\frac{t_1}{r-t_1}} \Big|_{t_1=r-B^2}^{t_1=A^2} \right)$$

$$= \frac{1}{AB} \left(\frac{2A\sqrt{r-A^2}}{3} - \frac{4B\sqrt{r-B^2}}{3} + \frac{4r\sqrt{r-A^2}}{3A} + \frac{4r\sqrt{r-B^2}}{3B} + \frac{A^3}{6B} - \frac{5B^3}{6A} - \frac{r^2}{2AB} - \frac{rA}{B} \right)$$

$$= \frac{2r}{AB} \left(\tan^{-1} \frac{A}{\sqrt{r-A^2}} - \tan^{-1} \frac{\sqrt{r-B^2}}{B} \right)$$

تابع توزیع متغیر تصادفی Z در محدوده $[A^2, A^2 + B^2]$ با جمع دو انتگرال محاسبه شده بر روی ناحیه‌های F_1 و F_2 به شکل زیر خواهد بود:

$$F_Z(z) = \iint_{F_1} f_{\Sigma_1, \Sigma_2} dA + \iint_{F_2} f_{\Sigma_1, \Sigma_2} dA$$

$$= \frac{1}{AB} \left(\frac{2A\sqrt{r-A^2}}{3} + \frac{2B\sqrt{r-B^2}}{3} + \frac{4r\sqrt{r-A^2}}{3A} + \frac{4r\sqrt{r-B^2}}{3B} + \frac{A^3}{6B} + \frac{B^3}{6A} - \frac{r^2}{2AB} - \frac{rA}{B} - \frac{Br}{A} \right) \quad (42)$$

$$+ \frac{2r}{AB} \left(\tan^{-1} \frac{A}{\sqrt{r-A^2}} - \tan^{-1} \frac{\sqrt{r-B^2}}{B} \right)$$

$$f_R(r) = \frac{1}{AB} \left(\frac{2\sqrt{r-A^2}}{A} + \frac{2\sqrt{r-B^2}}{B} - \frac{r}{AB} - \frac{A}{B} - \frac{B}{A} \right) \quad (43)$$

$$+ \frac{2}{AB} \left(\tan^{-1} \frac{A}{\sqrt{r-A^2}} - \tan^{-1} \frac{\sqrt{r-B^2}}{B} \right), r \in [A^2, A^2 + B^2]$$

با محاسبه مشتق تابع توزیع فوق نسبت به r تابع چگالی احتمالی

متغیر تصادفی R در محدوده $[A^2, A^2 + B^2]$ به شکل رابطه (۴۳)

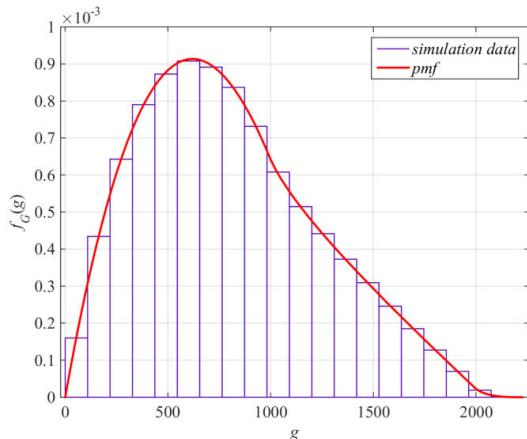
خواهد بود.

$$F_G(g) = P(G \leq g) = P(\sqrt{R} \leq g) = P(R \leq g^2) = F_R(g^2) =$$

$$\begin{cases} \frac{1}{AB} \left(\frac{g^4}{2AB} - \frac{4g^3}{3A} + \frac{4g^2}{3B} + \pi g^2 \right), & g^2 \in [0, B^2] \\ \frac{1}{AB} \left(\frac{2B\sqrt{g^2-B^2}}{3} + \frac{4g^2\sqrt{g^2-B^2}}{3B} - \frac{4g^3}{3B} - \frac{Bg^2}{A} + \frac{B^3}{6A} \right) + \\ \frac{2g^2}{AB} \left(\frac{\pi}{2} - \tan^{-1} \frac{\sqrt{g^2-A^2}}{A} \right), & g^2 \in [B^2, A^2] \\ \frac{1}{AB} \left(\frac{2A\sqrt{g^2-A^2}}{3} + \frac{2B\sqrt{g^2-B^2}}{3} + \frac{4g^2\sqrt{g^2-A^2}}{3A} + \right. \\ \left. \frac{4g^2\sqrt{g^2-B^2}}{3B} + \frac{A^3}{6B} + \frac{B^3}{6A} - \frac{g^4}{2AB} - \frac{Ag^2}{B} - \frac{Bg^2}{A} \right) + \\ \frac{2g^2}{AB} \left(\tan^{-1} \frac{A}{\sqrt{g^2-A^2}} - \tan^{-1} \frac{\sqrt{g^2-B^2}}{B} \right), & g^2 \in [A^2, A^2+B^2] \end{cases} \quad (45)$$

با مشتق‌گیری از تابع توزیع فوق نسبت به g ، تابع چگالی احتمالی متغیر تصادفی G طبق رابطه (۴۴) خواهد بود.

شکل ۱۷ هیستوگرام حاصل از اجرای شبیه‌سازی پس از 10^6 تکرار به همراه شکل منحنی تابع چگالی احتمالی متغیر تصادفی G را نمایش می‌دهد. با در دست بودن تابع چگالی احتمالی فاصله رخدادهای متوالی نسبت به هم می‌توان امید ریاضی آن را محاسبه کرد. نتایج 10^6 بار شبیه‌سازی میانگین مقادیر این متغیر تصادفی را $804/62$ و انحراف معیار استاندارد آن را $430/73$ نشان می‌دهد.



شکل ۱۷: هیستوگرام حاصل از شبیه‌سازی و منحنی تابع چگالی احتمالی متغیر تصادفی G

۴- ارزیابی رویکردها

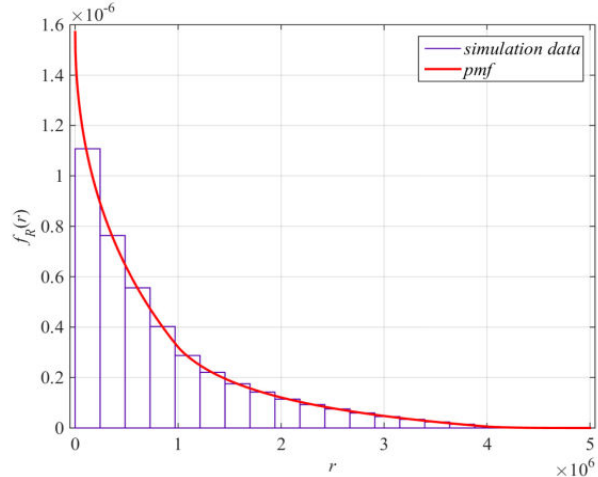
در این بخش از مقاله رویکردهای مختلف مطرح شده در بخش ۳ از دیدگاه‌های مختلف ارزیابی می‌شود.

۴-۱- مقایسه رویکردها در حالت تک عملگری

توابع توزیع محاسبه‌شده و شبیه‌سازی‌ها نشان می‌دهد که رویکرد استقرار در مرکز با میانگین $1186/8$ متر نسبت به رویکرد استقرار در محل که به طور متوسط نیاز به $804/62$ متر جابجایی عملگر دارد مصرف انرژی بیشتری دارد. اما رویکرد استقرار در مرکز با طی کردن

تابع چگالی احتمالی متغیر تصادفی R طبق رابطه‌های (۳۳) و (۳۸) و (۴۳) به شکل رابطه (۳۰) است.

شکل ۱۶ هیستوگرام حاصل از اجرای شبیه‌سازی پس از 10^5 تکرار به همراه شکل منحنی تابع چگالی احتمالی متغیر تصادفی R را نمایش می‌دهد.



شکل ۱۶: هیستوگرام حاصل از شبیه‌سازی و منحنی تابع چگالی احتمالی متغیر تصادفی R

طبق لم ۵ تابع چگالی احتمالی مجذور فاصله رخدادهای متوالی قابل محاسبه است. در قدم چهارم لازم است تابع چگالی احتمالی فاصله رخدادهای متوالی را محاسبه کنیم. با استفاده از نتایج لم ۵ و با تعریف متغیر تصادفی جدید که جذر مجذور فاصله است این امر امکان پذیر است و اثبات آن در قضیه ۳ ارائه شده است. قضیه ۳: تابع چگالی احتمالی فاصله رخدادهای متوالی نسبت به هم طبق رابطه (۴۴) است.

$$f_G(g) =$$

$$\begin{cases} \frac{g}{AB} \left(\frac{2g^2}{AB} - \frac{4g}{A} - \frac{4g}{B} + 2\pi \right), & g \in [0, A] \\ \frac{2g}{AB} \left(\frac{2\sqrt{g^2-B^2}}{B} - \frac{2g}{B} - \frac{B}{A} \right) + \\ \frac{4g}{AB} \left(\frac{\pi}{2} - \tan^{-1} \frac{\sqrt{g^2-B^2}}{B} \right), & g \in [B, A] \\ \frac{2g}{AB} \left(\frac{2\sqrt{g^2-A^2}}{A} + \frac{2\sqrt{g^2-B^2}}{B} - \frac{g^2}{AB} - \frac{A}{B} - \frac{B}{A} \right) + \\ \frac{4g}{AB} \left(\tan^{-1} \frac{A}{\sqrt{g^2-A^2}} - \tan^{-1} \frac{\sqrt{g^2-B^2}}{B} \right), & g \in [A, \sqrt{A^2+B^2}] \end{cases} \quad (44)$$

اثبات: تابع توزیع چگالی احتمالی متغیر تصادفی R در لم ۵ اثبات شد. لازم است تابع چگالی توزیع احتمالی متغیر تصادفی $G = \sqrt{R}$ را محاسبه کنیم. طبق تعریف خواهیم داشت:

محاسبه میانگین (امید ریاضی) فاصله عملگر تا محل رخداد با توجه به رویکرد استقرار تعیین می‌شود. با فرض مشخص و ثابت بودن ناحیه تحت نظارت می‌توان حداقل سرعت موردنیاز برای حرکت عملگر را طبق رابطه (۴۷) محاسبه کرد.

$$v > \frac{\lambda d \mu_e}{\mu_e - \lambda} \quad (47)$$

با استفاده از رابطه (۴۷) می‌توان متوسط d را محاسبه کرد و از این طریق، ابعاد مناسب ناحیه تحت نظارت برای یک عملگر را تعیین کرد. متوسط زمان انتظار برای رسیدگی به یک رخداد ($E[R]$) طبق رابطه (۴۸) محاسبه می‌شود که $E[W]$ متوسط زمان انتظار برای شروع سرویس و $E[S]$ متوسط زمان سرویس است.

$$E[R] = E[W] + E[S] \quad (48)$$

متوسط کارهای موجود در سیستم ($E[N]$) طبق رابطه (۴۹) محاسبه می‌شود که $E[N_q]$ متوسط کارهای موجود در صف و $E[N_s]$ متوسط تعداد کارهای در حال پردازش (که به علت وجود یک عملگر حداکثر برابر یک است) است.

$$E[N] = E[N_q] + E[N_s] = \lambda E[W] + \lambda E[S] \quad (49)$$

همچنین رابطه‌های (۵۰) را داریم:

$$E[W] = E[N] E[S], \quad E[N] = \lambda E[R] \quad (50)$$

متوسط کارهای موجود در سیستم طبق رابطه (۵۱) محاسبه می‌شود.

$$E[N] = \frac{\lambda}{\mu - \lambda} = \frac{\lambda}{\frac{v \mu_e}{v + d \mu_e} - \lambda} \quad (51)$$

متوسط زمان گردش کار (انتظار برای سرویس) طبق رابطه (۵۲) محاسبه می‌شود.

$$E[R] = E[W] + E[S] = E[N] E[S] + E[S] = \frac{1}{\frac{v \mu_e}{v + d \mu_e} - \lambda} \quad (52)$$

در برخی کاربردها لازم است که متوسط تعداد رخدادها موجود در صف انتظار کم‌تر یا مساوی آستانه خاصی مانند L باشد. با ایجاد محدودیت روی متوسط تعداد رخدادها منتظر در صف ($E[N_s]$) می‌توان کمینه سرعت موردنیاز برای حرکت عملگر یا بیشینه ابعاد ناحیه تحت نظارت یک عملگر را طبق رابطه زیر تعیین کرد:

$$\begin{cases} E[N_s] = \lambda E[S] \\ E[N_s] < L \end{cases} \Rightarrow \frac{d}{v} < \frac{L}{\lambda} - \frac{1}{\mu_e} \quad (53)$$

۳-۴- تعمیم به فضای کنترلی بزرگ‌تر

نتایج به دست آمده قابل تعمیم در کاربردهایی است که ناحیه تحت کنترل بزرگ بوده و تعداد عملگرها نیز زیاد باشد. می‌توان ناحیه تحت کنترل را به شکل کاشی کاری شده منطقه‌بندی کرد و هر عملگر وظیفه

میانگین فاصله $593/7$ متر نسبت به رویکرد استقرار در محل با میانگین فاصله $804/62$ متر سریع‌تر می‌تواند خود را به محل حادثه برساند.

عملگر در روش استقرار در محل نسبت به روش استقرار در مرکز به میزان $32/2\%$ مسافت کمتری را طی می‌کند و می‌توان ادعا کرد که به این میزان در مصرف انرژی صرفه‌جویی می‌شود. با فرض این که فاصله زمانی بین رخدادها نسبت به زمان انجام عملیات زیاد است امکان رسیدن عامل به محل حادثه در رویکرد استقرار در مرکز به میزان $26/2\%$ سریع‌تر از رویکرد استقرار در محل است.

سرعت عمل، در برخی کاربردها عامل تعیین کننده مهمی است. اگر عملگر سریع‌تر در محل رخداد حضور پیدا کند، سرویس دهی سریع‌تر انجام خواهد شد. رویکرد سوم برای استقرار عملگر بر اساس ترکیب دو رویکرد استقرار در مرکز و استقرار در محل قابل تعریف است و آن را رویکرد استقرار ترکیبی می‌نامیم. در این رویکرد، مواقعی که فاصله زمانی رخدادها زیاد است، عملگر پس از انجام مأموریت به مرکز ناحیه رجوع می‌کند و در مواقعی که فاصله زمانی رخدادها کم است و رخداد دیگری وجود دارد که رسیدگی نشده است، عملگر مستقیماً به محل رخداد بعدی حرکت خواهد کرد.

۴-۲- تنظیم پارامترهای سیستم طبق رویکرد استقرار انتخاب شده

مسئله رسیدگی به رخدادها را می‌توان به صورت یک مسئله تئوری صف از نوع $M|G|1|FCFS$ بررسی کرد. فرض می‌کنیم که رخدادها مستقل از هم بوده و با نرخ λ رخداد در واحد زمانی رخ می‌دهند. فاصله زمانی بین دو رخداد متوالی را با $E[A]$ نمایش می‌دهیم و فرض می‌کنیم خاصیت مارکوفی داشته و از توزیع نمایی با میانگین $\frac{1}{\lambda}$ پیروی می‌کند. فرض می‌کنیم که فاصله زمانی بین رخدادها نسبت به زمان رسیدگی به آن‌ها زیاد باشد. اگر سرعت عملگر را ثابت فرض کرده و با v نمایش دهیم، زمان رسیدن عملگر به محل رخداد (t) طبق رابطه $t = \frac{d}{v}$ محاسبه می‌شود که d بیانگر فاصله عملگر تا رخداد است. در صورت حضور عملگر در محل رخداد فرض می‌کنیم که زمان رسیدگی به رخدادها مستقل از هم بوده و از توزیع نمایی با میانگین $\frac{1}{\mu_e}$ پیروی می‌کند. متوسط زمان انجام عملیات را با $E[S]$ نمایش می‌دهیم و از توزیع ترکیبی با میانگین $\frac{1}{\mu}$ پیروی می‌کند. زمان انجام عملیات طبق رابطه (۴۶) از جمع زمان حرکت به سمت محل رخداد و زمان رسیدگی به رخداد محاسبه می‌شود.

$$\frac{1}{\mu} = \frac{1}{\mu_e} + \frac{d}{v} \quad (46)$$

طبق قانون لیتل^۴ بهره‌وری (ρ) طبق رابطه $\rho = \frac{\lambda}{\mu}$ محاسبه شده و باید کم‌تر از یک باشد. با فرض اینکه نرخ بروز رخدادها و متوسط زمان رسیدگی به رخدادها با فرض حضور عملگر در محل معین و ثابت باشد فقط دو پارامتر d و v قابل تنظیم خواهند بود. متوسط پارامتر d توسط

۵- نتیجه‌گیری و پیشنهادها برای کارهای آتی

در این مقاله دو رویکرد مختلف استقرار در مرکز و استقرار در محیط با هدف مدیریت نحوه قرارگیری و حرکت عملگر در سرویس‌دهی به رخدادهای محیط ارائه شد. فرض شد که رخدادهای توزیع یکنواخت دوبعدی مستقل از هم رخ می‌دهند و فاصله زمانی بین رخدادهای به حد کافی زیاد بوده، خاصیت مارکوفی داشته و از توزیع نمایی پیروی می‌کند. متغیرهای تصادفی موردنیاز به صورت جزء به جزء تعریف شده و توابع توزیع احتمالی آن‌ها استخراج و به روش ریاضی اثبات شد. نتایج شبیه‌سازی‌های انجام‌شده همخوانی کامل با نتایج اثبات‌های ریاضی را نشان داد.

پس از استخراج توابع توزیع احتمالی متغیرهای تصادفی مربوط به میزان مسافت حرکت عامل‌ها در رویکردهای مختلف، موضوع به صورت یک مسئله تئوری صف بیان شد. سپس روابط لازم برای تعیین متوسط طول صف انتظار و متوسط گردش کار استخراج شد. همچنین روابط موردنیاز برای تعیین کمینه مقدار سرعت عملگر در محیط و بیشینه ابعاد محیط تحت نظارت یک عملگر برای تضمین کمینه مقدار متوسط طول صف سرویس‌دهی برای رخدادهای استخراج شد. در انتها رویکردهای پیشنهادی برای مدیریت فضاهای بزرگ‌تر با تعداد عملگر بیش‌تر بسط داده شد. در رویکرد استقرار در محل اگر عملگرها را محدود به یک حوزه نکنیم و اجازه بدهیم نزدیک‌ترین عملگر به رخداد رسیدگی کند کاهش جزئی در متوسط جایجایی عملگرها مشاهده می‌شود.

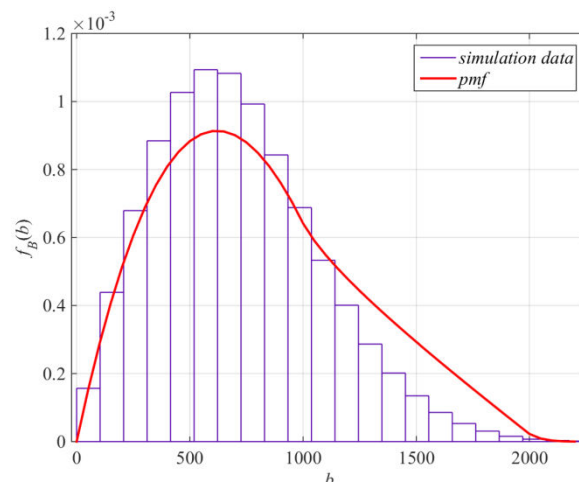
در تحقیقات آتی، برای بررسی رویکردهای پیچیده‌تر مدیریت قرارگیری و حرکت عملگرها در محیط‌های چند عملگری مانند رویکرد استقرار ترکیبی که در بخش ۴-۱ معرفی شد معادلات استخراج‌شده قابل استفاده هستند. همچنین می‌توان مسئله را در حالتی که فاصله زمانی بین رخدادهای کم است نیز مدل‌سازی و بررسی کرد. همچنین به عنوان کارهای آتی می‌توان میزان تأخیر رسیدن عملگر به محل رخداد را در میزان زمان موردنیاز برای سرویس‌دهی به رخدادهای تأثیر داد.

مراجع

- [1] C. Zixing, R. Xiaoping, H. Guodong, C. Baifan, and X. Zhichao, "Survey on wireless sensor and actor network," *9th World Congress on Intelligent Control and Automation*, pp. 788-793, 2011.
- [2] I. F. Akyildiz, and I. H. Kasimoglu, "Wireless sensor and actor networks: research challenges," *Ad. Hoc Networks*, vol. 2, no. 4, pp. 351-367, 2004.
- [3] Y. C. Wang, F. J. Wu, and Y. C. Tseng, "Mobility management algorithms and applications for mobile sensor networks," *Wireless Communications and Mobile Computing*, vol. 12, no. 1, pp. 7-21, 2012.
- [4] H. Liu, V. Malbasa, I. Mezei, A. Nayak, and I. Stojmenovic, "Coordination in sensor, actuator, and robot networks," *Wireless Sensor and Actuator Networks*, John Wiley & Sons Inc., pp. 233-261, 2010.
- [5] H. Salarian, K. W. Chin, and F. Naghdy, "Coordination in wireless sensor-actuator networks: A survey," *Journal of*

کنترل یک منطقه را به‌عهده داشته باشد. فرض کنید مشخصات هر منطقه مانند بخش‌های قبل یک ناحیه مستطیلی با طول ۲۰۰۰ متر و عرض ۱۰۰۰ متر باشد و برای هر منطقه یک عملگر اختصاص داده شود. اگر از رویکرد استقرار در مرکز یا استقرار در محل برای تمام منطقه‌ها استفاده شود، نتایج تحقیق کاملاً مانند نتایج حالت تک عملگری بررسی شده در بخش‌های قبل خواهد بود.

فرض کنید که رویکرد استقرار در محل را کمی تغییر دهیم. در ابتدا برای هر منطقه یک عملگر در یک نقطه تصادفی داخل آن در نظر می‌گیریم. اگر رخدادی در کل ناحیه تحت نظارت رخ دهد، نزدیک‌ترین عملگر به محل رخداد برای انجام مأموریت گسیل می‌شود. در این حالت ممکن است که عملگرها در طول زمان منطقه خود را تغییر دهند و امکان حضور چند عملگر در یک منطقه وجود دارد. نتایج شبیه‌سازی برای یک ناحیه متشکل از ۴ کاشی با ۴ عملگر در شکل ۱۸ نمایش داده شده است. این شکل هیستوگرام حاصل از شبیه‌سازی را با رویکرد جدید نشان می‌دهد. تابع چگالی توزیع ترسیم‌شده متعلق به حالتی است که هر عملگر محدود به یک منطقه (کاشی) است. این شکل برای مقایسه نتایج ویرایش جدید و قبلی رویکرد استقرار در محل ترسیم شده است.



شکل ۱۸: هیستوگرام حاصل از شبیه‌سازی رویکرد جدید و منحنی تابع چگالی احتمالی متغیر تصادفی G

نتایج شبیه‌سازی در شکل ۱۸ نمایش می‌دهد که با حذف محدودیت تعلق به یک منطقه خاص برای عملگرها متوسط فاصله طی‌شده کاهش پیدا خواهد کرد ولی میزان این کاهش کم است. نتایج شبیه‌سازی به ازای 10^6 اجرا نشان می‌دهد که میانگین فاصله طی‌شده برابر $711/35$ و انحراف معیار آن برابر با $361/96$ است. این در حالی است که در حالت محدود بودن هر عملگر به یک منطقه خاص متوسط فاصله طی‌شده $804/62$ متر و انحراف معیار آن $430/73$ است. نتایج شبیه‌سازی نشان می‌دهد که عدم محدودیت عملگر به انجام‌وظیفه در منطقه خودش نسبت به حالت محدود بودن به منطقه خود به میزان $11/6\%$ فاصله طی‌شده را کاهش می‌دهد.

- Networks and Applications*, vol. 11, no. 3, pp. 317-326, 2006.
- [21] Q. Zhang, C. H. Foh, B. C. Seet, and A. C. M. Fong, "Location estimation in wireless sensor networks using spring-relaxation technique," *Sensors*, vol. 10, no. 5, pp. 5171-5192, 2010.
- [22] H. M. Ammari, *The Art of Wireless Sensor Networks: Volume 2: Advanced Topics and Applications*, Springer, Berlin, pp. 87-88, 2013.
- [23] X. Zhang, and D. Qiao, *Quality, Reliability, Security and Robustness in Heterogeneous Networks*, Springer Publishing Company, Heidelberg, pp. 335-336, 2012.
- [24] K. S. Trivedi, *Probability and Statistics with Reliability, Queuing and Computer Science Applications*, John Wiley and Sons Ltd., 2002.
- [25] D. Zwillinger, *CRC Standard Mathematical Tables and Formulae*, 32nd ed., 2011.
- Parallel and Distributed Computing*, vol. 72, no. 7, pp. 856-867, 2012.
- [6] A. Nayak, and I. Stojmenovic, *Wireless Sensor and Actuator Networks: Algorithms and Protocols for Scalable Coordination and Data Communication*, Wiley-Interscience, 2010.
- [7] Y. Kim, and C. Jeon, "Actor positioning with minimal movement in wireless sensor and actor networks," *International Journal of Distributed Sensor Networks*, vol. 2015, 2015.
- [8] L. Zhang, C. C. Lim, Y. Chen, and H. R. Karimi, "Tracking mobile robot in indoor wireless sensor networks," *Mathematical Problems in Engineering*, vol. 2014, 2014.
- [9] O. Hachour, "Path planning of autonomous mobile robot," *International Journal of Systems Applications, Engineering & Development*, vol. 2, no. 4, pp. 178-190, 2008.
- [10] A. Howard, M. Mataric, and G. Sukhatme, "Mobile sensor network deployment using potential fields: A distributed, scalable solution to the area coverage problem," *Distributed Autonomous Robotic Systems*, Springer, Japan, pp. 299-308, 2002.
- [11] Z. Butler, and D. Rus, "Event-based motion control for mobile-sensor networks," *IEEE Pervasive Computing*, vol. 2, no. 4, pp. 34-42, 2003.
- [12] R. Siegwart, and I. R. Nourbakhsh, *Introduction to Autonomous Mobile Robots*, Bradford Book, 2004.
- [13] T. Melodia, D. Pompili, and I. F. Akyldiz, "Handling mobility in wireless sensor and actor networks," *IEEE Transactions on Mobile Computing*, vol. 9, no. 2, pp. 160-173, 2010.
- [14] S. Pashazadeh, "Upper bound of time synchronization error in two dimensional acoustic target localization using wireless sensor networks," *5th International Conference on Application of Information and Communication Technologies*, pp. 1-5, 2011.

زیرنویس‌ها

¹ Maximum Likelihood

² Probability mass function (pmf)

³ Cumulative distribution function (cdf)

⁴ Little's Law

[۱۵] سیدهدای اقدسی علمداری و مقصود عباس‌پور، «الگوریتم توزیع‌شده جهت فراهم آوردن پوشش چندجانبه از هدف در شبکه‌های حسگر بصری»، *مجله مهندسی برق دانشگاه تبریز*، دوره ۴۲، شماره ۲، صفحه ۶۳-۵۳، ۱۳۹۲.

[۱۶] فرهاد پارسایی‌نژاد و رضا قاضی‌زاده، «موقعیت‌یابی مبتنی بر پرش با استفاده از حسگرهای مرجع دارای دو شعاع ارتباطی متفاوت»، *مجله مهندسی برق دانشگاه تبریز*، دوره ۴۵، شماره ۲، صفحه ۴۹-۳۹، ۱۳۹۴.

- [17] K. Ota, M. Dong, Z. Cheng, J. Wang, X. Li, and X. Shen, "ORACLE: Mobility control in wireless sensor and actor networks," *Computer Communications*, vol. 35, no. 9, pp. 1029-1037, 2012.
- [18] P. J. Wan, and C. W. Yi, "Coverage by randomly deployed wireless sensor networks," *IEEE Transactions on Information Theory*, vol. 52, no. 6, pp. 2658-2669, 2006.
- [19] G. A. Shah, M. Bozyigit, and D. Aksoy, "Adaptive pull-push based event tracking in wireless sensor actor networks," *International Journal of Wireless Information Networks*, vol. 18, no. 1, pp. 24-38, 2010.
- [20] R. Madan, and S. Lall, "An energy-optimal algorithm for neighbor discovery in wireless sensor networks," *Mobile*