

# طراحی کنترل کننده پیش بین مدل پایدار ساز برای سیستم های هایبرید مرکب منطقی دینامیکی: رویکرد تابع لیاپانوف مبتنی بر نرم بی نهایت

علیرضا علما<sup>۱</sup>، کارشناس ارشد؛ مختار شادادقی<sup>۲</sup>، دانشیار؛ امین رضانی<sup>۳</sup>، استادیار

۱- دانشکده مهندسی برق و الکترونیک - دانشگاه صنعتی شیراز - شیراز - ایران - a.olama@sutech.ac.ir  
 ۲- دانشکده مهندسی برق و الکترونیک - دانشگاه صنعتی شیراز - شیراز - ایران - shasadeghi@sutech.ac.ir  
 ۳- دانشکده مهندسی برق و کامپیوتر - دانشگاه تربیت مدرس - تهران - ایران - ramezani@modares.ac.ir

**چکیده:** کنترل پیش بین سیستم های هایبرید با دو چالش اساسی تضمین پایداری حلقه-بسته و همچنین کاهش پیچیدگی محاسباتی روبه رو می باشد. در این مقاله، پایداری نمایی حلقه-بسته سیستم های هایبرید توصیف شده توسط مدل مرکب منطقی دینامیکی توسط کنترل پیش بین مدل تحلیل می شود. برای این منظور، استفاده از شرط نزولی بودن یک تابع لیاپانوف مبتنی بر نرم بی نهایت متغیرهای حالت سیستم، به جای تحمیل قید مساوی نهایی در مسئله کنترل پیش بین مدل سیستم های مرکب منطقی دینامیکی پیشنهاد می شود. شرایط تضمین پایداری نمایی حلقه-بسته با استفاده از روش پیشنهادی دارای عملکرد بهتری هم از نظر پیاده سازی کنترل کننده و هم از نظر پیچیدگی محاسباتی است. علاوه بر این، با استفاده از این روش، شرایط پایداری نمایی حلقه-بسته نقطه تعادل به مقدار افاق پیش بینی سیستم وابسته نمی باشد و همین امر می تواند یکی از مهم ترین مزایای این روش در نظر گرفته شود. با استفاده از شرط نزولی بودن تابع لیاپانوف در فرمول بندی کنترل پیش بین مدل برای سیستم های مرکب منطقی دینامیکی، نسخه زیر بهینه سیگنال کنترل با حجم محاسباتی بسیار کمتر به دست می آید. به منظور بررسی عملکرد روش پیشنهاد شده، مسئله پایداری در سیستم تعلیق خودرو مورد مطالعه و شبیه سازی قرار می گیرد.

**واژه های کلیدی:** کنترل کننده پیش بین مدل، سیستم های هایبرید مرکب منطقی دینامیکی، پایداری، برنامه ریزی صحیح-مرکب.

## Stable MPC Design for Hybrid Mixed Logical Dynamical Systems: $l_\infty$ -based Lyapunov Approach

A. Olama<sup>1</sup>, MSc; M. Shasadeghi<sup>2</sup>, Associate Professor; A. Ramezani<sup>3</sup>, Assistant Professor

1- Faculty of Electrical and Electronic Engineering, Shiraz University of Technology, Shiraz, Iran, Email: a.olama@sutech.ac.ir  
 2- Faculty of Electrical and Electronic Engineering, Shiraz University of Technology, Shiraz, Iran, Email: shasadeghi@sutech.ac.ir  
 3- Faculty of Electrical and Computer Engineering, Tarbiat Modares University, Tehran, Iran, Email: ramezani@modares.ac.ir

**Abstract:** There are two main challenges in control of hybrid systems which are to guarantee the closed-loop stability and reduce computational complexity. In this paper, we propose the exponential stability conditions of hybrid systems which are described in the Mixed Logical Dynamical (MLD) form in closed-loop with Model Predictive Control (MPC). To do this, it is proposed to use the decreasing condition of infinity norm based Lyapunov function instead of imposing the terminal equality constraint in the MPC formulation of MLD system. The exponential stability conditions have a better performance from both implementation and computational points of view. In addition, the exponential stability conditions of the equilibrium point of the MLD system do not depend on the prediction horizon of MPC problem which is the main advantage of the proposed method. On the other hand, by using the decreasing condition of the Lyapunov function in the MPC setup, the suboptimal version of the control signal with reduced complexity is obtained. In order to show the capabilities of the proposed method, the stabilization problem of the car suspension system is studied.

**Keywords:** Model predictive control, Mixed logical dynamical system, Mixed integer programming.

تاریخ ارسال مقاله: ۱۳۹۶/۰۷/۱۲

تاریخ اصلاح مقاله: ۱۳۹۶/۱۰/۲۳ و ۱۳۹۶/۱۲/۱۲

تاریخ پذیرش مقاله: ۱۳۹۷/۰۲/۱۹

نام نویسنده مسئول: مختار شادادقی

نشانی نویسنده مسئول ایران-شیراز-بولوار مدرس-دانشگاه صنعتی شیراز-دانشکده مهندسی برق و الکترونیک.

## ۱- مقدمه

سیستم‌های دینامیکی هایبرید [۱]، سیستم‌های دینامیکی هستند که از ترکیب سیستم‌های دینامیکی پیوسته-حالت و سیستم‌های دینامیکی رویداد گسسته<sup>۱</sup> [۲] تشکیل شده‌اند. این کلاس خاص از سیستم‌ها، در دهه‌های اخیر، به دلیل کاربردهای فراوان در صنایع کنترل، بسیار مورد توجه واقع شده‌اند. برای مثال، در یک مدار الکتریکی مبتنی بر عملیات کلیدزنی، ولتاژ و جریان با توجه به قوانین الکتریکی حاکم بر مدار، به صورت پیوسته نسبت به زمان و همچنین به صورت ناپیوسته نسبت به موقعیت کلیدهای موجود در مدار تغییر می‌کنند. به طور کلی، بسیاری از کاربردهای دنیای حقیقی و همچنین بسیاری از سیستم‌ها، ذاتاً دارای ویژگی‌های یک سیستم هایبرید می‌باشند.

با توجه به این موضوع که سیستم‌های هایبرید از دو زیر سیستم زمان-محور و رویداد-محور تشکیل شده‌اند، مدل فضای حالت کلاسیک، دارای توانایی لازم برای مدل سازی این سیستم‌ها نمی‌باشد. بنابراین، توسعه روش‌های مدل سازی جدید به منظور تحلیل و طراحی این سیستم‌ها امری ضروری به نظر می‌رسد. به همین دلیل، تاکنون رویکردهای مختلفی برای مدل سازی سیستم‌های هایبرید در مقالات ارائه شده‌اند که می‌توان از اتوماتای هایبرید [۳-۵]، سیستم‌های تکه‌ای مستوی<sup>۲</sup> [۶]، سیستم‌های مرکب منطقی دینامیکی<sup>۳</sup> [۷]، سیستم‌های [۸] MMPS<sup>۴</sup>، سیستم‌های مکمل [۹] و سیستم‌های مکمل تعمیم یافته به عنوان مهم‌ترین کلاس‌های مدل سازی هایبرید نام برد. هرچند که عناصر تشکیل دهنده این مدل‌ها یکسان می‌باشند، با این وجود، این روش‌های مدل سازی، از دیدگاه پیچیدگی تحلیل و طراحی، دارای نقاط قوت و ضعف منحصربه‌فرد خود می‌باشند. در مرجع [۱۰] به خوبی نشان داده شده است که تحت شرایطی این کلاس‌های مدل سازی معادل خواهند بود. مهم‌ترین مزیت معادل سازی این روش‌ها استفاده از مزایای مدل‌های مختلف می‌باشد.

در میان تمامی این روش‌های مدل سازی، سیستم‌های MLD دارای ویژگی‌های بسیار مناسبی مانند فرمول بندی مناسب جهت طراحی کنترل کننده بهینه، تشخیص و شناسایی خطا، تحلیل کنترل پذیری و رویت پذیری می‌باشد. علاوه بر موارد ذکر شده، با استفاده از مدل MLD می‌توان دسته بسیار وسیعی از سیستم‌های هایبرید را نیز مدل سازی نمود. به طور خلاصه در این روش، سیستم هایبرید توسط ترکیب متغیرهای حقیقی و باینری تشکیل می‌شود. ارتباط این متغیرها نیز به صورت قیدهایی به سیستم اضافه می‌شود. علاوه بر سیستم‌های هایبرید، با استفاده از مدل MLD می‌توان دسته وسیعی از سیستم‌ها، مانند سیستم‌های خطی مقید، ماشین‌های حالت محدود، و سیستم‌های دارای متغیرهای باینری را مدل سازی نمود.

از آنجا که سیستم MLD یک سیستم غیرخطی مقید و دارای دینامیک ناپیوسته می‌باشد، طراحی کنترل کننده برای چنین سیستمی امر بسیار چالش برانگیزی می‌باشد. در میان انواع روش‌های طراحی کنترل کننده، کنترل کننده پیش بین مدل<sup>۵</sup> به دلیل دارا بودن توانایی‌های

منحصربه‌فرد در حل مسائل کنترلی پیچیده، به طور گسترده در صنایع مختلف مورد استفاده قرار می‌گیرد. به عنوان نمونه، در مرجع [۱۱] این استراتژی کنترلی به منظور کنترل سیستم‌های عملیات از راه دور مورد استفاده قرار گرفته است. در مرجع [۱۲]، بر اساس برنامه ریزی چند پارامتری، کنترل کننده MPC به صورت خارج از خط و با حجم محاسباتی کم برای حل مسئله ردیابی مورد استفاده قرار گرفته است. به طور خلاصه، MPC یک استراتژی کنترلی است که در آن، سیگنال کنترل در زمان حال، توسط حل بر-خط (در هر زمان نمونه برداری) یک مسئله کنترل بهینه حلقه باز افق محدود به دست می‌آید. حل این مسئله که در آن از متغیرهای حالت سیستم در زمان حال به عنوان شرط اولیه مسئله استفاده می‌شود، به تولید یک دنباله کنترلی منجر می‌شود که بر اساس استراتژی افق پس رفتی<sup>۶</sup>، فقط اولین عنصر این دنباله (سیگنال کنترل در زمان حال) به سیستم اعمال می‌شود. به عبارت دقیق تر، در MPC، با استفاده از مدل دینامیکی سیستم تحت کنترل، رفتار آینده بردار خروجی سیستم پیش بینی می‌شود و بر اساس این پیش بینی، در هر لحظه از زمان، کنترل کننده با استفاده از حل یک مسئله بهینه سازی ریاضی که منجر به تولید سیگنال‌های کنترل در لحظات آتی می‌شود، بهترین فرمان کنترلی را جهت مینیمم کردن یک معیار کارایی در حضور قیود فیزیکی تحمیل شده به سیستم، اتخاذ می‌کند و این روند در هر لحظه از زمان تکرار می‌شود [۱۳]، [۱۴].

در مرجع [۷]، این استراتژی کنترلی برای سیستم‌های MLD تعمیم داده شده است. مهم‌ترین وجه تمایز بین کنترل پیش بین هایبرید<sup>۷</sup> و غیرهایبرید در این است که در H-MPC، دنباله کنترلی از حل یک مسئله برنامه ریزی صحیح-مرکب<sup>۸</sup> [۱۵]، [۱۶] در هر لحظه از زمان به دست می‌آید که در حالت کلی، یک مسئله NP-Hard [۱۷] می‌باشد. در ادبیات پیچیدگی محاسباتی، NP-Hard به معنای اتلاف می‌شود که دست کم به اندازه دشوارترین مسئله در NP دشوار می‌باشد. به همین دلیل، از نقطه نظر پیچیدگی محاسباتی، محاسبه دنباله کنترلی در H-MPC امر بسیار دشوارتر از سایر کلاس‌های MPC می‌باشد. تاکنون مقالات بسیار متنوعی از کاربردهای سیستم‌های MLD به همراه H-MPC معرفی شده است که می‌توان به کنترل سیستم‌های مرتبط با خودرو [۱۸]، کنترل تحت شبکه [۱۹] و کنترل شبکه‌های قدرت [۲۰-۲۲] اشاره نمود.

به طور کلی، H-MPC با دو چالش اساسی روبه‌رو می‌باشد که عبارتند از (۱) تضمین پایداری حلقه-بسته و (۲) کاهش پیچیدگی محاسباتی. در MPC غیرهایبرید، روش‌های مختلفی برای تضمین پایداری حلقه-بسته ارائه شده است. در یک دسته بسیار کاربردی از این روش‌ها، که به کنترل پیش بین با دو مود عملکرد شناخته می‌شود، یک کنترل کننده محلی وجود دارد که یک مجموعه پایای مثبت [۲۳] حول نقطه تعادل سیستم ایجاد نموده و MPC سعی می‌کند بردار حالت را به درون این مجموعه هدایت کند [۱۳]. در درون این مجموعه، کنترل کننده محلی وظیفه پایداری سازی سیستم را به عهده خواهد

## ۲- مقدمات

## ۲-۱- سیستم‌های مرکب منطقی-دینامیکی

ایده اصلی مدل سازی به روش MLD براساس تبدیل گزاره‌های منطقی به نام ساوی‌های صحیح-مرکب می‌باشد [۲۷]. این نام ساوی‌ها عموماً متشکل از متغیرهای صحیح و حقیقی می‌باشند. با استفاده از این روش، سیستم هایبرید را می‌توان به صورت یک سیستم شبه-خطی به همراه قیود صحیح-مرکب بیان نمود. برای مثال، عبارت منطقی "یا" را می‌توان توسط نامساوی صحیح مرکب معادل به صورت زیر بیان نمود:

$$X_1 \vee X_2 \equiv \delta_1 + \delta_2 \geq 1 \quad (1)$$

که در آن  $\delta_i \in \{0,1\}$  متغیر باینری به اشتراک گذاشته شده با متغیر منطقی  $X_i$  می‌باشد که در صورت صحیح بودن عبارت منطقی مقدار یک و در غیر این صورت مقدار صفر به خود خواهد گرفت. رابطه (۱) این مفهوم را بیان می‌کند که عبارت منطقی سمت چپ صحیح است اگر و فقط اگر نامساوی عدد صحیح سمت راست برقرار باشد. با استفاده از این تکنیک و همچنین معرفی متغیرهای کمکی پیوسته به منظور تبدیل حاصل ضرب عبارات باینری و حقیقی به نام ساوی‌های صحیح-مرکب، مدل MLD به صورت زیر به دست می‌آید:

$$x(t+1) = Ax(t) + Bu(t) + B_2\delta(t) + B_3z(t) \quad (2)$$

$$y(t) = Cx(t) + Du(t) + D_2\delta(t) + D_3z(t) \quad (3)$$

$$E_2\delta(t) + E_3z(t) \leq E_1u(t) + E_4x(t) + E_5 \quad (4)$$

در این روابط  $t$  زمان گسسته،

$$x = \begin{pmatrix} x_c \\ x_l \end{pmatrix}, \quad x_c \in \mathcal{R}^{n_c}, \quad x_l \in \{0,1\}^{n_l}, \quad n \triangleq n_c + n_l$$

بردار حالت سیستم شامل متغیرهای باینری و حقیقی،

$$y = \begin{pmatrix} y_c \\ y_l \end{pmatrix}, \quad y_c \in \mathcal{R}^{p_c}, \quad y_l \in \{0,1\}^{p_l}, \quad p \triangleq p_c + p_l$$

بردار خروجی سیستم و

$$u = \begin{pmatrix} u_c \\ u_l \end{pmatrix}, \quad u_c \in \mathcal{R}^{m_c}, \quad u_l \in \{0,1\}^{m_l}, \quad m \triangleq m_c + m_l$$

بردار ورودی سیستم شامل متغیرهای ورودی پیوسته و باینری می‌باشد. بردار  $z \in \mathcal{R}^{r_c}$  و  $\delta \in \{0,1\}^{r_l}$  به ترتیب، بردارهای متغیرهای کمکی باینری هستند که به عنوان ورودی‌های کنترلی سیستم MLD مورد استفاده قرار می‌گیرند. بنابراین روابط (۲) و (۳) به ترتیب، معادلات حالت و خروجی سیستم و رابطه (۴) قیدهای به دست آمده در طی فرایند مدل سازی را بیان می‌کند. ذکر این نکته لازم است که عموماً برای یک سیستم هایبرید، مدل‌های MLD متفاوتی می‌توان ارائه نمود. دلیل این امر این است که معمولاً نظیر نمودن متغیرهای باینری و نیز انتخاب متغیرهای کمکی دارای انتخاب‌های متفاوتی است و هر یک از این انتخاب‌ها منجر به مدل MLD جداگانه‌ای می‌شود. به منظور جزئیات بیشتر به مرجع [۷] رجوع شود.

داشت. در مراجع [۲۴-۲۶]، این روش به منظور پایدارسازی سیستم‌های هایبرید مبتنی بر مدل PWA تعمیم داده شده است. اولین روش تضمین پایداری حلقه-بسته برای سیستم‌های MLD در مرجع [۷] معرفی شده است. در این روش که نوع سخت‌گیرانه‌تری از کنترل پیش‌بین با دو مد عملکرد است، مجموعه نهایی حول نقطه تعادل سیستم دقیقاً نقطه تعادل در نظر گرفته می‌شود و همچنین کنترل کننده محلی نیز برابر صفر می‌باشد. دلیل این امر این است که به دلیل وجود متغیرهای باینری در معادلات دینامیکی سیستم، محاسبه کنترل کننده محلی و همچنین مجموعه پایا حول مبدأ کار بسیار مشکلی می‌باشد. در این رویکرد، که به آن کنترل پیش‌بین با قید مساوی نهایی<sup>۹</sup> گفته می‌شود، بردار حالت سیستم می‌بایستی در انتهای افق پیش‌بینی به نقطه تعادل سیستم برسد. مهم‌ترین نقطه ضعف این روش در این است که این قید در بسیاری از موارد ارضاشدنی نیست. به عبارت دیگر، نقطه تعادل سیستم در چند گام زمانی قابل دسترسی نیست و این قید صرفاً به‌ازای افق‌های پیش‌بینی بزرگ ارضاشدنی خواهد بود. علاوه بر این، به منظور برقراری این قید بدون افزایش افق پیش‌بینی، شرایط اولیه سیستم می‌بایستی به طور قابل توجهی به نقطه تعادل سیستم نزدیک باشند از این رو، با توجه به NP-Hard بودن مسئله بهینه‌سازی، افزایش افق پیش‌بینی موجب افزایش ابعاد مسئله و به تبع آن افزایش پیچیدگی محاسباتی مسئله می‌شود. از طرف دیگر، این قید در صورت ارضاشدن نیز تنها جاذب بودن نقطه تعادل را تضمین می‌کند و نمی‌توان با استفاده از آن پایداری لیاپانوف را اثبات نمود. از این جهت ارائه روش‌های تضمین کننده پایداری برای سیستم‌های MLD بدون استفاده از قید مساوی نهایی جهت کاهش پیچیدگی محاسباتی امر ضروری به نظر می‌رسد.

در این مقاله، به منظور تضمین پایداری نمایی حلقه-بسته و همچنین کاهش پیچیدگی محاسباتی مسئله پایداری سیستم‌های MLD، از قید نزولی بودن تابع لیاپانوف به جای قید مساوی نهایی در مسئله H-MPC استفاده شده است. برای این منظور، یک تابع لیاپانوف مبتنی بر نرم بی‌نهایت برای سیستم تعریف شده و H-MPC سعی می‌کند در هر گام زمانی، تابع لیاپانوف را کوچک تر نماید. در ادامه نشان داده خواهد شد که این قید به افق پیش‌بین مسئله وابسته نبوده و می‌توان با استفاده از آن، پایداری نمایی سیستم حلقه-بسته را به‌ازای افق پیش‌بینی بسیار کوچک (حتی برابر با یک) تضمین کرد. با توجه به رابطه مستقیم پیچیدگی محاسباتی با افق پیش‌بین مسئله H-MPC می‌توان با استفاده از روش پیشنهادی، پیچیدگی محاسباتی مسئله را نیز به طور چشم‌گیری کاهش داد. علاوه بر این موارد، با استفاده از ساختار قید نزول تابع لیاپانوف، همان‌گونه که نشان داده خواهد شد، می‌توان نوع زیربینه این کنترل کننده با پیچیدگی محاسباتی بسیار کمتر را نیز ارائه نمود.

۲-۲- تعاریف اساسی سیستم‌های MLD

که در آن،  $N$  افق پیش‌بینی،  $U_t$  بردار متغیرهای بهینه‌سازی شامل ورودی کنترل، متغیر کمکی باینری و پیوسته،  $y_e, x_e, u_e, z_e$  و  $\delta_e$  مقادیر حالت ماندگار برای متغیر خروجی، حالت، ورودی و متغیرهای کمکی باینری و پیوسته و ماتریس‌های مثبت معین  $Q_i, i = 1, \dots, 5$  ماتریس‌های وزنی با ابعاد مناسب می‌باشند. در این فرمول‌بندی، قید مساوی نهایی (۱۲) به منظور تضمین پایداری حلقه-بسته مورد استفاده قرار گرفته است. پس از حل مسئله بهینه‌سازی فوق در هر لحظه، طبق استراتژی RHC، اولین عنصر از بردار بهینه‌سازی به سیستم MLD اعمال می‌شود و برای لحظات بعد، افق پیش‌بینی در طول محور زمان شیفت داده شده و روند بهینه‌سازی مجدد تکرار می‌گردد.

تعاریف اساسی پایداری سیستم‌های MLD به صورت زیر می‌باشند [۷]:  
**تعریف ۱:** بردار  $x_e \in \mathbb{R}^{n_c} \times \{0,1\}^{m_l}$  یک حالت تعادل  $1^*$  برای سیستم MLD توصیف‌شده توسط روابط (۲) تا (۴) و ورودی  $u_e \in \mathbb{R}^{m_c} \times \{0,1\}^{m_l}$  نامیده می‌شود، اگر  $[x_e^T u_e^T] \in \mathcal{F}$  و  $x(t, x_e) = x_e \forall t \geq t_0$  در این صورت جفت  $(x_e, u_e)$ ، جفت تعادل نامیده می‌شود. ناحیه  $\mathcal{F}$ ، یک چندوجهی می‌باشد که سیستم MLD در آن تعریف می‌شود.

۲-۴- بیان مسئله

مسئله H-MPC تعریف‌شده توسط روابط (۵) تا (۱۰) را با هدف پایداری در نقطه تعادل بدون استفاده از قید مساوی نهایی را به صورت زیر در نظر بگیرید:

$$\min_{U_t} J(U_t, x(t)) \quad (15)$$

$$x_{t+k|t} = Ax_{t+k|t} + B_1 u_{t+k|t} + B_2 \delta_{t+k|t} + B_3 z_{t+k|t} \quad (16)$$

$$y_{t+k|t} = Cx_{t+k|t} + D_1 u_{t+k|t} + D_2 \delta_{t+k|t} + D_3 z_{t+k|t} \quad (17)$$

$$E_2 \delta_{t+k|t} + E_3 z_{t+k|t} \leq E_1 u_{t+k|t} + E_4 x_{t+k|t} + E_5 \quad (18)$$

$$U_t = \{u_{t|t}, \dots, u_{t+N-1|t}, \delta_{t|t}, \dots, \delta_{t+N-1|t}, z_{t|t}, \dots, z_{t+N-1|t}\} \quad (19)$$

هدف اصلی کنترل در این مسئله استخراج دنباله کنترلی  $u(t)$  و همچنین متغیرهای کمکی قابل قبول  $\delta(t)$  و  $z(t)$  به نحوی است که علاوه بر رعایت محدودیت‌های موجود در مسئله، پایداری نمایی سیستم MLD معرفی شده توسط روابط (۲) تا (۴) را در نقطه تعادل تضمین و همچنین تابع هزینه تعریف‌شده در رابطه (۱۴) را کمینه نماید. در بخش بعد روش پیشنهادی به منظور حل مسئله فوق به تفصیل بیان خواهد شد.

۳- حل مسئله پایداری‌سازی سیستم MLD با استفاده از H-MPC

در این بخش، با معرفی یک تابع لیاپانوف مبتنی بر نرم بی‌نهایت نشان داده خواهد شد که با اعمال قید نزولی بودن این تابع می‌توان بدون وابستگی به افق پیش‌بین و محاسبات مربوط به هزینه نهایی و مجموعه نهایی، پایداری نمایی حلقه بسته سیستم MLD را در نقطه تعادل تضمین نمود. بدیهی است که با اعمال تغییرات بسیار کمی در فرآیند آتی، می‌توان مسئله ردیابی را نیز مورد بررسی قرار داد.

به منظور تضمین پایداری نمایی حلقه بسته سیستم MLD تابع زیر به عنوان تابع لیاپانوف برای سیستم MLD در نظر گرفته می‌شود:

$$V(x(t)) = \|Yx(t)\|_{\infty} \quad (20)$$

**تعریف ۲:** [۷] برای جفت تعادل  $(x_e, u_e)$ ،  $x_e$  پایدار است اگر برای  $t_0 \in Z$  و به ازای هر  $\epsilon, \epsilon \geq 0$ ،  $\delta(\epsilon, t_0)$  به نحوی وجود داشته باشد که:

$$\|x_0 - x_e\| \leq \delta \Rightarrow \|x(x_0, u_e) - x_e\| \leq \epsilon, \quad \forall t \geq t_0 \quad (5)$$

**تعریف ۳:** [۷] برای جفت تعادل  $(x_e, u_e)$ ،  $x_e$  پایدار مجانبی است اگر  $x_e$  پایدار باشد و  $r > 0$  به نحوی وجود داشته باشد که به ازای هر  $x_0 \in B(x_e, r)$  و  $\epsilon > 0$ ،  $T(\epsilon, t_0)$  تعریف شده و رابطه زیر برقرار باشد:

$$\|x(t) - x_e\| \leq \epsilon, \quad \forall t \geq T \quad (6)$$

**تعریف ۴:** [۷] برای جفت تعادل  $(x_e, u_e)$ ،  $x_e$  پایدار نمایی است اگر  $x_e$  پایدار مجانبی باشد و  $\alpha > 0, \delta > 0$  و  $0 \leq \beta \leq 1$  به نحوی وجود داشته باشد که به ازای هر  $x_0 \in B(x_e, \delta)$  رابطه زیر برقرار باشد:

$$\|x(t) - x_e\| \leq \alpha \beta^{t-t_0} \|x(t_0) - x_e\| \quad (7)$$

۲-۳- کنترل پیش‌بین مدل هایبرید

مسئله کنترل پیش‌بین مدل برای سیستم‌های MLD در حالت کلی به صورت زیر تعریف می‌شود [۷]:

$$\min_{U_t} J(U_t, x(t)) \quad (8)$$

$$x_{t+k|t} = Ax_{t+k|t} + B_1 u_{t+k|t} + B_2 \delta_{t+k|t} + B_3 z_{t+k|t} \quad (9)$$

$$y_{t+k|t} = Cx_{t+k|t} + D_1 u_{t+k|t} + D_2 \delta_{t+k|t} + D_3 z_{t+k|t} \quad (10)$$

$$E_2 \delta_{t+k|t} + E_3 z_{t+k|t} \leq E_1 u_{t+k|t} + E_4 x_{t+k|t} + E_5 \quad (11)$$

$$x_{t+N|t} = x_e \quad (12)$$

$$U_t = \{u_{t|t}, \dots, u_{t+N-1|t}, \delta_{t|t}, \dots, \delta_{t+N-1|t}, z_{t|t}, \dots, z_{t+N-1|t}\} \quad (13)$$

که در رابطه (۸)،  $J(U_t, x(t))$  تابع هزینه مسئله H-MPC می‌باشد که به صورت کلی زیر تعریف می‌گردد:

$$J(U_t, x(t)) \triangleq \sum_{k=0}^{N-1} \|u_{t+k|t} - u_e\|_{Q_1}^2 + \|\delta_{t+k|t} - \delta_e\|_{Q_2}^2 + \|z_{t+k|t} - z_e\|_{Q_3}^2 + \|x_{t+k|t} - x_e\|_{Q_4}^2 + \|y_{t+k|t} - y_e\|_{Q_5}^2 \quad (14)$$

$$\|Y\|_{\infty} \geq \gamma \quad (۲۷)$$

$$\|Y\|_{\infty} \leq 1 + \gamma \quad (۲۸)$$

**اثبات:** با استفاده از قید موجود در رابطه (۲۵) و فرض ۲ و همچنین با استفاده از خاصیت زیرضربی در نرم بی‌نهایت می‌توان نوشت:

$$\|Yx_{t+1|t}\|_{\infty} \leq \|Y\|_{\infty} \|x(t)\|_{\infty} - \gamma \|x(t)\|_{\infty} \quad (۲۹)$$

$$\|Yx_{t+1|t}\|_{\infty} \leq (\|Y\|_{\infty} - \gamma) \|x(t)\|_{\infty} \quad (۳۰)$$

$$\|Yx_{t+1|t}\|_{\infty} \leq \theta \|x(t)\|_{\infty} \quad (۳۱)$$

با فرض  $0 \leq \theta \leq 1$ ,  $x(0) \in B(0, \lambda)$  خواهیم داشت:

$$\|Yx(t)\|_{\infty} \leq \theta \|x(t-1)\|_{\infty} \leq \theta^2 \|x(t-2)\|_{\infty} \leq \dots \leq \theta^t \|x(0)\|_{\infty} \quad (۳۲)$$

رابطه (۳۲) شرط برقراری پایداری نهایی را طبق تعریف ۴ بیان می‌کند. به منظور برقراری قید  $0 \leq \theta \leq 1$ ، ماتریس  $Y$  باید دارای شرایط زیر نیز باشد:

$$\theta \geq 0 \rightarrow \|Y\|_{\infty} \geq \gamma \quad (۳۳)$$

$$\theta \leq 1 \rightarrow \|Y\|_{\infty} \leq 1 + \gamma \quad (۳۴)$$

بنابراین با توجه به اینکه قید پایداری (۲۵) در هر گام از مسئله کنترل پیش‌بین، برای بردار حالت سیستم در دو گام متوالی  $t$  و  $t+1$  ارزشدنی است، مبدأ مختصات سیستم MLD با نرخ کاهش  $\theta$  پایدار نمایی بوده و دامنه جذب آن مجموعه  $\Gamma$  می‌باشد. ■  
به منظور محاسبه ماتریس  $Y$  می‌توان از روش‌های بهینه‌سازی محدب [۳۲] استفاده نمود.

**تبصره ۳:** به‌عنوان یک نکته مهم می‌توان گفت در حالت کلی استفاده از قید نزول تابع لیاپانوف باعث وسیع‌تر شدن ناحیه جواب مسئله بهینه‌سازی در H-MPC می‌شود. دلیل این امر آن است که برخلاف قید مساوی نهایی، در این فرمول‌بندی، H-MPC سعی می‌کند که در هر گام بردار حالت‌های سیستم را به نقطه تعادل نزدیک‌تر کند در صورتی که قید مساوی نهایی، قید بسیار سخت‌گیرانه‌تری نسبت به این قید می‌باشد. علاوه بر این، با توجه به اینکه ناحیه گسترده‌تری از شرایط اولیه سیستم منجر به برقراری قید نزولی بودن تابع لیاپانوف می‌گردند، ناحیه جذب سیستم با استفاده از این کنترل‌کننده نسبت به کنترل‌کننده مبتنی بر قید مساوی نهایی وسیع‌تر خواهد بود.

**تبصره ۴:** مسائل بهینه‌سازی به‌دست‌آمده در فوق، این نکته را بیان می‌کنند که بردار حالت‌های سیستم، در هر گام زمانی، می‌بایست به نقطه تعادل سیستم نزدیک شود. بنابراین در صورتی که تابع هدف در این مسائل حذف شود، به دلیل وجود قید پایدار ساز، همچنان بردار حالت‌های سیستم به سمت نقطه تعادل در حرکت خواهد بود. در

که در آن،  $Y \in \mathcal{R}^{n \times n}$ ,  $Rank(Y) = n$  می‌باشد. این تابع لیاپانوف برای سیستم‌های LTI در مرجع [۲۸] و همچنین برای سیستم‌های هایبرید مبتنی بر مدل PWA در مراجع [۲۹، ۳۰] معرفی و استفاده شده است. در ادامه به حل مسئله پایدار سازی در H-MPC با استفاده از این تابع لیاپانوف پرداخته خواهد شد.

**فرض ۱:**  $(x_e, u_e) = (0, 0)$  حالت تعادل سیستم MLD می‌باشد.

با در نظر گرفتن فرض ۱ و همچنین اعمال قید نزولی بودن تابع لیاپانوف موجود در رابطه (۲۰)، مسئله H-MPC را می‌توان به صورت زیر بیان نمود:

$$\min_{U_t} J(U_t, x(t)) \quad (۲۱)$$

$$x_{t+k|t} = Ax_{t+k|t} + B_1 u_{t+k|t} + B_2 \delta_{t+k|t} + B_3 z_{t+k|t} \quad (۲۲)$$

$$y_{t+k|t} = Cx_{t+k|t} + D_1 u_{t+k|t} + D_2 \delta_{t+k|t} + D_3 z_{t+k|t} \quad (۲۳)$$

$$E_2 \delta_{t+k|t} + E_3 z_{t+k|t} \leq E_1 u_{t+k|t} + E_4 x_{t+k|t} + E_5 \quad (۲۴)$$

$$\|Yx_{t+1|t}\|_{\infty} \leq \|Yx_{t|t}\|_{\infty} - \gamma \|x_{t|t}\|_{\infty} \quad (۲۵)$$

$$U_t = \{u_{t|t}, \dots, u_{t+N-1|t}, \delta_{t|t}, \dots, \delta_{t+N-1|t}, z_{t|t}, \dots, z_{t+N-1|t}\} \quad (۲۶)$$

که در آن  $\gamma > 0$  مقدار ثابت می‌باشد.

**تبصره ۱:** نامساوی بیان‌شده در رابطه (۲۵) قید نزولی بودن تابع لیاپانوف (۲۰) را بیان می‌کند بدین مفهوم که تابع لیاپانوف می‌بایست در هر گام از گام قبل کوچک‌تر باشد. با استفاده از این قید، بردار حالت‌های سیستم در هر گام زمانی به نقطه تعادل نزدیک‌تر می‌شود و برخلاف قید مساوی نهایی نیازی نیست که حالت‌های سیستم در انتهای افق پیش‌بینی به نقطه تعادل برسند. با توجه به اینکه در رابطه (۲۵) مقادیر حالت‌های سیستم MLD فقط در زمان حال مورد استفاده قرار می‌گیرند این قید به افق پیش‌بین وابسته نمی‌باشد.  
قبل از بیان قضیه پایدار سازی قید نزول تابع لیاپانوف (۲۵)، فرض زیر در نظر گرفته می‌شود:

**فرض ۲:** مجموعه  $\Gamma \in \mathcal{F}$  وجود دارد به نحوی که به ازای  $x(0) \in \Gamma$  مسئله بهینه‌سازی تعریف شده توسط روابط (۱۸) تا (۲۳)، برای تمامی زمان‌های آتی دارای جواب باشد.

**تبصره ۲:** به مجموعه  $\Gamma$  مجموعه پایای انقباضی گفته می‌شود که روش محاسبه آن برای سیستم‌های LTI در مرجع [۳۱] معرفی شده است. با توجه به اینکه محاسبه این مجموعه به متغیرهای باینری سیستم MLD وابسته نمی‌باشد می‌توان روش موجود در مرجع فوق را برای سیستم‌های MLD تعمیم داد. بنابراین فرض ۲ فرض محدودکننده‌ای نمی‌باشد.

**قضیه ۱:** با در نظر گرفتن فرض‌های ۱ و ۲، سیستم MLD تعریف شده توسط روابط (۲) تا (۴) به صورت حلقه-بسته با قانون کنترل به دست‌آمده توسط مسئله بهینه‌سازی تعریف شده در روابط (۲۱) تا (۲۶) و قاعده RHC، در درون مجموعه  $\Gamma$  پایدار نمایی خواهد بود اگر و فقط اگر:



- روش تقریب بیرونی
- روش‌های شاخه و کران<sup>۱۴</sup> [۱۵، ۱۶، ۳۳].

در مرجع [۳۴] به بررسی کارایی روش‌های فوق برای حل مسئله MIQP پرداخته شده است که با توجه به نتایج موجود در این مرجع، از بین روش‌های ارائه‌شده، روش BnB دارای بهترین عملکرد می‌باشد. تمامی نرم‌افزارهای تجاری و غیر تجاری حل مسائلی MIQP مانند [۳۵] CPLEX، [۳۶] GUROBI نیز بر اساس این روش کار می‌کنند.

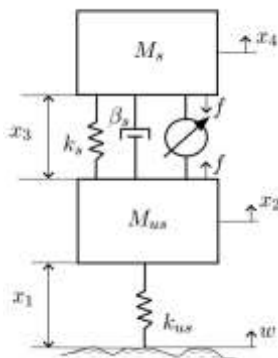
### ۵- کاربرد در حل مسئله پایدارسازی در کنترل هابیرید سیستم تعلیق خودرو

دیگرام بلوکی سیستم تعلیق دو درجه آزاد مجهز به یک نیروی قابل تنظیم با استفاده از روش مدل‌سازی موسوم به یک‌چهارم خودرو<sup>۱۵</sup> [۳۷] در شکل (۱) نشان داده شده است [۳۸]. با فرض خطی بودن فرها، دمپر و همچنین با صرف‌نظر از اصطکاک چرخ‌ها و اغتشاش جاده، می‌توان رفتار دینامیکی سیستم تعلیق را توسط مدل فضای حالت زیر بیان کرد:

$$\dot{x} = Ax + B\bar{f} \quad (42)$$

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\omega_s^2 & -2\rho\zeta\omega_s & \rho\omega_s^2 & 2\rho\omega_s \\ 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 2\zeta\omega_s & -\omega_s^2 & -2\zeta\omega_s \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 0 \\ \rho \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$$

که در آن،  $x = (x_1 \ x_2 \ x_3 \ x_4)^T \in \mathcal{R}^4$  بردار حالت سیستم می‌باشد که در آن  $x_1$  میزان انحراف چرخ‌ها<sup>۱۶</sup> از نقطه تعادل،  $x_2$  سرعت جرم<sup>۱۷</sup>  $M_{us}$ ،  $x_3$  میزان انحراف تعلیق<sup>۱۸</sup> از نقطه تعادل،  $x_4$  سرعت جرم<sup>۱۹</sup>  $M_s$  و  $\bar{f}$  نیروی قابل تنظیم نرمال شده می‌باشد.



شکل ۱: مدل یک‌چهارم خودرو سیستم تعلیق خودرو [۳۸]

علاوه بر این، استفاده از نیروی قابل تنظیم  $\bar{f}$  قیود زیر را به مسئله تحمیل می‌کند:

$$\bar{f}(x_4 - x_2) \geq 0 \quad (43)$$

$$|\bar{f}| \leq \sigma \quad (44)$$

$$\bar{f}(x_4 - x_2) \leq (2\zeta_{max}\omega_s)(x_4 - x_2)^2 \quad (45)$$

نتیجه می‌توان در مسائل بهینه‌سازی فوق، با صرف‌نظر از بهترین جواب، صرفاً به دنبال جواب قابل قبول بود و مسئله بهینه‌سازی را به مسئله امکان‌پذیری<sup>۱۱</sup> به فرم زیر تبدیل نمود:

Find  $U_t$

$$x_{t+k|t} = Ax_{t+k|t} + B_1u_{t+k|t} + B_2\delta_{t+k|t} + B_3z_{t+k|t} \quad (35)$$

$$y_{t+k|t} = Cx_{t+k|t} + D_1u_{t+k|t} + D_2\delta_{t+k|t} + D_3z_{t+k|t} \quad (36)$$

$$E_2\delta_{t+k|t} + E_3z_{t+k|t} \leq E_1u_{t+k|t} + E_4x_{t+k|t} + E_5 \quad (37)$$

$$\|Yx_{t+1|t}\|_{\infty} \leq \|Yx_{t|t}\|_{\infty} - \gamma \|x_{t|t}\|_{\infty} \quad (38)$$

$$U_t = \{u_{t|t}, \dots, u_{t+N-1|t}, \delta_{t|t}, \dots, \delta_{t+N-1|t}, z_{t|t}, \dots, z_{t+N-1|t}\} \quad (39)$$

جواب به دست آمده از مسائل فوق گرچه زیربینه می‌باشد ولی به طور قابل ملاحظه‌ای دارای پیچیدگی محاسباتی کمتری نسبت به حالت بهینه است.

### ۴- پیاده‌سازی کنترل کننده H-MPC

مسئله بهینه‌سازی تعریف شده توسط روابط (۲۱) تا (۲۶) به طور مستقیم توسط الگوریتم‌های بهینه‌سازی ریاضی قابل پشتیبانی نبوده و می‌بایستی به فرم استاندارد مسائل بهینه‌سازی تبدیل شود. با استفاده از تکنیک معادل سازی قیود شامل نرم [۳۲] و همچنین تعریف بردارها و ماتریس‌های مناسب می‌توان مسئله بهینه‌سازی مذکور را به فرم استاندارد زیر بازنویسی کرد:

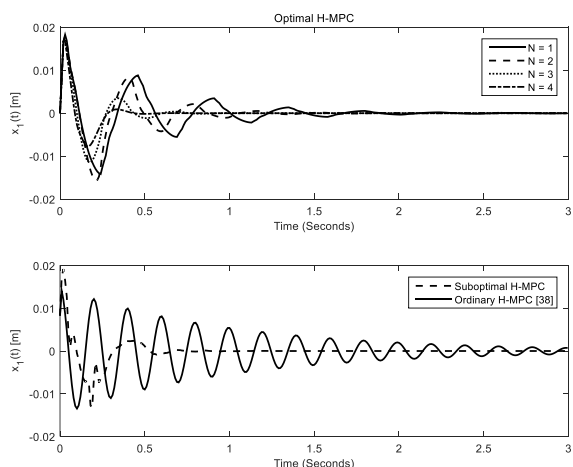
$$\min_{U_t} J_t = \frac{1}{2}U_t^T H U_t + x(t)^T F U_t \quad (40)$$

$$\Phi U_t \leq \phi \quad (41)$$

که در آن، ماتریس  $H$  و بردار  $x(t)^T F$  به ترتیب ماتریس هسین و بردار گرادیان با ابعاد مناسب و همچنین بردار  $U_t$  بردار متغیرهای تصمیم‌گیری مسئله می‌باشد. رابطه (۴۱) نیز بیانگر قیدهای مسئله بهینه‌سازی است که شامل قیود عملکردی و همچنین قیود به دست آمده در خلال فرآیند مدل‌سازی می‌باشد. با توجه به وجود متغیرهای باینری در مسئله بهینه‌سازی تعریف شده در روابط (۴۰) و (۴۱)، این مسئله از نوع برنامه‌ریزی صحیح-مرکب درجه دو<sup>۱۱</sup> [۱۵، ۱۶] می‌باشد. این مسائل اکثراً در دسته مسائل NP-hard قرار می‌گیرند. در نتیجه در حالت کلی، مسئله MIQP در زمان چندجمله‌ای<sup>۱۲</sup> قابل حل نخواهند بود. ساده‌ترین راه برای حل چنین مسائلی بررسی تمامی جواب‌های موجود و انتخاب بهترین جواب می‌باشد که این کار در عمل به دلیل افزایش نمایی جواب‌های بالقوه مسئله امکان‌پذیر نیست. تاکنون روش‌های مختلفی برای حل این مسائل ارائه شده‌اند که مهم‌ترین آن‌ها عبارت‌اند از:

- روش‌های مبتنی بر برش صفحه
- روش‌های مبتنی بر تجزیه‌سازی

حالت سیستم برای سه حالت مذکور به ترتیب در شکل‌های (۲) تا (۵) نمایش داده شده‌اند.



شکل ۲: مسیر حالت متغیر  $x_1$

در حالت بهینه، عملکرد کنترل‌کننده به‌ازای افق‌های پیش‌بین مختلف مورد بررسی قرار گرفته است. همان‌گونه که مشاهده می‌شود، سیستم حلقه بسته به‌ازای افق پیش‌بین  $N = 1$  نیز به‌خوبی به نقطه تعادل همگرا شده است و بنابر آنچه در بخش‌های گذشته ذکر گردید، پایداری مستقل از افق پیش‌بینی قابل دسترسی خواهد بود. از طرف دیگر، با افزایش افق پیش‌بین می‌توان با حفظ پایداری حلقه بسته، پاسخ سیستم را بهبود داد.

جدول ۱: پارامترهای شبیه‌سازی سیستم تعلیق خودرو [۳۸]

| پارامتر       | توضیحات                                  | مقدار عددی |
|---------------|--|------------|
| $T_s$         | زمان نمونه‌برداری                        | ۹ ms       |
| $\omega_s$    | فرکانس طبیعی جرم فنربندی                 | ۱/۵ Hz     |
| $\omega_{us}$ | شده $M_s$                                | ۹ Hz       |
|               | فرکانس طبیعی جرم فنربندی نشده $M_{us}$   |            |
| $\rho$        | نسبت جرم فنربندی شده به جرم فنربندی نشده | ۱۰         |
| $\zeta$       | ضریب میرایی                              | ۰          |
| $\zeta_{max}$ | ضریب میرایی ماکزیمم                      | ۲/۲۵       |
| $N$           | افق پیش‌بین                              | ۵          |
| $\sigma$      | حد بالای نیروی اشباع عملگر               | ۰/۲        |

با توجه به اینکه، در کنترل‌کننده زیربهینه، از تابع هزینه صرف‌نظر می‌شود، افزایش افق پیش‌بین تأثیری در بهبود عملکرد حلقه بسته کنترل‌کننده زیربهینه ندارد و همین امر می‌تواند به‌عنوان یکی از محدودیت‌های این روش در نظر گرفته شود. میزان افق پیش‌بین برای این کنترل‌کننده برابر با ۵ در نظر گرفته شده است. در صورتی که به منظور برقراری قید مساوی نهایی می‌بایست افق پیش‌بینی برابر با ۱۳ باشد که در این صورت تعداد قیود صحیح-مربک سیستم بسیار افزایش یافته و به‌تبع آن پیچیدگی محاسباتی کنترل‌کننده افزایش خواهد یافت. علاوه‌بر موارد فوق، در مقایسه با روش استفاده‌شده در مرجع

هدف کنترل در این سیستم، پایدارسازی حالت‌های سیستم در نقطه تعادل (مبدأ) می‌باشد. از طرفی، همان‌گونه که از رابطه (۴۳) و (۴۵) مشخص است، این سیستم مقید به قیدهای نامحدب بوده و همین امر، کنترل مقید این سیستم را بسیار مشکل می‌کند. با استفاده از مدل‌سازی MLD می‌توان قیود نامحدب فوق را توسط متغیرهای باینری به قیود قطعه‌ای محدب تبدیل و با استفاده از این مدل طبق فرمول‌بندی پایدارساز ارائه‌شده در بخش قبل، الگوریتم H-MPC را اجرا کرد. برای این کار، ابتدا قید نامحدب رابطه (۴۳) را در نظر بگیرید. با استفاده از متغیرهای باینری کمکی  $\delta_1$  و  $\delta_2$  می‌توان نوشت:

$$[\delta_1 = 1] \leftrightarrow [x_4 - x_2 \geq 0] \quad (46)$$

$$[\delta_2 = 1] \leftrightarrow [\bar{f} \geq 0] \quad (47)$$

$$[\delta_1 = 1] \rightarrow [\delta_2 = 1] \quad (48)$$

$$[\delta_1 = 0] \rightarrow [\delta_2 = 0] \quad (49)$$

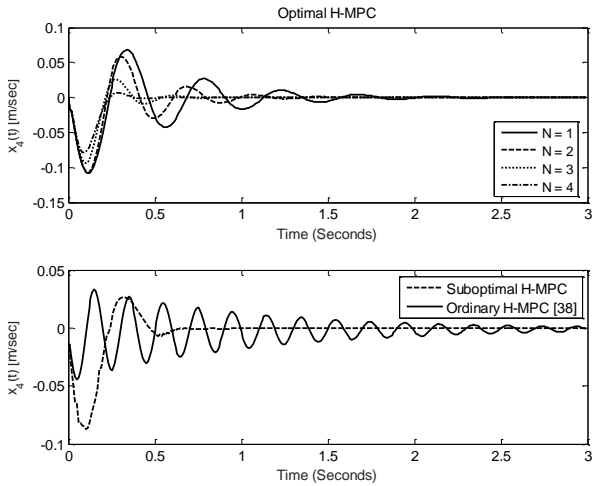
به‌عبارت دقیق‌تر، توسط روابط (۴۶) تا (۴۹) می‌توان قید غیرخطی و نامحدب (۴۳) را به‌صورت قیودی تکه‌ای محدب بازنویسی کرد. به عبارت دیگر، به‌عنوان نمونه، در صورتی که  $x_4 - x_2 \geq 0$  باشد،  $\delta_1 = 1$  خواهد بود و با توجه به رابطه (۴۸) مقدار  $\bar{f}$  می‌بایستی نامنفی باشد و این همان برقراری قید (۴۳) می‌باشد. حالت‌های دیگر را نیز می‌توان به همین روش بررسی نمود. در حالت کلی، با استفاده از این روش می‌توان یک ناحیه نامحدب را به چند ناحیه محدب تبدیل نمود. قید نامحدب موجود در نامساوی (۴۵) را نیز می‌توان توسط متغیر کمکی پیوسته  $F$  به‌صورت زیر بیان کرد:

$$\bar{f}(x_4 - x_2) \leq (2\zeta_{max}\omega_s)(x_4 - x_2)^2 \equiv F \geq 0 \quad (50)$$

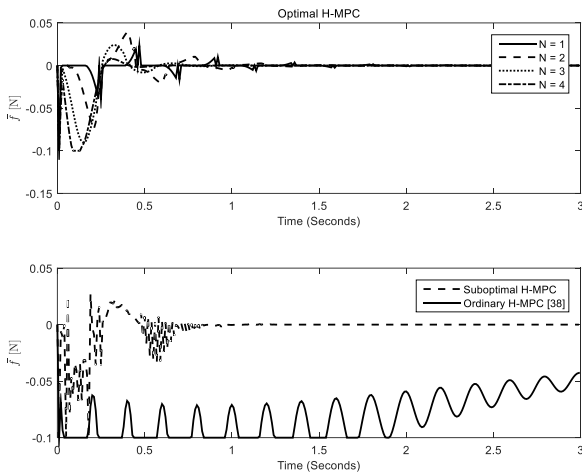
$$F = \begin{cases} \bar{f} - (2\zeta_{max}\omega_s)(x_4 - x_2) & \text{if } \delta_1 = 0 \\ -\bar{f} + (2\zeta_{max}\omega_s)(x_4 - x_2) & \text{if otherwise} \end{cases} \quad (51)$$

که در این اینجا،  $F$  متغیر کمکی پیوسته می‌باشد که در مدل MLD با نام  $z(t)$  مشخص شده است. با توجه به اینکه معمولاً فرآیند تبدیل گزاره‌های منطقی به قیود صحیح-مربک کار بسیار زمان‌بری می‌باشد، در مرجع یک زبان برنامه نویسی به اسم HYSDEL [۳۹] معرفی شده است که به‌وسيله آن می‌توان به‌راحتی مدل MLD سیستم‌هایبیرید تحت مطالعه را استخراج کرد. جهت شبیه‌سازی این مسئله، نرم افزار MATLAB به همراه حل‌کننده IBM CPLEX v12.6، به‌منظور حل مسئله MIQP، مورد استفاده واقع شده است. مقادیر عددی پارامترهای سیستم و همچنین پارامترهای استفاده‌شده در H-MPC در جدول (۱) قابل مشاهده می‌باشند. در ادامه نتایج شبیه‌سازی سیستم تعلیق خودرو با شرط اولیه  $x(0) = (0 \ 0 \ 0.1 \ 0)^T$  بررسی خواهد شد.

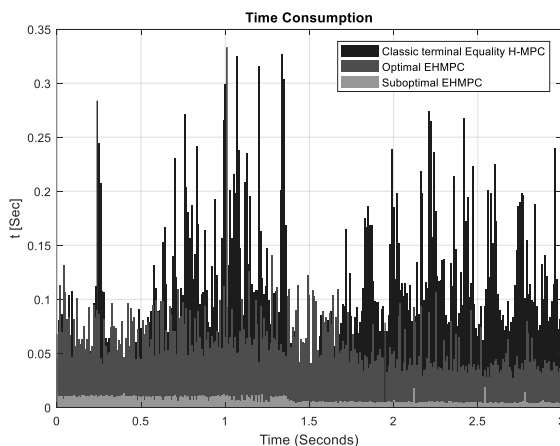
در این جا جهت مقایسه بهتر، سه حالت بهینه، زیربهینه و روش استفاده شده در مرجع [۳۸] مورد بررسی قرار گرفته‌اند. مسیرهای



شکل ۵: مسیر حالت متغیر  $x_4$



شکل ۶: سیگنال کنترل  $\bar{u}$

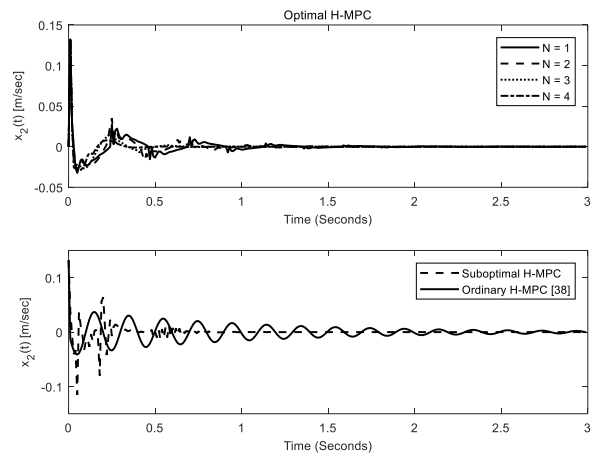


شکل ۷: نمودار زمان مصرفی در حل مسئله MIQP

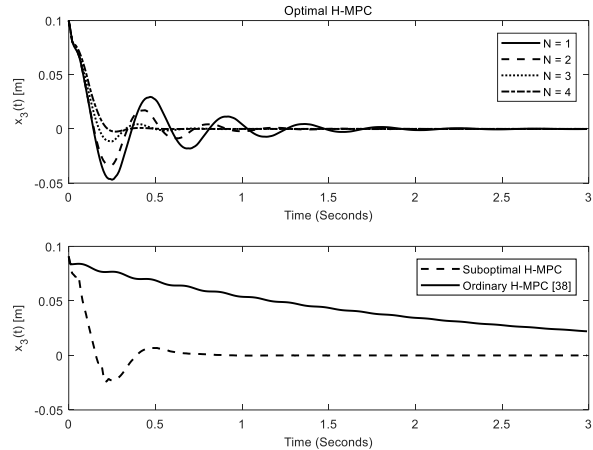
در مقایسه با روش قید مساوی نهایی، هر دو کنترل کننده پیشنهادی دارای پیچیدگی محاسباتی کمتری می باشند. با توجه به افزایش حجم مسئله در حالت استفاده از قید مساوی نهایی میزان زمان مصرفی به منظور حل مسئله MIQP بسیار افزایش خواهد یافت.

[۳۸]، روش پیشنهادی منجر به زمان نشست بسیار کمتری گردیده است. از طرفی، با تنظیم مناسب افق پیش بین مسئله، می توان از تحمیل حجم محاسبات جهت تضمین پایداری حلقه بسته تا حد مطلوبی جلوگیری نمود.

شکل (۶) نیروی قابل تنظیم اعمالی به سیستم (سیگنال کنترل) را نمایش می دهد. همان گونه که مشاهده می شود سیگنال کنترل در محدوده مجاز تعریف شده در رابطه (۴۴) قرار دارد. کنترل کننده زیربینه در مقایسه با روش دیگر دارای رفتار نوسانی در حالت گذرای سیستم می باشد که دلیل این امر صرف نظر از تابع هزینه مسئله می باشد. واضح است که نرخ همگرایی هر دو کنترل کننده بهینه و زیربینه و وضعیت بهتری نسبت به کنترل کننده طراحی شده بر اساس روش های موجود دارد.



شکل ۳: مسیر حالت متغیر  $x_2$



شکل ۴: مسیر حالت متغیر  $x_3$

میزان زمان مصرفی به منظور حل مسئله MIQP برای سه حالت بهینه، زیربینه و در حالت قید مساوی نهایی در هر زمان نمونه برداری در شکل (۷) نمایش داده شده است. همان گونه که در شکل (۷) نشان داده شده است، کنترل کننده زیربینه به مراتب زمان کمتری نسبت به سایر کنترل کننده ها برای حل مسئله MIQP نیاز دارد.



## ۶- نتیجه‌گیری

در این مقاله، حل مسئله پایداری توسط کنترل پیش‌بین برای سیستم‌های هایبرید مرکب منطقی-دینامیکی از ۲ جهت مورد بهبود واقع گردید. در درجه اول با استفاده از کنترل پیش‌بین هایبرید مبتنی بر تابع لیاپانوف می‌توان با محدودیت کمتری پایداری حلقه بسته سیستم هایبرید را تضمین نمود. در مقایسه با کنترل پیش‌بین هایبرید مبتنی بر قید مساوی نهایی، قید نزول تابع لیاپانوف از نظر امکان پیاده‌سازی و محاسبات کنترلی، سهولت بیشتری فراهم می‌سازد. دومین مزیت این روش در تبدیل مسئله بهینه‌سازی به یک مسئله امکان‌پذیری می‌باشد. با توجه به این موضوع که حل مسئله امکان‌پذیری از پیچیدگی محاسباتی کمتری نسبت به مسئله بهینه‌سازی برخوردار است، با استفاده از قید نزول تابع لیاپانوف می‌توان با صرف‌نظر کردن از پاسخ بهینه و استفاده از پاسخ زیربهینه، حجم محاسبات کنترل‌کننده را به‌طور چشم‌گیری کاهش داد. علاوه بر موارد فوق، برخلاف قید مساوی نهایی که فقط جذبندگی نقطه تعادل را تضمین می‌نماید، با استفاده از روش پیشنهادی پایداری نمایی حلقه-بسته تضمین می‌گردد.

## مراجع

- [۱۱] سید وحید قوشخانه‌ای، علیرضا الفی، «طراحی کنترل پیش‌بین برای سیستم‌های عملیات از راه دور دوطرفه نامعین»، مجله مهندسی برق دانشگاه تبریز، دوره ۴۷، شماره ۲، ۱۳۹۶.
- [۱۲] فرهاد بیات، صالح مبین، «طراحی کنترل پیش‌بین با هزینه محاسباتی کم: رویکرد برنامه‌ریزی پارامتری»، مجله مهندسی برق دانشگاه تبریز، دوره ۴۶، شماره ۴، ۱۳۹۵.
- [13] J. B. Rawlings and D. Q. Mayne, *Model predictive control: Theory and design*. Nob Hill Pub., 2009.
- [14] D. Q. Mayne, "Model predictive control: Recent developments and future promise," *Automatica*, vol. 50, no. 12, pp. 2967-2986, 2014.
- [15] D. Bertsimas and R. Weismantel, *Optimization over integers*. Dynamic Ideas Belmont, 2005.
- [16] L. A. Wolsey, *Integer programming*. Wiley, 1998.
- [17] C. H. Papadimitriou, *Computational complexity*. John Wiley and Sons Ltd., 2003.
- [18] A. Bemporad, N. Giorgetti, I. Kolmanovsky, and D. Hrovat, "A hybrid system approach to modeling and optimal control of DISC engines," in *Decision and Control, 2002, Proceedings of the 41st IEEE Conference on*, vol. 2, pp. 1582-1587, 2002.
- [19] A. K. Sampathirao, P. Sotasakis, A. Bemporad, and P. Patrinos, "GPU-accelerated stochastic predictive control of drinking water networks," *IEEE Transactions on Control Systems Technology*, pp.551-562, 2017.
- [20] A. G. Beccuti, T. Geyer, and M. Morari, "A hybrid system approach to power systems voltage control," in *Decision and Control, 2005 and 2005 European Control Conference. CDC-ECC'05. 44th IEEE Conference on*, pp. 6774-6779, 2005.
- [21] M. Falahi, K. Butler-Purry, and M. Ehsani, "Dynamic reactive power control of islanded microgrids," *IEEE Transactions on Power Systems*, vol. 28, no. 4, pp. 3649-3657, 2013.
- [22] W. Jing, C. H. Lai, S. H. W. Wong, and M. L. D. Wong, "Battery-supercapacitor hybrid energy storage system in standalone DC microgrids: a review," *IET Renewable Power Generation*, vol. 11, no. 4, pp. 461-469, 2016.
- [23] F. Blanchini, "Set invariance in control," *Automatica*, vol. 35, no. 11, pp. 1747-1767, 1999.
- [24] M. Lazar, W. Heemels, S. Weiland, and A. Bemporad, "Stabilizing model predictive control of hybrid systems," *IEEE Transactions on Automatic Control*, vol. 51, no. 11, pp. 1813-1818, 2006.
- [25] M. Lazar and W. Heemels, "A new dual-mode hybrid MPC algorithm with a robust stability guarantee," *IFAC Proceedings Volumes*, vol. 39, no. 5, pp. 321-328, 2006.
- [26] M. Lazar, "Model predictive control of hybrid systems: Stability and robustness," vol. 68, 2006.
- [27] H. P. Williams, *Model building in mathematical programming*. John Wiley & Sons, 2013.
- [28] A. Polanski, "On infinity norms as Lyapunov functions for linear systems," *IEEE Transactions on Automatic Control*, vol. 40, no. 7, pp. 1270-1274, 1995.
- [1] M. S. Branicky, "Introduction to hybrid systems," *Handbook of networked and embedded control systems*, pp. 91-116, 2005.
- [2] C. G. Cassandras and S. Lafortune, *Introduction to discrete event systems*. Springer Science & Business Media, 2009.
- [3] T. A. Henzinger, P. W. Kopke, A. Puri and P. Varaiya, "What's decidable about hybrid automata?," in *Proceedings of the twenty-seventh annual ACM symposium on Theory of computing*, pp. 373-382, 1995.
- [4] T. A. Henzinger, "The theory of hybrid automata," in *Verification of Digital and Hybrid Systems*: Springer, pp. 265-292, 2000.
- [5] J. Lygeros, K. H. Johansson, S. N. Simic, J. Zhang, and S. S. Sastry, "Dynamical properties of hybrid automata," *IEEE Transactions on automatic control*, vol. 48, no. 1, pp. 2-17, 2003.
- [6] F. J. Christophersen, "Piecewise affine systems," *Optimal Control of Constrained Piecewise Affine Systems*, pp. 39-42, 2007.
- [7] A. Bemporad and M. Morari, "Control of systems integrating logic, dynamics, and constraints," *Automatica*, vol. 35, no. 3, pp. 407-427, 1999.
- [8] B. De Schutter and T. Van den Boom, "Model predictive control for max-min-plus-scaling systems," in *American Control Conference, 2001. Proceedings of the 2001*, vol. 1, pp. 319-324: 2001.
- [9] J. Schumacher, S. Weiland, and W. Heemels, "Linear complementarity systems," *SIAM journal on applied mathematics*, vol. 60, no. 4, pp. 1234-1269, 2000.
- [10] W. P. Heemels, B. De Schutter, and A. Bemporad, "Equivalence of hybrid dynamical models," *Automatica*, vol. 37, no. 7, pp. 1085-1091, 2001.

- [34] R. Fletcher and S. Leyffer, "Numerical experience with lower bounds for MIQP branch-and-bound," *SIAM Journal on Optimization*, vol. 8, no. 2, pp. 604-616, 1998.
- [35] I. I. CPLEX, "V12. 1: User's Manual for CPLEX," *International Business Machines Corporation*, vol. 46, no. 53, p. 157, 2009.
- [36] G. Optimization, "Inc., "Gurobi optimizer reference manual," 2014," URL: <http://www.gurobi.com>, 2014.
- [37] R. N. Jazar, "Quarter car," *Vehicle Dynamics: Theory and Application*, pp. 931-975, 2008.
- [38] N. Giorgetti, A. Bemporad, H. E. Tseng, and D. Hrovat, "Hybrid model predictive control application towards optimal semi-active suspension," *International Journal of Control*, vol. 79, no. 05, pp. 521-533, 2006.
- [39] F. D. Torrisi and A. Bemporad, "HYSDEL-a tool for generating computational hybrid models for analysis and synthesis problems," *IEEE transactions on control systems technology*, vol. 12, no. 2, pp. 235-249, 2004.
- [29] M. Lazar and A. Jokić, "On infinity norms as Lyapunov functions for piecewise affine systems," in *Proceedings of the 13th ACM international conference on Hybrid systems: computation and control*, pp. 131-140, 2010.
- [30] M. Lazar, W. Heemels, S. Weiland, A. Bemporad, and O. Pastravanu, "Infinity norms as Lyapunov functions for model predictive control of constrained PWA systems," *Lecture Notes in Computer Science*, vol. 3414, pp. 417-432, 2005.
- [31] F. Blanchini, "Ultimate boundedness control for uncertain discrete-time systems via set-induced Lyapunov functions "in *Decision and Control, 1991., Proceedings of the 30th IEEE Conference on*, pp. 1755-1760, 1991.
- [32] S. Boyd and L. Vandenberghe, *Convex optimization*. Cambridge university press, 2004.
- [33] J. Lee and S. Leyffer, *Mixed integer nonlinear programming*. Springer Science & Business Media, 2011.

## زیر نویس ها

- <sup>11</sup> Feasibility Problem
- <sup>12</sup> Mixed Integer Quadratic Program (MIQP)
- <sup>13</sup> Polynomial Time
- <sup>14</sup> Branch and Bound (BnB)
- <sup>15</sup> Quarter Car
- <sup>16</sup> Tier Deflection
- <sup>17</sup> Unsprung Mass Velocity
- <sup>18</sup> Suspension Deflection
- <sup>19</sup> Sprung Mass Velocity
- <sup>20</sup> Ordinary H-MPC

- <sup>1</sup> Discrete Event Systems (DES)
- <sup>2</sup> Piece-Wise Affine (PWA)
- <sup>3</sup> Mixed Logical Dynamical (MLD)
- <sup>4</sup> Max-Min-Plus-Scaling
- <sup>5</sup> Model Predictive Control (MPC)
- <sup>6</sup> Receding Horizon Control (RHC)
- <sup>7</sup> Hybrid Model Predictive Control (H-MPC)
- <sup>8</sup> Mixed Integer Program (MIP)
- <sup>9</sup> Terminal Equality Constraint
- <sup>10</sup> Equilibrium Pair