مجله علمی – پژوهشی
مهندسی عمران مدرس
دوره هفدهم، شماره ۱، سال ۱۳۹٦

ارتعاش آزاد محیط‌های تیرگونه در حالت سه‌بعدی متکی بر بستر ارتجاعی پاسترناک

محمدزمان روشن بخش[۱]، بهرام نوائی‌نیا[۲*]

۱- فارغ‌التحصیل کارشناسی ارشد مهندسی عمران–سازه، دانشگاه صنعتی نوشیروانی بابل
۲- دانشیار دانشکده مهندسی عمران، دانشگاه صنعتی نوشیروانی بابل

*navayi@nit.ac.ir

تاریخ دریافت: [۱۳۹٤/٤/۳۰]   تاریخ پذیرش: [۱۳۹٤/۱۲/۲۰]

چکیده– در این نوشتار، حل دقیق ارتعاش آزاد تیر مستطیلی همگن و ایزوتروپ بر بستر ارتجاعی دو پارامتری در صفحه تحتانی ارائه شده است. مدل دو پارامتری پاسترناک به‌منظور مدل‌سازی اندرکنش تیر با بستر در سطح تماس انتخاب شده است. معادلات بر اساس تئوری دوبعدی ارتجاعی فرمول‌بندی شده و با استفاده از تابع پتانسیل تغییرمکان معادلات حاکم به یک معادله مرتبه چهار کاهش و به وسیله‌ی روش جداسازی متغییرها و اعمال دقیق شرایط مرزی حل شده است. روش ارائه شده در این پژوهش بدون فرضیات ساده‌کننده و برخلاف تئوری‌های متداول تیر، محدودیتی در انتخاب ضخامت نداشته و برای نسبت‌های مختلف ضخامت به طول تیر دارای اعتبار است. به منظور اعتبارسنجی، نتایج به دست آمده از این پژوهش با سایر کارهای تحلیلی مقایسه شده است. نتایج نشان می‌دهد که افزایش ضرایب بستر با افزایش بسامد طبیعی تیر همراه است که شدت آن با افزایش نسبت ضخامت به طول و در مقادیر بزرگتر از ۰/۲ و در مودهای بالای ارتعاشی دارای کاهش قابل ملاحظه‌ای است.

واژگان کلیدی: **بسامد** طبیعی، ارتعاش آزاد، تیر عمیق، بستر ارتجاعی، توابع پتانسیل.

۱- مقدمه

تعیین مدل محاسباتی تیر متکی بر بستر ارتجاعی در توصیف بسیاری از مسائل در حوزه مهندسی مانند ژئوتکنیک، راه، راه‌آهن، دریا امری متداول است. تحلیل این نوع سازه‌ها با ضخامت کم، حتی در حالت استاتیکی به دلیل اندرکنش موجود بین تیر و بستر ارتجاعی در قیاس با حالت بدون بستر بسیار پیچیده‌تر است. این پیچیدگی با افزایش ضخامت سازه و نیز اضافه شدن پارامتر زمان در تحلیل دینامیکی و یا بررسی رفتار ارتعاش آزاد آنها به مراتب بیشتر می‌شود. موضوع اصلی در تحلیل چنین مسائلی مدل‌سازی اندرکنش بین تیر و یک بسترارتجاعی مانند خاک در محل تماس آنها است. تحلیل کامل این مسائل با وارد کردن بستر به عنوان یک محیط پیوسته‌ی نیمه بی‌نهایت در روند تحلیل ارتجاعی امکان‌پذیر و مرجع [1] به مجموعه‌ای از پاسخ‌ها در حالات مختلف می‌پردازد. با این حال، با توجه به پیچیدگی‌های محاسباتی در روش یادشده و نیز از آنجایی که هدف از تحلیل در بیشتر موارد تعیین پاسخ المان سازه‌ای در قیاس با بستر ارتجاعی است، محل تماس به وسیله‌ی یک مدل ساده مانند المان‌های فنر جایگزین می‌شود. روش‌های متعددی برای تعیین پارامترسختی فنر و کاهش مسائل سه‌بعدی به یک یا دو بعد ارائه شده است که در شیوه‌های متداول واکنش ارتجاعی بستر با مدل‌های یک، دو و سه پارامتری، مدل پیوسته و یا ترکیبی جایگزین می‌شود [2,3]. در پژوهش‌هایی مطالعات نسبتا جامعی در زمینه رفتار ارتعاشی و کمانشی تیر بر بستر ارتجاعی با مدل یک پارامتری

وینکلر [1] انجام شده است [4-14]. با این حال، ناپیوستگی میدان تغییرمکان به عنوان نقص عمده در مدل وینکلر به علت محدودیت تغییرمکان تنها در محدوده اعمال بار به ویژه در تیرهای با شرایط مرزی آزاد، پژوهشگران را به استفاده از مدل‌های دیگر برای تامین پیوستگی یاد شده ترغیب کرد. مدل دوپارامتری فیلوننکو–بورودیچ [15]، هیتینای [16] و پاسترناک [17] فقدان پیوستگی یادشده را با اضافه کردن فنرهای دوم که در اندرکنش با مجموعه اول فنرها است، تامین می‌کنند. در مدل پاسترناک سختی فنرهای دوم مربوط به یک لایه برشی با حجم ثابت است.

مطالعات گسترده‌ای در زمینه ارتعاشات المان سازه‌ای تیر بر بستر ارتجاعی پاسترناک با فرض رفتار یک بعدی و با استفاده از تئوری مقدماتی تیر با شکل‌های مختلف، شرایط تکیه‌گاهی، و نیز بارگذاری متفاوت انجام شده است که بیشتر آنها در کارهای ارزشمند برای تیرهای لاغر معمول [8-21] و مرکب و تابعی [22-26] مرور و مقایسه شده‌اند. با این وجود، کاهش معنی‌دار دقتِ نتایج با افزایش ضخامت و به ویژه در مطالعه رفتار دینامیکی تیرهای کوتاه و در مودهای بالای ارتعاشی به دلیل نادیده گرفتن آثار تغییرشکل برشی و لَختی دورانی در این تئوری‌ها، گستره کاربرد آن را به تیرهای لاغر و باریک محدود کرده است [27]. تئوری تیر ارائه شده به وسیله‌ی تیموشنکو با درنظر گرفتن این آثار، برای تیرهای لاغر و ضخیم نسبی با نسبت ضخامت (d) به طول دهانه (l) کمتر از ۰/۲ نتایجی با دقت مناسب به‌دست می‌دهد[28-29]. با این وجود، در مطالعه رفتار ارتعاشی تیر در مودهای بالا، به دلیل امکان تفاوت معنی‌دار توزیع کرنش برشی در تحلیل دینامیکی با شکل سهمی توزیع کرنش برشی حالت استاتیکی، ضریب تصحیح برش مورد نیاز در تئوری تیموشنکو باید اصلاح شود [27]. ونگ و استفن [30] آثار بستر پاسترناک بر بسامدهای طبیعی تیر تیموشنکو را بررسی کردند. در پژوهش دیگری، ارتعاش خمشی آزاد تیر تیموشنکو بر بستر پاسترناک بررسی شد [31]. از آنجا که در تئوری تیر تیموشنکو تابع تغییرشکل نسبت به مختصه ارتفاع از درجه یک است این تئوری به تئوری مرتبه یک معروف است. محدودیت‌های موجود در تئوری مقدماتی و نیاز به یک ضریب تصحیح برش در تئوری تیموشنکو زمینه‌ساز توسعه تئوری‌های تغییرشکل برشی مرتبه بالا و مستقل از ضریب تصحیح برش شده است [32]. ماستوناگا [2] با استفاده از بسط سری توانی مختصه ضخامت یک تئوری برشی مرتبه بالا یک بعدی را برای مسئله ارتعاش و کمانش تیر بر بستر پاسترناک به کار گرفت [27,33,-34,]. در پژوهش‌هایی دیگر تاثیر تنش اولیه یکنواخت بر مشخصات ارتعاشی تیر متکی بر بستر پاسترناک بررسی شد [36,35]. با مرور تئوری‌های یک بعدی تیر ملاحظه می‌شود که با افزایش ضخامت و نزدیک شدن آن به یک صفحه قائم با ضخامت کم، ناگزیر نیاز به استفاده از میدان‌های تغییرمکانی است که بیش از پیش به روابط تئوری ارتجاعی نزدیک بوده و به نوعی سعی بر کاهش تقریبات است که این امر با توجه به طبیعت رفتار دوبعدی این اعضا کاملا مورد انتظار است [37]. مطالعات محدودی در ارتباط با تیرهای عمیق بر بستر ارتجاعی دوپارامتری مبتنی بر حل‌های سه بعدی ارتجاعی در منابع موجود است که بیشتر آنها در مراجع [38,37] مرور و مقایسه شده‌اند. هو و چن [3] [39] با استفاده از روش تبدیل دیفرانسیل و چن و همکاران [40] با استفاده از روش فضای حالت، پاسخ‌هایی برای ارتعاش آزاد تیر بر بستر دوپارامتری ارائه دادند. روش توابع پتانسیل نقش اساسی در حل مسائل مقدار مرزی به ویژه مسائل سه‌بعدی تئوری ارتجاعی دارا است. توابع پتانسیل تغییرمکان شامل توابع بوسینسک، گالرکین، لاو، پاپکوویچ–نوبر و دیگر توابع شناخته شده‌ی تغییرمکان بوده که به هم مرتبط و ازیکدیگر قابل حصول هستند [41] در پژوهشی با استفاده از توابع پتانسیل و استفاده از سری فوریه روشی برای حل سه بعدی تیر ارئه شده است [42]. در مرجع [43] با استفاده از تابع پتانسیل گالرکین یک حل سه بعدی و در مرجع [44] حل مبتنی بر تئوری تنش مسطح برای خمش و ارتعاش تیر طره عمیق آمده است. چنگ در سال ۱۹۷۹ [45] تئوری اصلاح شده‌ای از حل ارتجاعی بوسینسک–گالرکین و همچنین لور و گرگوری در سال ۱۹۹۲ [46] تئوری تجزیه را برای حل مسائل تیر به کار گرفتند. در پژوهش دیگر معادل بودن این تئوری‌ها اثبات شده است [47]. همچنین در پژوهشی دیگر با استفاده از حل بوسینسک مسئله تیر به صورت تنش مسطح بررسی شده است [48]. توابع پتانسیل

1 Winkler

2 Matsunaga

3 Ho & Chen

اسکندری قادی که با تعمیم توابع پتانسیل حاکم بـر محـیط‌هـای همسان‌گرد جانبی از حالت استاتیکی به دینامیکی معرفی شـده [49]، در تحلیل محیط‌های بی‌نهایت و نیمه بی‌نهایت به شـکل وسـیعی بـه کار گرفته شده است [50-52]. این توابع در تحلیل خمشـی صـفحات مستطیلی همسـان‌گـرد عرضـی بـرای اولـین بـار در سـال ۲۰۱۱ بـا موفقیت به کار برده شد [53]. همچنین در پژوهشی دیگر بـا اسـتفاده از این توابع حل دقیق برای ارتعاش آزاد صفحات مسـتطیلی ضـخیم ارائه شد [54].

در این پژوهش با استفاده از توابع پتانسیل اسکندری قادی، حـل تحلیلی مسئله ارتعاش آزاد تیر عمیق مستطیلی بـا ضـخامت ثابـت و تکیه‌گاه‌های ساده در دو انتها متکـی بـر بسـتر ارتجـاعی دوپـارامتری پاسترناک ارائه شده است. ویژگی عمده روش ارائه شده در آن اسـت که بدون فرض ساده کننـده خاصـی مانـند توزیـع فرضـی تـنش یـا تغییرمکان در ضخامت تیر و یا اعمال ضریب تصحیح برش می‌تـوان بسامد ارتعاش آزاد تیر را بدون محدودیت در ضخامت تعیین کرد.

۲- تئوری

تیر مستطیلی همسان‌گرد با رفتار خطی در حال ارتعاش آزاد بر تکیـه‌گـاه‌هـای سـاده در دو انتهـا و بسـتر ارتجـاعی تحتانی در مختصات کـارتزین مطـابق شـکل (۱) کـه در آن محورهای x و y و z به ترتیب در امتـداد طـول و عـرض و ضخامت تیر بوده و دارای ابعاد l و b و d اسـت، را در نظـر می‌گیریم.

شکل (۱) تیر مستطیلی متکی بر بستر ارتجاعی پاسترناک.

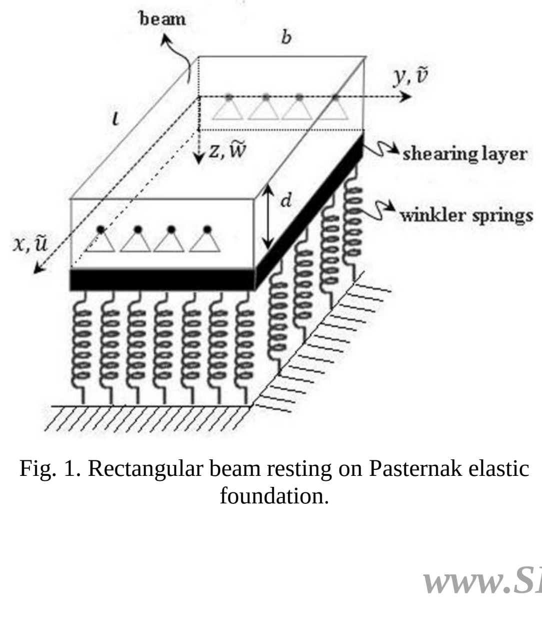

Fig. 1. Rectangular beam resting on Pasternak elastic foundation.

تغییرمکان یک محیط دلخواه همسان‌گرد برحسب تابع پتانسیل $\tilde{F}(x,y,z,t)$ در غیاب نیروهای جسمی در حالت صفحه‌ای تنش مسطح از رابطه ۱ تبعیت می‌کند [49].

$$\tilde{u}(x,y,z,t) = -\frac{(B_{12}+B_{33})}{B_{33}}\frac{\partial^2 \tilde{F}}{\partial x \partial z}$$
$$\tilde{v}(x,y,z,t) = v(x,y) \qquad (۱)$$
$$\tilde{w}(x,y,z,t) = \frac{B_{11}}{B_{33}}\frac{\partial^2 \tilde{F}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \tilde{F}}{\partial z^2} - \frac{\rho}{B_{33}}\frac{\partial^2 \tilde{F}}{\partial t^2}$$

که در این رابطه $\tilde{u}$، $\tilde{v}$ و $\tilde{w}$ تغییرمکان‌ها به ترتیـب در جهـت محورهـای x، y و z، t متغییـر زمـان، ρ جـرم حجمـی و B_{ij} ثابت‌های ارتجاعی برای مصالح همسانگرد که از رابطه ۲ به دست می‌آیند:

$$B_{11} = B_{22} = -\frac{E}{(-1+\nu^2)}$$
$$B_{12} = -\frac{\nu E}{(-1+\nu^2)} \qquad (۲)$$
$$B_{33} = \frac{E}{2(1+\nu)}$$

که در آنها E مدول ارتجاعی و υ ضریب پواسون هستند.

معادلات دیفرانسیل حاکم در این حالت از رابطه‌ی (۳) به دست می‌آید [۴۹]:

$$\nabla_1^2 \nabla_2^2 \tilde{F} = 0 \qquad (۳)$$

که اپراتورها در آن از روابط ٤ و ٥ به دست می‌آیند:

$$\nabla_1^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} - \frac{1}{c_1^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2} \qquad (٤)$$

$$\nabla_2^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} - \frac{1}{c_2^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2} \qquad (٥)$$

در این روابط c_1^2 و c_2^2 سرعت امواج حجمی و برشی هستند، که مطابق روابط ٦ و ٧ قابل بیان است:

$$c_1^2 = \frac{B_{11}}{\rho} \qquad (٦)$$

$$c_2^2 = \frac{B_{33}}{\rho} \qquad (٧)$$

بـا فـرض هارمونیـک بـودن حرکـت، تـابع پتانسـیل و تغییرمکان‌ها را می‌توان به صورت روابط ۸ و ۹ بیان کرد:

$$[\tilde{F}(x,y,z,t)] = [F(x,y,z,)]e^{i\omega t} \qquad (۸)$$

$$[\tilde{u},\tilde{v},\tilde{w}(x,y,z,t)] = [u,v,w(x,y,z)]e^{i\omega t} \qquad (۹)$$

که در آنها ω بسامد زاویه‌ای حرکت و $i = \sqrt{-1}$ است. با جایگذاری روابط ۸ و ۹ در رابطه ۱، رابطه ۱۰ به دست می‌آید:

$$u(x,y,z) = -\frac{(B_{12}+B_{33})}{B_{33}}\frac{\partial^2 F}{\partial x \partial z}$$
$$v(x,y,z) = v(x,y) \quad (۱۰)$$
$$w(x,y,z) = \frac{B_{11}}{B_{33}}\frac{\partial^2 F}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 F}{\partial z^2} + \frac{\rho\omega^2 F}{B_{33}}$$

همچنین با جایگذاری روابط ۸ و ۹ در معادله ۳، رابطه ۱۱ حاصل می‌شود:

$$\frac{\partial^4 F}{\partial x^4} + \frac{\partial^4 F}{\partial x^4} + \left(\frac{c_1^2 + c_2^2}{c_1^2 c_2^2}\right)\omega^2\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}\right)F + 2\frac{\partial^4 F}{\partial x^2 z^2} + \frac{\omega^4}{c_1^2 c_2^2}F = 0 \quad (۱۱)$$

با استفاده از روش جداسازی متغییرها، تابع پتانسیل F را می‌توان به صورت ضرب دو تابع مطابق با رابطه‌ی ۱۲ نوشت:

$$F(x,z) = f(x)h(z) \quad (۱۲)$$

با جای‌گذاری رابطه‌ی ۱۲ در معادله ۱۱ و تقسیم دو طرف معادله بر $f.h$، دو معادله‌ی دیفرانسیل کامل به دست می‌آید که از بین جواب‌های قابل قبول که معادله دیفرانسیل حاکم بر تابع پتانسیل معادله ۱۱ و شرایط مرزی را اقناع کنند، تابع نمائی در جهت z و مثلثاتی در جهت x مطابق رابطه‌ی ۱۳ است، که به منظور راحتی در اعمال شرایط مرزی تابع نمائی به فرم تابع هیپربولیک نوشته شدند. ضرایب A_1 الی A_6 و نیز α، γ_1، γ_2 به کمک شرایط مرزی باید تعیین شوند.

$$F = f.h = (A_1.\cos(\alpha x) + A_2.\sin(\alpha x)).(A_3.\cosh(\gamma_1 z) + A_4.\sinh(\gamma_1 z) + A_5.\cosh(\gamma_2 z) + A_6.\sinh(\gamma_2 z)) = 0 \quad (۱۳)$$

اقناع معادله‌ی دیفرانسیل حاکم ایجاب می‌کند که روابط ۱۴ و ۱۵ برقرار باشند:

$$\gamma_1^2 = \alpha_m^2 - (\frac{\omega^2}{c_1^2})^2 \quad (۱٤)$$

$$\gamma_2^2 = \alpha_m^2 - (\frac{\omega^2}{c_2^2})^2 \quad (۱۵)$$

مطابق شکل (۱) برای تیر مستطیلی با تکیه‌گاه ساده شرایط هندسی خاصی باید اقناع شود (رابطه‌ی ۱٦):

$$x = 0, l \ \rightarrow \ w = 0 \quad (۱٦)$$

با استفاده از معادله ۱۰ و اقناع شرایط مرزی هندسی، می‌توان نتیجه گرفت که ضریب A_1 برابر صفر و رابطه ۱۷ باید برقرار باشد:

$$\alpha_m = {}^{m\pi}/_{l} \quad (۱۷)$$

که در آن m عدد صحیح بزرگتر از صفر است. همچنین با اقناع شرایط مرزی رابطه ۱٦، شرط مرزی لنگر صفر در تکیه‌گاه‌ها نیز برآورده می‌شود. به این ترتیب حل را می‌توان به فرم سری و به صورت رابطه‌ی ۱۸ بیان کرد:

$$F = \sum_{m=1}^{\infty} \sin(\alpha x)\,.\,h^*(z) \quad (۱۸)$$

در این رابطه، h^* به فرم رابطه ۱۹ است:

$$h^*(z) = A'_1.\cosh\left(\gamma_1\frac{z}{d}\right) + A'_2.\sinh\left(\gamma_1\frac{z}{d}\right) + A'_3.\cosh\left(\gamma_2\frac{z}{d}\right) + A'_4.\cosh\left(\gamma_2\frac{z}{d}\right) \quad (۱۹)$$

که در آن، ضرایب جدید A'_1 الی A'_2 به منظور جلوگیری از طولانی شدن روابط تعریف شده‌اند و با اعمال سایر شرایط مرزی باید تعیین شوند. به منظور تعیین بقیه‌ی ثابت‌ها، از شرایط مرزی باقیمانده شامل شرایط مرزی تنش در سطوح فوقانی و تحتانی تیر استفاده می‌شود. روابط تغییرمکان برحسب توابع f و h به شکل رابطه ۲۰ است:

$$u(x,y,z) = -\frac{(B_{12}+B_{33})}{B_{33}}f'h'$$
$$v(x,y,z) = v(x,y) \quad (۲۰)$$
$$w = \frac{B_{11}}{B_{33}}f''h + fh'' + \frac{\rho}{B_{33}}\omega^2 fh$$

همچنین روابط تنش برحسب توابع f و h به شکل رابطه ۲۱ است:

$$\sigma_x = \begin{bmatrix} -B_{11}\frac{(B_{12}+B_{33})}{B_{33}}f''h' + B_{12}(\frac{B_{11}}{B_{33}} \\ f''h' + fh''' + \frac{\rho}{B_{33}}\omega^2 fh' \end{bmatrix}$$
$$\sigma_z = \begin{bmatrix} -B_{11}\frac{(B_{12}+B_{33})}{B_{33}}f''h' + (B_{22}\frac{B_{11}}{B_{33}} \\ f''h' + B_{22}fh''' + B_{22}\frac{\rho}{B_{33}}\omega^2 fh') \end{bmatrix} \quad (۲۱)$$

$$\tau_{xz}=B_{33}\begin{bmatrix}-\frac{(B_{12}+B_{33})}{B_{33}}f'h''+\frac{B_{11}}{B_{33}}f'''h\\+f'h''+\frac{\rho}{B_{33}}\omega^2 f'h\end{bmatrix}$$

در این روابط، بالانویس معرف مرتبه مشتق است. شرایط مرزی تنش شامل تنش نرمال صفر در سطح فوقانی تیر و تنش برشی صفر در سطوح بالائی و پایینی تیر به صورت روابط ۲۲ و ۲۳ است:

$$\sigma_z\left(x,-\frac{d}{2}\right)=0 \tag{۲۲}$$

$$\tau_{xz}\left(x,\pm\frac{d}{2}\right)=0 \tag{۲۳}$$

با اقناع این شرایط مرزی، سه معادله همگن به صورت روابط ۲٤ تا ۲٦ به دست می‌آید:

$$\left(\frac{B_{11}B_{12}-B_{11}B_{22}+B_{11}B_{33}}{B_{33}}.\alpha_m{}^2+B_{22}.\frac{\rho}{B_{33}}.\omega^2\right)\times h^{*\prime}{}_{(-\frac{d}{2})}+B_{22}\times h^{*\prime\prime\prime}{}_{(-\frac{d}{2})}=0 \tag{۲٤}$$

$$\left(\frac{\rho}{B_{33}}\omega^2-\frac{B_{11}}{B_{33}}.\alpha_m{}^2\right)\times h^{*}{}_{(\frac{d}{2})}+\left(1-\frac{B_{12}+B_{33}}{B_{33}}\right)\times .h^{*\prime\prime}{}_{(\frac{d}{2})}=0 \tag{۲۵}$$

$$\left(\frac{\rho}{B_{33}}\omega^2-\frac{B_{11}}{B_{33}}.\alpha_m{}^2\right)\times h^{*}{}_{(-\frac{d}{2})}+\left(1-\frac{B_{12}+B_{33}}{B_{33}}\right)\times h^{*\prime\prime}{}_{(-\frac{d}{2})}=0 \tag{۲٦}$$

شرط مرزی تنش نرمال در صفحه‌ی تحتانی تیر به دلیل وجود بستر ارتجاعی دوپارامتری پاسترناک، مطابق با رابطه ۲۷ است:

$$\sigma_z\left(x,\pm\frac{d}{2}\right)=-k_w w+k_s\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}, \tag{۲۷}$$

در این رابطه، k_w و k_s به ترتیب معرف سختی فنرهای وینکلر و سختی برشی بستر ارتجاعی هستند. در بیان این شرایط مرزی از اصطکاک بین صفحه تحتانی تیر و لایه برشی چشم‌پوشی می‌شود [17] اقناع شرط مرزی رابطه‌ی ۲۷، معادله ۲۸ را به دست می‌دهد:

$$\left((1+\alpha_m{}^2).\frac{\rho}{B_{33}}.\omega^2-\alpha_m{}^2.\frac{B_{11}}{B_{33}}.k_t\right)\times h^{*}\left(\frac{d}{2}\right)+\left(\alpha_m{}^2.B_{11}.\frac{B_{12}-B_{22}+B_{33}}{B_{33}}+B_{22}.\frac{\rho}{B_{33}}.\omega^2\right)\times h^{*\prime}\left(\frac{d}{2}\right)+k_t\times h^{*\prime\prime}\left(\frac{d}{2}\right)+B_{22}\times h^{*\prime\prime\prime}\left(\frac{d}{2}\right)=0 \tag{۲۸}$$

که در آن پارامتر سختی بستر k_t به صورت رابطه ۲۹ بیان می‌شود:

$$k_t=k_w+\alpha_m{}^2 k_s \tag{۲۹}$$

بر اساس رابطه ۲۹، پارامتر سختی بستر علاوه بر k_w و k_s به طول تیر و شکل‌های مود ارتعاش نیز وابسته است.

چهار معادله همگن ۲٤ الی ۲٦ و ۲۸، یک دستگاه معادلات همزمان را تشکیل می‌دهند. به منظور رسیدن به جواب غیر صفر لازم است که دترمینان ضرایب این دستگاه برابر صفر باشد که این منجر به تنظیم یک مسئله مقدار ویژه می‌شود. با حل مسئله مقدار ویژه به دست آمده برای هر m، بسامد زاویه‌ای متناظر تیر ω_m به دست می‌آید که در آن m معرف تعداد نیم‌موج‌های تیر در حال ارتعاش است. به منظور حل معادله مقدار ویژه و تعیین فرکانس ارتعاشی تیر در این تحقیق از نرم‌افزار MATLAB نسخه ۸/۱ استفاده شده است.

۳- نتایج عددی

به منظور بررسی درستی روابط به دست آمده و نیز کنترل محاسبات، نتایج به دست آمده از روش مورد استفاده در این پژوهش با نتایج موجود در مرجع [20] که مبتنی بر تئوری اویلر-برنولی بوده و مستقل از ضخامت است و همچنین با نتایج سایر کارهای تحلیلی و عددی مقایسه شده است.

در جدول (۱)، نتایج بسامد ارتعاش طبیعی بدون بعد شده‌ی مود اول تیر $\overline{\omega}_1$ برای مقادیر مختلف نسبت ضخامت به طول $\delta=d/l$ به ازای ضریب پواسون $\nu=$۰/۳ به دست آمده از روش استفاده شده در این پژوهش با سایر مراجع مقایسه شده است. به منظور بی‌بعد کردن بسامد ارتعاشی تیر و پارامترهای سختی بستر از رابطه‌های ۳۰ و ۳۱ استفاده شده است.

$$\overline{\omega}=\omega l\sqrt{\frac{\rho}{B_{33}}} \tag{۲۷}$$

$$\overline{K}_w=\frac{k_w L^4}{EI},\quad \overline{K}_s=\frac{k_s L^2}{\pi^2 EI} \tag{۲۷}$$

همان‌گونه که در جدول (۱) ملاحظه می‌شود مقادیر بسامد زاویه‌ای بی‌بعد شده‌ی مربوط به مرجع [20] که مبتنی بر تئوری مقدماتی تیر است بزرگ‌تر از نتایج مربوط به مرجع [40] و این

پـژوهش اسـت کـه دلیـل آن ناشـی از در نظـر نگـرفتن اثـر کرنش‌های برشی و نیز لَختی دورانـی در تیرهـای لاغـر اسـت. علاوه بر این، اخـتلاف نتـایج مرجـع [20] و ایـن پـژوهش بـا افزایش نسبت δ و سختی بستر $\bar{k}_w$ و $\bar{k}_s$ افـزایش مـی‌یابـد، بـه گونه‌ای که برای δ=۰/۲ و $\bar{k}_w = ۱۰e۶$ این اختلاف بسیار قابـل توجه است. مقایسه‌ی نتـایج حاصـل از ایـن پـژوهش بـا نتـایج مرجع [۴۰] در جدول (۱) نشان می‌دهـد کـه بیشـترین اخـتلاف نتایج کمتر از ۱ درصد است.

در جدول (۲) بسامد زاویه‌ای بی‌بعد شده‌ی سه مـود اول ارتعاش تیر برای نسبت‌هـای مختلـف δ برحسـب پارامترهـای سختی بستر ارائه شده است. از این جدول ملاحظه می‌شود که با افزایش ضخامت نسبی بسامد بی‌بعد تیر کاهش می‌یابـد؛ کـه مقدار این کاهش با بالارفتن مودهـا بـا شـدت بیشـتری همـراه است. همچنین با افزایش پارامترهای سختی بستر وینکلـر $\bar{k}_w$ و سختی بستر برشی پاسـترناک $\bar{k}_s$ بسـامد بـی‌بعـد تیـر افـزایش می‌یابد؛ که مقدار این افزایش بـا عمیـق شـدن تیـر و بـالارفتن مودهای ارتعاشی با شدت کمتری همراه است، بـه گونـه‌ای‌که افزایش بسامد بی‌بعد مود اول برای سـختی وینکلـر $\bar{k}_w = ۱۰۰$ در نسبت δ=۰/۱ برابر ۲۰ درصد و در نسبت δ=۰/۵ برابـر ۲۲ درصد است، این مقادیر برای مود سوم ارتعـاش و $\bar{k}_w = ۱۰e۶$ به ترتیب برابر با ۲۵ و ۵/۳ درصد است.

به منظور بررسی تاثیر ضخامت تیر بر بسامد طبیعی، در

جدول (۱) بسامد بدون بعد اول تیر ساده بر بستر ارتجاعی پاسترناک.

δ = 1/5			δ =1/15			δ = 1/120			$\bar{k}_s$	$\bar{k}_w$
Present work	[40]	[20]	Present work	[40]	[20]	Present work	[40]	[20]		
3.0577	3.0479	3.1415	3.1322	3.1302	3.1415	3.1414	3.1414	3.1415	0	0
3.4072	3.3945	3.4767	3.4694	3.4667	3.4767	3.4765	3.4765	3.4767	0.5	
3.6618	3.6580	3.7360	3.7311	3.7265	3.7360	3.7355	3.7355	3.7360	1	
4.2359	4.2183	4.2970	4.2919	4.2880	4.2970	4.2965	4.2964	4.2970	2.5	
3.6858	3.6705	3.7483	3.7394	3.7389	3.7483	3.7482	3.7482	3.7483	0	10^2
3.8986	3.8839	3.9608	3.9545	3.9516	3.9608	3.9606	3.9606	3.9608	0.5	
4.0858	4.0663	4.1437	4.1398	4.1347	4.1437	4.1335	4.1435	4.1437	1	
4.5159	4.4991	4.5824	4.5789	4.5734	4.5824	4.5822	4.5822	4.5824	2.5	
7.3548	7.3408	10.0247	9.9986	9.9958	10.0247	10.0242	10.0242	10.0247	0	10^4
7.3605	7.3408	10.0365	10.0154	10.0077	10.0365	10.0362	10.0361	10.0365	0.5	
7.3659	7.3409	10.0489	10.0286	10.0196	10.0489	10.0483	10.0481	10.0489	1	
7.3748	7.3411	10.0847	10.0758	10.0551	10.0847	10.0843	10.0839	10.0847	2.5	
7.4067	7.3508	31.6237	12.7949	12.7722	31.6237	31.6221	31.6217	31.6237	0	10^6
7.4067	7.3508	31.6238	12.7949	12.7722	31.6238	31.6226	31.6221	31.6238	0.5	
7.4067	7.3508	31.6245	12.7951	12.7722	31.6245	31.6230	31.6224	31.6245	1	
7.4071	7.3508	31.6257	12.7977	12.7722	31.6257	31.6467	31.6236	31.6257	2.5	

Table. 1. The first non-dimensional frequency of simply supported beam on Pasternak elastic foundation.

جدول (۲) سه بسامد بدون بعد اول تیر ساده بر بستر ارتجاعی پاسترناک.

$\bar{k}_w = 10^4$			$\bar{k}_w = 10^2$			$\bar{k}_w = 0$				
Mode3	Mode2	Mode1	Mode3	Mode2	Mode1	Mode3	Mode2	Mode1	$\bar{k}_s$	δ
11.0810	10.1646	9.9050	8.8881	6.1983	3.7269	8.8555	6.0959	3.1164	0	0.1
11.2178	10.2469	9.9272	9.1613	6.5566	4.1231	9.1318	6.4707	3.7148	1	
9.8168	9.0631	7.3403	7.9170	5.8025	3.6701	7.8746	5.6859	3.0479	0	0.2
9.8918	9.1060	7.3408	8.2468	6.1903	4.0657	8.2121	6.0991	3.6578	1	
6.1461	5.1802	4.3525	5.9028	4.6945	3.3596	5.8311	4.5276	2.7379	0	0.5
6.1474	5.1912	4.3528	6.0882	4.9607	3.6419	6.0824	4.9211	3.3487	1	

Table. 2. The first three non-dimensional frequencies of simply supported beams resting on Pasternak elastic foundation.

شکل‌های (۲ و ۳) تغییرات بسامد بی‌بعد شده مود اول برحسب δ برای مقادیر مختلف پارامترهای سختی به ترتیب برای $\bar{k}_s$ برابر با صفر و یک ارائه شده است. از آنجائی که در این پژوهش، برخلاف سایر کارها، هیچ‌گونه محدودیتی در انتخاب δ وجود ندارد، از این رو منحنی‌های ارائه شده برای δ تا ۰/۸، مقادیر بیشتر از تیرهای عمیق نسبی ارائه شده است.

شکل (۲) بسامد بی‌بعد تیر ساده بر بستر پاسترناک ($\bar{k}_s = 0$).

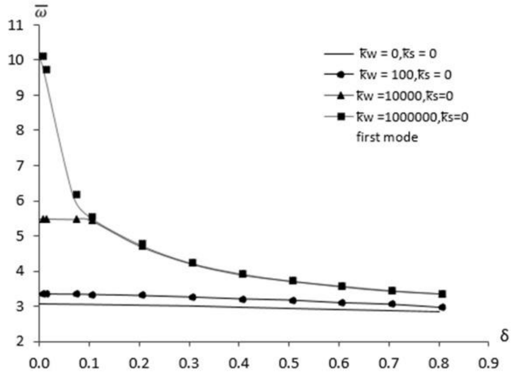

Fig. 2. The non-dimensional frequency of simply supported beam on Pasternak foundation ($\bar{k}_s = 0$).

شکل (۳) بسامد بی‌بعد تیر ساده بر بستر پاسترناک ($\bar{k}_s = 1$).

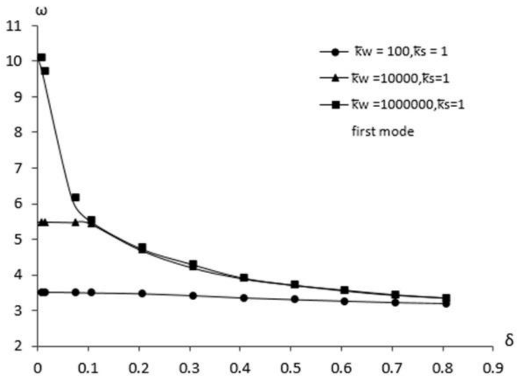

Fig. 3. The non-dimensional frequency of simply supported beam on Pasternak foundation ($\bar{k}_s = 1$).

همان‌گونه که از شکل (۲) مشخص است، با افزایش ضخامت بسامد بی‌بعد تیر کاهش می‌یابد، که مقدار این کاهش با افزایش پارامتر سختی $\bar{k}_w$ با شدت بیشتری همراه است. با توجه به شکل (۳) دیده می‌شود که افزایش پارامتر سختی برشی پاسترناک $\bar{k}_s$ با افزایش بسامد طبیعی تیر همراه است، هرچند تاثیر پارامتر وینکلر در قیاس با پارامتر سختی برشی به مراتب بیشتر است. با مقایسه نتایج شکل‌های (۲ و ۳) مشاهده می‌شود که با افزایش ضخامت و پارامترهای سختی وینکلر و برشی، بسامد بی‌بعد به سمت بسامد تیر بدون بستر با $\bar{k}_w, \bar{k}_s = 0$ نزدیک می‌شود. به منظور بررسی تاثیر پارامتر سختی بستر وینکلر $\bar{k}_w$ بر بسامد طبیعی در شکل‌های (٤ و ٥) به ترتیب تغییرات بسامد بی‌بعد شده مود اول و سوم برحسب سختی وینکلر برای سه نسبت مختلف δ ارائه شده است.

شکل (٤) بسامد بی‌بعد تیر ساده بر بستر پاسترناک ($\bar{k}_s = 0$).

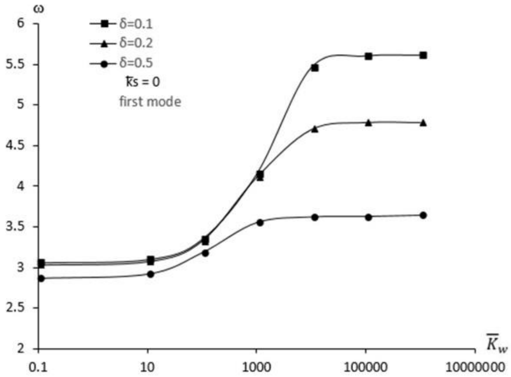

Fig. 4. The non-dimensional frequency of simply supported beam on Pasternak foundation ($\bar{k}_s = 0$).

شکل (٥) بسامد بی‌بعد تیر ساده بر بستر پاسترناک ($\bar{k}_s = 0$).

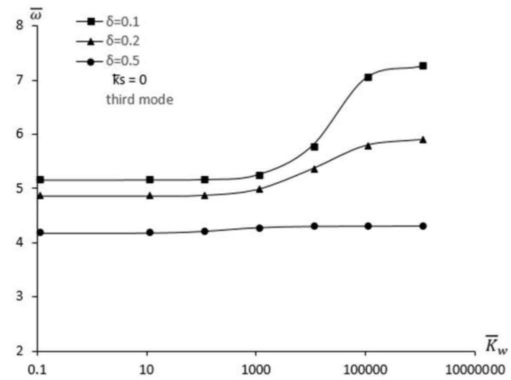

Fig. 5. The non-dimensional frequency of simply supported beam on Pasternak foundation ($\bar{k}_s = 0$).

با توجه به شکل (٤) دیده می‌شود که باافزایش پارامتر سختی وینکلر بسامد بدون‌بعد افزایش می‌یابد که شدت آن با افزایش ضخامت به شکل قابل ملاحظه‌ای کاهش می‌یابد. مطابق شکل‌های (٤ و ٥) شدت افزایش بسامد طبیعی به دلیل افزایش پارامتر سختی وینکلر در مودهای بالای ارتعاشی با کاهش همراه است. در شکل‌های (٦ و ٧) نتایج بسامد بی‌بعد برحسب $\bar{k}_w$ به ازای مقادیر مختلف δ با درنظر گرفتن سختی برشی پاسترناک

$\bar{k}_w\bar{k}_s = 0$ ارائه شده است.

شکل (٦) بسامد بی‌بعد تیر ساده بر بستر پاسترناک ($\bar{k}_s = 1$).

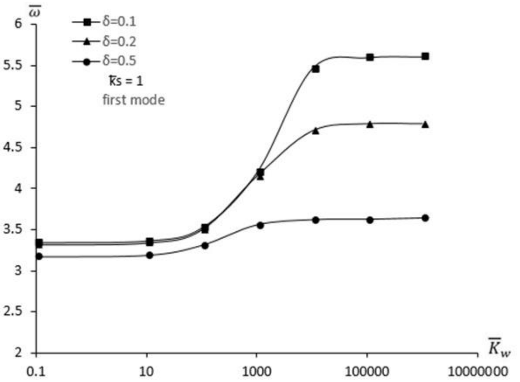

Fig. 6. The non-dimensional frequency of simply supported beam on Pasternak foundation ($\bar{k}_s = 1$).

شکل (۷) بسامد بی‌بعد تیر ساده بر بستر پاسترناک ($\bar{k}_s = 1$).

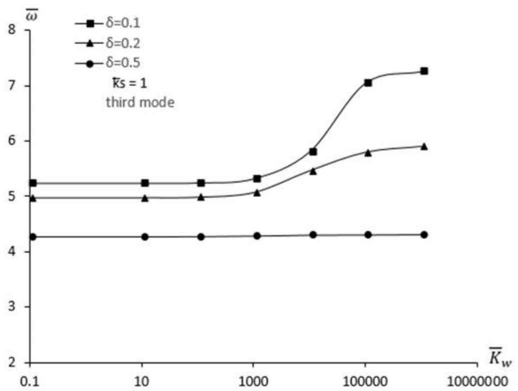

Fig. 7. The non-dimensional frequency of simply supported beam on Pasternak foundation ($\bar{k}_s = 1$).

با توجه به شکل‌های (٦ و ۷) مشاهده می‌شود، هرچند با افزایش سختی برشی پاسترناک بسامد طبیعی کمی افزایش یافته است؛ با این وجود، تغییرات منحنی بسامد بی‌بعد برحسب سختی وینکلر دارای وضعیت مشابهی با حالت بدون بستر برشی است. به‌منظور بررسی اثر پارامتر سختی بستر برشی پاسترناک $\bar{k}_s$ بر بسامد طبیعی در شکل‌های (۸ و ۹) تغییرات بسامد بی‌بعد شده‌ی مود اول ارتعاش برحسب $\bar{k}_s$ به ازای مقادیر مختلف پارامتر سختی وینکلر به ترتیب برای δ برابر با ۰/٦۷ و ۰/۲ ارائه شده است.

شکل (۸) بسامد بی‌بعد تیر ساده بر بستر پاسترناک ($\delta = 0.67$).

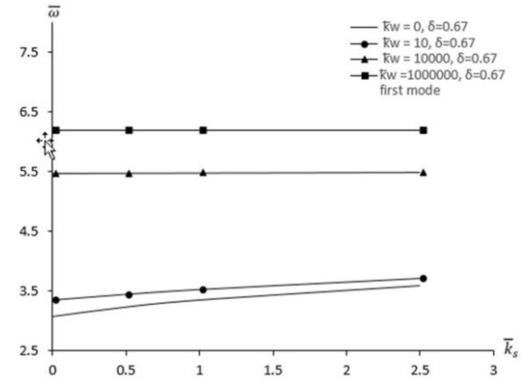

Fig. 8. The non-dimensional frequency of simply supported beam on Pasternak foundation ($\delta = 0.67$).

شکل (۹) بسامد بی‌بعد تیر ساده بر بستر پاسترناک ($\delta = 0.2$).

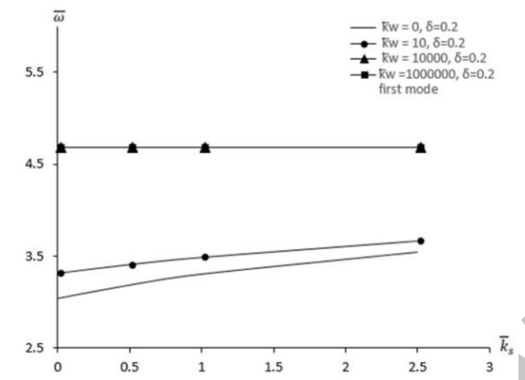

Fig. 9. The non-dimensional frequency of simply supported beam on Pasternak foundation ($\delta = 0.2$).

با توجه به شکل‌های (۸ و ۹) دیده می‌شود که با افزایش پارامتر $\bar{k}_s$ بسامد بی‌بعد افزایش می‌یابد که شدت آن با افزایش ضخامت و بالارفتن مود ارتعاشی با کاهش همراه است.

به منظور بررسی تاثیر ضریب پواسون بر بسامد بی‌بعد شده تیر، در جدول (۳) نتایج بسامد ارتعاش طبیعی برای مقادیر مختلف نسبت ضخامت به طول و ضریب پواسون ۰/۱ تا ۰/۵ به ازای $\bar{k}_w$ و $\bar{k}_s$ به ترتیب برابر با ۱۰۰۰ و ۱ ارائه شده است. نتایج نشان می‌دهد که با افزایش نسبت پواسون بسامد بی‌بعد کاهش می‌یابد که شدت آن با افزایش ضخامت و بالا رفتن مود ارتعاش با کاهش همراه است. کاهش بسامد به دلیل افزایش نسبت پواسون را می‌توان به افزایش انعطاف‌پذیری یا نرمی تیر نسبت داد. در شکل (۱۰) تغییرات بسامد بی‌بعد شده‌ی مود اول برحسب ضریب پواسون ν ارائه شده است.

جدول (۳) سه بسامد بدون بعد اول تیر ساده بر بستر ارتجاعی پاسترناک.

Poisson' ratio					mode	δ
0.5	0.4	0.3	0.2	0.1		
5.672921	5.766591	5.854408	5.937775	6.059338	1	0.1
6.995206	7.103379	7.211553	7.319227	7.456745	2	
9.135036	9.276299	9.417563	9.558826	9.864701	3	
4.093465	4.143898	4.202737	4.253169	4.328819	1	0.5
4.970970	5.032151	5.098431	5.159612	5.251383	2	
5.982306	6.037358	6.116878	6.190280	6.300384	3	

Table. 3. The first three non-dimensional frequencies of simply supported beam on Pasternak elastic foundation.

شکل (۱۰) بسامد بی‌بعد تیر ساده بر بستر پاسترناک.

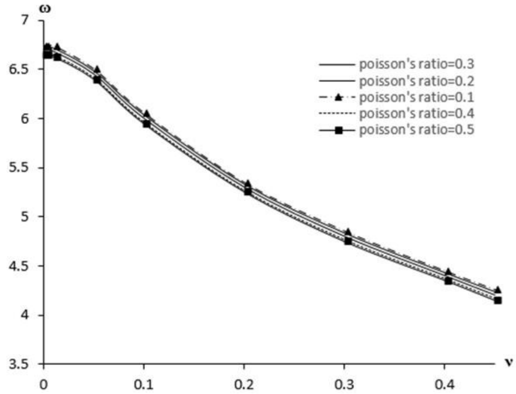

Fig. 10. The non-dimensional frequency of simply supported beam on Pasternak foundation.

۵- نتیجه‌گیری

در این پژوهش بسامدهای ارتعاش آزاد تیرهای ایزوتروپ مستطیلی با تکیه‌گاه ساده متکی بر بستر ارتجاعی دوپارامتری پاسترناک با استفاده از توابع پتانسیل اسکندری قادی به صورت تحلیلی ارائه شده است. ویژگی عمده‌ی روش ارائه شده، حذف فرضیات ساده مانند توزیع فرضی تنش برشی در ضخامت و استفاده از ضریب تصحیح برش است. بر این اساس این نتایج حاصل شدند:

– روش استفاده شده را می‌توان در تعیین مقدار دقیق بسامدهای ارتعاش آزاد تیرهای مستطیلی بر بستر دوپارامتری پاسترناک بدون هرگونه فرض ساده‌کننده‌ای وبرای هر نسبت ضخامت به طول تیر به کار گرفت.

– با افزایش ضخامت تیر، بسامد بدون بعد تیر کاهش می‌یابد. شدت این کاهش در مودهای بالاتر ارتعاش بیشتر است.

– افزایش پارامترهای سختی بستر با افزایش بسامد بی‌بعد تیر همراه است که شدت آن با افزایش ضخامت و بالارفتن مودهای ارتعاشی کاهش می‌یابد.

– افزایش ضریب پواسون منجر به کاهش بسامد ارتعاشی بی‌بعد تیر می‌شود، که شدت آن با افزایش ضخامت و بالا رفتن مود ارتعاش با کاهش همراه است.

References ٦- مراجع

[1] Gorbunov-pasadov M. I. 1949 *Beams and plates on an elastic base.* Stroizdat, Moscow, USSR.

[2] Kerr A. D. 1964 Elastic and viscoelastic foundation models. *Journal of Applied Mechanics*, **31**(3), 491-498.

[3] Kerr A. D. 1984 On the formal development of elastic foundation models. *Ingenieur-Archiv, Springer-Verlag*, **54**(6), 455-464.

[4] Winkler E. 1867 Die Lehre von Elastizitat und Festigkeit (The theory of elasticity and stiffness). *H. Domenicus. Prague.* (in German).

[5] Biot M. A. 1922 Bending of an infinite beam on an elastic foundation. *Journal of Applied Mathematics and Mechanics*, **2** (3), 165-184.

[6] Balkaya M., Kaya M. O. & Saglamer A. 2009 Analysis of the vibration of an eastic beam supported on elastic soil using the differential transform method. *Archive of Applied Mechanics*, **79**(2), 135–146.

[7] Ozturk B. & Coskun S. B. 2011 The homotopy perturbation method for free vibration analysis of beam on elastic foundation. *Structural Engineering and Mechanics*, **37**(4), 415-425.

[8] Lee S. Y., Kuo Y. H. & Lin F. Y. 1992 Stability of a timoshenko beam resting on a winkler elastic foundation. *Journal of Sound and Vibration*, **153**(2), 193-202.

[9] Thambiratnam D. & Zhuge Y. 1996 Free vibration analysis of beams on elastic foundation. *Computers and Structures*, **60**(6), 971-980.

[24] Matsunaga H. 1999 Vibration and buckling of deep beam-columns on two-parameter elastic foundations. *Journal of Sound and Vibration*, **228**(2), 359-376.

[25] Davies R. M. 1948 A critical study of the hopkinson pressure bar. *Philosophical Transactions of the Royal Society of London A: Mathematical, Physical and Engineering Sciences*, **240**(821), 375-457.

[26] Wang T. M. & Stephens J. 1977 Natural frequencies of timoshenko beams on pasternak foundation. *Journal of Sound and Vibration*, **51**(2), 149-155.

[27] Wang C. M., Lam k. y. & He X. Q. 1998 Exact solutions for timoshenko beams on elastic foundations using green's functions. *Journal of Structural Mechanics*, **26**, 101-113.

[28] Heyliger P. R. & Reddy J.N. 1988 A higher order beam finite element for bending and vibration problems. *Journal Sound and vibration*, **126**(2), 309–326.

[29] Matsunaga H. 1996 Free vibration and stabilities of thick elastic beams subjected to axial stresses. *Journal Sound and vibration*. **191**(5), 917-993.

[30] Matsunaga H. 1996 Buckling instabilities of thick elastic beams subjected to axial stresses. *Computer and Structure*, **59**(5), 859-868.

[31] Naidu N. R. & Rao G. V. 1995 Vibrations of initially stressed uniform beams on a two-parameter elastic foundation, *Computer and Structure*, **57**(5), 941-943.

[32] Franciosi C. & Masi A. 1993 Free vibrations of foundation beams on two-parameter elastic soil. *Computer and Structure*. **47**(3), 419-426.

[33] Malekzadeh P. & Karami G. 2008 A mixed differential quadrature and finite element free vibration and buckling analysis of thick beams on two-parameter elastic foundations. *Applied Mathematical Modelling*, **32**(7), 1381-1394.

[34] Dobromir D. 2012 Analytical solution of beam on elastic foundation by singularity functions. *Engineering Mechanics*, **19**(6), 381-392.

[35] Ho S. H. & Chen C. K. 1998 Analysis of general elastically and restrained non-uniform beams using differential transform. *Applied Mathematic Model*, **22**(4), 219-234.

[36] Chen W. Q., Lu C. F. & Bian Z.G. 2004 A mixed method for bending and free vibration of beams resting on a pasternak elastic foundation. *Applied Mathematic Model*, **28**(10), 877-890.

[37] Tran-Cong T. 1994 On the completeness and uniqueness of the papkovich-neuber and the non-axisymmetric boussinesq and love and burgatti solutions in general cylindrical coordinates. *Journal of elasticity*, **36**(3), 227-255.

[38] Herrmann L. R. 1964 Three-dimensional elasticity solution for continous beams. *Journal of Frankin Institute*, **278**(2), 75-83.

[10] Eisenberger M., Yankelevsky D. Z. & Adin M. A. 1985 Vibration of beams fully or partially supported on elastic foundations. *Earthquake Engineering & Structural Dynamics*, **13**(5), 651-660.

[11] Eisenberger M., Yankelevsky D. Z. & Clastornik J. 1986 Stability of beams on elastic foundations. *Computer and Structure*, **24**(1), 135-140.

[12] Eisenberger M. & Clastornik J. 1987 Vibration and buckling of a beam on variable winkler elastic foundations. *Journal of Sound and Vibration*, **115**(2), 233-241.

Filonenko-Borodich, M.M. (1940) Some Approximate Theories of the Elastic Foundation. Uch. Zap. Mosk. Gos, Univ. Mekh. No. 46, 3-18

[13] Filonenko-Borodich M. M. 1940 Some approximate theories of the elastic foundation. *Uchenyie Zapiski Moskovskogo Gosudarstvennogo Universiteta. Mekhanica*, **46**, 3-18.

[14] Hetenyi M. 1946 *Beams on Elastic Foundation.* , Ann Arbor, Michigan, The University of Michigan Press.

[15] Pasternak P. L. 1954 *On a new method of analysis of an elastic foundation by means of two foundation constants*. Gosudarstvenrwe Izdatelslvo Literaturi po Stroitclstvu i Arkhitekture Moscow, USSR.

[16] Valsangkar A. J. & Pradhanag R. 1988 Vibrations of beam-column on two-parameter elastic foundations. *Earthquake Engineering and Structural Dynamics*, **16**(2), 217-225.

[17] Valsangkar A. J. 1986 *Vibrations of beam on two-parameter elastic foundations*. Proceedings of the Eleventh Canadian Congress of Applied Mechanics. University of Alberta.

[18] De Rosa M. A. & Maurizi M. J. 1998 The influence of concentrated masses and pasternak soil on the free vibrations of euler beams-exact solution. *Journal of Sound and Vibration*,, **212**(4), 573-581.

[19] Saito, H. & Terasawa. T. 1980 Steady-state vibrations of a beam on a pasternak foundation for moving loads. *Journal of Applied Mechanics*,, **47**(4), 879-883.

[20] Jafari-Talookolaei R. A. & Ahmadian M. T. 2007 Free vibration analysis of a cross-ply laminated composite beam on pasternak foundation", *Journal of Computer Science*, **3**(1), 51-56.

[21] Alshorbagy A. E., Eltaher M. A. & Mahmoud F. F. 2011 Free vibration characteristics of a functionally graded beam by finite element method. *Applied Mathematical Modelling*, **35**(1), 215-225.

[22] Civalek O. O. B. 2010 Free vibration analysis of tapered beam-column with pinned ends embedded in winkler-pasternak elastic foundation. *Geomechanics and Engineering*,, **2**(1), 45-56.

[23] Cetin D. & Simsek M. 2011 Free vibration of an axially functionally graded pile with pinned ends embedded in winkler-pasternak elastic medium. *Structural Engineering and Mechanics*, **40**(4), 583-594.

[39] Sundara Raja Ingar K. T. & Prabhakara M. K. 1968 Analysis of continuous beams- a three dimensional elasticity solution”, *Int. J. Engng Sci*, **6**(4), 193-208.

[40] Ahmed S. R., Khan M. R., Islam K. M. S. & Uddin M. d. W. 1998 Investigation of stresses at the fixed end of deep cantilever beams. *Journal of Computer and Structure*, **69**(3), 329-338.

[41] Cheng S. 1979 Elasticity theory of plates and a refined theory. *ASME J. Appl. Mech*, **46**(3), 644-650.

[42] Gregory R. D. 1992 The general form of the three-dimensional elastic field inside an isotropic plate with free faces. *Journal Elast*, **28**(1), 1-28.

[43] Gao Y. & Wang M. Z. 2007 The equivalence of The refined theory and the decomposition theorem of rectangular beams. *Journal of Applied Mathematic*, **31**(3), 551-563.

[44] Gao Y. & Shang L. 2010 The exact theory of deep beam without ad hoc assumption. *Journal of Mechanics Research Communications*, **37**(6), 559-564.

[45] Eskandari-Ghadi M. 2005 A complete solution of the wave equations for transversely isotropic media. *Journal of Elasticity*, **81**(1), 1-19.

[46] Rahimian, M., Eskandari-Ghadi, M., Pak, R. Y., & Khojasteh, A. 2007 Elastodynamic potential method for transversely isotropic solid. *Journal of Engineering Mechanics*, *133*(10), 1134-1145.

[47] Nematzadeh M., Eskandari-Ghadi M. & Navayi Neya B. 2011 An analytical solution for transversely isotropic simply supported thick rectangular plates using displacement potential function. *J. Strain Analysis for Engineering Design*, **46**(2), 121-142.

[48] Navayi Neya B. 2014 Exact solution of free vibration for rectangular isotropic thick plates by use displacement potential functions. *Journal of Civil Engineering Sharif*, **30**(2), 33-41.

Free Vibration of Beam-Like Media in Three-Dimensional Mode Resting on a Pasternak Elastic Foundation

M. Z. RoshanBakhsh[1], B. Navayi Neya[2*]

1- M.Sc., Faculty of Civil, Babol Noshirvani University of Technology, Babol, Iran
2- Assoc. Prof., Faculty of Civil, Babol Noshirvani University of Technology, Babol, Iran

***navayi@nit.ac.ir**

Abstract:
Beam theory is used in the analysis and design of a wide range of structures, from buildings to bridges to the load-bearing bones of the human body. Beams resting on elastic foundation is vastly applied in many branches of engineering problems namely geo-technics, road, railroad, marine engineering and bio-mechanics. Foundation is often a rather complex medium, e.g. a rubberlike fuel binder, snow, or granular soil. The key issue in the analysis is modelling the contact between the structural elements and the elastic bed. Herein, the response of the foundation at the contact area is of interest, and not the stresses or displacements inside the foundation material. In most cases, the contact is presented by replacing elastic foundation with simple models, usually spring elements. The most frequently used foundation model in the analysis of beam on elastic foundation problems is the Winkler foundation model. In the Winkler model, the elastic bed is modeled as uniformly distributed, mutually independent, and linear elastic vertical springs, which produce distributed reactions in the direction of the deflection of the beam. However, since the model does not take either continuity or cohesion of the bed into account, it may be considered as a rather crude representation of the elastic foundation. In order to find a physically close and mathematically simple foundation model, Pasternak proposed a so-called two-parameter foundation model with shear interactions. The first foundation parameter is the same as the Winkler foundation model and the second one is the stiffness of the shearing layer in the Pasternak foundation model. Dynamic analysis is an important part of structural investigation and the results of free vibration analysis are useful in this context. Vibration problems of beams on elastic foundation occupy an important place in many fields of structural and foundation engineering. With increase in thickness, the existence of simplifying hypotheses in beam theories such as the ignorance of rotational inertial and transverse shear deformation in classic theory, the application of determination coefficient in first-order shear theory and the expression of one or few unknown functions based on other functions in higher-order shear theories are accompanied by reduction in the accuracy of these theories. This represents the necessity of precise and analytical solutions for beam problems with the least number of simplifying hypotheses and for different thicknesses.

In the present study, the analytical solution for free vibration of homogeneous prismatic simply supported beam with rectangular solid sections and desired thickness resting on Pasternak elastic foundation is provided for completely isotropic behaviors under two-dimensional theory of elasticity and functions of displacement potentials. Characteristic equations of natural vibration are defined by solving partial differential equations of fourth order through the separation of variables and the application of boundary conditions. The major characteristics of present study include lack of limitations for thickness and its validity for beams of low, medium and large thicknesses is quite reliable. To verify, the results of present study were compared with those of other studies. Results show that increases in foundation parameters are associated with increases in natural frequency. The intensity is reduced considerably by increase in the ratio of thickness to length, for the values larger than 0.2 and in the higher modes of vibration .

Keywords: Natural Frequency, Free Vibration, Deep Beam, Elastic Foundation, Potential Functions