

تحلیل کمانشی ستون‌های ساخته شده از مواد مدرج تابعی با سطح مقطع متغیر نمایی

معصومه سلطانی^{۱*}، بهروز عسگریان^۲

۱- استادیار گروه مهندسی عمران، دانشگاه کاشان

۲- استاد دانشکده مهندسی عمران، دانشگاه صنعتی خواجه نصیرالدین طوسی

*msoltani@kashanu.ac.ir

تاریخ پذیرش: [۹۶/۸/۱۶]

تاریخ دریافت: [۹۵/۹/۳۰]

چکیده

در این پژوهش، یک روش عددی نوین برای تحلیل پایداری ستون باریک شونده نمایی ساخته شده از مواد ناهمگن تابعی (FG) ارائه شده است. خواص مواد در راستای ضخامت تیر ثابت در نظر گرفته شده است، درحالی که در راستای طولی به صورت پیوسته و تدریجی و طبق قانون توزیع توانی تغییر می‌کند. همچنین به علت تفاوت ناچیز ضریب پواسون مصالح سازنده تیر، مقدار آن در طول عضو ثابت در نظر گرفته شده است. در مرحله نخست به منظور بررسی رفتار پایداری و ارتعاش آزاد این اعضا، معادله حرکت حاکم بر ارتعاش آزاد تیرهای ماهیچه‌ای با مقطع متغیر نمایی با استفاده از ترکیب بسط مک لورن و روش سری‌های توانی حل می‌شود. در نتیجه، فرم تقریبی تغییر شکل ارتعاشی تیر به صورت یک چند جمله‌ای متناهی به دست می‌آید و با جایگذاری شرایط مرزی حاکم بر تیر اویلر-برنولی و با استفاده از روش حل مقادیر ویژه مقدار فرکانس طبیعی ارتعاشی محاسبه می‌شود. در ادامه به کمک اصل کمینه انرژی پتانسیل و با توجه به تشابه فرم تغییر شکل اعضای الاستیک تحت تحلیل پایداری و ارتعاش آزاد، مقدار بار کمانش بحرانی تعیین می‌شود. در پایان برای اعتبارسنجی، نتایج عددی حاصل از تحلیل پایداری و ارتعاش آزاد برای اعضای ساخته شده از مواد همگن و یا تابعی ارائه شده و تاثیر تغییرات سطح مقطع، توان ماده تابعی و نوع تکیه‌گاه بر بار کمانش بحرانی و فرکانس طبیعی ارتعاش مورد بررسی قرار گرفته است. در تمامی مسائل، کارآمدی، دقت و درستی روش عددی ارائه شده به اثبات رسیده است.

کلید واژه‌ها: تحلیل پایداری، ماده مدرج تابعی، تیر باریک شونده نمایی، سری توانی، اصل حداقل انرژی پتانسیل

۱- مقدمه

ناخواسته است. ویژگی‌های مناسب مواد مدرج تابعی از قبیل استحکام بالا، وزن پایین و مقاومت مقنضی شرایط شیمیایی و دمای زیاد سبب توسعه استفاده از این مصالح در زمینه‌های مختلف شده است. در این مصالح، ویژگی‌های هر نقطه توسط یک قانون اختلاط مناسب به صورت تابعی از ویژگی‌های اجزای تشکیل دهنده و بر مبنای کسر حجمی آن‌ها در هر نقطه تعریف می‌شوند. مواد هدفمند

در طی سالیان گذشته مواد مدرج تابعی (FG) به عنوان مصالح مهندسی جدید، نظر بسیاری از پژوهشگران را به خود معطوف ساخته است. هدف اصلی از ساخت و گسترش این مصالح افزایش کارایی قسمت‌های مختلف سازه‌ای و کنترل تنش‌ها و کرنش‌های

عضو بررسی نمودند. رافتویانیس و ارموپولوس⁸ [7] به بررسی بار کماتش بحرانی اعضای ماهیچه‌ای و پله‌ای با نقص اولیه و خروج از مرکزیت پرداختند. در این مطالعه، به منظور حل معادله دیفرانسیل مرتبه چهار پایداری نقوص را می‌توان به صورت یک انحنای اولیه و فرضی در نظر گرفتند. صفاری و همکاران⁹ [8] با استفاده از روابط شیب افت ضریب طول موثر برای قاب‌های شیب‌دار با اعضای ماهیچه‌ای را بدست آوردند. در روش ارائه شده، ضرایب پایداری در روابط شیب افت برای قاب‌هایی که سطح مقطع اعضایشان به صورت خطی در طول عضو در حال تغییر است، اصلاح شده است. رهایی و کاظمی¹⁰ [9] نیروی کماتش بحرانی ستون‌ها با مقطع متغیر پلکانی را در مودهای مختلف با استفاده از روش انرژی و به کار بردن اصل تشابه تغییر شکل کماتشی و ارتعاشی اعضای الاستیک، تعیین نمودند. کوشکن و آتای¹¹ [10] معادله دیفرانسیل حاکم بر کماتش را با استفاده از روش تکرار تغییرات حل نموده و مقدار بار کماتشی ستون‌ها با مقاطع ثابت و متغیر را تعیین نمودند. اکای و همکاران¹² [11] با استفاده از روش تکرار تغییرات بار کماتش بحرانی و تغییر شکل کماتشی را برای ستون‌های چاق به دست آوردند.

برخی پژوهشگران به منظور مطالعه مسئله کماتش و ارتعاش آزاد و محاسبه ماتریس سختی اعضای الاستیک، از روش سری‌های توانی بهره گرفته‌اند. بسط سری‌های توانی یکی از بهترین روش‌ها برای حل معادلات دیفرانسیل خطی با مرتبه‌های بالا و ضرایب متغیر است. در این روش، کلیه پارامترهای متغیر دخیل در معادله دیفرانسیل باید با استفاده از توابع چندجمله‌ای تخمین زده شوند و با افزایش تعداد جملات سری، تابع جواب به مقدار دقیق همگرا می‌شود. به منظور تحلیل کماتشی و ارتعاشی تیرهای متکی بر بستر الاستیک، ایزنبرگر و کلاستورنیک¹³ [12] از بسط تابع تغییر مکان تیر به صورت سری توانی استفاده نمودند. کیم و همکاران¹⁴ [13] یک روش المان محدود براساس سری‌های توانی برای محاسبه دقیق

عمدتا به شکل ترکیب فلز و سرامیک کاربرد دارند. در سال‌های اخیر استفاده از مواد هدفمند در محیط‌های با دمای بسیار بالا مانند رآکتورهای هسته‌ای، کارخانجات شیمیایی و نیز در ساخت سفینه‌های با سرعت بالا، اهمیت بسیار زیادی پیدا کرده است. همچنین یک عضو با مقطع متغیر¹ نسبت به عضو منشوری که دارای سطح مقطع بزرگتری است، از توان باربری بیشتری برخوردار است. امروزه بیشتر مهندسان به دنبال استفاده از روش‌های کارآمدی هستند تا به کمک آن‌ها بتوانند وزن سازه را کاهش دهند. در نتیجه با ترکیب ویژگی‌های اعضای غیرمنشوری و مصالح مدرج تابعی، می‌توان ظرفیت باربری را به صورت قابل ملاحظه‌ای افزایش و هم زمان وزن سازه را کاهش داد. این نکته از نظر صرفه جویی اقتصادی اهمیت زیادی دارد. با توجه به آنکه تعیین مقدار دقیق بار کماتشی و فرکانس طبیعی ارتعاش سیستم‌های الاستیک خطی به ویژه برای ستون‌ها به عنوان یکی از اعضای اصلی سازه از اهمیت ویژه‌ای در طراحی برخوردار است، در این پژوهش به تحلیل پایداری و ارتعاشی اعضای غیرمنشوری با مقطع متغیر نمایی و ساخته شده از مواد مدرج تابعی پرداخته شده است.

تحلیل پایداری ارتجاعی ستون با مقطع متغیر به منظور تعیین بار کماتش بحرانی سابقه بسیار طولانی در پژوهش‌های مهندسی دارد. در این زمینه، تیموشنکو¹ [1]، چن² [2] و بازانت³ [3] روش‌های متعددی بر مبنای روش‌های تقریبی عددی و یا حل بسته معادله دیفرانسیل حاکم بر پایداری ستون‌های الاستیک با شرایط مرزی مختلف ارائه نمودند. فریش فی⁴ [4] حل مسئله کماتش و تعیین نیروی کماتش بحرانی یک المان منشوری با نیروی محوری یکنواخت تحت شرایط مرزی مختلف را با استفاده از روش تحلیلی مورد مطالعه قرار داد و بار کماتش بحرانی ستونی که از بالا تا پایین مهار شده بود را با استفاده از انتگرال بسط محاسبه نمود. اربابی و لی⁵ [5] کماتش الاستیک تیرستون‌های غیرمنشوری با ضخامت متغیر در طول را مورد بررسی قرار داد. سیگنر⁶ [6] کماتش ستون‌های مخروطی را با تغییرات خطی سختی خمشی در طول

8 Raftoyiannis and Ermopoulos

9 Saffari et al.

10 Rahai and Kazemi

11 Coskun and Atay

12 Okay et al.

13 Eisenberger and Clastornik

14 Kim et al.

1 Non-prismatic member

2 Timoshenko

3 Chen

4 Bazant

5 Frisch-Fay

6 Arbabi and Li

7 Siginer

کمانشی ستون با شرایط مذکور با استفاده از روش سری‌های توانی و انرژی تاکنون انجام نشده، بلکه از روش‌های دیگر همچون روش اجزای محدود [22-23] استفاده شده است.

بدین منظور و در مرحله نخست، معادله دیفرانسیل مرتبه چهار حاکم بر ارتعاش آزاد اعضای مذکور با استفاده از روش نیمه تحلیلی سری توانی حل می‌شود. مطابق با روش مذکور، تمامی ضرایب متغیر موجود در معادله دیفرانسیل مرتبه چهار ارتعاش آزاد شامل: ویژگی‌های هندسی نیم‌رخ تیر غیرمنشوری و توابع توصیف کننده خواص مصالح سازنده عضو شامل: ضریب ارتجاعی و دانسیته، بایستی به صورت یک چند جمله‌ای متناهی در نظر گرفته شوند و در نهایت فرم تغییر شکل تیر با مقطع متغیر نمایی برحسب سری توانی به دست خواهد آمد. در ادامه، با جایگذاری شرایط مرزی (دو شرط برای هر انتهای عضو) و حل مسئله مقادیر ویژه، مقدار فرکانس ارتعاشی تیر و همچنین فرم تغییر شکل تقریبی آن تحت آنالیز ارتعاش آزاد تعیین می‌شود. با توجه به آنکه بردار ویژه حاصل شده از حل معادله دیفرانسیل حاکم بر هر دو آنالیز کمانشی و ارتعاشی ستون مشابه یکدیگر هستند، می‌توان تابع حاکم بر مد اول کمانشی و ارتعاشی ستون را با صرف نظر نمودن از مقدار دامنه تغییر شکل یکسان در نظر گرفت. در نهایت، با اعمال اصل مینیمم انرژی پتانسیل به تابع انرژی حاکم بر تیر اویلر-برنولی در حالت بارگذاری کمانشی و استفاده از فرم تقریبی تغییر شکل عضو که براساس معادله دیفرانسیل ارتعاش آزاد به دست آمده است، بار کمانش بحرانی تعیین می‌شود.

در انتهای مقاله، چند نمونه مثال با استفاده از روش ارائه شده حل و در هر نمونه، هر دو بحث آنالیز پایداری و ارتعاشی بررسی شده‌اند. با توجه به عدم وجود تحقیقی مشابه در زمینه بررسی پایداری تیر باریک شونده با مقطع متغیر نمایی و ساخته شده از مواد مدرج تابعی، ابتدا به مقایسه پاسخ‌های روش حاضر با روش‌های موجود در مراجع دیگر برای تیرهای همگن پرداخته شده است و هماهنگی بسیار خوب به دست آمده حاکی از کارایی و دقت الگوریتم حل پیشنهاد شده است.

۲- معادله دیفرانسیل ارتعاش آزاد حاکم بر تیر

غیرمنشوری ساخته شده از مواد مدرج تابعی

در این پژوهش، تیری ساخته شده از مواد مدرج تابعی مد نظر

ماتریس سختی ستون با مقطع متغیر ارائه نمودند. الصدر¹ [14] معادله دیفرانسیل مرتبه چهار حاکم بر پایداری تیرستون‌های غیرمنشوری تحت بار محوری کششی و فشاری یکنواخت را با استفاده از روش سری‌های توانی حل نمود و در نهایت توابع پایداری جدیدی بر مبنای روش شیب افت ارائه نمود. عسگریان و همکاران² [15] و سلطانی و همکاران³ [16] نیز با استفاده از این روش عددی، پایداری الاستیک و کمانش جانبی- پیچشی تیرهای جدار نازک غیرمنشوری را ارزیابی نمودند. کلیه پژوهش‌های مذکور روی تحلیل پایداری و ارتعاشی اعضای غیرمنشوری همگن متمرکز شده‌اند. در حالی که در طول دهه اخیر، مطالعه رفتار اعضای الاستیک با مقطع متغیر ساخته شده از مصالح مدرج تابعی تحت بار کمانشی و ارتعاش آزاد توجه برخی از محققین را به خود جلب کرده است. در بیشتر پژوهش‌های انجام شده اخیر روی تیرهای ساخته شده از مواد ناهمگن، تغییر مصالح در ضخامت نیم‌رخ عضو در نظر گرفته شده است و تعداد محدودی از مطالعات به بررسی تیرهایی که خصوصیات مصالح در طول عضو تغییر می‌کند؛ پرداخته است. در این زمینه می‌توان به پژوهش‌های انجام گرفته توسط تانگ⁴ [17]، الیشاکف⁵ [18]، الشورباگی⁶ [19] و راجاسکاران⁷ [20] اشاره نمود. همچنین، سینگ⁸ [21] با در نظر گرفتن عضو غیرمنشوری به صورت قطعات بهم پیوسته از تیر با مقطع ثابت به بررسی پایداری تیرهای ماهیچه‌ای ساخته شده از مواد مدرج تابعی پرداخت.

همان طور که ملاحظه می‌شود، پژوهش‌های انجام شده در زمینه پایداری تیرهای غیرمنشوری ناهمگن بسیار معدود و انگشت شمار هستند. در این پژوهش بار کمانش بحرانی ستون‌های باریک شونده نمایی از جنس مواد مدرج تابعی، به کمک یک روش عددی نوین بر مبنای ترکیب دو روش سری توانی و اصل حداقل انرژی پتانسیل تعیین شده است. تغییرات حاکم بر ویژگی‌های هندسی مقطع عضو از الگوی تابع نمایی پیروی می‌کند و ویژگی‌های مصالح سازنده براساس تابع توانی در طول عضو تغییر می‌یابد. بررسی بار

- 1 Al-Sadder
- 2 Asgarian et al.
- 3 Soltani et al.
- 4 Tong
- 5 Elishakoff
- 6 Alshorbagy
- 7 Rajasekaran
- 8 Singh

$$\frac{d^2}{dx^2} \left[E(x) I(x) \frac{d^2 w}{dx^2} \right] - \omega^2 \rho(x) A(x) w(x) = 0 \quad (4)$$

بر مبنای روش بسط سری توانی، کلیه جملات متغیر در معادله دیفرانسیل باید به فرم سری توانی نظر گرفته شوند. بنابراین، ضرایب معادله حرکت عضو غیرمنشوری شامل لنگر دوم سطح $I(x)$ ، مساحت نیم‌رخ تیر $A(x)$ ، ضریب یانگ $E(x)$ و جرم حجمی مصالح $\rho(x)$ بایستی به فرم سری توانی زیر در نظر گرفته شوند:

$$I(x) = \sum_{i=0}^{\infty} I_i x^i; \quad A(x) = \sum_{i=0}^{\infty} A_i x^i; \quad E(x) = \sum_{i=0}^{\infty} E_i x^i$$

$$\rho(x) = \sum_{i=0}^{\infty} \rho_i x^i \quad (5)$$

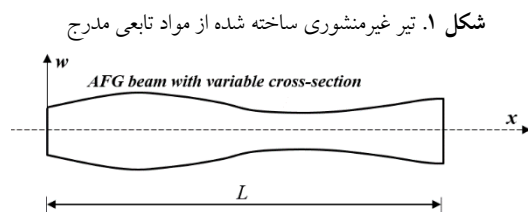


Fig. 1. Non-prismatic beam made of axially functionally graded materials

بنابراین لازم است تا توابع حاکم بر ممان اینرسی و مساحت سطح مقطع که در طول عضو به صورت تابع نامی ارائه شده و در رابطه (۳) نشان داده شده‌اند، به فرم بسط سری توانی تبدیل شوند. برای تبدیل توابع مذکور به صورت یک سری متناهی به فرم زیر:

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \dots + a_n x^n \quad (6)$$

که در آن x ، متغیر مستقل و $\{a_n\}$ دنباله‌ای از اعداد حقیقی است، باید از بسط سری مک‌لورن مطابق با رابطه زیر استفاده نمود:

$$f(x) = f(0) + f'(0) \frac{x}{1!} + f''(0) \frac{x^2}{2!} + \dots + f^{(n)}(0) \frac{x^n}{n!} + \dots \quad (7)$$

با توجه به رابطه فوق، بسط مک‌لورن توابع حاکم بر ممان اینرسی و مساحت نیم‌رخ تیر برابر است با:

$$I(x) = I_0 + \frac{\alpha}{L} I_0 x + \frac{\alpha^2}{2! L^2} I_0 x^2 - \dots + \frac{\alpha^n}{n! L^n} I_0 x^n + \dots \quad (8)$$

$$A(x) = A_0 + \frac{\alpha}{L} A_0 x + \frac{\alpha^2}{2! L^2} A_0 x^2 - \dots + \frac{\alpha^n}{n! L^n} A_0 x^n + \dots$$

بنابراین فرم سری توانی توابع فوق برابر خواهد شد با:

می باشد که از ترکیب فلز و سرامیک ساخته شده است. خواص ماده در راستای طولی عضو به صورت پیوسته و تدریجی از خواص کاملاً سرامیکی (زیرکونیا) در انتهای سمت چپ، به خواص کاملاً فلزی (آلمینیوم) در سمت راست تغییر می‌کند. در حالی‌که، جنس مصالح تیر در راستای ضخامت ثابت در نظر گرفته شده است. در این مقاله، فرض شده است که توزیع خواص ماده از قانون اختلاط خطی کسر حجمی مواد پیروی کرده و براساس تابع توزیع توانی در امتداد محور طولی تیر تغییر می‌کند. همچنین ضریب پواسون بعلت تغییرات ناچیز در مواد مهندسی ثابت در نظر گرفته شده است. بنابراین، توزیع خواص ماده مدرج تابعی شامل ضریب ارتجاعی و جرم واحد حجم را می‌توان به صورت زیر بیان نمود:

$$E(x) = E_z + (E_A - E_z) \left(\frac{x}{L} \right)^m \quad (1)$$

$$\rho(x) = \rho_z + (\rho_A - \rho_z) \left(\frac{x}{L} \right)^m$$

m عددی مثبت و حقیقی است. که شاخص ناهمگنی ماده نام دارد که چگونگی ترکیب کسر حجمی سرامیک و آلومینیوم را در امتداد طولی عضو مشخص می‌کند. با افزایش مقدار شاخص مذکور، میزان سرامیک در ترکیب افزایش پیدا می‌کند. همچنین، توصیه شده است که مقدار آن در بازه $\frac{1}{3} \leq m \leq 3$ در نظر گرفته شود [24]. زیر نویس‌های Z و A به ترتیب به خواص فلز و سرامیک اشاره می‌کنند و مقادیر مرتبط با ضریب یانگ و چگالی هریک به صورت زیر است:

$$ZrO_2 : E_z = 200 GPa; \quad \rho_z = 5700 kg / m^3 \quad (2)$$

$$Al : E_A = 70 GPa; \quad \rho_A = 2702 kg / m^3$$

همان‌گونه که در ابتدا توضیح داده شد، در این پژوهش فرم تغییرات لنگر دوم سطح و مساحت مقطع عضو مد نظر به صورت تابع نامی و به شکل زیر در نظر گرفته شده است:

$$I(x) = I_0 e^{\alpha x/L}; \quad A(x) = A_0 e^{\alpha x/L} \quad (3)$$

که در آن a ضریبی مثبت، L طول عضو، I_0 و A_0 به ترتیب ممان اینرسی و مساحت مقطع بزرگتر در ابتدای ستون هستند. بر اساس تئوری حاکم بر تیر اویلر-برنولی و همچنین با صرف نظر نمودن از تغییر شکل برشی، معادله دیفرانسیل مرتبه چهار حاکم بر ارتعاش آزاد تیر مذکور به صورت زیر است:

با استفاده از رابطه فوق می توان ضرایب (b_4, b_5, b_6, \dots) را تعیین نمود. همچنین مشخص است، جواب معادله دیفرانسیل ارائه شده در رابطه (۸) شامل چهار ضریب نامعین به ترتیب b_0, b_1, b_2, b_3 است، که با جایگذاری شرایط مرزی مربوط به هر دهانه از تیر قابل تعیین می باشند. در نتیجه، جواب عمومی معادله دیفرانسیل مرتبه چهار خطی با ضرایب متغیر حاکم بر تغییر شکل تیرهای غیرمنشوری در مختصات محلی به صورت زیر حاصل می گردد:

$$w = b_0 w_0(\xi) + b_1 w_1(\xi) + b_2 w_2(\xi) + b_3 w_3(\xi) \quad (16)$$

چند جمله ابتدایی از نتایج تعیین شده برای w_i ($i = 0, 1, 2, 3$) به وسیله نرم افزار متلب در پیوست ۱ نشان داده شده است. همواره برای حل معادلات دیفرانسیل و تعیین جواب دقیق آن ها به شرایط مرزی در ابتدا و انتهای محدوده معادله نیاز است. از آنجا که معادله حاکم بر ارتعاش آزاد ستون های غیرمنشوری از مرتبه چهار است، به چهار شرط مرزی به منظور تعیین فرکانس های طبیعی ارتعاش نیاز است. مطابق با فرضیات حاکم بر تغییر شکل خمشی تیر، شرایط مرزی برای هر دو انتهای اعضای تحلیل شده به صورت زیر تعریف می گردد:

$$\text{انتهای مفصلی: } w = 0 \quad \text{و} \quad \frac{d^2 w}{dx^2} = 0 \quad (17)$$

$$\text{انتهای گیردار: } w = 0 \quad \text{و} \quad \frac{dw}{dx} = 0 \quad (18)$$

$$\text{انتهای آزاد: } \frac{d^2 w}{dx^2} = 0 \quad \text{و} \quad \frac{d^3 w}{dx^3} = 0 \quad (19)$$

در این مطالعه، سه نوع ستون با شرایط مرزی: دو سر مفصل، یک سر گیردار-یک سر آزاد و یک سر گیردار-یک سر مفصل در نظر گرفته شده است. با اعمال شرایط مرزی اساسی و طبیعی شامل تغییر مکان، شیب، لنگر و برش در هر تکیه گاه و تشکیل ماتریس مقادیر ویژه، مقدار فرکانس ارتعاشی تیر تعیین می شود.

همانگونه که در ابتدا توضیح داده شد، مقدار بار کمانشی در این مطالعه با استفاده از روش انرژی محاسبه می شود. برای نیل به این هدف و براساس تئوری حاکم بر روش عددی مذکور به فرم تقریبی تغییر شکل عضو که شرایط مرزی مسئله را ارضا نماید، نیاز است. همچنین می دانیم که فرم تغییر شکل ارتعاشی و کمانشی اعضای الاستیک مشابه یکدیگر هستند و تنها مقدار دامنه تغییر شکل در

$$I(x) = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{\alpha^i}{i! L^i} I_0 x^i; \quad A(x) = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{\alpha^i}{i! L^i} A_0 x^i \quad (9)$$

با معرفی یک مختصات بی بعد محلی جدید $\xi = x / L$ ، روابط (۵ و ۹) به صورت زیر نوشته می شوند:

$$I(\xi) = I_0 \sum_{i=0}^{\infty} \frac{\alpha^i}{i!} \xi^i; \quad A(\xi) = A_0 \sum_{i=0}^{\infty} \frac{\alpha^i}{i!} \xi^i; \quad (10)$$

$$E(\xi) = \sum_{i=0}^{\infty} E_i L^i \xi^i; \quad \rho(\xi) = \sum_{i=0}^{\infty} \rho_i L^i \xi^i$$

با جایگذاری عبارات فوق و متغیر بدون بعد معرفی شده در معادله دیفرانسیل خطی حاکم بر تیر (۸) رابطه زیر حاصل می گردد:

$$\frac{d^2}{d\xi^2} \left[\left\{ \sum_{i=0}^{\infty} E_i L^i \xi^i \right\} \left\{ I_0 \sum_{i=0}^{\infty} \frac{\alpha^i}{i!} \xi^i \right\} \frac{d^2 w}{d\xi^2} \right] - \omega^2 L^4 \left\{ \sum_{i=0}^{\infty} \rho_i L^i \xi^i \right\} \left\{ A_0 \sum_{i=0}^{\infty} \frac{\alpha^i}{i!} \xi^i \right\} w(\xi) = 0 \quad (11)$$

معادله دیفرانسیل مرتبه چهار حاصل شده در رابطه ۱۱ با استفاده از بسط سری توانی متناهی برحسب توان های ξ قابل حل است. در نتیجه، جواب عمومی برای فرم تغییر شکل که در معادله ۱۱ صدق می کند به صورت زیر در نظر گرفته شده است:

$$w(\xi) = \sum_{i=0}^{\infty} b_i \xi^i \quad (12)$$

و با جایگذاری معادلات ۱۰ و ۱۲ در رابطه ۱۱، عبارت زیر حاصل می شود:

$$\frac{d^2}{d\xi^2} \left[\left\{ \sum_{k=0}^{\infty} E_k^* \xi^k \right\} \times \left\{ I_0 \sum_{i=0}^{\infty} \frac{\alpha^i}{i!} \xi^i \right\} \left\{ \sum_{j=0}^{\infty} b_{j+2} (j+2)(j+1) \xi^j \right\} \right] - \omega^2 L^4 \left\{ \sum_{k=0}^{\infty} \rho_k^* \xi^k \right\} \left\{ A_0 \sum_{i=0}^{\infty} \frac{\alpha^i}{i!} \xi^i \right\} \left\{ \sum_{j=0}^{\infty} b_j \xi^j \right\} = 0 \quad (13)$$

به طوری که:

$$E_i^* = E_i L^i, \quad \rho_i^* = \rho_i L^i \quad (14)$$

با ضرب جمله به جمله هر دو سری و با توجه به قانون حاکم بر جمع و ضرب پارامتریک سری ها، رابطه فوق به صورت زیر اصلاح می شود:

$$\sum_{j=0}^{\infty} \left[I_0 \sum_{k=0}^{j+2} \sum_{i=0}^k \frac{\alpha^i}{i!} E_{k-i}^* b_{j-k+4} \times (j-k+4)(j-k+3)(j+2)(j+1) - \omega^2 L^4 A_0 \sum_{k=0}^j \sum_{i=0}^k \frac{\alpha^i}{i!} \rho_{k-i}^* b_{j-k} \right] \xi^j = 0 \quad (15)$$

با توجه به توابع به‌دست آمده توسط نرم‌افزار متلب برای w_i ($i = 0, 1, 2, 3$) که در پیوست ۱ نشان داده شده‌اند، می‌توان نتیجه‌گیری نمود که $w_0(0) = w_1'(0) = 1$ و $w_1(0) = w_2(0) = w_3(0) = w_0'(0) = w_1(0) = w_2'(0) = w_3(0) = 0$ در نتیجه، با حل دستگاه چهار معادله و مجهول فوق، ضرایب b_0, b_1, b_2, b_3 به صورت ذیل به‌دست می‌آیند:

$$\begin{aligned} b_0 &= \delta_1 \\ b_1 &= L\theta_1 \\ b_2 &= -\frac{1}{B} \{w_3'(1)(\delta_2 - \delta_1 - L\theta_1) - w_3(1)(L\theta_2 - L\theta_1)\} \\ b_3 &= \frac{1}{B} \{w_2'(1)(\delta_2 - \delta_1 - L\theta_1) - w_2(1)(L\theta_2 - L\theta_1)\} \end{aligned} \quad (21)$$

به طوری که:

$$B = w_3(1)w_2'(1) - w_2(1)w_3'(1)$$

در این پژوهش اعضای غیرمنشوری با سه نوع شرایط تکیه‌گاهی: دوسر مفصل، یک سر گیردار و یک سر گیردار-یک سر مفصل در نظر گرفته شده‌اند. بنابراین، فرم تغییر شکل تقریبی اعضای مد نظر تحت ارتعاش آزاد برای هر یک از شرایط مذکور به صورت زیر اصلاح می‌شود:

- عضو دوسر مفصل:

در این حالت تغییر مکان عمودی ابتدا و انتهای عضو برابر صفر هستند.

$$\delta_1 = \delta_2 = 0 \rightarrow$$

$$\begin{aligned} w(\xi) &= \frac{L}{B} (Bw_1(\xi) + (w_3'(1) - w_3(1))w_2(\xi) \\ &\quad - (w_2'(1) + w_2(1))w_3(\xi))\theta_1 \\ &\quad + \frac{L}{B} (w_3(1)w_2(\xi) - w_2(1)w_3(\xi))\theta_2 \end{aligned} \quad (22)$$

علاوه بر شرایط مذکور، مقدار لنگر خمشی در هر دو تکیه‌گاه مساوی صفر است. بنابراین، فرم تغییر شکل عضو دوسر مفصل تحت تحلیل ارتعاشی به صورت زیر به‌دست می‌آید:

$$\begin{aligned} w(\xi) &= \frac{L}{B} \left\{ \frac{w_3(1)}{(w_3(1) - w_3'(1))} (Bw_1(\xi) + \right. \\ &\quad \left. (w_3'(1) - w_3(1))w_2(\xi) - (w_2'(1) + w_2(1))w_3(\xi)) \right. \\ &\quad \left. + (w_3(1)w_2(\xi) - w_2(1)w_3(\xi)) \right\} \theta_2 \end{aligned} \quad (23)$$

- عضو یک سر گیردار:

در این حالت تغییر مکان و شیب (دوران) در محل تکیه‌گاه گیردار (ابتدای عضو) مساوی صفر هستند.

آن‌ها متفاوت است. بنابراین در ادامه، مقدار دقیق فرکانس ارتعاشی که با استفاده از روش حل مقادیر ویژه و مطابق با توضیحات فوق تعیین گشته است را باید در عبارت (۱۶) جایگذاری نمود، تا فرم تغییر شکل نظیر مد اول حاصل شود. سپس، شرایط مرزی برای هر مسئله جداگانه تعریف می‌شود.

۳- اعمال شرایط مرزی اساسی

هر عضو ارتجاعی مطابق با فرضیات حاکم بر تیر اویلر-برنولی دو درجه آزادی در هر گره دارد: انتقال در راستای عمودی در جهت محور y و دوران حول محور مذکور (شکل ۲). درجات آزادی در نظر گرفته شده در گره‌های ابتدا و انتهای هر المان بدین قرار هستند: δ_2, δ_1 (تغییر مکان عمودی در جهت z) و θ_2, θ_1 (مطابق با شکل رسم شده و با استفاده از سیستم مختصات محلی، شرایط مرزی برای نقاط ابتدایی و انتهایی عضو ($x=L$ و $x=0$) به صورت زیر بیان می‌شوند:

شکل ۲. شرایط مرزی و درجات آزادی حاکم بر تیر اویلر-برنولی

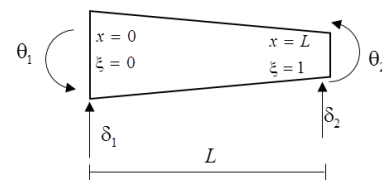


Fig. 2. Boundary conditions and degrees of freedom for Euler-Bernoulli beam

$$\begin{aligned} \text{At } x = 0 (\xi = 0), \rightarrow w(0) &= \delta_1 \\ \rightarrow b_0 w_0(0) + b_1 w_1(0) + b_2 w_2(0) + b_3 w_3(0) &= \delta_1 \end{aligned} \quad (1-20)$$

$$\begin{aligned} \text{At } x = 0 (\xi = 0) \rightarrow \frac{dw}{dx} &= \theta_1 \\ \Rightarrow \left. \frac{dw}{dx} \right|_{x=0} = \theta_1 = \left. \frac{1}{L} \frac{dw}{d\xi} \right|_{\xi=0} &\rightarrow \end{aligned} \quad (2-20)$$

$$b_0 \frac{w_0'(0)}{L} + b_1 \frac{w_1'(0)}{L} + b_2 \frac{w_2'(0)}{L} + b_3 \frac{w_3'(0)}{L} = \theta_1$$

$$\begin{aligned} \text{At } x = L (\xi = 1), \rightarrow w(L) &= \delta_2 \\ \rightarrow b_0 w_0(1) + b_1 w_1(1) + b_2 w_2(1) + b_3 w_3(1) &= \delta_2 \end{aligned} \quad (3-20)$$

$$\begin{aligned} \text{At } x = L (\xi = 1), \rightarrow \frac{dw}{dx} &= \theta_2 \\ \Rightarrow \left. \frac{dw}{dx} \right|_{x=L} = \theta_2 = \left. \frac{1}{L} \frac{dw}{d\xi} \right|_{\xi=1} &\rightarrow \end{aligned} \quad (4-20)$$

$$\rightarrow b_0 \frac{w_0'(1)}{L} + b_1 \frac{w_1'(1)}{L} + b_2 \frac{w_2'(1)}{L} + b_3 \frac{w_3'(1)}{L} = \theta_2$$

خصوص (تحلیل پایداری) عضو غیرمنشوری مدنظر تحت هیچگونه بارگذاری عرضی خارجی قرار ندارد. در نتیجه، مقدار کار خارجی ناشی از بارهای موثر وارد بر عضو (W_e) برابر صفر است. میدان جابه‌جایی حاکم بر تیر اوایلر-برنولی نسبت به تار خشی گذرنده از مرکز سطح نیم‌رخ تیر (شکل ۳) به صورت زیر تعریف شده است:

$$U(x, z) = -z \frac{dw(x)}{dx}; \quad W(x, z) = w(x) \quad (28)$$

در روابط فوق، دو محور x و z به ترتیب در راستای طول و در جهت ضخامت تیر هستند. مولفه‌های U و W نشان دهنده تغییر مکان‌های محوری و عمودی (در جهت x و z) هستند. روابط حاکم بر هر یک از پارامترهای موجود در انرژی پتانسیل کلی به صورت عبارات زیر تعریف می‌شوند:

$$U_l = \frac{1}{2} \int_L \int_A E (\epsilon'_{xx})^2 dA dx \quad (29)$$

$$U_o = \int_L \int_A \tau_{ij} (\epsilon_{ij} - \epsilon'_{ij}) dA dx = \int_L \int_A \sigma_{xx}^o \epsilon_{xx}^* dA dx \quad (30)$$

شکل ۳. میدان جابه‌جایی حاکم بر تیر شامل تغییر شکل محوری و عرضی

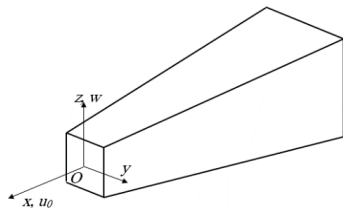


Fig. 3. The displacement field for a beam element including longitudinal and transverse deformations

در روابط ارائه شده، L و A به ترتیب معرف سطح مقطع و طول عضو هستند. همچنین، بیانگر تنش عمودی وارده بر سطح مقطع، ناشی از نیروی محوری فشاری N است. ϵ'_{xx} و ϵ_{xx}^* به ترتیب کرنش‌های نرمال خطی و غیرخطی متناسب با مولفه تغییر مکان عرضی هستند که مطابق با فرضیات کرنش گرین و میدان جابه‌جایی تیر اوایلر به صورت ذیل تعریف می‌شوند:

$$\epsilon'_{xx} = -z w''; \quad \epsilon_{xx}^* = \frac{1}{2} w'^2 \quad (31)$$

با جایگذاری روابط کرنش جابه‌جایی و تنش اولیه (NA) در معادلات حاکم بر انرژی کرنشی و انتگرال گیری روی سطح مقطع عضو نسبت به محور اصلی خمش، معادله انرژی پتانسیل کلی در مختصات بدون بعد محلی به صورت زیر به دست می‌آید:

$$\delta_1 = \theta_1 = 0 \rightarrow$$

$$w(\xi) = \frac{1}{B} (w'_2(1)w_3(\xi) - w'_3(1)w_2(\xi)) \delta_2 \quad (24)$$

$$+ \frac{1}{B} (w_3(1)w_2(\xi) - w_2(1)w_3(\xi)) \theta_2$$

همچنین مقدار لنگر در انتهای آزاد تیر برابر صفر است. در نتیجه، تابع تغییر شکل تقریبی تیر با شرایط مرزی یک سرگیردار-یک سر آزاد به فرم زیر تعیین می‌گردد:

$$w(\xi) = \left\{ \frac{1}{w'_2(1)w_3(1) - w'_3(1)w_2(1)} \right\} \quad (25)$$

$$\times \{w_3(1)w_2(\xi) - w_2(1)w_3(\xi)\} \theta_2$$

- عضو یک سرگیردار-یک سر مفصل:

در این حالت در ابتدای عضو و در محل تکیه‌گاه گیردار از تغییر مکان عمودی و دوران عضو جلوگیری شده است و در سمت دیگر و محل تکیه‌گاه مفصلی، مقدار تغییر مکان نیز مساوی صفر است. در نهایت تابع تعریف کننده تغییر شکل ارتعاشی تیر با شرایط مرزی مذکور در مد اول ارتعاشی به شکل زیر به دست می‌آید:

$$\delta_1 = \theta_1 = \delta_2 = 0 \rightarrow$$

$$w(\xi) = \frac{L}{B} (w_3(1)w_2(\xi) - w_2(1)w_3(\xi)) \theta_2 \quad (26)$$

بدین ترتیب و مطابق با مراحل توضیح داده شده، فرم تغییر شکل ارتعاشی عضو غیرمنشوری ساخته شده از مصالح مدرج تابعی متناظر با شرایط مرزی مدنظر بدست می‌آید.

۴- روش انرژی

روش عددی رایلی-ریتز بر مبنای اصل مینیمم انرژی پتانسیل است. طبق این اصل، از میان تمام حالات تغییر شکل یافته سازه که سازگاری و شرایط مرزی را برآورده می‌کنند، فرم تغییر شکلی شرایط تعادل را ایجاد می‌کند، که به ازای آن انرژی پتانسیل کل حداقل باشد. بنابراین با مساوی صفر قرار دادن مشتق اول تابع انرژی پتانسیل کل نسبت به هر کدام از تغییر مکان‌های تعمیم یافته می‌توان شرایط بحرانی سیستم را تعیین نمود. شرط حداقل شدن انرژی پتانسیل را می‌توان به صورت زیر نوشت:

$$\delta \Pi = \delta (U_l + U_o - W_e) = 0 \quad (27)$$

در رابطه فوق Π نشان دهنده انرژی پتانسیل کل سیستم الاستیک می‌باشد. این انرژی برابر مجموع انرژی کرنشی کلی که خود شامل انرژی کرنشی خطی الاستیک U_l و انرژی کرنشی ناشی از تنش‌های اولیه کل سازه U_o است. در این مورد به

مراحل محاسبات می‌توان به یک جواب همگرا در تعیین مقدار فرکانس ارتعاشی و بار کمانشی ستون با مقطع ثابت و مصالح همگن رسید. همچنین، کفایت و دقت روش موجود نسبت به جواب‌های بدست آمده از نرم افزار اجزای محدود Ansys نشان داده می‌شود. مقادیر بار بحرانی و فرکانس ارتعاشی به دست آمده از روش عددی ارائه شده برای ستون با مقطع ثابت که مطابق با رابطه (۳۵) بی‌بعد شدند؛ به همراه اثر تعداد جملات در نظر گرفته شده در بسط سری توانی در جدول (۱) نشان داده شده‌اند.

$$P_{nor} = P_{cr} \times \frac{L^2}{E_z I_0}; \quad \omega_{nor} = \omega \times \sqrt{\frac{\rho_z A_0 L^4}{E_z I_0}} \quad (35)$$

مطابق با توضیحات ارائه شده در بخش ۱، I_0 و A_0 به ترتیب ممان اینرسی و مساحت مقطع بزرگتر در ابتدای عضو غیرمنشوری هستند. همچنین، E_z و ρ_z مدول الاستیسیته و دانسیته اکسید زیرکونیوم هستند که مقادیر دقیق در نظر گرفته شده در این پژوهش در رابطه (۲) ارائه شده است.

نتایج فرکانس طبیعی ارتعاش بدون بعد به دست آمده از روش ارائه شده در این پژوهش برای سه مد اول ارتعاشی عضو دوسر مفصل برای دو ضریب مختلف از توان تابع نمایی یعنی ۰ و ۱ به همراه مقادیر به دست آمده توسط ذاکری و همکاران [25] در جدول (۲) نشان داده شده‌اند. با توجه به جدول (۲)، می‌توان نتیجه‌گیری نمود که روش عددی ارائه شده قابلیت کاربرد در تحلیل ارتعاشی مدهای بالاتر را نیز دارد و تنها کافی است که از ۴۰ جمله در بسط سری توانی استفاده نمود تا نتایج به مقادیر ارائه شده توسط دیگر پژوهشگران همگرا شود.

در ادامه نتایج مربوط به بار کمانشی بدون بعد برای چند ضریب مختلف از توان تابع نمایی در جدول (۳) ارائه شده‌اند. مجدداً در این جدول تاثیر افزایش تعداد جملات در بسط سری توانی در جهت همگرایی نتایج حاصل از تحلیل پایداری با مقادیر به دست آمده از حل دقیق ارائه شده در مرجع [26] نشان داده شده است. در جداول (۱ تا ۳)، تحلیل‌های پایداری و ارتعاشی روی مصالح همگن از جنس زیرکونیا انجام گرفته است. با توجه به هر سه جدول مذکور، مشخص است که با افزایش تعداد جملات تا ۳۰ جمله، جواب‌ها به سرعت به جواب حاصله از روش ارائه شده به مقادیر حل دقیق برای مد اول کمانش و یا ارتعاش آزاد همگرا شده‌اند. بنابراین، در تمام مسائل بعدی، برای تعیین مقدار بار

$$\Pi = \frac{1}{2L^3} \int_0^1 E(\xi) I(\xi) \left(\frac{d^2 w}{d\xi^2} \right)^2 d\xi + \frac{N}{2L} \int_0^1 \left(\frac{dw}{d\xi} \right)^2 d\xi \quad (32)$$

مطابق با عبارات به دست آمده برای تغییر شکل ارتعاشی ستون (معادلات ۲۳، ۲۴ و ۲۶)، می‌توان انرژی پتانسیل را به صورت تابعی از متغیر θ_2 نوشت. بنابراین، رابطه (۲۷) به صورت زیر ساده می‌شود:

$$\frac{d(U_1 + U_0)}{d\theta_2} \delta\theta_2 = 0 \quad (33)$$

با توجه به اختیاری بودن $\delta\theta_2$ (تغییر مکان مجازی) رابطه زیر حاصل می‌گردد:

$$\frac{d(U_1 + U_0)}{d\theta_2} = 0 \quad (34)$$

۵- نتایج عددی

در این قسمت به منظور بررسی درستی روش عددی معرفی شده بر مبنای ترکیب بسط سری توانی و اصل حداقل انرژی پتانسیل، یک مثال عددی جامع، شامل هردو تحلیل پایداری و ارتعاشی عضو ماهیچه‌ای نمایی ساخته شده از مصالح همگن ارتجاعی همچنین مصالح غیرهمگن با شرایط مرزی مختلف، ارائه گردیده است. در تمام مراحل محاسبه بار کمانش بحرانی و فرکانس طبیعی ارتعاش اعضای غیرمنشوری از نرم افزار متلب [27] استفاده شده است. برای بررسی درستی روش ترکیبی استفاده شده در این پژوهش، در ابتدا مسئله همگن تحلیل شده و نتایج حاصل از بسط سری‌های توانی با مقادیر بدست آمده از روش‌های عددی و تحلیلی موجود دیگر مقایسه شدند. در ادامه، چند مثال عددی از اعضای غیرمنشوری FG ارائه شده است.

همان‌گونه که توضیح داده شد در این مقاله، تغییرات لنگر دوم سطح نسبت به محور ضعیف و مساحت نیم‌رخ ستون غیرمنشوری به طول L به صورت تابع نمایی و مطابق رابطه (۳) در نظر گرفته شده است. همچنین، سه نوع شرایط مرزی متفاوت در این پژوهش شامل: دو سرمفصل، یک سر گیردار و یک سر گیردار- یک سر مفصل در نظر گرفته شده است.

در مرحله نخست، مقدار توان تابع نمایی ارائه شده برابر صفر در نظر گرفته شده است که منطبق بر حالتی است که عضو دارای مقطع ثابت در طول خود باشد. در این قسمت سعی بر آن است که مشخص شود با به کار بردن چه تعداد از جملات سری توانی در

کسر حجمی (m) درصد حضور اکسید زیرکونیم در طرح اختلاط ماده تابعی افزایش می‌یابد و این منجر به افزایش وزن و سختی ماده سازنده تیر می‌شود. نتایج به دست آمده از هر دو تحلیل ارتعاش آزاد و پایداری برای هر سه عضو با شرایط مرزی متفاوت در شکل‌های (۵ و ۶) نشان داده شده‌اند. با توجه به شکل‌های مذکور می‌توان نتیجه‌گیری نمود که با افزایش مقدار شاخص کسر حجمی اختلاط مواد (m)، بار کماتشی و در نتیجه پایداری عضو بعثت افزایش ضریب ارتجاعی سیستم افزایش می‌یابد. همچنین در این شکل‌ها مشاهده می‌شود که با افزایش ضریب α از مقدار ۲-، بار کماتشی به صورت غیرخطی افزایش می‌یابد. برخلاف آنچه در نمودارهای مرتبط با تحلیل پایداری مشاهده شد، رفتار عضو و مقدار فرکانس ارتعاشی سیستم با افزایش مقدار توان ماده تابعی قابل پیشبینی نیست چون فرکانس ارتعاشی به صورت همزمان به هر دو پارامتر جرم و ضریب یانگ وابسته است.

شکل ۵. تغییرات فرکانس ارتعاشی نرمال شده (ω_{hor}) برحسب مقادیر متفاوت (α) برای ستون‌های همگن و ناهمگن با توان‌های متفاوت ماده تابعی، الف: یک سرگیردار، ب: دوسر مفصل، ج: یک سرگیردار - یک سر مفصل

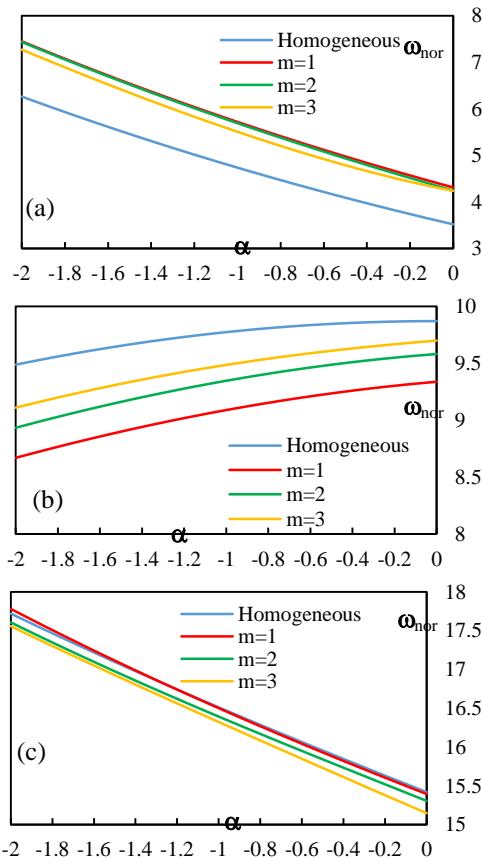


Fig. 5. Variations of the non-dimensional free transverse frequency parameter (ω_{hor}) of AFG exponentially tapered beam with respect to non-uniformity parameter (α): (a) Cantilever, (b) Simply supported, (c) Clamped-Pinned

کمانشی تعداد جملات سری برای بسط دادن برابر با ۳۰ در نظر گرفته خواهد شد. با توجه به جدول (۳)، مشاهده می‌شود که با کاهش مقدار ضریب در توان تابع نمایی و در نتیجه کاهش سطح مقطع انتهایی عضو با شیب تغییرات شدیدتر، بار کماتش بحرانی و میزان پایداری ستون کاهش می‌یابد. همچنین با ثابت ماندن توان تابع نمایی، افزایش شرایط گیرداری و به تبع آن افزایش درجات نامعینی ستون، منجر به افزایش بار کماتش بحرانی و پایداری خواهد شد. نتایج نشان می‌دهد که هماهنگی مطلوبی بین حل تحلیلی ارائه شده توسط ونگ [26]، روش اجزای محدود معرفی شده توسط ذاکری و همکاران [25] و روش حاضر در تحلیل پایداری و ارتعاشی عضو غیرمنشوری وجود دارد. بنابراین می‌توان با اطمینان از این روش برای محاسبه بار کماتش بحرانی و فرکانس طبیعی ارتعاش اعضای غیرمنشوری ناهمگن نیز استفاده نمود و تاثیر توان ماده تابعی را بر رفتار ارتعاشی و پایداری اعضای مذکور مورد مطالعه قرار داد. در ادامه، مقدار بار کماتشی و فرکانس ارتعاشی با استفاده از روش عددی معرفی شده برای عضو غیرمنشوری مد نظر در شرایطی که از مواد مدرج تابعی با خصوصیات ارائه شده در رابطه (۱) ساخته شده است، به دست آمده است.

شکل ۴. تغییرات ضریب الاستیسیته حاکم بر مصالح همگن و مدرج تابعی با شاخص کسر حجمی متفاوت در مختصات محلی عضو

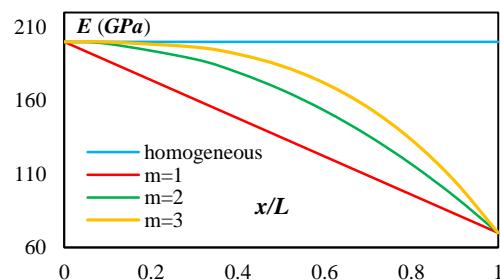


Fig. 4. Variation of Young's modulus along the beam axis with respect to different m values

لازم به ذکر است که بعثت اصول حاکم بر روش سری‌های توانی، یعنی تبدیل تمامی ضرایب متغیر موجود در معادله دیفرانسیل ارتعاش آزاد به یک چند جمله‌ای متناهی حاصل از بسط مک لورن؛ شاخص کسر حجمی ماده تابعی (m) بایستی برابر یک، دو و سه در نظر گرفته شود. تغییرات مدول الاستیسیته در امتداد عضو برای مصالح همگن (زیرکونیا) و مدرج تابعی با توان‌های مختلف در طول عضو در نمودارهای شکل (۴) نشان داده شده‌اند.

باتوجه به شکل (۴) کاملاً مشخص است که با افزایش شاخص

جدول ۱. روند همگرایی بار کماتشی و فرکانس ارتعاشی نرمالایز شده حاصل از روش عددی ارائه شده برای ستون با مقطع ثابت به مقدار دقیق

Boundary Conditions	Analysis	Number of terms of power series (PSM)					Ansys [28]
		N=10	N=20	N=30	N=40	N=50	
Hinged-Hinged	Vibration	9.673	9.869	9.869	9.869	9.869	9.798
	Stability	9.882	9.869	9.869	9.869	9.869	9.870
Fixed-Free	Vibration	3.507	3.516	3.516	3.516	3.516	3.504
	Stability	2.467	2.467	2.467	2.467	2.465	2.467
Fixed-Hinged	Vibration	13.676	15.418	15.418	15.418	15.418	15.148
	Stability	15.519	20.191	20.191	20.191	20.191	20.190

Table 1. Convergence of the proposed numerical technique in determination of the non-dimensional transverse frequencies and normalized buckling loads for homogenous uniform beam with different end conditions

جدول ۲. فرکانس طبیعی ارتعاش بی‌بعد شده تیر همگن دوسر مفصل با تغییرات نمای سطح مقطع

α	Vibration Mode	Number of terms of power series (PSM)					Exact Solution [25]
		N=10	N=20	N=30	N=40	N=50	
0	1	9.6730	9.8696	9.8696	9.8696	9.8696	9.8696
	2	-	39.4169	39.4784	39.4784	39.4784	39.4784
	3	-	149.0075	88.8107	88.8264	88.8264	88.8266
1	1	9.6532	9.7729	9.7729	9.7729	9.7729	9.7729
	2	-	39.6464	39.5704	39.5704	39.5704	39.5704
	3	-	77.7059	88.9738	88.9705	88.9705	88.9707

Table 2. Natural frequencies comparison of power series method and finite element results for simply supported beam

جدول ۳. مقایسه بار کماتش بحرانی بی‌بعد شده ستون تیر ماهیچه‌ای نمای همگن با شرایط مرزی متفاوت با مقدار دقیق

End Conditions	α	Number of terms of power series (PSM)					Exact Solution [26]
		N=10	N=20	N=30	N=40	N=50	
Hinged-Hinged	-0.1	9.085	9.386	9.386	9.386	9.386	9.380
	-0.5	8.191	7.635	7.634	7.634	7.6345	7.634
	-1.0	5.721	5.827	5.827	5.827	5.827	5.827
	-1.5	3.707	4.387	4.389	4.389	4.389	4.389
	-2.0	2.692	3.262	3.264	3.267	3.264	3.264
Fixed-Free	-0.1	2.397	2.395	2.395	2.395	2.395	2.394
	-0.5	2.097	2.112	2.112	2.112	2.112	2.110
	-1.0	1.798	1.782	1.782	1.782	1.782	1.782
	-1.5	1.719	1.480	1.480	1.480	1.480	1.480
	-2.0	1.8681	1.209	1.209	1.209	1.209	1.209
Fixed-Hinged	-0.1	17.894	19.202	19.202	19.202	19.202	19.200
	-0.5	14.230	15.639	15.640	15.640	15.640	15.640
	-1.0	8.899	11.998	11.988	11.988	11.988	11.990
	-1.5	5.752	9.044	9.098	9.098	9.098	9.098
	-2.0	4.972	6.794	6.840	6.840	6.840	6.839

Table 3. The effect of number of power series terms on precision of normalized critical axial load parameter for homogenous exponentially tapered beams with different boundary conditions

روش بسط سری‌های توانی، معادله دیفرانسیل حرکت حاکم بر ارتعاش آزاد تیر باریک شونده نمایی حل شد. در ادامه، با اعمال شرایط مرزی حاکم بر هر دهانه عضو فرم تقریبی تغییر شکل ارتعاشی حاصل شد و با استفاده از روش حل مسئله مقدار ویژه، فرکانس ارتعاشی عضو مدنظر تعیین شد. در پایان، با استفاده از تابع تغییر شکل حاصل شده از تحلیل ارتعاش آزاد و با استفاده از اصل کمینه نمودن انرژی پتانسیل سازه‌های پایدار، مقدار بار کماتشی

۶- نتیجه گیری

در این مقاله، از ترکیب روش سری‌های توانی و اصل کمینه انرژی پتانسیل، یک روش عددی نوین با هدف تحلیل پایداری و ارتعاشی اعضای ماهیچه‌ای با مقطع متغیر نمایی و از جنس مواد مدرج تابعی ارائه شده است. در مطالعه انجام شده، جنس تیر در امتداد طولی عضو بر اساس قانون توزیع توانی متغیر و در راستای ضخامت آن ثابت در نظر گرفته شده است. در ابتدا، با استفاده از

شده و آنچه با استفاده از روش‌های عددی و تحلیلی دیگر وجود دارد.

۷- پیوست ۱

$$w_0(\xi) = 1 + \frac{L^2 \omega^2 A_0 \rho_0}{24 E_0 I_0} \xi^4 - \frac{\xi^5}{120 E_0 I_0} (3L^2 \omega^2 A_0 \rho_0 \alpha - \omega^2 (L^2 A_0 \rho_1 + L^2 A_0 \rho_0 \alpha) + \frac{3L^2 \omega^2 A_0 E_1 \rho_0}{E_0}) + \dots$$

$$w_1(\xi) = \xi + \frac{L^2 \omega^2 A_0 \rho_0}{120 E_0 I_0} \xi^5 + \dots$$

$$w_2(\xi) = \xi^2 + \frac{\xi^4}{24 E_0 I_0} (2E_0 I_0 \alpha^2 + 4\alpha E_1 I_0 + 4E_2 I_0) - \frac{\xi^5}{120 E_0 I_0} (12E_3 I_0 - 3\alpha (1 + \frac{E_1}{E_0}) (2E_0 I_0 \alpha^2 + 4\alpha E_1 I_0 + 4E_2 I_0) + 12E_2 I_0 \alpha + 6\alpha^2 E_1 I_0 + 2E_0 I_0 \alpha^3) + \dots$$

$$w_3(\xi) = \xi^3 - \frac{\xi^4}{2E_0} (E_1 + \alpha E_0) - \frac{\xi^5}{120 E_0 I_0} (36E_2 I_0 - 36I_0 \alpha (E_1 + \alpha E_0) + \frac{36E_1 I_0}{E_0} (E_1 + \alpha E_0) + 36\alpha E_1 I_0 + 18\alpha^2 E_0 I_0) + \dots$$

References

- [1] Timoshenko S.P. & Gere J.M. 1961 Theory of Elastic Stability. McGraw Hill, New York.
- [2] Chen WF & Lui EM. 1987 Structural stability, theory and implementation. New York, Elsevier.
- [3] Bazant ZP & Cedolin L. 1991 Stability of structures. Elastic, Inelastic, Fracture and Damage Theories. New York, Dover Publications.
- [4] Frisch-Fay R. 1962 On the stability of a strut under uniformly distributed axial forces. *International Journal of Solids and Structures*, 2(3), 361-369.
- [5] Arbabi F. & Li F. 1991 Buckling of variable cross-section columns: integral equation approach. *Journal of Structural Engineering*, 117 (8), 2426-2441.
- [6] Siginer A. 1992 Buckling of columns of variable flexural rigidity. *Journal of Engineering Mechanics*, 118 (3): 543-640.
- [7] Raftoyiannis I. & Ermopoulos J. 2005 Stability of tapered and stepped steel columns with initial imperfections. *Engineering Structures*, 27, 1248-1257.
- [8] Saffari H., Rahgozar R. & Jahanshahi R. 2008 An efficient method for computation of effective length factor of columns in a steel gabled frame with tapered members. *Journal of Constructional Steel Research*, 64, 400-406.
- [9] Rahai, A. R. & Kazemi S. 2008 Buckling analysis of non-prismatic column based on modified vibration method. *Communications in Nonlinear Science and Numerical*

۸- منابع

تعیین شد.

شکل ۶: تغییرات بار کمناشی نرمال شده (P_{nor}) برحسب مقادیر متفاوت (α) برای ستون‌های همگن و ناهمگن با توان‌های متفاوت ماده تابعی (m), الف: یک سرگیردار، ب: دوسر مفصل، ج: یک سرگیردار-یک سر مفصل

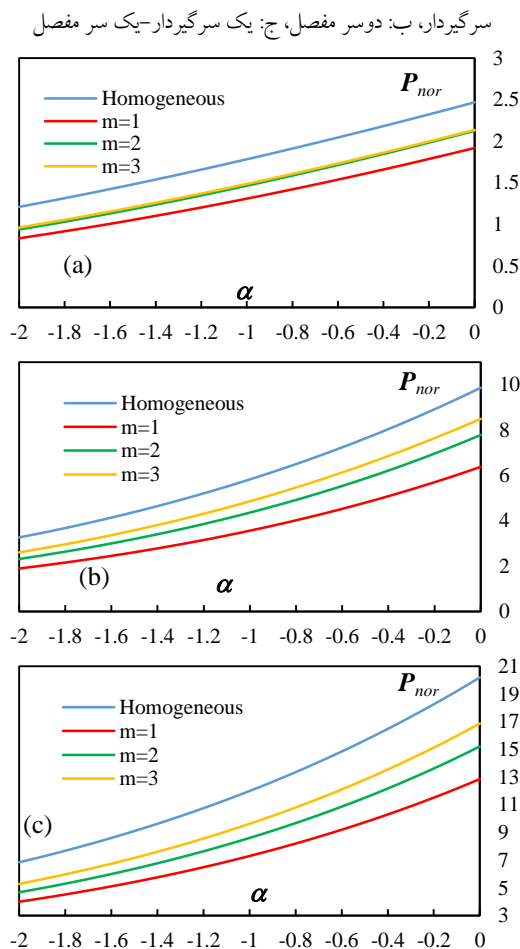


Fig. 6. Variations of the non-dimensional buckling load parameter (P_{nor}) of AFG exponentially tapered beam with respect to non-uniformity parameter (α): (a) Cantilever, (b) Simply supported, (c) Clamped-Pinned

در انتها تاثیر عواملی مختلفی همچون شرایط مرزی، توان ماده تابعی و شدت تغییرات سطح مقطع بر بار کمناشی و فرکانس ارتعاشی مورد بررسی قرار گرفته است. لازم به ذکر است که بعلاوه اصول حاکم بر روش سری‌های توانی، شاخص ناهمگنی ماده تابعی برابر یک، دو و سه در نظر گرفته شده است. پس از بررسی نتایج ارائه شده، ذکر موارد زیر ضروری است:

- تنها با به کار بردن حداقل ۳۰ جمله از بسط سری توانی، مقادیر بار کمناشی و فرکانس ارتعاشی برای اعضای منشوری را می‌توان با میزان خطای کمتر از ۱٪ به دست آورد.

- تطابق قابل قبولی میان نتایج محاسبه شده برای بارهای کمناشی بحرانی و فرکانس طبیعی ارتعاش با استفاده از روش عددی ارائه

- [19] Alshorbagy A.E., Eltaher M.A. & Mahmoud F.F. 2011 Free vibration characteristics of a functionally graded beam by finite element method. *Applied Mathematical Modelling*, **35**(1), 412-425.
- [20] Rajasekaran S. 2013 Free vibration of centrifugally stiffened axially functionally graded tapered Timoshenko beams using differential transformation and quadrature methods. *Applied Mathematical Modelling*, **37**, 4440-4463.
- [21] Singh K.V. & Li G. 2009 Buckling of functionally graded and elastically restrained non-uniform columns. *Composites Part B*, **40**(5), 393-403.
- [22] Shahba A. & Rajasekaran S. 2012 Free vibration and stability of tapered Euler–Bernoulli beams made of axially functionally graded materials. *Applied Mathematical Modelling*, **36**(7), 3094-3111.
- [23] Shahba A., Attarnejad R. & Hajilar S. 2013 A mechanical-based solution for axially functionally graded tapered Euler-Bernoulli beams. *Mechanics of Advanced Materials and Structures*, **20**, 696-707.
- [24] Nakamura T., Wang T. & Sampath S. 2000 Determination of properties of graded materials by inverse analysis and instrumented indentation. *Acta Mater*, **48**, 4293–306.
- [25] Zakeri M., Modarakar Haghghi A. & Attarnejad R. 2016 On the Analysis of FGM Beams: FEM with Innovative Element. *Journal of Solid Mechanics*, **8**(2), 348-364.
- [26] Wang C. M., Wang C.Y. & Reddy J.N. 2005 Exact Solutions for Buckling of Structural Members. *CRC Press* LLC, Florida.
- [27] MATLAB Version 7.6. MathWorks Inc, USA, 2008.
- [28] ANSYS, Version 5.4, Swanson Analysis System, Inc, 2007.
- Simulation*, **13**, 1721–1735.
- [10] Coşkun S. B. & Atay M. T. 2009 Determination of critical buckling load for elastic columns of constant and variable cross-sections using variational iteration method. *Computers and Mathematic with Applications*, **58**(11–12), 2260–2266.
- [11] Okay F., Atay M. T. & Coşkun S. B. 2010 Determination of buckling loads and mode shapes of a heavy vertical column under its own weight using the variational iteration method. *International Journal of Nonlinear Sciences and Numerical Simulation*, **11**(10), 851–857.
- [12] Eisenberger M. & Clastornik J. 1987 Beams on variable two-parameter elastic foundation. *Journal of Engineering Mechanics*, **113**(10), 1454-1466.
- [13] Kim N-II, Fu C. C. & Kim M-Y. 2007 Stiffness matrices for flexural–torsional/lateral buckling and vibration analysis of thin-walled beam. *Journal of Sound and Vibration*, **299**, 739–756.
- [14] Al-Sadder S. Z. 2004 Exact expression for stability functions of a general non-prismatic beam-column member. *Journal of Constructional Steel Research*, **60**, 1561–1584.
- [15] Asgarian B., Soltani M. & Mohri F. 2013 Lateral-torsional buckling of tapered thin-walled beams with arbitrary cross-sections. *Thin-Walled Structures*, **62**, 96–108.
- [16] Soltani M., Asgarian B. & Mohri F. 2014 Finite element method for stability and free vibration analyses of non-prismatic thin-walled beams. *Thin-Walled Structures*, **82**, 245-261.
- [17] Tong X. & Tabarrok B. 1995 Vibration analysis of Timoshenko beams with non-homogeneity and varying cross-section. *Journal of Sound and Vibration*, **186**, 821–35.
- [18] Elishakoff I. & Guede Z. 2004 Analytical polynomial solutions for vibrating axially graded beams. *Mechanics of Advanced Materials and Structures*, **11**(6), 517-533.

Buckling analysis of axially functionally graded columns with exponentially varying cross-section

M. Soltani^{1*} and B. Asgarian

1- Assistant Prof., Department of civil engineering, University of Kashan

2-Professor, Earthquake Eng. Dept., Faculty of Civil Eng., K.N. Toosi University of Technology

*msoltani@kashanu.ac.ir

Abstract:

Owing to efficiency, rising stability of structures, reduction in structural weight and cost, and the improvements in fabrication process, tapered beams are extensively adopted in civil and mechanical structures. Furthermore, the use of functionally graded (FG) materials has been increasing in many mechanical components due to their conspicuous characteristics such as high strength, thermal resistance and optimal distribution of weight. In the present paper, a numerical model combining the power series expansions and the energy method is adopted for stability and free vibration analyses of axially functionally graded (FG) columns with exponentially varying cross-section. The main purpose of this paper is also calculating the critical buckling loads and natural frequencies concurrently for AFG members with exponentially-varying geometrical properties. For this, a mixed power series expansions and the principle of stationary total potential energy as a first endeavor is presented. In this study, the material properties of the non-prismatic beam including Young's modulus of elasticity and density of material are assumed to be graded smoothly along the beam axis by a power-law distribution of volume fractions of metal and ceramic. Moreover, the cross-sectional area and moment of inertia vary exponentially over the member's length. In this regard, the power series approximation is applied to solve the fourth order differential equation of motion, since in the presence of variable cross-section and axially non-homogeneous material, stiffness quantities are not constant. All geometrical and material properties and displacement component are developed based on power series of an identified degree. The natural frequencies of the AFG beam with variable cross-section are derived by imposing the boundary conditions and solving the eigenvalue problem. The explicit expression of vibrational shape function is then derived based on this rigorous numerical method. The vibrational mode shapes of an elastic member are similar to the buckling ones. Therefore, the obtained deflected shapes of the considered non-prismatic beams can be used as deformation shape of member for the linear buckling analysis. The critical buckling load of exponentially tapered beam made of AFGMs can be then estimated by adopting the principle of stationary total potential energy. According to the steps mentioned above, for measuring the accuracy and competency of the proposed numerical procedure, two numerical examples including axially non-homogeneous and homogeneous column with non-uniform section are represented. Numerical results of the critical buckling loads and natural frequencies for various boundary conditions, different gradient index and cross-section variation are represented. Due to lack of similar research for the stability and free vibration analyses of elastic AFG beams with exponential variation of the cross-sectional area and moment of inertia, outcomes of homogeneous members are compared with the results presented in other available numerical and analytical references and those related to tapered beams with material variation are then reported. The accuracy of the method is then remarked. This method has many positive points consisting of efficiency, accuracy and simplicity contrasted with more complex numerical methods. It has to be noticed that the present novel numerical technique can be applied to determine the critical buckling loads and natural frequencies of axially functionally graded (FG) prismatic beams as well as non-prismatic ones.

Keywords: Stability Analysis, Axially functionally graded material, Exponentially tapered beam, Power series expansions, Principle of stationary total potential energy