

# مدلسازی عددی جریان آب زیرزمینی در شرایط ماندگار با استفاده از روش ایزوژئومتریک (IGA)

مهدیه کلاتری<sup>۱</sup>، ابوالفضل اکبرپور<sup>۲\*</sup>، محسن خطیبی نیا<sup>۳</sup>

- ۱- دانشجوی کارشناسی ارشد رشته مهندسی و مدیریت منابع آب، دانشگاه بیرجند.
- ۲- دانشیار گروه مهندسی عمران، دانشگاه بیرجند.
- ۳- استادیار گروه مهندسی عمران، دانشگاه بیرجند.

\*Akbarpour@birjand.ac.ir

تاریخ پذیرش: [۹۶/۱۲/۹]

تاریخ دریافت: [۹۵/۱۱/۶]

## چکیده

جریان آب زیرزمینی توسط مدل آب زیرزمینی به وسیله مجموعه‌ای از معادلات حاکم که بیانگر فرآیندهای فیزیکی رخ داده در سیستم هستند، شبیه‌سازی می‌شود. در این مدل‌ها برای کل سیستم، یک معادله دیفرانسیل در نظر گرفته می‌شود و توسط روش‌های عددی متعددی همچون تفاضل محدود، روش اجزای محدود و روش بدون مش حل می‌شود. در این پژوهش معادله جریان آب زیرزمینی در شرایط ماندگار در آبخوان آزاد مورد مطالعه قرار گرفت. برای حل این معادله از روش ایزوژئومتریک بر اساس توابع پایه نریز (NURBS) و بی‌اسپلاین استفاده شد. این روش برای آبخوان دشت بیرجند حل و سطح آب زیرزمینی محاسبه و ترسیم شد. نتایج نشان داد استفاده از این روش حجم محاسبات را به طور چشمگیری کاهش و دقت آن به دلیل استفاده از توابع پایه نریز محاسبه شده بر اساس هندسه دقیق، بالا است، به طوری- که میانگین خطای نسبی و خطای جذر میانگین مربعات به ترتیب  $0/000256$  و  $0/459$  بدست آمد.

**واژگان کلیدی:** شرایط ماندگار، آبخوان آزاد، توابع پایه نریز، بی اسپلاین.

## ۱- مقدمه

کامپیوترها و این روش‌ها می‌توان معادلات بسیار پیچیده در حوزه‌های متنوع علوم را حل نمود. برخی از روش‌های عددی معروف عبارتند از روش تفاضل محدود، روش اجزای محدود، روش نقاط محدود و روش‌های جدیدتر مانند روش‌های بدون مش که این روش‌ها هر یک در پی دیگری آمده و به دنبال ایجاد کارایی، دقت، سرعت بالاتر و ایجاد امکاناتی جدیدتر برای حل مسائل و رفع مشکلات روش‌های قبلی بوده‌اند [1]. از پرکاربردترین این روش‌ها روش اجزای محدود است که روشی

حل معادلات دیفرانسیل حاکم بر رفتار یک سیستم از مهم‌ترین مسائلی است که همواره در زمینه‌های علوم و مهندسی مورد بحث قرار می‌گیرد. از آنجا که تنها موارد معدودی از این معادلات را می‌توان مستقیماً با روش‌های تحلیلی حل نمود، روش‌های عددی زیادی در چند دهه اخیر برای حل چنین معادلاتی پیشنهاد شده است. روش‌های عددی با ظهور کامپیوترها رشد چشمگیری داشته‌اند و امروزه به کمک

آنالیز نسبت به توابع پایه چند جمله‌ای قطعه قطعه مرسوم به راحتی تعمیم داده می‌شوند و اصلاح می‌شود و ضمناً قدرت بی‌نظیری را در میان یک مجموعه وسیع از برنامه‌های کاربردی فراهم کرده‌اند. این قدرت یعنی ترکیب توانایی‌های هندسی و توانایی‌های تحلیلی در بطن آنالیز ایزوژئومتریک است. به عبارت دیگر ویژگی عمده این روش توانایی حفظ توصیف دقیق یکسانی از هندسه دامنه محاسباتی در سراسر فرآیند تجزیه و تحلیل است [4].

از توابع نرَبز می‌توان به طور وسیع در طراحی گرافیکی، علوم مهندسی و مکانیک محاسباتی استفاده کرد. ونگ و همکاران کد آموزشی متلب برای حل مسائل نوع انتشار بیضوی مانند معادله پواسون ارائه کردند [5]. همچنین فالکو و همکاران یک ابزار نرم‌افزاری برای استفاده از روش آنالیز ایزوژئومتریک برای حل معادله دو بعدی پواسون تهیه نمودند [4]. قرشی و همکاران از مفاهیم روش اجزای محدود توسعه یافته برای تعمیم روش ایزوژئومتریک برای حل مسائل دو بعدی ترک در محیط همسانگرد استفاده و روابط را بازنویسی کردند. همچنین برای مشخص نمودن کارایی روش پیشنهادی دو مسئله الاستیک حاوی ترک به کمک روش ایزوژئومتریک و هم‌چنین روش اجزای محدود توسعه یافته مورد تحلیل قرار دادند [6]. حسینی و همکاران برای ایجاد سطح دقیق روش جدیدی را معرفی کردند. این روش قادر است به سادگی و پس از انجام مجموعه‌ای از مراحل کوتاه، توزیع مناسب نقاط داده و بردار گرهی مشترک را برای ایجاد سطح بی‌اسپلاین معرفی کند [7]. نوون و همکاران روش ایزوژئومتریک برای آنالیز مسائل جریان غیر اشباع استفاده کردند. این روش با استفاده از توابع پایه نرَبز دقت بالاتری در دو حالت خطی و غیرخطی را بدنبال داشت. ویژگی‌ها و مزایای این روش با حل چندین مسئله با خصوصیات مواد مختلف نشان داده شد [8]. بلکه و همکاران به مطالعه جریان آب زیرزمینی در حالت ماندگار با استفاده از روش ایزوژئومتریک با توابع بی‌اسپلاین بهبود یافته LR در اطراف گوشه غیرقابل نفوذ، در اطراف دیوار آب بند و در یک محیط ناهمگن پرداختند نتایج نشان داد نرخ همگرایی در مسائل، با افزایش درجه چند جمله‌ای افزایش می‌یابد. هم

عددی برای حل تقریبی بسیاری از مسائل مهندسی است. این روش یک مسئله با بینهایت درجه آزادی را به یک مسئله با درجات آزادی محدود تبدیل کرده تا بدین وسیله حل آن ساده تر شود. در روش اجزای محدود از توابع پایه درونیاب لاگرانژ و هرمیت به صورت گسترده‌ای استفاده شده است که تقریب سازی فضای حل و هندسه با این توابع صورت می‌گیرد. اما این روش نمی‌تواند هندسه دقیق یک مدل فیزیکی را برداشت نماید [2].

روش تحلیل هم‌هندسی<sup>1</sup> در سال ۲۰۰۵ توسط هیوز و همکارانش برای رفع شکاف موجود بین دنیای تحلیل اجزای محدود و مدل‌سازی کامپیوتری معرفی شد [3]. نام این روش برگرفته از مفهوم ایزوپارامتریک در روش المان محدود است. توابع پایه به کار رفته در توصیف دقیق هندسه در تقریب میدان حل نیز به کار گرفته می‌شوند از این رو این روش تحلیل ایزوژئومتریک<sup>۲</sup> نامیده می‌شود. فناوری‌های محاسباتی زیادی وجود دارد که می‌توان از آنها به عنوان پایه در تحلیل ایزوژئومتریک استفاده کرد. انتخاب بی‌اسپلاین<sup>۳</sup> و نرَبز<sup>۴</sup> به عنوان پایه اولیه به دلیل پرکاربرد بودن این فناوری‌های هندسه محاسباتی در طراحی مهندسی است. از پیشگامان بی‌اسپلاین می‌توان از تلاش‌های یک مهندس فرانسوی به نام، پیر بزیه<sup>۵</sup> در توسعه و معرفی منحنی‌ها و سطوح بزیه در دهه ۱۹۶۰ و اوایل دهه ۱۹۷۰ نام برد. توابع پایه بی‌اسپلاین بر اساس الگوریتم دی-بور<sup>۶</sup> طی یک رابطه بازگشتی ساخته شده است. الگوریتم دی-بور نیز یک الگوریتم پایدار عددی است که در تعیین منحنی‌های اسپلاین در فرم بی‌اسپلاین به کار می‌رود. یک منحنی بی‌اسپلاین را می‌توان با تعیین درجه (مرتبه)، نقاط کنترلی<sup>۷</sup> و بردار گرهی<sup>۸</sup> بدست آورد. توابع نرَبز نیز حالت تعمیم یافته بی‌اسپلاین‌ها هستند که تفاوت اصلی آن در نسبت دادن وزن به نقاط کنترلی است. نرَبزها به عنوان یک پایه برای

- 1 Isogeometric Analysis Method
- 2 Isogeometric Analysis
- 3 B-Spline
- 4 NURBS
- 5 Bezier
- 6 D-Boor C.R.
- 7 Control Point
- 8 Knot Vector

روش ایزوژئومتری با سطح آب زیرزمینی محاسبه شده توسط روش تفاضل محدود و سطح آب زیرزمینی مشاهده شده مقایسه شد.

## ۲- مواد و روش ها

### ۲-۱- منطقه مورد مطالعه

آبخوان دشت بیرجند در محدوده عرض جغرافیایی  $32^{\circ}34'$  تا  $33^{\circ}8'$  شمالی و طول جغرافیایی  $58^{\circ}41'$  تا  $59^{\circ}44'$  شرقی در استان خراسان جنوبی قرار گرفته است. شکل (۱) موقعیت آبخوان دشت بیرجند را نمایش می دهد.

شکل ۱- موقعیت جغرافیایی دشت بیرجند (بدون مقیاس)

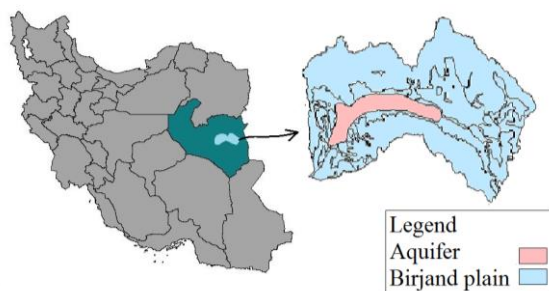


FIG. 1 Geographical location of Birjand Plain (without scale)

مساحت آبخوان ۲۶۵ کیلومتر مربع و متوسط ضخامت اشباع آن ۳۰ متر است. در سطح این آبخوان ۱۹۰ چاه برداشت و ۱۰ چاه مشاهده شده است که موقعیت آنها در شکل (۲) قابل نمایش است. وسعت کل حوضه آبریز حدود  $3408$  کیلومتر مربع است که  $1383$  کیلومتر مربع آن دشت و مابقی ارتفاعات است. دشت بیرجند جزو مناطق خشک ایران محسوب می شود [18].

شکل ۲. هندسه آبخوان و شرایط مرزی (بدون مقیاس)

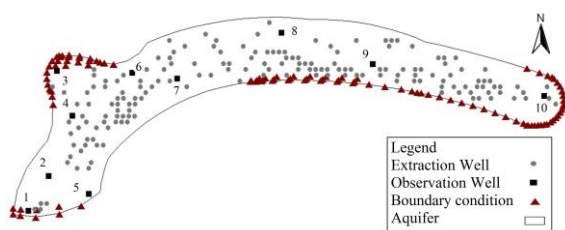


Fig. 2. Aquifer geometry and boundary condition (without scale)

چنین در مسائل جریان آب زیرزمینی با مقیاس بزرگ اصلاح-های محلی مفیدتر است [9]. شاهرخ آبادی و همکاران جریان اشباع در محیط متخلخل را توسط روش ایزوژئومتری و توابع پایه نریز مورد مطالعه قرار دادند. نتایج نشان داد که این روش قادر به شبیه سازی تغییرات فشار مغذی خاک است [10].

در سال های اخیر مطالعات متعددی روی آبخوان بیرجند صورت گرفته است. صادقی و همکاران در سال ۲۰۱۶ برای اولین بار نرخ پمپاژ دبی در چاه های آبخوان را با استفاده از الگوریتم های بهینه سازی چند هدفه بهینه نمودند [11]. آنها همچنین در سال ۲۰۱۵ با استفاده از الگوریتم بهینه سازی پارامترهای هیدرودینامیکی آبخوان دشت بیرجند را بهینه سازی نمودند [12]. سعیدی و همکاران به منظور مدیریت بهره برداری از سفره آب زیرزمینی یک مدل شبیه ساز- بهینه ساز آب زیرزمینی برای آبخوان بیرجند ارائه کردند [13]. همراز و همکاران در سال 2015 به مدلسازی آبخوان بیرجند بر اساس مدل MODFLOW در نرم افزار متلب و بررسی پارامتر عدم قطعیت به روش GLUE پرداختند [14]. سعیدی و همکاران در سال ۲۰۱۵ سطح آب زیرزمینی آبخوان دشت بیرجند را با استفاده از کد منبع باز محاسبه کردند. نتایج نشان داد ارتفاع سطح آب زیرزمینی از شرق به غرب و جنوب غربی کاهش می یابد [15]. قوچانیان و همکاران نیز در سال 2013 سطح آب زیرزمینی این آبخوان را با استفاده از مدل های MODFLOW و WEAP مدلسازی نمودند [16]. محتشمی و همکاران در سال 2017 به مدلسازی جریان آب زیرزمینی توسط روش بدون شبکه محلی پتروو-گالریکین در شرایط ماندگار در آبخوان دشت بیرجند پرداختند [17].

هدف از این پژوهش مدلسازی جریان آب زیرزمینی در شرایط ماندگار در آبخوان آزاد دشت بیرجند با استفاده از روش آنالیز ایزوژئومتری است که تاکنون در این زمینه پژوهش هایی انجام نشده است. بدین منظور ابتدا فرم ضعیف معادله مورد نظر ایجاد شد و سپس با استفاده از هندسه آبخوان مورد نظر، توابع پایه بی اسپلاین و نریز و مشتقات آن محاسبه و در آنالیز ایزوژئومتری مورد استفاده قرار گرفت. در انتها پس از اعمال شرایط مرزی مدل سطح آب زیرزمینی بدست آمده توسط

۲-۲- تحلیل ایزوژئومتریکی

منحنی نریز،  $C(\xi, \eta)$ ، از درجه  $p$  ترکیبی خطی از توابع پایه نریز است، به طوری که ضرایب آن مجموعه ای از نقاط کنترل داده شده است [19]:

$$C(\xi) = \sum_{i=1}^n R_{i,p}(\xi) P_i \quad (1)$$

که  $n$  تعداد نقاط کنترل،  $P_i$  مختصات نقاط کنترل و  $R_{i,p}(\xi)$  تابع پایه نریز است و به صورت زیر تعیین می شود:

$$R_{i,p}(\xi) = \frac{N_{i,p}(\xi)w_i}{\sum_{i=1}^n N_{i,p}(\xi)w_i} \quad (2)$$

که  $w_{i,j}$  وزن غیر صفر اختصاص داده شده به  $i$  و  $j$  امین نقطه کنترل،  $N_{i,p}(\xi)$  نیز تابع پایه بی اسپلاین تک متغیره از درجه  $p$  در جهت  $\xi$  است. برای ساخت مجموعه ای از توابع پایه بی اسپلاین از درجه  $p$  بردار گرهی  $K(\xi)$  با توالی غیر کاهششی از اعداد حقیقی در فضای پارامتری،  $\xi \in [0,1]$ ، تعریف می شود به طوری که:

$$K(\xi) = \{\xi_1 = 0, \dots, \xi_i, \dots, \xi_{n+p+1} = 1\} \quad (3)$$

که  $\xi_i$   $i$  امین گره نامیده می شود.

اگر گره ها در ابتدا و انتهای بردار گرهی  $p+1$  بار تکرار شوند، بردار گرهی باز نامیده می شود. در آنالیز جهت ارضای ویژگی دلتای کرونکر در نقاط مرزی و اعمال مستقیم شرایط مرزی ضروری در این نقاط، عموماً بردار گرهی باز استفاده می شود [8]. با داشتن بردار گرهی، تابع پایه بی اسپلاین تک متغیره  $N_{i,p}(\xi)$  توسط رابطه بازگشتی کاکس-دی بور محاسبه می شود:

$$N_{i,0}(\xi) = \begin{cases} 1, & \xi_i \leq \xi < \xi_{i+1} \\ 0, & \text{otherwise} \end{cases} \quad \text{for } p = 0 \quad (4-1)$$

$$N_{i,0}(\xi) = \frac{\xi - \xi_i}{\xi_{i+p} - \xi_i} N_{i,p-1}(\xi) + \frac{\xi_{i+p+1} - \xi}{\xi_{i+p+1} - \xi_{i+1}} N_{i+1,p-1}(\xi) \quad \text{for } p \geq 1 \quad (4-2)$$

تابع پایه بی اسپلاین ساخته شده از بردار گرهی باز در هر دو انتهای فضای پارامتری دارای خاصیت درونیایی است. مجموعه ای از توابع پایه بی اسپلاین با خاصیت درونیایی در انتهای فضای پارامتری در شکل (۳) قابل مشاهده است [8].

شکل ۳. توابع پایه بی اسپلاین ساخته شده با بردار گرهی باز  $K(\xi) =$

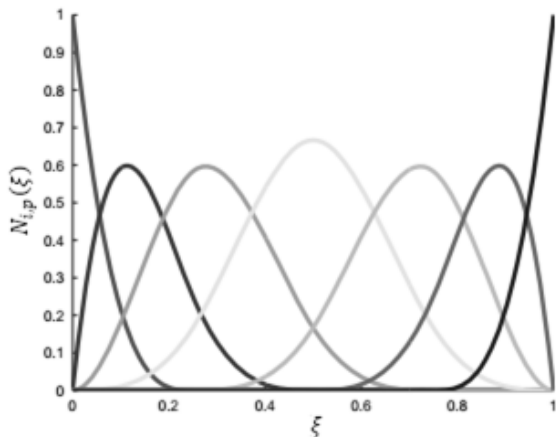


fig. 3. B\_spline function constructed with open knot vector  $K(\xi) =$

سطح نریز  $S(\xi, \eta)$  از درجه  $p$  در جهت  $\xi$  و در جهت  $q$  در جهت  $\eta$  به صورت زیر بیان می شود:

$$S(\xi, \eta) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m R_{i,j}^{p,q}(\xi, \eta) P_{i,j} \quad (5)$$

که  $P_{i,j}$  مختصات نقاط کنترل در دو جهت و  $R_{i,j}^{p,q}(\xi, \eta)$  توابع پایه دو متغیره نریز هستند و به صورت زیر تعریف می شوند:

$$R_{i,j}^{p,q}(\xi, \eta) = \frac{N_{i,p}(\xi)M_{j,q}(\eta)w_{i,j}}{\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m N_{i,p}(\xi)M_{j,q}(\eta)w_{i,j}} \quad (6)$$

که  $w_{i,j}$  وزن دوبعدی،  $N_{i,p}(\xi)$  و  $M_{j,q}(\eta)$  به ترتیب توابع پایه بی اسپلاین از درجه  $p$  در جهت  $\xi$  و از درجه  $q$  در جهت  $\eta$  است.  $M_{j,q}(\eta)$  از فرمول های (۴-۱ و ۴-۲) با یک بردار گرهی  $K(\eta)$  که ویژگی هایی شبیه بردار گرهی  $K(\xi)$  دارد، پیروی می کند.

مشتقات توابع پایه بی اسپلاین را می توان با استفاده از توابع پایه بی اسپلاین درجه پایین تر بیان نمود که البته به دلیل بازگشتی بودن روابط (۴-۱ و ۴-۲) بدیهی به نظر می رسد.

مشتق درجه  $i$  ام برای یک چند جمله ای از درجه  $p$  و بردار گرهی  $K(\xi)$  می توان به صورت زیر نشان داد:

$$\frac{d}{d\xi} N_{i,p}(\xi) = \frac{p}{\xi_{i+p} - \xi_i} N_{i,p-1}(\xi) - \frac{p}{\xi_{i+p+1} - \xi_{i+1}} N_{i+1,p-1}(\xi) \quad (7)$$

۲-۳- گسسته سازی معادلات حاکم بر جریان دو بعدی

۲-۳-۱- روش ایزوژئومتریک

معادله مستقل از زمان حاکم بر جریان در منطقه ایزوتروپ دو بعدی  $\Omega$  با مرز کلی  $\Gamma \equiv \partial\Omega$  به صورت زیر در نظر گرفته می شود:

$$\frac{\partial}{\partial x}(k_x H \frac{\partial H}{\partial x}) + \frac{\partial}{\partial y}(k_y H \frac{\partial H}{\partial y}) + \frac{\partial}{\partial z}(k_z H \frac{\partial H}{\partial z}) = R \quad (10)$$

که  $k_x, k_y, k_z$  مولفه های تانسور هدایت هیدرولیکی و  $H$  بار پتانسیل در هر نقطه  $(x, y, z)$  و  $R$  مولفه تغذیه کننده و یا تخلیه کننده (به ترتیب با علامت مثبت یا منفی) آبخوان است. در آبخوان های آزاد ضخامت لایه اشباع با تغییر ارتفاع سطح آب زیرزمینی تغییر می کند. برای حل معادله جریان در این حالت دوپویی در سال ۱۸۶۳ فرضیاتی را در نظر گرفت که عبارتند از [21]:

الف) جریان افقی است.

ب) شیب هیدرولیکی مساوی شیب سطح آزاد است.

معادله ای که بر اساس فرضیات دوپویی و معادله پیوستگی در شرایط وجود جریان دوبعدی و ماندگار استخراج گردیده است عبارت است از:

$$\frac{\partial}{\partial x}(k_x H \frac{\partial H}{\partial x}) + \frac{\partial}{\partial y}(k_y H \frac{\partial H}{\partial y}) = R \quad (11)$$

با در نظر گرفتن همگن  $(k_x = k_y)$  معادله به فرم

زیر ساده می شود:

$$k \left[ \left( \frac{\partial^2 H^2}{\partial x^2} \right) + \left( \frac{\partial^2 H^2}{\partial y^2} \right) \right] = 2R \quad (12)$$

به منظور گسسته سازی معادله (۱۲) به روش حداقل باقیمانده های وزنی اجزاء محدود به صورت زیر عمل می شود:

$$\int_{\Omega} W_i k \left( \frac{\partial^2 H^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 H^2}{\partial y^2} \right) d\Omega = 2 \int_{\Omega} W_i R d\Omega \quad (13)$$

با استفاده از انتگرال گیری جزء به جزء معادله به صورت

زیر ساده می شود:

$$k \left[ \int_{\Gamma} W_i \frac{\partial H^2}{\partial x} d\Gamma - \int_{\Omega} \frac{\partial W_i}{\partial x} \times \frac{\partial H^2}{\partial x} d\Omega + \int_{\Gamma} W_i \frac{\partial H^2}{\partial y} d\Gamma - \int_{\Omega} \frac{\partial W_i}{\partial y} \times \frac{\partial H^2}{\partial y} d\Omega \right] = 2 \int_{\Omega} W_i R d\Omega \quad (14)$$

در آبخوان دشت بیرجند جریان نرمال وارد یا خارج شده از مرز آبخوان (شرایط مرزی نیومان) صفر است پس معادله به صورت زیر تبدیل می شود:

با مشتق گیری پی در پی از هر سمت رابطه (۷) می توان آن را

برای مشتقات بالاتر به صورت زیر تعمیم داد:

$$\frac{d^k}{d\xi^k} N_{i,p}(\xi) = \frac{p}{\xi_{i+p} - \xi_i} \left( \frac{d^{k-1}}{d\xi^{k-1}} N_{i,p-1}(\xi) \right) - \frac{p}{\xi_{i+p+1} - \xi_{i+1}} \left( \frac{d^{k-1}}{d\xi^{k-1}} N_{i+1,p-1}(\xi) \right) \quad (8)$$

در حضور نقاط تکراری مخرج کسر بعضی از ضرایب فوق

ممکن است صفر شود. هر زمان که این اتفاق افتاد مقدار این ضرایب

کلا صفر در نظر گرفته می شوند [20]. خصوصیات توابع پایه نریز می-

تواند به صورت زیر خلاصه شود:

$$\sum_{i=1}^n R_{i,p}(\xi) = 1 \text{؛ واحد بودن؛}$$

$$R_{i,p}(\xi) \geq 0 \text{؛ نامنفی بودن،}$$

- توابع پایه درجه  $p - m_i$  بار قابلیت مشتق پذیری

پیوسته روی گره  $\xi_i$  دارند که  $m_i$  تعداد تکرار گره  $\xi_i$  در بردار

گرهی می باشد.

- پشتیبانی محلی: این خاصیت نشان می دهد که پشتیبانی  $R_{i,p}(\xi)$

در بازه  $[\xi_i, \xi_{i+p+1}]$  است. در سه بعدی، تعداد توابع پایه غیر صفر برای

یک بازه گرهی خاص  $(p+1) \times (q+1) \times (r+1)$  است. بنابراین

تعداد کل نقاط کنترل هر المان برابر  $n_{en} = (p+1) \times (q+1) \times (r+1)$

است [8].

افزودن گره یکی از مهم ترین الگوریتم های بی اسپلین

است. برخی از کاربردهای آن عبارتند از:

- محاسبه نقاط و مشتقاتش روی منحنی و سطح

- تقسیم بندی منحنی و سطح

- اضافه کردن نقاط کنترل به منظور افزایش انعطاف پذیری در

سطح کنترل (طراحی دقیق تر و جذاب) [20].

بدین منظور اگر خواسته شود گره  $\xi \in [K_k, K_{k+1}]$  به  $K(\xi)$

اضافه شود،  $i$  امین نقطه کنترل جدید در  $\Gamma$  امین مرحله افزودن گره با

$Q_{i,r}$  نمایش داده و طبق رابطه زیر محاسبه می شود:

$$Q_{i,r} = \alpha_i Q_{i,r-1} + (1 - \alpha_i) Q_{i-1,r-1} \quad (9-1)$$

$$\alpha_i = \begin{cases} 0 & i \leq k - p + r - 1 \\ \frac{\xi - \xi_i}{\xi_{i+p-r+1} - \xi_i}, & k - p + r \leq i \leq k - s \\ 1 & i \geq k - s + 1 \end{cases} \quad (9-2)$$

که  $k$  اندیس بازه دربرگیرنده گره اضافه شده،  $p$  درجه توابع پایه،  $s$

تعداد تکرار گره اضافه شده در بردار گرهی است.

در واقع محاسبه تراز آب در هر نقطه از شبکه نیاز به تراز آب در چهار نقطه اطراف آن دارد.

۴-۲- درستی آزمایشی روش ایزوژئومتریک

به منظور ارزیابی روش ایزوژئومتریک در مدلسازی جریان آب زیرزمینی، آبخوان فرضی محصور در شرایط دو بعدی در حالت ماندگار در نظر گرفته شد [23]. هندسه فرضی آبخوان و شرایط مرزی مسئله که از نوع دریشلت است، در شکل (۴) قابل مشاهده است.

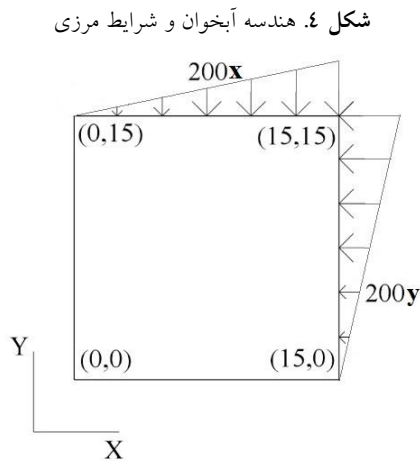


fig. 4. Aquifer geometry and boundary condition

جدول ۱. سطح آب زیرزمینی بدست آمده از روش ایزوژئومتریک

Exact solution	$H_{FDM}(m)$	$H_{IGA}(m)$	Y	X	Num
0	0	0	0	0	1
0	0	0	5	0	2
0	0	0	10	0	3
0	0	0	15	0	4
0	0	0	0	5	5
333.3	333.4	333.3	5	5	6
666.6	666.7	666.7	10	5	7
1000	1000	1000	15	5	8
0	0	0	0	10	9
666.6	666.7	666.7	5	10	10
1333.3	1333.4	1333.3	10	10	11
2000	2000	2000	15	10	12
0	0	0	0	15	13
1000	1000	1000	5	15	14
2000	2000	2000	10	15	15
3000	3000	3000	15	15	16

Table 1. Groundwater level by isogeometric method

$$-k \left[ \int_{\Omega} \frac{\partial W_i}{\partial x} \times \frac{\partial H^2}{\partial x} d\Omega + \int_{\Omega} \frac{\partial W_i}{\partial y} \times \frac{\partial H^2}{\partial y} d\Omega \right] = 2 \int_{\Omega} W_i R d\Omega \quad (15)$$

با جایگذاری معادله  $\frac{\partial H^2}{\partial x} = 2H \frac{\partial H}{\partial x}$  در رابطه (۱۵) داریم:

$$-2k \left[ \int_{\Omega} \frac{\partial W_i}{\partial x} H \frac{\partial H}{\partial x} d\Omega + \int_{\Omega} \frac{\partial W_i}{\partial y} H \frac{\partial H}{\partial y} d\Omega \right] = 2 \int_{\Omega} W_i R d\Omega \quad (16)$$

تخمین عددی تابع  $H$  ترکیبی خطی به صورت زیر است:

$$H = \sum_{i=1}^n H_i \varphi_i(x, y) \quad (17)$$

که همان توابع پایه هستند. پس از جایگذاری معادله (۱۷) در فرم ضعیف معادله (۱۶) و با در نظر گرفتن  $W_i = \varphi_i$  برای  $i=1, \dots, n$  سیستم خطی زیر حاصل می شود:

$$k \left[ \int_{\Gamma} \frac{\partial \varphi_i}{\partial x} \times \frac{\partial \varphi_i}{\partial x} d\Omega + \int_{\Omega} \frac{\partial \varphi_i}{\partial y} \times \frac{\partial \varphi_i}{\partial y} d\Omega \right] H^2 = \int_{\Omega} \varphi_i R d\Omega \quad (18)$$

که ماتریس سختی  $K$ ، بردار  $f$  و بردار مجهولات به

ترتیب مطابق روابط زیر تعریف می شوند:

$$[k] = \int_{\Gamma} \frac{\partial \varphi_i}{\partial x} \times \frac{\partial \varphi_i}{\partial x} d\Omega + \int_{\Omega} \frac{\partial \varphi_i}{\partial y} \times \frac{\partial \varphi_i}{\partial y} d\Omega \quad (19)$$

$$[f] = \int_{\Omega} \varphi_i R d\Omega = -Q_K - \int_{\Omega} \varphi_i q d\Omega \quad (20)$$

$$\{d\} = \{H^2\} \quad (21)$$

ماتریس بار یا  $f$  نشان دهنده میزان تخلیه و تغذیه در آبخوان می باشد. این تخلیه و تغذیه، دبی های برداشتی از سفره و یا ورودی به سفره را که به صورت گسترده و متمرکز هستند را نشان می دهد. که  $Q_K$  دبی متمرکز چاه  $k$  ام و  $q$  دبی گسترده همچون بارندگی یا تبخیر را نشان می دهد.

۲-۳-۲- روش تفاضل محدود

با قراردادن  $v = H^2$  معادله (۱۲) به شکل زیر نوشته می شود که یک معادله غیر خطی است [22]:

$$K \left[ \left( \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \right) + \left( \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right) \right] = 2R \quad (22)$$

بنابراین معادله (۲۲) به شکل زیر گسسته سازی می شود:

$$\frac{k}{2} \left[ \left( \frac{v_{i-1,j} - 2v_{i,j} + v_{i+1,j}}{(\Delta x)^2} \right) + \left( \frac{v_{i,j-1} - 2v_{i,j} + v_{i,j+1}}{(\Delta y)^2} \right) \right] = R \quad (23)$$

اگر  $\Delta x = \Delta y = a$  فرض شود معادله (۲۳) به شکل زیر

نوشته می شود:

$$v_{i,j} = \frac{v_{i-1,j} + v_{i+1,j} + v_{i,j-1} + v_{i,j+1}}{4} \pm \frac{a^2 R}{2} \quad (24)$$

گروه استفاده نمود. بردار گرهی جدید در هر دو جهت تعریف و نقاط کنترل جدید توسط معادله (۹) محاسبه شد. نقاط کنترلی نهایی و المان‌های ایجاد شده در شکل (۶-ب) قابل نمایش است. با اضافه کردن گره‌های جدید، تعداد نقاط کنترلی از ۱۱۲ نقطه به ۱۲۷۴ نقطه و تعداد المان‌ها از ۱۵ به ۸۳۶ افزایش یافت.

آنالیز ایزوژئومتریکی با چهار فضا سروکار دارد که عبارتند از: فضای اندیسی، فضای پارامتری، المان مادر و فضای فیزیکی. که برای مسئله مورد نظر در شکل (۷) قابل نمایش است. در مسئله جریان دو بعدی، از انتگرال ۷ گیری گوس چهار نقطه استفاده شد.

حال برای محاسبه ماتریس سختی از معادله (۱۹) و انجام انتگرال گیری، لازم است مشتقات با نگاهی بین سیستم مختصات کلی و فضای پارامتری نریز انتقال یابند. این عمل با استفاده از ماتریس ژاکوبین که به مشتقات در دو سیستم مختصات است، انجام می‌گیرد. بدین صورت که:

$$J = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial \xi} & \frac{\partial y}{\partial \xi} \\ \frac{\partial x}{\partial \eta} & \frac{\partial y}{\partial \eta} \end{vmatrix} \quad (27)$$

که مولفه‌های آن توسط رابطه زیر محاسبه می‌شود:

$$\frac{\partial x}{\partial \xi} = \sum_{i=1}^n P \frac{\partial R}{\partial \xi} \quad (28)$$

که مشتقات تابع پایه نریز بوده و به راحتی با محاسبه مشتقات توابع پایه بی اسپلاین از معادله (۷) بدست می‌آیند. پس از محاسبه ژاکوبین می‌توان مشتقات توابع پایه نریز را نسبت به  $x, y$  محاسبه نمود:

$$\frac{\partial R}{\partial x} = J^{-1} \begin{bmatrix} \frac{\partial R}{\partial \xi} & \frac{\partial R}{\partial \eta} \\ \frac{\partial y}{\partial \xi} & \frac{\partial y}{\partial \eta} \end{bmatrix} \quad (29)$$

$$\frac{\partial R}{\partial y} = J^{-1} \begin{bmatrix} \frac{\partial R}{\partial \xi} & \frac{\partial R}{\partial \eta} \\ \frac{\partial x}{\partial \xi} & \frac{\partial x}{\partial \eta} \end{bmatrix} \quad (30)$$

در نتیجه ماتریس سختی المان عبارت است از:

$$K = \iint_{\Omega} k \cdot B^T \cdot B \cdot det J \, d\xi \, d\eta \quad (31)$$

که ماتریس  $B$  به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$B = \begin{bmatrix} \frac{\partial R}{\partial x} & \dots \\ \frac{\partial R}{\partial y} & \dots \end{bmatrix}_{2 \times (m \times n)} \quad (32)$$

ضریب هدایت هیدرولیکی برای ساده‌سازی در آبخوان برابر  $1 \text{ m/day}$  است. مقادیر سطح آب زیرزمینی بدست آمده از روش ایزوژئومتریک در جدول (۱) نشان داده شده است.

هم چنین سطح آب زیرزمینی آبخوان در شکل ۵ قابل مشاهده است.

شکل ۵. سطح آب زیرزمینی آبخوان فرضی

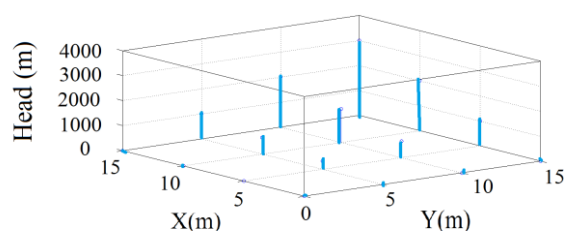


fig. 5. Groundwater level of the assumed aquifer

نتایج مدل‌سازی نشان می‌دهد که روش ایزوژئومتریک می‌تواند سطح آب زیرزمینی را به طور موثری پیش‌بینی کند.

#### ۴-۲- تعریف متغیرهای مسئله جریان آب زیرزمینی

برای تعریف توابع پایه مورد استفاده در آنالیز ایزوژئومتریک ابتدا باید درجه این توابع بر حسب هندسه آبخوان تعریف شود. در این مسئله جریان دو بعدی، درجه توابع پایه در جهت  $\xi$  برابر  $p = 3$  و در جهت  $\eta$  برابر  $q = 2$  در نظر گرفته شد. نقاط کنترلی اولیه بر پایه مماس‌های وارد بر منحنی تعریف شد. بنابراین تعداد نقاط کنترلی در جهت  $x$  برابر ۱۶ و در جهت  $y$  برابر ۷ در نظر گرفته شد. تعداد اعضای بردار گرهی بر اساس فرمول  $n+p+1$  (که  $n$  تعداد نقاط کنترلی و  $p$  درجه تابع پایه است) در جهت  $\xi$ ، ۲۰ و در جهت  $\eta$  برابر ۱۰ بدست آمد. بردار گرهی‌های مربوطه به صورت زیر تعریف شد:

$$\kappa(\xi) = \left\{ 0, 0, 0, 0, \frac{1}{5}, \frac{1}{5}, \frac{1}{5}, \frac{2}{5}, \frac{2}{5}, \frac{2}{5}, \frac{2}{5}, \frac{3}{5}, \frac{3}{5}, \frac{3}{5}, \frac{4}{5}, \frac{4}{5}, \frac{4}{5}, \frac{4}{5}, 1, 1, 1, 1 \right\} \quad (25)$$

$$\kappa(\eta) = \left\{ 0, 0, 0, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{2}{3}, 1, 1, 1 \right\} \quad (26)$$

مش کنترلی ایجاد شده در آبخوان در شکل (۶-ا) قابل مشاهده است. برای ریزتر کردن المان‌ها باید از تکنیک افزودن

برای محاسبه هد آب زیرزمینی در نقاط کنترلی به چهار زیرمجموعه از اطلاعات نیاز است: شرایط مرزی، چاه‌های برداشت، میزان تغذیه و تخلیه در آبخوان و مقادیر هدایت هیدرولیکی.

۲-۴-۱- شرایط مرزی

به طور کلی در مدل‌سازی جریان آب زیرزمینی دو نوع شرایط مرزی وجود دارد؛ هد ثابت (دیریشلت) و دیگری جریان ثابت (نیومان) [25]. آبخوان دشت بیرجند، تنها شرایط مرزی با هد ثابت دارد. این مرزها شامل ۹ جبهه ورودی و یک جبهه خروجی به صورت زهکش است که در شکل (۸) این مرزها با فلش‌هایی مشخص گشته‌اند. محدوده جبهه‌های ورودی و خروجی بر اساس نقشه خطوط هم‌پتانسیل آب زیرزمینی (ایزوپیز) آبخوان بیرجند تهیه می‌شود، خطوط جریان ورودی و خروجی مرز، عمود بر خطوط هم‌پتانسیل آب زیرزمینی‌ای هستند که تا مرز آبخوان کشیده شده‌اند [17].

۲-۴-۲- چاه‌های برداشت

برداشت از آبخوان از طریق چاه‌ها صورت می‌گیرد. در این آبخوان ۱۹۰ حلقه چاه وجود دارد که موقعیت آنها در شکل (۲) با نماد دایره قابل مشاهده است.

شکل ۸. جبهه‌های ورودی و خروجی معرفی شده در آبخوان دشت بیرجند (بدون مقیاس)

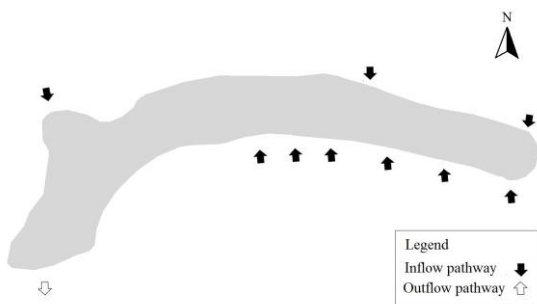


Fig. 8. Inflow and Outflow pathway Introduced in Birjand Aquifer (No Scale)

۲-۴-۳- مقادیر تغذیه و تخلیه

در آبخوان بیرجند مقدار بارندگی با توجه به اقلیم خشک منطقه بسیار کم است و ۱۵٪ مقدار بارندگی به عنوان تغذیه در

بردار نیرو در تمامی نقاط بجز نقاط مرزی از رابطه (۲۰) محاسبه می‌شود. برای اعمال هد ارتفاعی در بردار نیرو به روش مستقیم، با یک ترفند عددی می‌توان هدهای موجود را بدون حذف معادلاتشان اعمال نمود. بدین گونه که ضریب قطری متناظر نقطه کنترلی مرزی در ماتریس سختی را در  $10^{10}$  ضرب نمود و ضریب متناظرش در بردار نیرو را نیز برابر مقدار زیر قرار داد [24]:

$$F_i = 10^{10} K_{i,i} u_i ; i \in \Gamma_D \quad (33)$$

شکل ۶. مش کنترلی اولیه ۲-۶. نقاط کنترل نهایی و المان بندی نهایی هندسه آبخوان (بدون مقیاس)

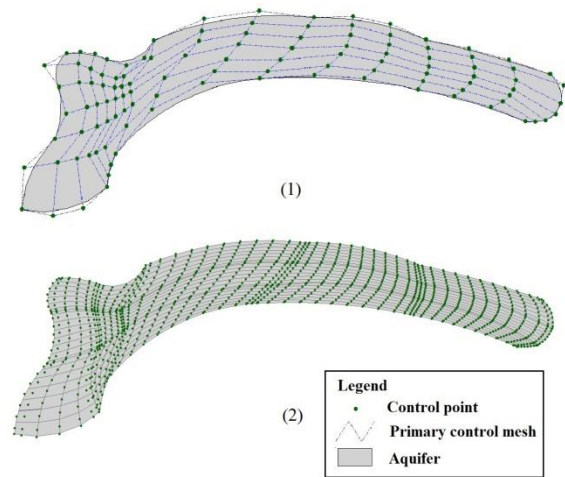


Fig. 6. (1) Initial control mesh (2) Final control points and element placement for aquifer geometry

شکل ۷. شرح تصویری اجزاء نرَبز برای سطح آبخوان فرضی مورد نظر

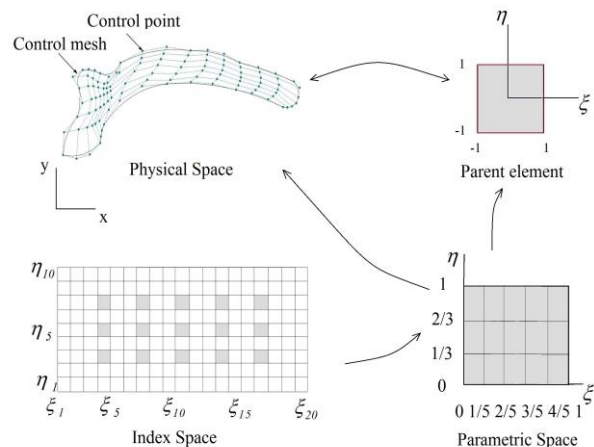


Fig. 7. A pictorial explanation of NURBS elements for the aquifer surface



شده‌اند. هم‌چنین شکل (۱۱) مقایسه سطوح آب زیرزمینی در سه حالت مشاهداتی، محاسباتی توسط روش ایزوژئومتریکی و تفاضل محدود را نمایش می‌دهد.

جدول ۲. مقایسه نتایج مدل و مشاهداتی

Relative error FDM	Relative error IGA	Observ(m)	FDM(m)	IGA(m)	Num
0.0003	0.0004	1264.30	1263.89 5	1263.7 9	1
0.0004	0.0001	1290	1290.57 2	1289.8 3	2
0.00000 8	0.0003	1306.87	1306.88 1	1306.9 1	3
0.0028	0.0000 5	1300.43	1300.74 5	1300.5 0	4
0.0002	0.0006	1300.77	1300.55	1299.9 6	5
0.00008	0.0002	1309.98	1309.87 4	1309.7 4	6
0.0005	0.0000 5	1322.41	1321.80 6	1322.4 7	7
0.0007	0.0001	1342.24	1341.24 7	1342.3 8	8
0.00004	0.0003	1362.9	1362.95 5	1362.4 8	9
0.0002	0.0007	1392.2	1392.44 9	1393.1 5	10

Table 2. Comparison of model and observation results

شکل ۱۰- موقعیت چاه‌های مشاهده ای در آبخوان بیرجند

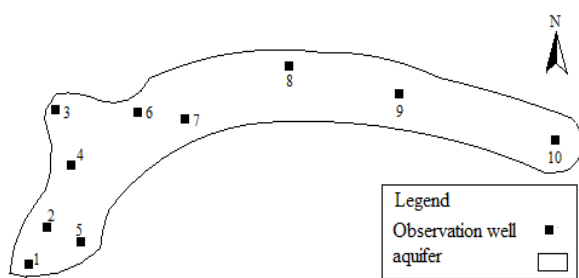


Figure 10 - Observation wells position in the Birjand aquifer(without scale)

با توجه به مقادیر موجود در جدول ۲ میانگین خطای نسبی روش ایزوژئومتریکی ۰/۰۰۰۲۵۶ است که در مقایسه با مقدار آن در روش تفاضل محدود ۰/۰۰۰۵۲۷، بسیار کمتر است. این مقدار اختلاف و میانگین خطای نسبی نشان از قدرت بالای روش ایزوژئومتریکی دارد.

نظر گرفته می‌شود. بارندگی اعمال شده در مدل برای این آبخوان بر اساس داده‌های ایستگاه باران سنجی دشت بیرجند در سال ۱۳۹۱-۱۳۹۰ برابر با ۰/۰۰۰۰۷۲۷ متر بر روز است.

### ۲-۴-۴- هدایت هیدرولیکی k

اطلاعات هدایت هیدرولیکی در آبخوان دشت بیرجند توسط نرم‌افزار GIS به چندین تیسن همگن (چندضلعی) تقسیم بندی شد [18]. المان‌های نریز ایجاد شده بنا به اینکه موقعیت قرار گیری‌شان در کدام تیسن است، عدد تیسن مربوطه به آنها اختصاص یافته است. مقادیر هدایت هیدرولیکی در هر چندضلعی در شکل (۹) نشان داده شده است.

شکل ۹. هدایت هیدرولیکی آبخوان(بدون مقیاس)[18].

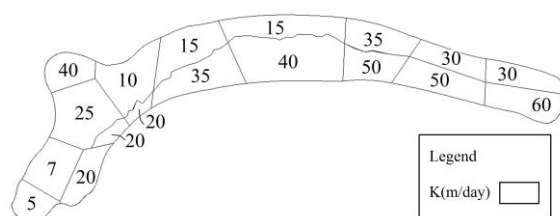


Fig. 9. Hydraulic conductivity in Birjand aquifer (without scale)

### ۳- نتایج

پس از ساخت هندسه توسط نقاط کنترل و بردار گرهی معرفی شده در بخش ۴-۲ و محاسبه توابع نریز و مشتقات آن، ماتریس سختی و بردار نیرو، مطابق توضیحات ذکر شده در مطلب بدست آمد. سپس ماتریس مجهولات برای نقاط کنترل محاسبه و با جذر گرفتن از ماتریس مجهولات، ارتفاع سطح آب زیرزمینی برای نقاط کنترل مربوطه محاسبه شد. به منظور اطمینان از صحت مدل‌سازی با این روش، مقادیر سطح آب زیرزمینی بدست آمده توسط روش ایزوژئومتریکی با مقادیر سطح آب زیرزمینی محاسبه شده توسط روش تفاضل محدود و سطح آب زیرزمینی مشاهده شده در پیژومترهای آبخوان مقایسه شد. بدین منظور سطح آب زیرزمینی بدست آمده از مدل در نقاط نزدیک به پیژومترها درون‌یابی شد. جدول (۲) نتایج این مقایسه را نشان می‌دهد. قابل ذکر است که پیژومترهای مشاهده‌ای در شکل (۱۰) با نماد مستطیل مشخص

روش به منظور مدلسازی جریان آب زیرزمینی کارآمد و دقیق است.

بیان آب زیرزمینی آبخوان بیرجند با استفاده از مقادیر ورودی، برداشتها و ذخیره آب در دشت محاسبه شد. جدول (۴) مقایسه بیان واقعی و بیان بدست آمده از مدل برای آبخوان دشت بیرجند را نشان می دهد.

جدول ۴: بیان واقعی و بیان مدل آبخوان مورد نظر در شرایط ماندگار

Real cond(MCM)	Model(MCM)	
29.17	36.7	Q inflow
10.62	18.93	Q outflow
27.41	28.62	Recharge
79.44	79.44	Discharge
33.48	33.05	Volume change

Table 4. Actual Bill and Bill for Aquifer Model in in steady state.

طبق جدول میزان تغییرات حجم در بازه زمانی مد نظر برابر  $MCM 33/05$  است. میزان تغییرات حجم در شرایط واقعی برابر  $MCM 33/48$  است. در نتیجه با بررسی دو بیان و مقایسه آن دو با یکدیگر مشخص می گردد که تغییر حجم آبخوان در بازه زمانی مورد نظر مدل نزدیک به تغییرات حجم آبخوان می باشد که نشان دهنده دقت مدل است.

#### ۴- نتیجه گیری

مدلسازی جریان آب زیرزمینی یکی از اساسی ترین کارها برای مطالعات عمیق روی آبخوانها است. در این مطالعه مدل سازی آبخوان آزاد دشت بیرجند واقع در خراسان جنوبی با استفاده از روش عددی ایزوژئومتریک (IGA) انجام شد. این روش از توابع پایه یکسان هم در مدل سازی هندسه و هم در آنالیز ایزوژئومتریک استفاده کرد. استفاده از این روش علاوه بر حذف مشکلات بوجود آمده ناشی از المان بندی های متعدد در میدان حل، امکان مدل سازی را برای مسائل با هندسه نامنظم و پیچیده را نیز فراهم ساخت. پس از ایجاد هندسه و محاسبه توابع پایه نربز (NURBS) و مشتقات آنها، با ورود اطلاعات اولیه همچون هدایت هیدرولیکی، شرایط مرزی، دبی های برداشت و میزان تخلیه و تغذیه مدل ایجاد و سطح آب زیرزمینی برای هر نقطه کنترل محاسبه شد. در نهایت سطح آب

شکل ۱۱. مقایسه سطوح آب زیرزمینی در سه حالت مشاهداتی، محاسباتی توسط روش ایزوژئومتریک و تفاضل محدود

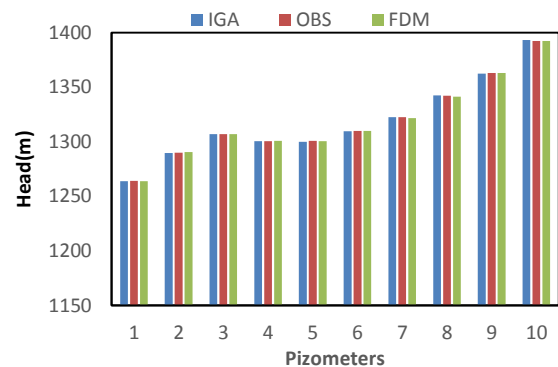


Fig. 11. comparative results of simulated and observed head for both FDM and IGA methods.

#### ۳-۱- ارزیابی عملکرد مدل

برای تشخیص عملکرد مدل از خطاهای میانگین، میانگین مطلق و جذر میانگین مربعات استفاده شد. این خطاها به ترتیب از روابط (۳۱ تا ۳۳) محاسبه می شوند.

$$ME = \frac{\sum_{i=1}^n (h_o - h_s)}{n} \quad (31)$$

$$MAE = \frac{\sum_{i=1}^n |h_o - h_s|}{n} \quad (32)$$

$$RMSE = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n (h_o - h_s)^2}{n}} \quad (33)$$

که در آن  $h_o$  و  $h_s$  به ترتیب سطح آب زیرزمینی مشاهده شده و مدل سازی شده است و  $n$  بیانگر تعداد پیزومترها می باشد [11]. نتایج خطاهای مذکور برای روش های ایزوژئومتریک و روش تفاضل محدود در جدول ۳ مشخص شده اند.

جدول ۳. محاسبه خطاهای میانگین، مطلق میانگین و جذر حداقل مربعات

FDM	IGA	
0.321	0.09	ME(m)
0.404	0.34	MAE(m)
0.566	0.459	RMSE(m)

Table 3. Calculation of mean error, absolute mean error and root mean square error

زمانی که مقدار خطای  $RMSE$  در بازه  $\pm 1/9$  متر قرار داشته باشد، مقدار خطا قابل قبول است [26]. با توجه به مقادیر جدول (۳) مقدار خطاها قابل قبول بوده بنابراین استفاده از این

- 12- Sadeghi tabas S., Akbarpour A., Pourreza Bilondi M. & Samadi S. Z. 2015 Application of Cuckoo Optimization Algorithm in Automatic Calibration of aquifer Hydrodynamic Parameters using mathematical Model. *Iranian Journal of Irrigation and Drainage*, 9(2), 345-356.
- 13- Sadeghi tabas S., Pourreza Bilondi M., Akbarpour A. & Samadi S. Z. 2015 Application of multi objective optimization method AMALGAM in determining the policy of optimum discharge from groundwater resource using mathematical model. *Iranian Journal of Irrigation and Drainage*, 9(3), 470-480.
- 14- Hamraz B. S., Akbarpour A., Pourreza Bilondi M. & Sadeghi tabas S. 2015 On the assessment of groundwater parameter uncertainty over an arid aquifer. *Arabian journal of geosciences*, 8(12), 10759-10773.
- 15- Saeedi H., Baqvand A., Nikosokan M. H., Akbarpour A. & Sadeghi tabas S. 2015 Prediction of one year trend of changes in water table using open source code; A case study of Birjand plain, Southern Khorasan province. *International Bulletin of Water Resource and Development*; 3, 67-75.
- 16- Ghoochani E., Etebari B. & Akbarpour A. 2013 Integrating groundwater management with WEAP and MODFLOW models (Case study: Birjand plain, east of Iran), *MODFLOW and More 2013: Translating Science into Practice*, Maxwell, Hill, Zheng & Tonkin.
- 17- Mohtashami A., Akbarpour A. & Mollazadeh M. 2017 Numerical Modelling of groundwater flow in unconfined aquifer in steady condition with meshless local Petrov-Galerkin, *Modares Mechanical Engineering*, 17(2), 393-403. (in Persian)
- 18- Farpour A. 2016 Evaluation of Groundwater Quality in Birjand Plain Using MT3D Model. *master of science thesis*, 99p. (in Persian)
- 19- Peigl L. & Tiller W. 1997 *The NURBS Book*; Springer, 646p.
- 20- Cottrell J., Hughes T. & Bazilevs Y. 2009 *Isogeometric Analysis, toward Integration of CAD and FEA*. WILEY.
- 21- Dupuit J. 1863 *Estudes Theoriques sur le Mouvement desEaux*; Dunod.
- 22- Leng C. H. & Yeh H. D. 2003 Aquifer parameter identification using the extended Kalman filter. *WaterResource Research*, 39(3), p 1062.
- 23- Kalantari M., Akbarpour A. & Katibinia M. 2017 Numerical Modeling of Groundwater Flow in the Aquifer enclosed by isogeometric method. *14th National Conference on Evaporation Reduction, Kerman*.
- 24- Wang H. & Anderson M. 1982 *Introduction to Groundwater Modeling; Finite Difference and Finite Element*, Academic Press, INC, 237p.
- 25- Park Y. C. & Leap D 2000 Modeling groundwater flow with a free and moving boundary using the element-free Galerkin (EFG) method. *Geosciences Journal*, 4(3), 243-249.
- 26- Anderson M. & Woessner W. & Hunt R. 2015 *Applied Groundwater Modeling*. Academic Press.

زیرزمینی به دست آمده از مدل با سطح آب زیرزمینی محاسبه شده توسط روش تفاضل محدود و سطح آب زیرزمینی مشاهده شده در پیزومترها مقایسه و خطای نسبی این روش‌ها محاسبه گردید. نتایج بدست آمده رضایت بخش و قابل قبول بود بطوری که میانگین خطای نسبی و خطای جذر میانگین مربعات روش ایزوژئومتریک به ترتیب  $0/000256$  و  $0/459$  متر بدست آمد در حالی که مقادیر این خطاها برای روش تفاضل محدود به ترتیب برابر با  $0/000527$  و  $0/566$  متر است. مقدار کم خطا توانایی قدرت روش ایزوژئومتریک را در مدل سازی جریان آب زیرزمینی نشان داد.

## References

## ۵-مراجع

- 1-Bathe K 1996 *Finite Element Procedures*. Prenntice Hall Inc, 1037 p.
- 2- Moeinadini A., Rostami, S & Shojaee S. 2012 Page stress and strain problem Analysis according to Isogeometric method based on theory of finite element. *master of science thesis*, 49p. (in Persian)
- 3-Hughes T.J.R., Cottrell J.A., & Bazilevs Y. 2005 Isogeometric analysis: CAD, finite element, NURBS, exact geometry, and mesh refinement. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 194(39-41), 4135-4195.
- 4-Falco C. de., Reali A. & Vazquez R. 2011 GeoPDEs: A Research tol for Isogeometric Analysis of PDEs. *Advances in Engineering Software*. 42, 1020-1034.
- 5-Vuong A.-V; Henrich Ch; simeon B; "ISOGAT: A 2D tutorial MATLAB Code for Isogeometric Analysis"; *Computer Aided Geometric Design*, 27, 2010, 644-655.
- 6-Ghorashi Sh., Shojaee S. & Ghasemzadeh H. 2012 Generalized Isogeometric numerical method for solving two-dimensional problem with crack in isotropic environment by developed finite element method. *The national Congress of Civil Engineering*, Semnan, Iran. (in Persian)
- 7-Hosseini S.F., Motakef Imani B. & Hadidi mood S. 2014 Construction of smooth B-spline surface based on improving data point distribution, *Modares Mechanical Engineering*, 14(13), 27-36.
- 8-Minh Ngoc Nguyen, Tinh Quoc Bui, Tiantang Yu. & Sohichi Hirose 2014 Isogeometric analysis for unsaturated flow problems, *Computers and Geotechnics*, 62, 257-267.
- 9-Bekele Y. W., Kvamsdal T., Kvarving A. M. & Nordal S. 2016 Adaptive Isogeometric finite element analysis of steady-state groundwater flow. *International Journal of Numerical and Analytical Methods in Geomechanics*, 40(5), 738-765.
- 10-Shahrokhbabadi S., Vahedifard F. & Bhatia M., 2014 Head-based Isogeometric analysis of transient flow in unsaturated soils. *Computers and Geotechnics*, 84, 644-655.
- 11-Sadeghi tabas S., Samadi S. Z., Akbarpour A. & Pourreza Bilondi M. 2016 Sustainable groundwater modeling using single-and multi-objective optimization algorithms. *Journal of Hydroinformatics*, 18(5), 1-18.

# Numerical Modeling of Groundwater Flow in Unconfined Aquifer in Steady State with Isogeometric Method

Mahdiye Kalantari<sup>1</sup>, Abolfazl Akbarpour<sup>2\*</sup>, Mohsen Khatibinia<sup>3</sup>

1-Department of civil engineering, University of Birjand, Birjand, Iran.

2-Associate professor, Department of civil Engineering, University of Birjand, Birjand, Iran.

3-Assistant professor, Department of civil Engineering, University of Birjand, Birjand, Iran.

\* akbarpour@birjand.ac.ir.

## Abstract:

Solving the governing equations of a system is the most important issues that is always discussed in science and engineering fields. Since there are few equations that have analytical solution, many numerical methods have been proposed for solving the equations that have no analytical solutions. Numerical methods are developed by the advent of computers. Today, with using computers and these methods together, complicated equations in diverse areas can be resolved. Several numerical methods such as finite element method (FEM), finite difference method (FDM) and meshless (MFree) method have been suggested for solving partial differential equations. In this study, Isogeometric analysis method is engaged as a numerical method. Isogeometric analysis was developed by Hughes in 2005 in order to eliminate the gap between the world of finite element analysis and computer modeling. This method uses the same basis functions, in the process of modelling. Isogeometric method provides the possibility of simulation in irregular and complex geometry domains and also removes errors due to the multiple elements. Two variable NURBS basis functions are defined by B-spline basis functions. B-spline basis functions are calculated by the Cox-de Boor recursion. In this study, Birjand aquifer is modeled in two dimensions by the Isogeometric analysis using four-point Gauss integration method. After creating the geometry of the aquifer by control points and knot vector, NURBS basis functions and their derivatives were calculated. Then, with using input information, such as hydraulic conductivity coefficients, boundary conditions, precipitation rates and the sources and sinks, water table is computed. In order to allocate hydraulic conductivity coefficients of the aquifer, the domain is divided by the GIS software to multiple homogeneous Thiessen. According to the location of NURBS elements in the aquifer, a value has been assigned to NURBS elements. In Birjand aquifer there are boundary conditions with constant head. There are 190 wells in the Birjand aquifer, the Extracted water from the wells were used as the discharge rate in the model. Also, 15 percent of the amount of rainfall was considered as the recharge rate in 2011-2012 period, the value of recharge rate is 0.0000727 m/day based on rain gauges. In order to ensure the accuracy of modeling the results of Isogeometric method is compared with finite difference method solutions and observation data, the relative mean error of Isogeometric method is 0.000256. In order to evaluate the model, three criteria is calculated. Mean error (ME), mean absolute error (MAE) and root mean square error (RMSE) whose values are 0.09, 0.34, and 0.459 respectively. The values of the error and computation time has shown the power of this method in modeling of groundwater flow. Finally, Birjand aquifer groundwater balance was calculated using the input values, extracted water and water storage in plain. By studying the model balance and actual balance of aquifer and comparing them with each other, it is determined that the change in the volume of the aquifer in the time period considered is close to that of the aquifer, which indicates the accuracy of the model.

**Keywords:** Steady Condition, Unconfined aquifer, NURBS Basis Function, B-Spline.