

سختی الاستیک دیوارهای برشی فولادی نیمه‌مقید

سید ابراهیم سادات خلردی^۱، علیرضا جهان‌پور^{۲*}

۱- دانشجوی دکترای سازه، دانشکده عمران و معماری، دانشگاه ملایر

۲- استادیار سازه، دانشکده عمران و معماری، دانشگاه ملایر

*a.jahanpour@malayeru.ac.ir

تاریخ پذیرش [۹۷/۱۲/۲۲]

تاریخ دریافت [۹۷/۰۵/۲۶]

چکیده

در دیوار برشی فولادی نیمه‌مقید (SSSW) به عنوان یک سیستم مقاوم در برابر بارهای جانبی، ورق دیوار به ستون‌های اصلی سازه متصل نیست و به جای آن، به ستون‌هایی فرعی متصل می‌شود که بارهای ثقلی را تحمل نمی‌کنند. ظرفیت برشی نهایی این سیستم در حضور لنگر واژگونی ناشی از طبقات بالاتر، پیشتر بدست آمده است و منحنی‌های اندرکنش برای آنالیز و طراحی این سیستم با هندسه و مصالح مختلف ارائه شده است. ورق‌های نازک در دیوارهای برشی فولادی نیمه‌مقید در بارهای جانبی کوچک، کمانش کرده و در نتیجه ورق دیوار در ناحیه وسیعی دارای رفتار پس‌کمانشی الاستیک است. بنابراین بررسی تغییرات بار جانبی نسبت به تغییرمکان مانند آن در ناحیه پس از کمانش الاستیک دارای اهمیت به سزایی است. در این مقاله، معادلات فن کارمن برای بدست آوردن میدان تغییرمکان ورق دیوار در ناحیه پس‌کمانشی الاستیک با استفاده از روش گالرکین حل شده و با استفاده از ظرفیت برشی نهایی، منحنی دو خطی ایده‌آل بار جانبی-تغییرمکان افقی دیوار تقریب زده می‌شود. ظرفیت برشی در انتهای ناحیه پس-کمانشی الاستیک و تغییرمکان خارج از صفحه ورق با نتایج آنالیز اجزاء محدود برای چند نمونه، مورد مقایسه قرار گرفته است طوری که بیشینه اختلاف ظرفیت برشی و تغییرمکان خارج از صفحه بین دو روش به ترتیب ۱۴/۹ و ۹/۷ درصد است. نتایج بدست آمده نشان می‌دهد که سختی الاستیک از مقدار لنگر واژگونی و مقطع ستون فرعی مستقل است و فقط به مشخصات هندسی دیوار وابسته است. روش تحلیلی پیشنهادی به راحتی با رایانه‌های معمولی قابل برنامه نویسی است.

واژگان کلیدی: دیوارهای برشی فولادی نیمه‌مقید (SSSW)، پس‌کمانشی الاستیک، سختی اولیه، میدان جابه‌جایی، معادلات ورق فن کارمن، روش گالرکین

۱- مقدمه

ساختمان‌ها استفاده شد [1]. در دهه‌های اخیر، ویژگی‌های سازه‌ای این سیستم از قبیل سختی، شکل‌پذیری و جذب انرژی به طور گسترده و به صورت تحلیلی [2-4]، آزمایشگاهی [5-8]

از اوایل سال ۱۹۷۰، دیوار برشی فولادی (SPSW) به عنوان یک سیستم مقاوم در برابر بارهای جانبی معرفی و در برخی از

کوچکی از بار برشی تسلیم دیوار (کمتر از ۵ درصد) اتفاق می‌افتد، ناحیه پس‌کمانشی الاستیک وسیعی در این سیستم شکل می‌گیرد. در این ناحیه، ورق دیوار دارای رفتار غیرخطی هندسی با مصالح الاستیک خطی است. بنابراین، نیروی برشی طبقه رابطه خطی با جابه‌جایی جانبی (سختی الاستیک) تا اولین نقطه از تسلیم ورق دارد. شاید حل معادلات ورق فن‌کارمن بهترین روش برای بدست آوردن سختی الاستیک به صورت تحلیلی برای این سیستم باشد. این معادلات با دو رابطه دیفرانسیل غیرخطی مرتبه چهارم همبسته بیان می‌شوند [22].

روش اغتشاشات^۱ به عنوان یک روش برای حل معادلات فن-کارمن بکار گرفته می‌شود. با استفاده از این روش، Sun و همکارانش [23] معادلات کمانش و پس‌کمانش ورق‌های تحت فشار درون صفحه‌ای را بدست آوردند. Amdahl و Byklum [24] یک مدل محاسباتی برای آنالیز کمانش موضعی و پس-کمانش پانل‌های سخت شده بدست آوردند. Wang و همکارانش [25] یک آنالیز تئوری برای رفتار پس‌کمانش ورق-های مستطیلی ارتوتروپیک با چهار لبه ساده که تحت ترکیبات بارگذاری فشاری دو محوری و برشی بودند، ارائه کردند. Hui-shen [26] رفتار پس‌کمانش ورق‌های مستطیلی با چهار لبه ساده که تحت بارگذاری ترکیبی فشار دو محوری قرار داشتند را مورد مطالعه قرار دادند. روش اغتشاشات به طور ذاتی بر پارامترهای اضافی تعریف شده در مسأله که به مقادیر اغتشاش معروف هستند، استوار است. به عبارت دیگر این روش از مقادیر اغتشاش برای تبدیل مسائل غیرخطی به تعداد مشخصی از مسائل خطی استفاده می‌کند تا بتواند جواب مسأله غیرخطی را به صورت مجموعه‌ای از مسائل خطی حل شده در آورد. در واقع مقادیر اغتشاش اساس این روش هستند و همین مقادیر هستند که گاهی باعث واگرایی حل می‌شود [27].

روش‌های دیگری نیز برای توصیف رفتار کمانش و پس‌کمانش ورق‌ها بکار گرفته شده است. Mijuskovic و همکاران [28] با استفاده از روش انرژی به مطالعه رفتار پس‌کمانشی ورق‌های سخت شده تحت بار برشی پرداختند. Bakker و همکارانش [29] رفتار پس‌کمانشی ورق‌های مستطیلی با چهار لبه ساده که

و عددی [9-12] بررسی شده است. برای از بین بردن تنش‌های ناشی از میدان کششی بر ستون‌های سازه که به ورق دیوار متصل هستند، فرض شد که ورق دیوار فقط به تیرهای طبقات متصل شود [13,14]. این ایده، منجر به پیشنهاد دیوار برشی فولادی نیمه‌مقید در دهه قبل شد. در این سیستم مقاوم باربر جانبی جدید، ورق دیوار متصل به ستون‌های فرعی است که بارهای ثقلی را تحمل نمی‌کنند و فقط به گسترش تنش‌های ناشی از میدان کششی در ورق دیوار کمک می‌کنند [15]. شکل (۱) شمای کلی از سیستم دیوار برشی فولادی نیمه‌مقید را نشان می‌دهد. بارهای جانبی اعمال شده در طبقات بالاتر، لنگر واژگونی را بر طبقه نشان داده شده، وارد می‌کنند.

جهانپور و همکاران ظرفیت برشی نهایی دیوارهای برشی فولادی نیمه‌مقید را در حضور لنگر واژگونی با استفاده از یک روش تحلیلی که در مرجع [16] معرفی شده است بدست آوردند و چندین منحنی اندرکنش بین ظرفیت برشی نهایی و لنگر واژگونی، ارائه شد که می‌توان از آن‌ها برای آنالیز و طراحی این سیستم استفاده کرد [15,17]. این پژوهشگران با استفاده از تشابه دیوار برشی فولادی نیمه‌مقید با تیروورق و همچنین با استفاده از مطالعات انجام یافته روی رفتار تیروورق‌ها و استفاده از روش کرانه بالا و پایین در تحلیل پلاستیک سازه‌ها، یک روش گام به گام جهت برآورد ظرفیت نهایی دیوار ارائه کردند. علاوه بر آن، چند مطالعه آزمایشگاهی برای بررسی رفتار چرخه‌ای این سیستم صورت گرفته است [18-21].

شکل ۱. شمای کلی از دیوار برشی فولادی نیمه‌مقید [15]

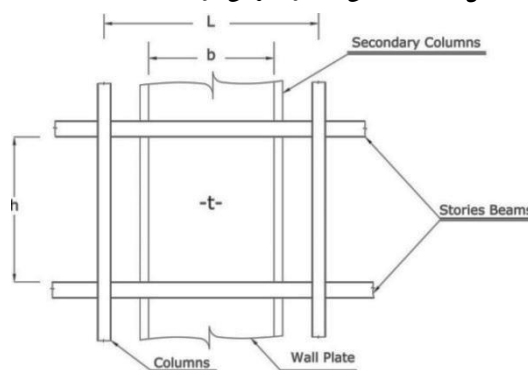


Fig. 1. General view of semi-supported steel shear wall [15]

از آنجا که کمانش برشی الاستیک ورق دیوار در درصدهای

الاستو-پلاستیک برای این سیستم بدست می‌آید. با ترسیم این منحنی، می‌توان سختی الاستیک سیستم را بدست آورد. ورق دیوار به عنوان یک صفحه نازک فرض می‌شود که لبه‌های موازی آن دارای شرایط مرزی متفاوت هستند: در محل اتصال دیوار به تیرهای طبقات، تکیه‌گاه ساده و در محل اتصال دیوار به ستون‌های فرعی، لبه آزاد سخت شده فرض شده است. یک تابع سینوسی به عنوان تابع تغییرشکل که شرایط مرزی را ارضا می‌کند در نظر گرفته می‌شود. سپس، یک روش تحلیلی برای تعیین تغییرمکان خارج از صفحه ورق توسعه داده شده و جابجایی درون صفحه‌ای ورق نیز بدست می‌آید. نتایج بدست آمده با مدل عددی مورد مقایسه قرار می‌گیرد.

۲- بارهای اعمال شده و مدل سازه‌ای

شکل (۲) یک طبقه میانی از دیوار برشی فولادی نیمه‌مقید را نشان می‌دهد. فرض شده است که تیرهای بالایی و پایینی طبقات به صورت کاملاً صلب هستند و اتصال مفصلی بین آن‌ها و ستون‌های اصلی وجود دارد. بنابراین در شکل (۲) انتهای تیرهای طبقات با تکیه‌گاه مفصلی نشان داده شده‌اند. نیروهای جانبی طبقات بالاتر، نیروی برشی طبقه V_s و لنگر واژگونی M_s را ایجاد می‌کنند. عرض، ارتفاع و ضخامت ورق دیوار به ترتیب b ، h و t هستند. V_s و M_s به ترتیب تنش‌های برشی (τ_{xy}) و تنش‌های خمشی (σ_y) روی لبه‌های بالایی و پایینی ورق دیوار ایجاد می‌کنند که در شکل (۳) نشان داده شده است.

شکل (۴) ورق دیوار را با شرایط مرزی آن نشان می‌دهد. ستون‌های فرعی به صورت فنزهای خطی گسترده در دو جهت عمودی (x و z) فرض شده‌اند. سختی محوری فنزها متناظر با ممان اینرسی ستون‌های فرعی (I_{xx} و I_{zz}) است.

۳- روش تحلیلی برای تعیین میدان جابه‌جایی

هنگامی که بارهای جانبی بر سیستم دیوار برشی فولادی نیمه-مقید در ناحیه پس‌کمانشی اعمال می‌شود، جابه‌جایی خارج از صفحه همزمان با جابه‌جایی درون صفحه‌ای (افقی) به وجود می‌آید. در این مقاله، جابه‌جایی عمودی (در راستای y) به دلیل

تحت فشار تک و دو محوری قرار داشتند را با استفاده از مدل دو نواری مورد بررسی قرار دادند. در مدل دو نواری، روابط براساس سازگاری تغییرشکل نوارها بدست می‌آیند و به همین دلیل، بارگذاری باید به صورت تک یا دو محوری باشد. Stamatelos و همکاران [30] یک روش تحلیلی را برای رفتار کمانشی موضعی و پس‌کمانشی ورق‌های سخت شده ایزوتروپیک و ارتوتروپیک که تحت فشار تک محوری قرار داشتند، پیشنهاد کردند. روش آن‌ها براساس تئوری لایه‌ای کلاسیک، تابع جابه‌جایی $pb-2$ ریتز و روش رایلی-ریتز بود. روش گالرکین یک روش معمول برای حل نیمه‌تحلیلی معادلات فن‌کارمن است. Paik و همکارانش [31] از این روش برای بدست آوردن تغییرشکل‌های بزرگ الاستیک ورق‌های چهار لبه ساده تحت ترکیبات بارگذاری مختلف (فشار/کشش دو محوری، خمش درون صفحه‌ای دو محوری، بارهای برشی و فشاری) استفاده کردند. آن‌ها برای ورق، نقص هندسی در مرکز ورق در نظر گرفتند و فرض کردند که در طول بارگذاری، لبه‌های ورق به صورت مستقیم باقی می‌مانند. Dai و همکارانش [32] تغییرشکل‌های بزرگ ورق با چهار لبه ساده را تحت ترکیب بارهای درون صفحه‌ای فشاری تعیین کردند. Yukio و همکارانش [33] یک روش نیمه‌تحلیلی را برای بدست آوردن تغییرشکل‌های بزرگ ورق‌های مستطیلی با چهار لبه ساده که تحت بار فشاری تک محوری و برش قرار داشتند، بدست آوردند. Ferreira و Virtuoso [34] دو مدل نیمه‌تحلیلی را برای آنالیز پس‌کمانشی ورق‌های ایزوتروپیک و ارتوتروپیک تحت بار فشاری تک محوری که لبه‌های بارگذاری نشده بدون تنش بودند، بکار بردند.

در این مقاله، روش گالرکین به صورت یک روش نیمه‌تحلیلی برای حل معادلات فن‌کارمن برای ورق دیوار سیستم دیوار برشی فولادی نیمه‌مقید در یک طبقه میانی بکار گرفته شده است. این حل منجر به بدست آوردن میدان جابه‌جایی SSSW در سطوح مختلف بارگذاری در ناحیه پس‌کمانش الاستیک ورق دیوار می‌شود. بنابراین، تغییرات خطی جابه‌جایی درون صفحه‌ای در مقابل بار جانبی بدست می‌آید. از آنجایی که ظرفیت نهایی بیشتر بدست آورده شد [15,16]، منحنی ایده‌آل

۳-۱- جابه‌جایی خارج از صفحه

روابط ۱ و ۲، معادلات فن‌کارمن را نشان می‌دهند که تابع تغییر مکان خارج از صفحه (w) و تابع تنش ایری (F)، توابع مجهول هستند. معادلات ۱ و ۲ به ترتیب از شرایط تعادل و سازگاری بدست می‌آیند [22].

$$\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} - \quad (1)$$

$$\frac{t}{D} \left(\frac{\partial^2 F}{\partial y^2} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} - 2 \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right) = 0$$

$$\frac{\partial^4 F}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 F}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 F}{\partial y^4} = E \left[\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right)^2 - \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right] \quad (2)$$

$D = \frac{Et^3}{12(1-\nu^2)}$ سختی خمشی، E و ν به ترتیب مدول الاستیسیته و ضریب پواسون فولاد هستند. براساس دستگاه مختصات تعریف شده در شکل (۴)، شرایط مرزی هندسی ورق دیوار به صورت روابط (۳ تا ۵) بیان می‌شود.

$$y = 0, h \Rightarrow \begin{cases} w = 0 \\ M_y = -D \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) = 0 \end{cases} \quad (3)$$

$$x = 0 \Rightarrow \begin{cases} M_x = -D \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) = 0 \\ V_x - \frac{\partial M_{xy}}{\partial y} = D \left[\frac{\partial^3 w}{\partial x^3} + (2-\nu) \frac{\partial^3 w}{\partial x \partial y^2} \right] = \frac{kw(0,y)}{h} \end{cases} \quad (4)$$

$$x = b \Rightarrow \begin{cases} M_x = -D \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) = 0 \\ V_x - \frac{\partial M_{xy}}{\partial y} = D \left[\frac{\partial^3 w}{\partial x^3} + (2-\nu) \frac{\partial^3 w}{\partial x \partial y^2} \right] = \frac{kw(b,y)}{h} \end{cases} \quad (5)$$

در روابط (۴ و ۵)، k سختی فنرهای عمود بر صفحه در شکل (۴) است که به صورت زیر بیان می‌شود.

$$k = \begin{cases} \frac{48EI_{xx}}{y^3} & ; y < \frac{h}{2} \\ \frac{48EI_{xx}}{(h-y)^3} & ; y \geq \frac{h}{2} \end{cases} \quad (6)$$

در رابطه (۶)، I_{xx} ممان اینرسی مقطع ستون فرعی حول محور x است. با توجه به روش نیمه‌تحلیلی گالرکین، برای تابع تغییر شکل از توابع سینوسی زیر استفاده شده است (رابطه ۷).

$$w(x,y) = A \left[\sin \frac{\pi x}{b} \sin \left(\frac{m\pi x}{b} - \frac{m\pi y}{h} \right) + \beta \right] \sin \frac{\pi y}{h} \quad (7)$$

اینکه نسبت به مقادیر جابه‌جایی در دو راستای دیگر کوچک است، در نظر گرفته نشده است. بنابراین، مؤلفه‌های میدان جابه‌جایی به ترتیب در راستاهای x ، y و z $u=u(x,y)$ ، $v=v(x,y)=0$ و $w=w(x,y)$ هستند که در شکل (۴) نشان داده شده است.

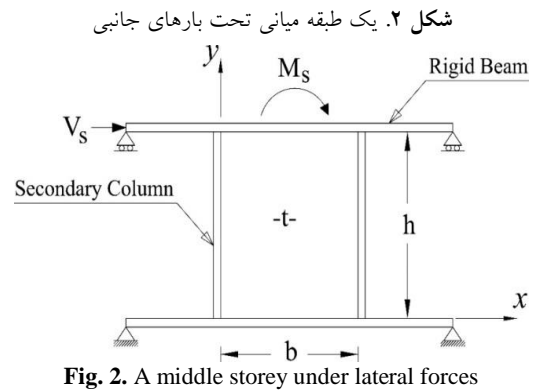


Fig. 2. A middle storey under lateral forces

شکل ۳. تنش‌های برشی و خمشی اعمال شده بر لبه‌های ورق دیوار

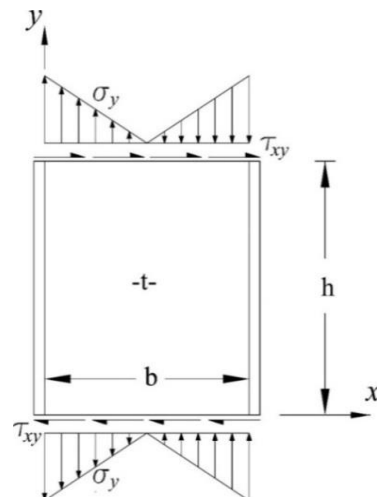


Fig. 3. The applied shear and bending stresses on the wall plate edges

شکل ۴. مدل سازه‌ای ورق دیوار

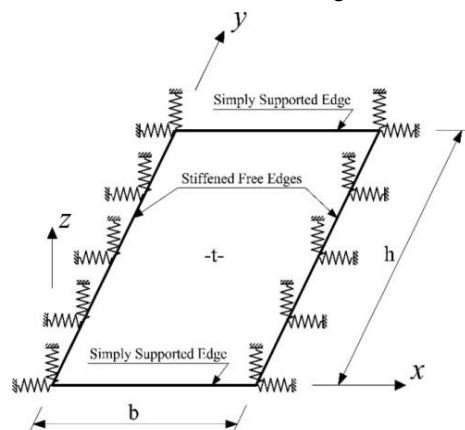


Fig. 4. The structural model of the wall plate

تنش‌های کششی و فشاری در راستای y ایجاد می‌کند. در رابطه (۱۳)، I_s ممان اینرسی کل مقطع SSSW، I_{zz} ممان اینرسی ستون فرعی حول محور Z و A_c مساحت مقطع عرضی ستون فرعی هستند (شکل ۴). رابطه (۱۰) برای پیدا کردن حل همگن معادله (۲) بکار می‌رود که به صورت رابطه (۱۴) بیان شده است. این حل، تابع تنش ایری (F_h) را قبل از کمانش ورق توصیف می‌کند.

$$F_h = -\tau xy - \frac{M_s + V_s(h-y)}{12 I_s} x^2 (2x - 3b) \quad (14)$$

برای پیدا کردن حل خصوصی رابطه (۲) که با F_p نشان داده می‌شود، رابطه (۹) در سمت راست رابطه (۲) جایگذاری می‌شود.

$$\nabla^4 F_p = \frac{1}{b^2 h^2} A^2 E \pi^4 (P_1^2 - P_2 P_3) \quad (15)$$

در رابطه (۱۵):

$$P_1 = \left[m \sin \frac{\pi x}{b} \cos \left(\frac{m \pi x}{b} - \frac{m \pi a y}{h} \right) + \cos \frac{\pi x}{b} \sin \left(\frac{m \pi x}{b} - \frac{m \pi a y}{h} \right) \right] \cos \frac{\pi y}{h} + \left[m \sin \frac{\pi x}{b} \sin \left(\frac{m \pi x}{b} - \frac{m \pi a y}{h} \right) - \cos \frac{\pi x}{b} \cos \left(\frac{m \pi x}{b} - \frac{m \pi a y}{h} \right) \right] m a \sin \frac{\pi y}{h} \quad (16)$$

$$P_2 = \left[2m \cos \frac{\pi x}{b} \cos \left(\frac{m \pi x}{b} - \frac{m \pi a y}{h} \right) - (1 + m^2) \sin \frac{\pi x}{b} \sin \left(\frac{m \pi x}{b} - \frac{m \pi a y}{h} \right) \right] \sin \frac{\pi y}{h} \quad (17)$$

$$P_3 = \left[2m a \cos \frac{\pi y}{h} \cos \left(\frac{m \pi x}{b} - \frac{m \pi a y}{h} \right) + (1 + m^2 a^2) \sin \frac{\pi y}{h} \sin \left(\frac{m \pi x}{b} - \frac{m \pi a y}{h} \right) \right] \sin \frac{\pi x}{b} \quad (18)$$

سمت راست رابطه (۱۵) برای پیدا کردن شکل کلی حل خصوصی تابع تنش ایری (F_p) به کار می‌رود.

$$F_p = A^2 E \left\{ f_1 \cos \frac{2\pi x}{b} + f_2 \cos \frac{2\pi y}{h} + f_3 \cos \left(\frac{2\pi x}{b} - \frac{2\pi y}{h} \right) + f_4 \cos \left(\frac{2\pi x}{b} + \frac{2\pi y}{h} \right) + f_5 \cos \left(\frac{2\pi m x}{b} - \frac{2\pi m a y}{h} \right) + f_6 \cos \left[\frac{2\pi(1-m)x}{b} + \frac{2\pi m a y}{h} \right] + f_7 \cos \left[\frac{2\pi m x}{b} - \frac{2\pi(1+am)y}{h} \right] + f_8 \cos \left[\frac{2\pi(1+m)x}{b} - \frac{2\pi m a y}{h} \right] + f_9 \cos \left[\frac{2\pi m x}{b} + \frac{2\pi(1-am)y}{h} \right] \right\} \quad (19)$$

که ضرایب بی‌بعد و مجهول (f_1 تا f_9) با جایگذاری رابطه (۱۹) در رابطه (۱۵) بدست می‌آیند. حاصل آن با روابط (۲۰) تا ۲۸ بیان می‌شوند.

که A پارامتر مجهول است، $m \geq 3$ تعداد نیم‌موج‌ها در راستای میدان کشش که برای کمانش متقارن ورق دیوار به صورت اعداد فرد در نظر گرفته شده و α مقدار ثابت برای تنظیم کردن زاویه میدان کشش است. می‌توان نشان داد که قبل از تسلیم ورق دیوار، $\alpha = 1/3$ جواب‌های قابل قبولی بدست می‌دهد. همچنین، $\beta = \beta(y)$ برای نشان دادن تغییرمکان خارج از صفحه ستون‌های فرعی استفاده شده است. واضح است که تابع تغییرشکل پیشنهاد شده، رابطه (۳) و قسمت اول روابط (۴) و (۵) را ارضا می‌کند. با توجه به رابطه (۷)، $w(0, y) = A \beta \sin \frac{\pi y}{h}$ (یا رابطه ۵)، β تعیین می‌شود:

$$\beta(y) = \frac{D \pi^3}{k b h^2} [r^2 (1 + 3m^2) + 2 - \nu] \sin \frac{m \pi y}{h} \quad (8)$$

که $r = \frac{h}{b}$ نسبت ورق دیوار است. در پیوست (الف) نشان داده شده است که برای دیوارهای برشی فولادی نیمه‌مقید معمول، β مقدار قابل گذشت نسبت به دیگر پارامترها در رابطه (۷) دارد و به همین دلیل از آن صرف‌نظر می‌شود. به عبارتی دیگر، ستون‌های فرعی، تغییرمکان خارج از صفحه قابل توجهی قبل از اولین نقطه از تسلیم ورق ندارند. سرانجام رابطه (۷) اصلاح شده و به صورت رابطه (۹) بیان می‌شود. بدین ترتیب می‌توان ورق دیوار را به صورت چهار لبه ساده در نظر گرفت.

$$w(x, y) = A \sin \frac{\pi x}{b} \sin \frac{\pi y}{h} \sin \left(\frac{m \pi x}{b} - \frac{m \pi a y}{h} \right) \quad (9)$$

با توجه به شکل (۳)، رابطه (۱۰) شرایط مرزی نیرویی ورق دیوار را بیان می‌کند. در این رابطه، تنش‌های کششی با علامت مثبت در نظر گرفته شده‌اند.

$$y = 0, h \Rightarrow \begin{cases} \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} = -\tau \\ \sigma_y = \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} = -\frac{M_y}{I_s} \left(x - \frac{b}{2} \right) \end{cases} \quad (10)$$

در رابطه (۱۰):

$$\tau = \tau_{xy} = \frac{V_s}{b t} \quad (11)$$

$$M_y = M_s + V_s (h - y) \quad (12)$$

$$I_s = \frac{t b^3}{12} + 2 \left[I_{zz} + A_c \left(\frac{b}{2} \right)^2 \right] \quad (13)$$

در رابطه (۱۲)، M_y لنگر خمشی درون صفحه‌ای است که

$$G_4 = f_2 \cos \frac{2\pi y}{h} + f_3 \cos \left(\frac{2\pi x}{b} - \frac{2\pi y}{h} \right) + f_4 \cos \left(\frac{2\pi x}{b} + \frac{2\pi y}{h} \right) + m^2 \alpha^2 f_5 \cos \left(\frac{2m\pi x}{b} - \frac{2m\pi y}{h} \right) + m^2 \alpha^2 f_6 \cos \left[\frac{2(1-m)\pi x}{b} + \frac{2m\pi y}{h} \right] + f_7 \cos \left[\frac{2m\pi x}{b} - \frac{2(1+m)\pi y}{h} \right] + m^2 \alpha^2 f_8 \cos \left[\frac{2(1+m)\pi x}{b} - \frac{2m\pi y}{h} \right] + (1-2m\alpha)^2 f_9 \cos \left[\frac{2m\pi x}{b} + \frac{2(1-am)\pi y}{h} \right]$$

(۳۵)

$$G_5 = 2m\alpha \cos \frac{\pi y}{h} \sin \frac{\pi x}{b} \cos \left(\frac{m\pi x}{b} - \frac{m\pi y}{h} \right) + (1 + m^2 \alpha^2) \sin \frac{\pi x}{b} \sin \frac{\pi y}{h} \sin \left(\frac{m\pi x}{b} - \frac{m\pi y}{h} \right)$$

(۳۶)

$$G_6 = \frac{b-2x}{2EI_s} [M_s + V_s(h-y)]$$

(۳۷)

$$G_7 = -4\pi^2 \left\{ f_1 \cos \frac{2\pi x}{b} + f_3 \cos \left(\frac{2\pi x}{b} - \frac{2\pi y}{h} \right) + f_4 \cos \left(\frac{2\pi x}{b} + \frac{2\pi y}{h} \right) + m^2 f_5 \cos \left(\frac{2m\pi x}{b} - \frac{2m\pi y}{h} \right) + (1-m)^2 f_6 \cos \left[\frac{2\pi(1-m)x}{b} + \frac{2m\pi y}{h} \right] + m^2 f_7 \cos \left[\frac{2m\pi x}{b} - \frac{2\pi(1+m)y}{h} \right] + (1+m)^2 f_8 \cos \left[\frac{2\pi(1+m)x}{b} - \frac{2m\pi y}{h} \right] + m^2 f_9 \cos \left[\frac{2m\pi x}{b} + \frac{2\pi(1-am)y}{h} \right] \right\}$$

(۳۸)

$$G_8 = \left\{ m\pi \sin \frac{\pi x}{b} \cos \left(\frac{m\pi x}{b} - \frac{m\pi y}{h} \right) + \cos \frac{\pi x}{b} \sin \left(\frac{m\pi x}{b} - \frac{m\pi y}{h} \right) \right\} \cos \frac{\pi y}{h} + m\alpha \left\{ m \sin \frac{\pi x}{b} \sin \left[\frac{m\pi x}{b} - \frac{m\pi y}{h} \right] - \cos \frac{\pi x}{b} \cos \left[\frac{m\pi x}{b} - \frac{m\pi y}{h} \right] \right\} \sin \frac{\pi y}{h}$$

(۳۹)

$$G_9 = \frac{V_s x(x-b)}{2EI_s} - \frac{\tau}{E}$$

(۴۰)

$$G_{10} = 4\pi^2 \left\{ f_3 \cos \left(\frac{2\pi x}{b} - \frac{2\pi y}{h} \right) - f_4 \cos \left(\frac{2\pi x}{b} + \frac{2\pi y}{h} \right) + m^2 \alpha f_5 \cos \left(\frac{2m\pi x}{b} - \frac{2m\pi y}{h} \right) - m\alpha(1-m)f_6 \cos \left[\frac{2\pi(1-m)x}{b} + \frac{2m\pi y}{h} \right] + m(1+am)f_7 \cos \left[\frac{2m\pi x}{b} - \frac{2\pi(1+am)y}{h} \right] + m\alpha(1+m)f_8 \cos \left[\frac{2\pi(1+m)x}{b} - \frac{2m\pi y}{h} \right] - m(1-am)f_9 \cos \left[\frac{2m\pi x}{b} + \frac{2\pi(1-am)y}{h} \right] \right\}$$

(۴۱)

سرانجام، رابطه (۳۰)، تبدیل به یک معادله مرتبه سوم نسبت به

پارامتر مجهول A می شود:

$$f_1 = \frac{m^2 \alpha^2 + 1}{64r^2} \quad (۲۰)$$

$$f_2 = \frac{r^2(m^2 + 1)}{64} \quad (۲۱)$$

$$f_3 = -\frac{r^2 m^2}{128} \left(\frac{\alpha - 1}{r^2 + 1} \right)^2 \quad (۲۲)$$

$$f_4 = -\frac{r^2 m^2}{128} \left(\frac{\alpha + 1}{r^2 + 1} \right)^2 \quad (۲۳)$$

$$f_5 = \frac{r^2(1 + \alpha^2)}{64m^2(r^2 + \alpha^2)^2} \quad (۲۴)$$

$$f_6 = -\frac{r^2}{128} \left[\frac{m-1}{(m-1)^2 r^2 + m^2 \alpha^2} \right]^2 \quad (۲۵)$$

$$f_7 = -\frac{r^2}{128} \left[\frac{m\alpha + 1}{m^2 r^2 + (m\alpha + 1)^2} \right]^2 \quad (۲۶)$$

$$f_8 = -\frac{r^2}{128} \left[\frac{m+1}{(m+1)^2 r^2 + m^2 \alpha^2} \right]^2 \quad (۲۷)$$

$$f_9 = -\frac{r^2}{128} \left[\frac{m\alpha - 1}{m^2 r^2 + (m\alpha - 1)^2} \right]^2 \quad (۲۸)$$

در نهایت، تابع تنش ایری (F) بدست می آید:

$$F = F_h + F_p \quad (۲۹)$$

روش گالرکین برای رابطه (۱) بکار برده می شود تا ضریب

مجهول A بدست آید:

$$\frac{\pi^2 E t}{h^2} \int_0^h \int_0^b \left\{ A \left[\frac{\pi^2}{12(1-\nu^2)} \left(\frac{t}{h} \right)^2 (G_1 + G_2) + G_5 G_6 + 2r^2 G_8 G_9 \right] + \frac{A^3}{b^2} (4\pi^2 G_3 G_4 + G_5 G_7 + 2r G_8 G_{10}) \right\} \bar{w} dx dy = 0 \quad (۳۰)$$

در رابطه (۳۰):

$$\bar{w} = \sin \frac{\pi x}{b} \sin \frac{\pi y}{h} \sin \left(\frac{m\pi x}{b} - \frac{m\pi y}{h} \right) \quad (۳۱)$$

$$G_1 = 4m\alpha \left\{ [1 + r^2 + m^2(r^2 + \alpha^2)] \sin \frac{\pi x}{b} \cos \left(\frac{m\pi x}{b} - \frac{m\pi y}{h} \right) + 2r^2 m \cos \frac{\pi x}{b} \sin \left(\frac{m\pi x}{b} - \frac{m\pi y}{h} \right) \right\} \cos \frac{\pi y}{h}$$

(۳۲)

$$G_2 = \left\{ -4r^2 m [1 + r^2 + m^2(r^2 + \alpha^2)] \cos \frac{\pi x}{b} \cos \left(\frac{m\pi x}{b} - \frac{m\pi y}{h} \right) + \frac{m\pi \alpha y}{h} + [r^4(1 + 6m^2 + m^4) + 2r^2(1 + m^2)(1 + m^2 \alpha^2) + (1 + 6m^2 \alpha^2 + m^4 \alpha^4)] \sin \frac{\pi x}{b} \sin \left(\frac{m\pi x}{b} - \frac{m\pi y}{h} \right) \right\} \sin \frac{\pi y}{h}$$

(۳۳)

$$G_3 = \left\{ 2m \cos \frac{\pi x}{b} \cos \left(\frac{m\pi x}{b} - \frac{m\pi y}{h} \right) - (1 + m^2) \sin \frac{\pi x}{b} \sin \left(\frac{m\pi x}{b} - \frac{m\pi y}{h} \right) \right\} \sin \frac{\pi y}{h}$$

(۳۴)

با توجه به شرط مرزی رابطه (۵۲) بدست می‌آید.

$$u(x, 0) = 0 \quad (52)$$

با جایگذاری رابطه (۵۱) در رابطه (۵۰)، تابع جابه‌جایی افقی بدست می‌آید.

$$u(x, y) = -\frac{1}{G} \cdot \frac{\partial F}{\partial x} - \int \left(\frac{\partial w}{\partial x} \cdot \frac{\partial w}{\partial y} \right) dy + c \quad (53)$$

۴- بار برشی در اولین نقطه از تسلیم ورق

از آنجا که این روش تحلیلی برای ناحیه پس‌کمانشی الاستیک کاربردی است، بار جانبی تا تسلیم شدن اولین نقطه از ورق، قابل افزایش است. بنابراین نیروی برشی حدی که معادلات (۱) و (۲) را ارضا می‌کند، بدست می‌آید. چون معیار فن‌مایز سازگاری خوبی با مصالح شکل‌پذیر دارد [35]، رابطه (۵۴) برای تعیین مقدار تنش در نقاط مختلف ورق دیوار بکار گرفته می‌شود.

$$\sigma_e = \sqrt{\sigma_x^2 + \sigma_y^2 - \sigma_x \sigma_y + 3\tau^2} \quad (54)$$

در رابطه (۵۱)، σ_e شدت تنش معادل، σ_x ، σ_y و τ_{xy} تنش‌های درون صفحه‌ای هستند. برای پیدا کردن مختصات نقاط بحرانی که تسلیم از آنجا شروع می‌شود، معادلات (۵۵) باید به طور همزمان حل شوند.

$$\begin{cases} \frac{\partial \sigma_e}{\partial x} = 0 \\ \frac{\partial \sigma_e}{\partial y} = 0 \end{cases} \quad (55)$$

باید توجه داشت که حل رابطه (۵۵) منجر به تعیین تمام نقاط بحرانی تابع σ_e از قبیل نقاط ماکزیمم، مینم و زینی می‌شود. بنابراین باید نقطه ماکزیمم مطلق از بین آن‌ها انتخاب شود. از طرفی این دستگاه معادلات، به علت پیچیدگی‌های روابط موجود، حل صریح نداشته و باید به صورت عددی حل شود. پس ارتفاع و عرض ورق دیوار به ۱۰۰ قسمت مساوی تقسیم می‌شوند. سپس، مقدار تنش (σ_e) در مختصات ۱۰۰۰۰ مش ایجاد شده تعیین می‌شود و نقطه ماکزیمم مطلق بدست می‌آید. بعد از آن، بار جانبی افزایش داده می‌شود تا این نقطه به تنش

$$(S_1 + S_2 + S_3)A + (S_4 + S_5 + S_6)A^3 = 0 \quad (42)$$

$$S_1 = \frac{\pi^2}{12(1-\nu^2)} \left(\frac{t}{h} \right)^2 \int_0^h \int_0^b (G_1 + G_2) \bar{w} dx dy \quad (43)$$

$$S_2 = \int_0^h \int_0^b G_5 G_6 \bar{w} dx dy \quad (44)$$

$$S_3 = 2r^2 \int_0^h \int_0^b G_8 G_9 \bar{w} dx dy \quad (45)$$

$$S_4 = \frac{4\pi^2}{b^2} \int_0^h \int_0^b G_3 G_4 \bar{w} dx dy \quad (46)$$

$$S_5 = \frac{1}{b^2} \int_0^h \int_0^b G_5 G_7 \bar{w} dx dy \quad (47)$$

$$S_6 = \frac{2r}{b^2} \int_0^h \int_0^b G_8 G_{10} \bar{w} dx dy \quad (48)$$

حل غیربدهی رابطه (۴۲) دو ریشه یکسان با علامت‌های مختلف رابطه (۴۹) ارائه می‌دهد که مقدار مثبت آن در رابطه (۹) بکار گرفته می‌شود. سپس، خیز خارج از صفحه ورق و تابع تنش ایری در هر نقطه بدست می‌آیند.

$$A = \pm \sqrt{-\frac{S_1 + S_2 + S_3}{S_4 + S_5 + S_6}} \quad (49)$$

۳-۲- جابه‌جایی درون صفحه‌ای

همان‌طور که اشاره شد، مؤلفه دیگر میدان جابه‌جایی در راستای x اندازه‌گیری می‌شود و برای بدست آوردن منحنی نیروی برشی طبقه در مقابل جابه‌جایی افقی استفاده می‌شود. با ترکیب روابط کرنش-جابه‌جایی محوری در راستای x ، قانون کلی هوک و روابط تابع تنش ایری برای تنش‌های نرمال، جابه‌جایی افقی سیستم بدست می‌آید:

$$u(x, y) = \int \left[\frac{1}{E} \left(\frac{\partial^2 F}{\partial y^2} - \nu \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} \right) - \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 \right] dx + f(y) \quad (50)$$

در رابطه (۵۰)، $f(y)$ یک تابع یک متغیره است که با ترکیب روابط کرنش-جابه‌جایی برشی، قانون هوک و روابط تابع تنش ایری برای تنش برشی بدست می‌آید:

$$f(y) = -\frac{1}{G} \cdot \frac{\partial F}{\partial x} - \int \left[\frac{1}{E} \left(\frac{\partial^2 F}{\partial y^2} - \nu \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} \right) - \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 \right] dx - \int \left(\frac{\partial w}{\partial x} \cdot \frac{\partial w}{\partial y} \right) dy + c \quad (51)$$

در رابطه (۵۱)، G مدول برشی فولاد و c ثابت انتگرال است که

کمانش خارج از صفحه برای SSSW تا وقتی که به ظرفیت برشی نهایی خود برسد، اتفاق نمی افتد. ضعیف ترین ستون طوری انتخاب می شود که در هنگام باربری نهایی کمانش خارج از صفحه برای ستون ها اتفاق نیفتد [15,17]. جدول (۲) مساحت و ممان اینرسی مقطع عرضی ستون های فرعی بکار گرفته شده را نشان می دهد.

۵-۱- روش گام به گام برای یک نمونه

با استفاده از جدول های (۱ و ۲)، مدل ۸ برای حل گام به گام روش تحلیلی ارائه شده، انتخاب شده است.

- با فرض $m = 3$ و $\alpha = 1/3$ و استفاده از رابطه (۴۹)، پارامتر مجهول (A) بر حسب نیروی برشی بدست می آید که به صورت زیر خواهد بود (واحدهای V_s و A به ترتیب نیوتن و میلی متر هستند):

$$A = 0.1893 \sqrt{0.0173V_s - 3235.056}$$

- با استفاده از رابطه (۹)، خیز ورق دیوار بر حسب V_s در هر نقطه بدست می آید. برای نمونه، خیز مرکز دیوار به صورت زیر خواهد بود:

$$w\left(\frac{b}{2}, \frac{h}{2}\right) = 0.187 \sqrt{0.0173V_s - 3235.056}$$

- با استفاده از روش بیان شده در بخش ۴، بار برشی حدی بدست می آید که مقدار آن $V_{fy} = 628 \text{ kN}$ و مختصات مربوط به اولین نقطه از تسلیم ورق $x=b=2400 \text{ mm}$ و $y=0.56h=1512 \text{ mm}$ می باشد. در نهایت، $A_{max} = 16.53 \text{ mm}$ بدست می آید.

- با استفاده از رابطه (۵۳)، جابه جایی افقی بالای ورق دیوار بدست می آید:

$$u(0, h) = u(b, h) = 1.87 \text{ mm}$$

تسلیم (f_y) برسد. به عبارتی دیگر، نقطه ماکزیمم مطلق، اولین نقطه ای است که رابطه (۵۶) را ارضا می کند.

$$\left(\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}\right)^2 + \left(\frac{\partial^2 F}{\partial y^2}\right)^2 - \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} \cdot \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} + 3\left(\frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y}\right)^2 = f_y^2 \quad (56)$$

سرانجام، جابه جایی افقی سیستم، متناظر با نیروی برشی حدی از رابطه (۵۳) بدست می آید.

جدول ۱. مدل های انتخابی SSSW با ارتفاع ۲۷۰۰ میلی متر

Model	b (mm)	t (mm)	Secondary Columns
1	2100	2	2UNP80
2		3	2UNP100
3		4	2UNP100
4		5	2UNP120
5	2400	2	2UNP80
6		3	2UNP100
7		4	2UNP100
8		5	2UNP120
9	2700	2	2UNP80
10		3	2UNP100
11		4	2UNP100
12		5	2UNP120
13	3300	2	2UNP80
14		3	2UNP100
15		4	2UNP100
16		5	2UNP120

Table 1. The selected SSSWs with $h=2700 \text{ mm}$

۵- حل چند نمونه

روش حل بیان شده برای چندین نمونه با خواص هندسی و مصالح مختلف بکار گرفته شده است. در جدول (۱)، ۱۶ مدل انتخاب شده از سیستم SSSW با خواص هندسی مختلف ارائه شده است. همه مدل ها دارای ارتفاع ۲۷۰۰ میلی متر و مصالح آن ها دارای مدول یانگ ۲۰۰ گیگاپاسکال، ضریب پواسون ۰/۳ و تنش تسلیم ۲۴۰ مگاپاسکال است. ستون های فرعی استفاده شده دارای کوچکترین مقطع برای دیوار هستند، طوری که

جدول ۲. خواص هندسی ستون های فرعی

Secondary columns	$I_{zz} \text{ (cm}^4\text{)}$				$A_c \text{ (cm}^2\text{)}$			
	t = 2 mm	t = 3 mm	t = 4 mm	t = 5 mm	t = 2 mm	t = 3 mm	t = 4 mm	t = 5 mm
2UNP80	220.53	224.8	229.07	233.33	23.6	24.4	25.2	26
2UNP100	428.67	437	445.33	453.67	29	30	31	32
2UNP120	756.8	771.2	785.6	800	36.4	37.6	38.8	40

Table 2. The geometrical properties of used secondary columns

جدول ۳. مقایسه بین نتایج روش تحلیلی و اجزاءمحدود

Model No.	V_{fy}			w_c		
	Analytical method (kN)	FEM (kN)	Difference (%)	Analytical method (mm)	FEM (mm)	Difference (%)
1	200	174	14.9	16.46	15.9	3.5
2	302	270	11.8	16.16	16.4	1.5
3	398	367	8.4	15.64	16.5	5.2
4	553	530	4.3	15.17	16.8	9.7
5	226	210	7.6	17.66	16.2	9
6	350	318	10	17.36	16.5	5.2
7	452	440	2.7	16.9	17.5	3.4
8	628	605	3.8	16.48	17.9	7.9

Table 3. The comparisons between the results of analytical and FE methods

۲-۵- مقایسه روش تحلیلی و اجزاءمحدود

در مدل‌های اجزاءمحدود (FE) که برای راستی‌آزمایی روش تحلیلی در نظر گرفته شده‌اند، تحلیل غیرخطی هندسی با کنترل تغییرمکان در نرم‌افزار ABAQUS بکار گرفته شده است. برای ورق و ستون‌های فرعی از المان ۴ گرهی Shell با ابعاد مش ۵۰ در ۵۰ استفاده شده است. از آنجا که ورق در بالا و پایین دیوار به تیرهای صلب متصل است شرایط تکیه‌گاه ساده برای این لبه‌ها در نظر گرفته شده است. علاوه بر آن، لبه‌های بالا و پایین برای حرکت افقی به ترتیب آزاد و مقید هستند. لبه‌های چپ و راست ورق دیوار به صورت لبه‌های آزاد سخت شده در نظر گرفته شده‌اند.

جدول (۳) مقایسه بین نتایج روش تحلیلی و اجزاءمحدود را نشان می‌دهد. این نتایج شامل بار برشی حدی و خیز مرکز ورق دیوار وقتی که سیستم تحت بار V_{fy} است را نشان می‌دهد. مقایسه‌های انجام شده برای مدل‌های ۱ تا ۸ برای V_{fy} و $w_c = w\left(\frac{b}{2}, \frac{h}{2}\right)$ به ترتیب بیانگر بیشینه اختلاف ۱۴/۹ و ۹/۷ درصد بین دو روش است. کمترین اختلاف هم برای دو پارامتر مذکور به ترتیب ۲/۷ و ۱/۵ درصد است.

در شکل (۵)، دو منحنی V_s در مقابل $u_s = u(0, h)$ برای مدل ۸ که از روش تحلیلی و اجزاءمحدود بدست آمده‌اند، با یکدیگر مقایسه شده‌اند. نقطه انتهایی این منحنی، اولین نقطه از تسلیم دیوار را برای مدل ۸ نشان می‌دهد. این شکل نشان می‌دهد که در نیروی برشی یکسان، جابه‌جایی بدست آمده از روش اجزاءمحدود همواره بزرگتر از جابه‌جایی بدست آمده از روش

تحلیلی است. به عبارتی دیگر، شیب منحنی FEM کوچکتر از شیب منحنی بدست آمده از روش تحلیلی است. اختلاف موجود بین دو روش که در جدول (۳) و شکل (۵) مشاهده می‌شود، می‌تواند به این دلیل باشد که در روش تحلیلی، معادلات (۱ و ۲) بدون هیچ نقص هندسی در ورق دیوار حل شده‌اند. به عبارتی دیگر، میدان جابه‌جایی برای ورق ایده‌آل (صاف) بدست آمده است. اما در روش اجزاءمحدود، لازم است که یک نقص به صورت یک نیرو یا جابه‌جایی کوچک بر مرکز ورق دیوار اعمال شود. نقص اعمال شده منجر به این می‌شود که رفتار پس‌کمانشی در ورق دیوار توسعه پیدا کند و همین نقص باعث کاهش شیب منحنی بار-تغییرمکان بدست آمده از روش اجزاءمحدود نسبت به روش تحلیلی می‌شود که در شکل (۵) نشان داده شده است. نسبت بار برشی حدی به ظرفیت برشی نهایی [15,16] برای هر مدل در جدول (۴) ارائه شده است. جدول (۴) نشان می‌دهد که در مدل‌های فرض شده، نسبت بار در انتهای رفتار پس‌کمانش الاستیک به ظرفیت برشی نهایی بیشتر از ۰/۸ است. بنابراین بیشتر ظرفیت برشی در همین ناحیه بدست می‌آید. پس می‌توان نتیجه گرفت که در انتهای رفتار پس‌کمانشی الاستیک، بیشتر ظرفیت برشی بدست می‌آید و ناحیه کوچکی برای رفتار پس‌کمانش غیرالاستیک باقی می‌ماند. بنابراین، می‌توان با تقریب خوبی منحنی نیروی برشی در مقابل جابه‌جایی افقی را با یک منحنی ایده‌آل دو خطی (الاستو-پلاستیک) رسم کرد. شکل (۶) منحنی دو خطی ایده‌آل را نشان می‌دهد.

جدول ۴: نسبت V_{fy} به V_u برای تمام مدل‌ها

Model No.	V_{fy} (kN)	V_u (kN)	$\frac{V_{fy}}{V_u}$	Model No.	V_{fy} (kN)	V_u (kN)	$\frac{V_{fy}}{V_u}$
1	200	240	0.83	9	272	330	0.82
2	302	360	0.84	10	408	475	0.86
3	398	430	0.93	11	520	550	0.95
4	553	600	0.92	12	710	750	0.95
5	226	275	0.82	13	346	415	0.83
6	350	420	0.83	14	514	580	0.89
7	452	495	0.91	15	614	660	0.93
8	628	675	0.93	16	828	900	0.92

Table 4. Ratio of V_{fy} to V_u for all models

کلیدی این منحنی‌ها در جدول (۵) نشان داده شده است. این جدول تغییرشکل مرکز ورق دیوار را در انتهای رفتار الاستیک (w_c) و سختی الاستیک (k) را نیز نشان می‌دهد. جدول (۵) نشان می‌دهد که افزایش لنگر واژگونی منجر به کاهش هر دو جابه‌جایی می‌شود.

شکل (۸) منحنی‌های دو خطی بی‌بعد مدل ۱۰ را وقتی که ستون فرعی از ضیف‌ترین آن (2UNP100) تا پنج شماره بزرگتر از آن تغییر می‌کند، نشان می‌دهد. استفاده از ستون‌های قوی‌تر میدان کشش را در کل ورق توسعه می‌دهد و دیوار را به سمت مقید (ستنی) پیش می‌برد [15,17]. در این شکل، مشابه شکل (۷)، تغییرات مقطع ستون فرعی تأثیری بر شیب ناحیه الاستیک ندارد. جدول (۶) مقادیر نقاط کلیدی این منحنی‌ها را نشان می‌دهد. همان‌گونه که انتظار می‌رفت، ستون فرعی قوی‌تر باعث افزایش ظرفیت برشی و جابجایی افقی می‌شود.

شکل ۷: منحنی‌های دو خطی برای مدل ۱۰ با لنگرهای واژگونی مختلف

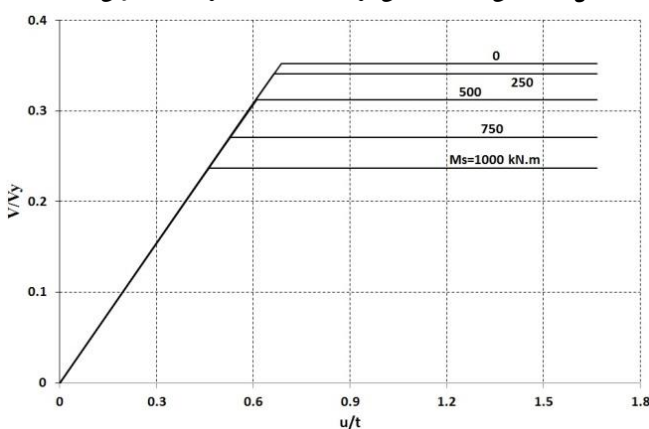


Fig. 7. The bilinear curves for Model #10 with different overturning moments

شکل ۵: مقایسه دو روش برای مدل ۸

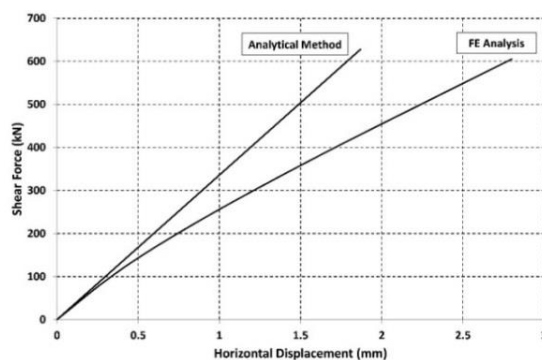


Fig. 5. Comparison of two methods for Model #8

شکل ۶: منحنی دوخطی $V_s - u_s$ برای سیستم SSSW

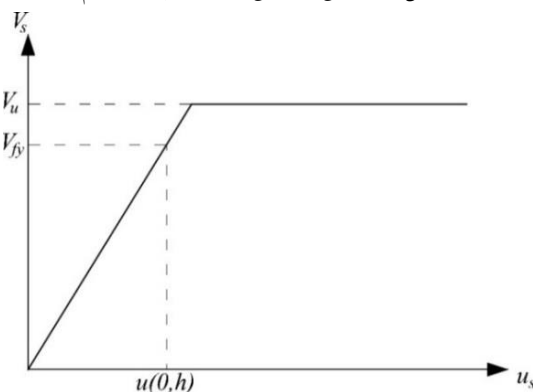


Fig. 6. A schematic bilinear $V_s - u_s$ curve for SSSW system

الگوی توصیف شده برای مدل ۱۰ در نظر گرفته شده و در شکل (۷) نشان داده شده است. در این شکل، منحنی‌های دو خطی در حضور لنگر واژگونی که از صفر تا 1000 kN.m با گام‌های 250 kN.m افزایش می‌یابد، به صورت بی‌بعد رسم شده‌اند. در این شکل $V_y = \frac{f_y}{\sqrt{3}} bt$ ، نیروی برشی تسلیم است. این شکل نشان می‌دهد که شیب ناحیه الاستیک، مستقل از تغییرات لنگر واژگونی است و فقط تراز خط پلاستیک (ظرفیت نهایی) با افزایش لنگر واژگونی کاهش می‌یابد. مقادیر نقاط

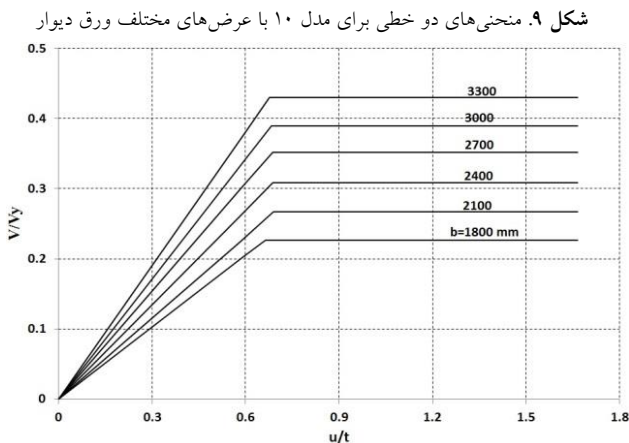


Fig. 9. The bilinear curves for Model #10 with different wall plate widths

جدول ۷. تأثیر عرض ورق دیوار بر ظرفیت برشی و جابه‌جایی‌های مدل

b (mm)	End of elastic behavior			k (kN/mm)	Vu (kN)
	V _{fy} (kN)	u _s (mm)	w _c (mm)		
1800	266	1.79	14.66	148.6	305
2100	302	1.74	16.16	173.6	360
2400	350	1.74	17.36	201.1	420
2700	408	1.77	18	230.5	475
3000	466	1.82	19	256	525
3300	514	1.82	18.8	282.4	580

Table 7. The effect of the wall plate width on the shear capacities and displacements of Model #10

۶- نتیجه‌گیری

در این مقاله، یک روش تحلیلی برای توصیف رفتار پس-کمانشی دیوارهای برشی فولادی نیمه‌مقید (SSSW) تحت بارهای جانبی ارائه شده است. در این سیستم، کمانش الاستیک همواره در بارگذاری سطح پایین رخ می‌دهد و این سیستم رفتار پس‌کمانشی الاستیک را در ناحیه نسبتاً وسیعی تجربه می‌کند. نتایج نشان می‌دهد که در دیوارهای معمول، نسبت بار در انتهای رفتار پس‌کمانش الاستیک به ظرفیت برشی نهایی بیشتر از ۰/۸ است. بنابراین بیشتر ظرفیت برشی در همین ناحیه بدست می‌آید. این ناحیه تا اولین نقطه از تسلیم ورق دیوار ادامه پیدا می‌کند. بعد از آن، پلاستیسیته در دیوار گسترش یافته تا منجر به رفتار پلاستیک کامل شود (ایجاد سازوکار). بنابراین

شکل (۹) منحنی‌های دو خطی بی‌بعد مدل ۱۰ را در هنگام تغییر عرض ورق دیوار از ۱۸۰۰ میلی‌متر تا ۳۳۰۰ میلی‌متر با گام‌های ۳۰۰ میلی‌متر، نشان می‌دهد. مشابه حالت‌های قبل، ورق دیوار با بزرگترین عرض منجر به افزایش شیب ناحیه الاستیک می‌شود. ظرفیت برشی و تغییر مکان خارج از صفحه سیستم نیز افزایش پیدا می‌کنند که مقادیر آن در جدول (۷) نشان داده شده است.

جدول ۵. تأثیر لنگر واژگونی (M_s) بر ظرفیت برشی و جابه‌جایی‌های مدل ۱۰

M _s (kN.m)	End of elastic behavior			k (kN/mm)	Vu (kN)
	V _{fy} (kN)	u _s (mm)	w _c (mm)		
0	408	1.77	18.44	230.5	475
250	381	1.65	17.68	230.9	460
500	352	1.53	16.9	230.1	420
750	323	1.4	16.09	230.7	365
1000	292	1.27	15.17	229.9	320

Table 5. The effect of overturning moment (M_s) on the shear capacities and displacements of Model #10

شکل ۸. منحنی‌های دو خطی برای مدل ۱۰ با ستون‌های فرعی مختلف

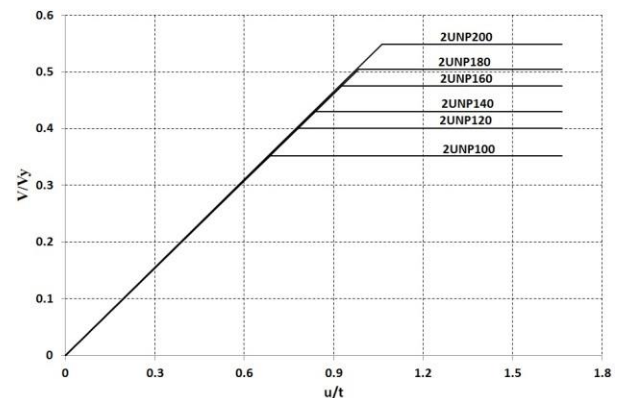


Fig. 8. The bilinear curves for Model #10 with different secondary columns

جدول ۶. تأثیر مقطع ستون‌های فرعی بر ظرفیت برشی و جابه‌جایی‌های مدل

Section of secondary columns	End of elastic behavior			k (kN/mm)	Vu (kN)
	V _{fy} (kN)	u _s (mm)	w _c (mm)		
2UNP100	408	1.77	18.44	230.5	475
2UNP120	430	1.86	18.45	231.2	540
2UNP140	453	1.96	18.66	231.1	580
2UNP160	468	2.03	18.71	230.5	640
2UNP180	480	2.08	18.72	230.8	680
2UNP200	490	2.11	18.65	232.2	740

Table 6. The effect of secondary columns section on the shear capacities and displacements of Model #10

آید.

$$\frac{d\beta}{dy} = 0 \quad (\text{الف-۱})$$

از آنجا که β وابسته به رابطه (۶) است، معادله (الف-۲) به صورت دو بخشی بدست می آید. هر بخش بایستی جداگانه حل شود تا موقعیت نقاط اکسترمم بدست آید.

$$3 \tan \frac{m\alpha\pi y}{h} + \frac{m\alpha\pi y}{h} = \begin{cases} 0 & ; 0 \leq \frac{y}{h} \leq \frac{1}{2} \\ m\alpha\pi & ; \frac{1}{2} \leq \frac{y}{h} \leq 1 \end{cases} \quad (\text{الف-۲})$$

این معادلات حل صریح ندارند و بایستی به صورت عددی حل شوند. حل این معادلات منجر به جواب‌هایی قابل قبولی مانند $\lambda_i = \frac{y_i}{h}$ می‌شود و مقادیر بیشینه و کمینه β بدست می آید:

$$\beta_i^{max/min} = \frac{\pi^3 t^3 r}{576 I_{xx} (1 - \nu^2)} [r^2 (1 + 3m^2) + 2 - \nu] \sin(m\alpha\pi\lambda_i) \times \begin{cases} \lambda_i^3 & ; 0 \leq \lambda_i \leq \frac{1}{2} \\ (1 - \lambda_i)^3 & ; \frac{1}{2} \leq \lambda_i \leq 1 \end{cases} \quad (\text{الف-۳})$$

با فرض $m = 3$ و $\alpha = 1/3$ و $\nu = 0/3$ ، جدول الف-۱ جواب‌های قابل قبول را در دامنه‌های تعریف شده و β های متناظر مدل‌های انتخاب شده در جدول (۱) را نشان می‌دهد. جدول (الف-۱) نشان می‌دهد که مقادیر بیشینه و کمینه β به ترتیب $1.224/64 \times 10^{-8}$ و $-2.227/42 \times 10^{-8}$ هستند. رابطه (الف-۴) تغییر شکل مرکز ورق دیوار را نشان می‌دهد. همان‌گونه که از این رابطه مشخص است، مقادیر بیشینه/کمینه β تأثیر خیلی کمی بر $w\left(\frac{b}{2}, \frac{h}{2}\right)$ دارند. می‌توان برای دیگر نقاط نیز نشان داد که مقادیر β قابل صرف نظر کردن است و تغییر مکان خارج از صفحه ستون‌های فرعی تقریباً صفر است.

$$w\left(\frac{b}{2}, \frac{h}{2}\right) = A[-\sin(0.45\pi) + \beta_i^{max/min}] \quad (\text{الف-۴})$$

ناحیه انتقالی (پس‌کمانشی غیرالاستیک) برای تقریب یک منحنی دو خطی ایده‌آل برای این سیستم به اندازه کافی کوچک است و می‌توان ناحیه پس‌کمانشی الاستیک را مستقیماً به ناحیه پلاستیک کامل متصل کرد. البته در مطالعات بعدی، منحنی دو خطی ایده‌آل می‌تواند به منحنی دو خطی اصلاح شده یا سه خطی بهبود پیدا کند.

روش گالرکین برای حل معادلات فن کارمن بکار گرفته شده است تا میدان جابه‌جایی سیستم تا زمانی که اولین نقطه از ورق تسلیم شود بدست آید. شرایط مرزی ورق دیوار به صورت دو لبه آزاد سخت شده (ستون‌های فرعی) و دو لبه با تکیه‌گاه‌های ساده (تیرهای طبقات) است که یکی از آن‌ها قابلیت جابه‌جایی افقی در راستای بار جانبی را دارد. یک تابع جدید با یک پارامتر مجهول پیشنهاد شد طوری که، شرایط مرزی را به خوبی ارضا می‌کند. نتایج بدست آمده با روش اجزاء محدود مورد مقایسه قرار گرفت و سازگاری خوبی مشاهده شد.

نتایج نشان دادند که برخی از پارامترها از قبیل ابعاد ورق دیوار، خواص هندسی ستون‌های فرعی (مساحت مقطع ستون فرعی، ممان اینرسی)، نیروی برشی طبقه و تنش تسلیم ورق دیوار بر نقطه انتهایی ناحیه پس‌کمانشی الاستیک تأثیر گذار هستند. اما شیب این ناحیه مستقل از تغییرات لنگر واژگونی و مقطع ستون‌های فرعی است. نتایج تحلیل‌های انجام شده روی انواع دیوار با لنگر و ستون‌های فرعی متفاوت، نشان دادند که شیب این ناحیه، مستقل از آن دو است.

۷- پیوست الف (تأثیر β بر خیز خارج از صفحه ستون فرعی)

در تابع تغییر شکل اولیه بیان شده با رابطه (۷)، تابع β برای تغییر مکان خارج از صفحه ستون‌های فرعی در نظر گرفته شده است. برای پیدا کردن تغییر مکان بیشینه ستون‌های فرعی، مقادیر بیشینه و کمینه مطلق β باید طبق رابطه (الف-۱) بدست

جدول (الف-۱) مقادیر بیشینه و کمینه β از رابطه (۷)

Model No.	$r = \frac{h}{b}$	I_{xx} (cm ⁴)	$\beta_i^{max/min} \times 10^{-8}$			
			$\lambda_1 = 0.2$	$\lambda_2 = 0.427$	$\lambda_3 = 0.596$	$\lambda_4 = 0.821$
1	1.286	257.1	5.795	-76.81	204.89	-372.65
2		408.543	12.307	-163.13	435.16	-791.49
3		418.361	28.489	-377.61	1007.29	-1832.09
4		672.09	34.636	-459.08	1224.64	-2227.42
5	1.125	257.1	3.921	-51.98	138.66	-252.19
6		408.543	8.329	-110.4	294.50	-535.64
7		418.361	19.280	-255.54	681.68	-1239.86
8		672.09	23.440	-310.68	828.77	-1507.40
9	1	257.1	2.788	-36.950	98.57	-179.28
10		408.543	5.921	-78.479	209.35	-380.77
11		418.361	13.705	-181.66	484.59	-881.38
12		672.09	16.663	-220.86	589.15	-1071.57
13	0.818	257.1	1.569	-20.797	55.48	-100.90
14		408.543	3.332	-44.171	117.83	-214.31
15		418.361	7.714	-102.24	272.74	-496.07
16		672.09	9.378	-124.31	331.6	-603.12

Table A.1. The maximum and minimum of β in Eq. (7)

- [11] Fu, Y., Wang, F. and Bruneau, M., 2017. Diagonal tension field inclination angle in steel plate shear walls. *Journal of Structural Engineering*, 143(7), p.04017058.
- [12] Asl, M.H. and Safarkhani, M., 2017. Seismic behavior of steel plate shear wall with reduced boundary beam section. *Thin-Walled Structures*, 116, pp.169-179.
- [13] Xue, M., & Lu, L. (1994). Interaction of Infilled Steel Shear Wall Panels with Surrounding Frame Members. *Proceedings of Annual Task Group Technical Session, Structural Stability Research Council: reports on current research activities*.
- [14] Driver, R.G., Grondin, G.Y., Behbahanifard, M.R. and Hussain, M.A., 2001. Recent developments and future directions in steel plate shear wall research. *NASCC Proceedings*.
- [15] Moharrami, H., & Jahanpour, A. (2016). *Limit Analysis and Design of Semi-supported Steel Shear Walls*. Tehran: Tarbiat Modares University Press (In Persian).
- [16] Jahanpour, A., Moharrami, H. and Aghakoochak, A., 2011. Evaluation of ultimate capacity of semi-supported steel shear walls. *Journal of constructional steel research*, 67(6), pp.1022-1030.
- [17] Jahanpour, A. and Moharrami, H., 2015. Evaluation of behavior of the secondary columns in semi-supported steel shear walls. *Thin-Walled Structures*, 93, pp.94-101.
- [18] Moharrami, H., Habibnejad, A., Mazrouei, A., & Alizadeh, H. (2006). *Semi-supported Thin Steel Shear Walls*. Tehran: The Building and Housing Research Centre.
- [19] Jahanpour, A., Jönsson, J. and Moharrami, H., 2012. Seismic behavior of semi-supported steel shear walls. *Journal of constructional steel research*, 74, pp.118-133.
- [20] Shekastehband, B., Azaraxsh, A.A., Showkati, H. and Pavir, A., 2017. Behavior of semi-supported steel

References

۸- مراجع

- [1] Astaneh-Asl, A. (2001). Seismic Behavior and Design of Steel Shear Walls. Steel Tips Reports.
- [2] Sabouri-Ghomi, S., Ventura, C.E. and Kharrazi, M.H., 2005. Shear analysis and design of ductile steel plate walls. *Journal of Structural Engineering*, 131(6), pp.878-889.
- [3] Xu, L. and Martinez, J., 2006. Strength and stiffness determination of shear wall panels in cold-formed steel framing. *Thin-Walled Structures*, 44(10), pp.1084-1095.
- [4] Topkaya, C. and Atasoy, M., 2009. Lateral stiffness of steel plate shear wall systems. *Thin-Walled Structures*, 47(8-9), pp.827-835.
- [5] Astaneh-Asl, A. and Zhao, Q., 2001. Cyclic tests of steel shear walls. *Report Number UCB/CE-Steel-01/01, Department of Civil and Environmental Engineering, University of California, Berkeley, August*.
- [6] Chen, S.J. and Jhang, C., 2011. Experimental study of low-yield-point steel plate shear wall under in-plane load. *Journal of Constructional Steel*.
- [7] Sabouri-Ghomi, S. and Mamazizi, S., 2015. Experimental investigation on stiffened steel plate shear walls with two rectangular openings. *Thin-Walled Structures*, 86, pp.56-66.
- [8] Li, C.H., Tsai, K.C., Huang, H.Y. and Tsai, C.Y., 2017. Cyclic tests of steel plate shear walls using box-shape vertical boundary elements with or without infill concrete. *Earthquake Engineering & Structural Dynamics*, 46(14), pp.2537-2564.
- [9] Bhowmick, A.K., Grondin, G.Y. and Driver, R.G., 2014. Nonlinear seismic analysis of perforated steel plate shear walls. *Journal of Constructional Steel Research*, 94, pp.103-113.
- [10] Zirakian, T. and Zhang, J., 2015. Structural performance of unstiffened low yield point steel plate shear walls. *Journal of Constructional steel research*, 112, pp.40-53.

- [29] Bakker, M.C.M., Rosmanit, M. and Hofmeyer, H., 2007. Elastic post-buckling analysis of compressed plates using a two-strip model. *Thin-walled structures*, 45(5), pp.502-516.
- [30] Stamatelos, D.G., Labeas, G.N. and Tserpes, K.I., 2011. Analytical calculation of local buckling and post-buckling behavior of isotropic and orthotropic stiffened panels. *Thin-Walled Structures*, 49(3), pp.422-430.
- [31] Paik, J.K., Thayamballi, A.K., Lee, S.K. and Kang, S.J., 2001. A semi-analytical method for the elastic-plastic large deflection analysis of welded steel or aluminum plating under combined in-plane and lateral pressure loads. *Thin-Walled Structures*, 39(2), pp.125-152.
- [32] Dai, H., Yue, X. and Atluri, S., 2014. Solutions of the von kármán plate equations by a galerkin method, without inverting the tangent stiffness matrix. *Journal of Mechanics of Materials and Structures*, 9(2), pp.195-226.
- [33] Yukio, U., Rashed, S.M. and Paik, J.K., 1987. An incremental Galerkin method for plates and stiffened plates. *Computers & Structures*, 27(1), pp.147-156.
- [34] Ferreira, P.S. and Virtuoso, F.B., 2014. Semi-analytical models for the post-buckling analysis and ultimate strength prediction of isotropic and orthotropic plates under uniaxial compression with the unloaded edges free from stresses. *Thin-Walled Structures*, 82, pp.82-94.
- [35] Boresi, A. (2003). *Advanced Mechanics of Materials* (Sixth ed.). Hoboken: John Wiley & Sons, Inc.
- shear walls: Experimental and numerical simulations. *Engineering Structures*, 135, pp.161-176.
- [21] Shekastehband, B., Azaraxsh, A.A. and Showkati, H., 2018. Experimental seismic study on shear walls with fully-connected and beam-only-connected web plates. *Journal of Constructional Steel Research*, 141, pp.204-215.
- [22] Alexander, C., 1974. Principles of structural stability theory. *Massachusetts State University: Prentice-Hall Inc, USA*.
- [23] Sun, G., Kennedy, D. and Williams, F.W., 2000. A post-buckling analysis for isotropic prismatic plate assemblies under axial compression. *International journal of mechanical sciences*, 42(9), pp.1783-1803.
- [24] Byklum, E. and Amdahl, J., 2002. A simplified method for elastic large deflection analysis of plates and stiffened panels due to local buckling. *Thin-Walled Structures*, 40(11), pp.925-953.
- [25] Wang, H., Ou, M. and Wang, T., 1991. Post-buckling behaviour of orthotropic rectangular plates. *Computers & structures*, 41(1), pp.1-5.
- [26] Hui-shen, S., 1989. Postbuckling behaviour of rectangular plates under combined loading. *Thin-walled structures*, 8(3), pp.203-216.
- [27] Cole, J. D. (1968). *Perturbation Methods in Applied Mathematics* Blaisdell. Waltham, Mass.
- [28] Mijušković, O., Čorić, B. and Pavlović, M.N., 1999. Transverse-stiffener requirements for the post-buckling behaviour of a plate in shear. *Thin-walled structures*, 34(1), pp.43-63.

Elastic Stiffness of Semi-supported Steel Shear Walls

S. Ebrahim Sadat Kholerdi¹, Alireza Jahanpour^{2*}

1- PhD. student, M.Sc., Department of Civil Engineering, Malayer University, Malayer, Iran,

2- Assistant professor, Ph.D., Corresponding Author, Department of Civil Engineering, Malayer University, Malayer, Iran

*a.jahanpour@malayeru.ac.ir

Abstract:

Semi-supported steel shear walls (SSSW) are a new lateral resisting system whose plates do not have any direct connection to the main columns of structure. Instead, they are connected to secondary columns which do not carry the gravity loads. The applied lateral loads may create overturning moment on the middle storeys. The ultimate shear capacity of the SSSWs in presence of the overturning moment has been reasonably determined with an analytical procedure. It was finalized with some applicable interaction curves between the ultimate shear capacity and the overturning moment which can be used for analysis and design of this system. In addition, some experimental studies have been conducted to find an insight for the cyclic behavior of this system. As the elastic buckling of wall plate always occurs at the low levels of lateral loads, the system stays in a relatively large region of elastic post-buckling. In this region, the geometrical nonlinearity with linear material behavior appear in the wall plate. Thus, the storey shear force has a linear variation versus the lateral displacement until the first point of wall plate is yielded. Perhaps solution of the Von-karman plate equations is the best approach to find an analytical vision for the elastic stiffness of the SSSWs. These equations are described with two coupled nonlinear fourth order differential equations. The mentioned equations have been widely solved for many plates which are under combinations of different in-plane and out of plane loads and various boundary conditions and imperfections. In this study, the Galerkin method was employed in a semi analytical procedure to solve the Von-karman plate equations for the wall plate of SSSW system in a middle storey. This solution leads to achieve the displacement field of the SSSWs at the different levels of lateral loads until the first point of the wall plate is yielded. Thus, the linear variations of the in-plane displacement versus the lateral load will be obtained. Since the ultimate capacity has been previously measured, then an ideal elasto-plastic curve can be obtained for this system. The wall plate is supposed as a thin plate whose parallel edges have two different boundary conditions: two simply supported and two stiffened free edges where the wall plate is connected to the storeys beams and the secondary columns respectively. A sine monomial is considered as the deflection function which is satisfied the boundary conditions. Then, an algorithm is analytically developed to find the out of plane deflection of plate and the two-dimensional elasticity is used to determine the in-plane displacement of plate. The obtained results are compared with those of FE analysis and the suggested algorithm can be programmed in usual computers. The results show that some parameters such as the wall plate dimensions, the geometric properties of secondary columns (i.e. cross sectional area, moments of inertia), the storey shear force and yield stress of wall plate effect on the end point of elastic post-buckling. But, the slope of this region is independent from the variation of overturning moment and section of secondary columns.

Keywords: Semi-supported Steel Shear Walls (SSSWs), Elastic post-buckling, Elastic stiffness, Displacement field, Von-Karman plate equations, Galerkin method.