

# فرمول‌بندی و کاربرد المان‌های هنکل کروی در مدل‌سازی عددی مسائل پتانسیل به کمک روش المان مرزی

صالح حمزهء جواران<sup>۱\*</sup>، سعید شجاعی<sup>۲</sup>

۱- استادیار، بخش مهندسی عمران، دانشکده فنی و مهندسی، شهید باهنر کرمان

۲- دانشیار، بخش مهندسی عمران، دانشکده فنی و مهندسی، شهید باهنر کرمان

\* s.hamzeheijavaran@uk.ac.ir

تاریخ پذیرش: ۹۸/۷/۳۰

تاریخ دریافت: ۹۷/۶/۲۴

## چکیده

در این مقاله، یک آنالیز المان مرزی جدیدی برای مدل‌سازی مسائل دو بعدی پتانسیل پیشنهاد شده است. روش المان مرزی بر مبنای المان‌های هنکل کروی به منظور تقریب متغیرهای حالت معادلات دیفرانسیل پواسون و لاپلاس (پتانسیل‌ها و شارها)، با فرمول‌بندی شده است. با استفاده از غنی‌سازی توابع پایه شعاعی هنکل کروی، توابع انترپولاسیون روش المان مرزی حاصل شده‌اند. بدین منظور، به بسط تابعی‌ای که در آن فقط از تقریب توابع پایه شعاعی هنکل کروی استفاده می‌شود، ترم‌های چندجمله‌ای الحاق می‌شود. از جمله خواص منحصر بفرد انترپولاسیون پیشنهادی می‌توان به مشارکت میدان توابع نوع اول و دوم بسط در فضای مختلط علاوه بر اغنای میدان توابع چندجمله‌ای، بر خلاف توابع کلاسیک لاگرانژ که فقط توابع چندجمله‌ای را اغنا می‌کنند، اشاره کرد. به علاوه توابع شکل پیشنهادی از خاصیت قطعه قطعه پیوسته از مرتبه بینهایت سود می‌برند که این امر برای توابع شکل کلاسیک لاگرانژ که دارای مرتبه پیوستگی محدودی هستند، وجود ندارد. تابع هنکل کروی نوع اول دارای سینگولاریتی قوی در قسمت موهومی خود، تابع نیومن کروی، است که این مطلب عدم وجود حد برای میل نرم اقلیدس به سمت صفر را در بر دارد. در ادامه برای رفع سینگولاریتی از ترم اضافی با توان  $n+1$  استفاده شده است. پس از رفع سینگولاریتی، حالت حدی هماهنگی نقطه چشمه و گره مرزی محاسبه شده است. برای نشان دادن کارایی و دقت روش حاضر، چند نمونه عددی در نظر گرفته شده است و نتایج حاصل با نتایج حل تحلیلی و نتایج توابع شکل کلاسیک لاگرانژ مقایسه شده است. نتایج این مقایسه‌ها حاکی از دقت بسیار بالاتر روش پیشنهادی است.

**واژگان کلیدی:** المان‌های هنکل کروی، توابع پایه شعاعی، روش المان مرزی، مسائل پتانسیل دوبعدی، معادلات پواسون و لاپلاس

## ۱- مقدمه

پایدار، جریان سیال تراکم ناپذیر، پیچش مقاطع منشوری، انتشار آلودگی، مسئله نشت (حرکت آب در خاک) در حالت پایا و ...

بسیاری از مسائل فیزیک و مهندسی به طور مستقیم با مسائل پتانسیل در ارتباط‌اند که از آن جمله می‌توان به انتقال حرارت

است. تاکنون این روش در حل معادلات متعددی به کار گرفته شده است که از آن جمله می‌توان به حل معادلات لاپلاس و پواسون (مسائل پتانسیل) [13 و 12] اشاره کرد.

در طی دو دهه اخیر، روش‌های بدون المان از سوی برخی از پژوهشگران مورد توجه خاصی قرار گرفته‌اند. در این نوع از روش‌های عددی هیچ اتصالی<sup>۶</sup> بین گره‌ها در قالب المان وجود ندارد. انواع مختلفی از روش‌های بدون المان برای حل مسائل پتانسیل در پیشینه پژوهش‌های علمی گزارش شده است، که از آن جمله می‌توان به روش‌های المان آزاد<sup>۷</sup> [15 و 14]، روش‌های گره مرزی<sup>۸</sup> [16,17]، روش نقطه مرزی<sup>۹</sup> [18]، ترکیب FEM و روش بدون المان محلی پترو-گالرکین<sup>۱۰</sup> [19]، روش معادلات غیردرگیر<sup>۱۱</sup> [20] و روش هم‌هندسی [21-24] اشاره کرد.

در این مقاله، روی تخمین متغیر حالت مسائل پتانسیل با استفاده از توابع پایه جدید هنکل کروی تمرکز شده است و با استفاده از این توابع شکل پیشنهادی سعی شده است که خطای عددی به کمترین مقدار خود نسبت به سایر روش‌های عددی تنزل یابد. برای بهره‌گیری از مزیت‌های تابع پایه‌ی شعاعی<sup>۱۲</sup> هنکل کروی در تخمین متغیر حالت معادلات (و نه ترم غیر همگن کننده) از تکنیک غنی‌سازی<sup>۱۳</sup> در مختصات طبیعی استفاده شده است. به تازگی حمزه جواران و همکاران، از این توابع در حل مسائل الاستواستاتیک و الاستودینامیک، ویسکوالاستیک و سیالات تراکم‌ناپذیر بوسیله روش‌های المان محدود و المان مرزی استفاده کرده‌اند [25-28]. معمولاً توابع پایه شعاعی به دو دسته کلی و محلی تقسیم می‌شود. از جمله توابع پایه شعاعی کلی می‌توان به توابع مخروطی<sup>۱۴</sup> [29-32]، اسپلاین صفحه نازک<sup>۱۵</sup> [32-36]، گاوسین<sup>۱۶</sup> [34-39]، سینوسی<sup>۱۷</sup> [40]، چند ربعی<sup>۱۸</sup> [32,41-43]، چند ربعی معکوس<sup>۱۹</sup> [44]، فوریه<sup>۲۰</sup> [45]،

اشاره کرد. از دیدگاه ریاضی، مسائل مقدار مرزی<sup>۱</sup> پتانسیل شامل معادلات لاپلاس یا پواسون در یک حوزه مشخص همراه با شرایط مرزی معین، است [1]. امکان حل BVPs پتانسیل به صورت تحلیلی بیشتر در حالات ساده از هندسه و شرایط مرزی امکان‌پذیر است. بنابراین در بیشتر موارد، استفاده از روش‌های نیمه تحلیلی و یا عددی در حل این مسائل اجتناب‌ناپذیر است. تاکنون روش‌های عددی مختلفی از قبیل روش المان محدود<sup>۲</sup>، روش المان مرزی<sup>۳</sup>، روش المان مرزی-محدود مقیاس شده<sup>۴</sup> و روش‌های بدون المان<sup>۵</sup> در حل BVPs مهندسی به کار گرفته شده‌اند.

یکی از متعارف‌ترین روش‌های استفاده شده در مسائل مهندسی روش المان محدود است. مزیت‌هایی همچون مقارن و نواری بودن ماتریس ضرایب، عدم وجود تکنیک در انتگرال-گیری‌ها و ... سبب محبوبیت این روش در بین پژوهشگران شده است. به طوری که کاربرد آن در طیف وسیعی از مسائل مهندسی گزارش شده است [2-4]. با این حال، عدم نیاز به مش‌بندی روی کل حوزه و تبدیل آن به مش‌بندی روی مرزها و در نتیجه کاهش قابل ملاحظه‌ای در تعداد درجات آزادی سبب شده است تا روش المان مرزی جایگاه خاصی در بین روش‌های عددی پیدا کند [5-10]. این مزیت بارز روش المان مرزی سبب شده است تا در حل مسائل یکسان، این روش هزینه محاسباتی بسیار پایین‌تر و در نتیجه زمان پردازش کمتری نسبت به سایر روش‌های عددی داشته باشد.

روش المان مرزی-محدود مقیاس شده توانسته است با ترکیبی از مفهوم دو روش المان محدود و مرزی کارآمدی را در حل عددی معادلات دیفرانسیل با مشتقات جزئی ارائه کند [11]. اساس این روش بر پایه تبدیل معادلات حاکم با مشتقات جزئی به دستگاهی از معادلات دیفرانسیل با مشتقات معمولی، بنا شده

11. Decoupled equations method (DEM)
12. Radial basis functions (RBFs)
13. Enrichment
14. Conical
15. Thin plate spline (TPS)
16. Gaussian
17. Sinusoidal
18. Multiquadric
19. Inverse multiquadric
20. Fourier

1. Boundary value problems (BVPs)
2. Finite element method (FEM)
3. Boundary element method (BEM)
4. Scaled boundary finite element method (SBFEM)
5. Meshless methods
6. Connectivity
7. Element-free methods
8. Boundary node methods
9. Boundary point method
10. Meshless local Petrov–Galerkin method

و مرز در  $\xi$  هموار باشد اگر  $\xi \in \Gamma$ . همچنین برای نقطه چشمه  $\xi$  و نقطه میدان  $x$   $u^* = u^*(\xi, x)$  و  $q^* = q^*(\xi, x)$  به ترتیب بیانگر حل های اساسی پتانسیل و شار هستند [5]. به علاوه  $q$  نشان دهنده شار سطحی است.

از آنجا که آخرین ترم معادله (۲) انتگرال روی حوزه می باشد، بنابراین امکان فرمول بندی BEM در این مرحله وجود ندارد مگر اینکه انتگرال روی حوزه به طریقی به انتگرال روی مرز تبدیل شود. این تبدیل با استفاده از یک حل خصوصی  $F$  از معادله پواسون  $\nabla^2 F = f$  و بکارگیری تئوری گرین به صورت زیر قابل انجام است [56]:

$$\int_{\Omega} u_{,j} u_{,j} dz = c(\xi) F(\xi) + \int_{\Gamma} (F q^* - u^* F_{,n}) d\Gamma \quad (4)$$

که در آن  $F_{,n} = F_{,j} n_j$ ، و  $n_j$  بیانگر مؤلفه های بردار نرمال خارجی بر سطح است. با جایگذاری معادله (۴) در معادله (۲) رابطه زیر حاصل می شود:

$$\int_{\Gamma} u^* q d\Gamma + c(\xi) F(\xi) + \int_{\Gamma} (F q^* - u^* F_{,n}) d\Gamma \quad (5)$$

حال می توان از معادله (۵) به عنوان معادله اصلی برای المان بندی مرزی بهره جست چرا که در آن، همه انتگرال گیری ها روی مرز تعریف شده اند و هیچ انتگرال گیری روی حوزه در آن مشاهده نمی شود.

### ۳- پیشنهاد توابع شکل هنکل کرووی

می توان گفت در تمام روش های عددی سعی بر این است که با انجام عملیاتی روی معادله دیفرانسیل حاکم، آن را به سمت دستگاه معادلات جبری معادل ببرند. دلیل این امر این است رایانه ها در انجام عملیات جبری با چهار عمل اصلی بسیار سریعتر و آسانتر عمل می کنند. چگونه می توان یک دستگاه معادلات دیفرانسیل را به یک دستگاه معادلات جبری تبدیل کرد؟ همانطور که در فضای برداری هر بردار را می توان به صورت مجموعی از بردارهای پایه، ضرب در عدد اسکالر ثابت نوشت، در فضای

J-بسل ۱ [46-47]، مختلط فوریه ۲ [48-50] و از دسته توابع پایه-ی شعاعی محلی به توابع تکیه گاه فشرده ۳ [51-55] اشاره کرد. در این مقاله، از توسعه تابع پایه ی شعاعی J-بسل به ترکیب توابع بسل نوع اول و دوم در فضای مختلط برای استفاده در تخمین مسائل پتانسیل استفاده شده است. ذکر این مقایسه قابل ملاحظه است که: در توابع شکل لاگرانژی تنها میدان توابع چندجمله ای اغنا می شود در حالی که در توابع شکل هنکل علاوه بر میدان توابع چندجمله ای، از توابع هنکل کرووی (شامل توابع بسل نوع اول و دوم در فضای مختلط) نیز استفاده شده است. از دیگر خواص برتر توابع شکل پیشنهادی می توان به خاصیت قطعه قطعه پیوسته از مرتبه بینهایت اشاره کرد. چند مثال عددی در رابطه با کاربرد توابع شکل هنکل در روش المان مرزی برای حل مسائل پتانسیل استفاده شده است. برای نشان دادن کارایی و دقت این روش ها، نتایج روش پیشنهادی با نتایج حاصل از توابع شکل کلاسیک لاگرانژ و همچنین با حل تحلیلی مقایسه شده است.

### ۲- فرمول بندی BEM در حل مسائل پتانسیل

معادله حاکم بر رفتار مسائل پتانسیل برای هر نقطه دلخواه  $x$  از یک جسم دو بعدی با حوزه  $\Omega$  و مرز  $\Gamma$ ، به صورت زیر است [1]:

$$u_{,ij} + f = 0 \quad (1)$$

که در آن  $u = u(x)$  و  $f = f(x)$  به ترتیب بیانگر میدان پتانسیل (برای مثال در پیچش مقاطع منشوری، پتانسیل بیانگر تابع تنش پراختل می باشد) و یک تابع معلوم نسبت به مکان و کاما نشان دهنده مشتق نسبت به مختصات مکانی است.

با انتخاب تابع گرین معادله (۱) به عنوان سیستم تصویر اصل همگرایی ضعیف و چند انتگرال گیری جزء به جزء متوالی، معادله زیر بدست می آید [5]:

$$c(\xi) u(\xi) + \int_{\Gamma} q u u - \int_{\Gamma} u q u + \int_{\Omega} u_{,j} u_{,j} dz \quad (2)$$

که در آن

$$c(\xi) = \begin{cases} 0 & ; \xi \notin \Omega \\ \frac{1}{2} & ; \xi \in \Gamma \end{cases} \quad (3)$$

نوع اول الحاق می‌شود. بنابراین این چالش به ذهن می‌آید: آیا می‌توان از مزیت‌های هر دو نوع تابع در تقریب بهره جست؟ چالش‌های بالا ما را براین داشت تا به شکلی بتوان هم از توابع پایه شعاعی در تقریب متغیر حالت در قالب روش المان مرزی استفاده کرد و هم از مزیت‌های هر دو نوع توابع بسط کرووی بهره جست. بنابراین ایده استفاده از توابع هنکل کرووی که ترکیبی از توابع بسط نوع اول و دوم در فضای مختلط است به عنوان RBF مورد نظر و سپس غنی کردن این تابع پایه‌ی شعاعی مختلط در فضای مختصات طبیعی، شکل گرفت.

### ۳-۱- توابع پایه‌ی شعاعی هنکل کرووی برای یک المان سه گرهی

مطابق مفاهیم و چالش‌های ذکر شده در بخش قبل این مقاله، RBF مورد نظر به صورت زیر در نظر گرفته می‌شود:

$$R(r) = (\varepsilon r)^{n+1} h_n^{(1)}(\varepsilon r) \quad \varepsilon > 0, n = 0, 1, 2, \dots \quad (6)$$

که در آن  $\varepsilon$  و  $n$  پارامترهای شکل تابع پایه‌ی شعاعی هنکل کرووی هستند و

$$h_n^{(1)}(\varepsilon r) = \sqrt{\frac{\pi}{2(\varepsilon r)^{n+\frac{1}{2}}}} H_{n+\frac{1}{2}}^{(1)}(\varepsilon r)$$

بیانگر تابع

هنکل کرووی نوع اول از مرتبه  $n$  است. توجه شود که دارای سینگولاریتی قوی  $h_n^{(1)}(\varepsilon r) = j_n(\varepsilon r) + i y_n(\varepsilon r)$  در قسمت موهومی خود، تابع نیومن کرووی از مرتبه  $n$ ، است که این مطلب عدم وجود حد برای میل نرم اقلیدس  $r$  به سمت صفر را در بر دارد. بنابراین وجود ترم  $(\varepsilon r)^{n+1}$  در تابع پایه‌ی شعاعی مورد نظر باعث رفع سینگولاریتی می‌شود به طوری که:

$$\lim_{r \rightarrow 0} \Gamma(-n + \frac{1}{2}) \quad (7)$$

توابع پایه شعاعی هنکل کرووی برای یک المان سه گرهی دستگاه مختصات طبیعی  $\xi$  شکل (۱) برای استفاده در روش المان مرزی به صورت زیر قابل حصول هستند (جزئیات بیشتر در مراجع [25-28]).

تابعی هم می‌توان هر تابع را به صورت مجموعی از توابع پایه، ضرب در ضرایب ثابت نوشت (مفهوم بسط تابعی). اما سؤال اصلی که پیش می‌آید این است که چه نوع توابعی به عنوان توابع پایه در روش المان مرزی مناسب هستند؟

به طور کلی روش حل‌های خصوصی<sup>۱</sup> برای حل معادلات دیفرانسیل غیرهمگن با ارزش است. ایده اصلی روش مذکور در حل معادلات ناهمگن،  $Lu = f$ ، بسط عبارت ناهمگن  $f$  از نظر مقادیر آن در گره‌های درونیابی است که این مهم با استفاده از توابع پایه‌ی شعاعی انجام می‌شود. RBFها یکی از انواع توابع تقریب هستند که بر اساس نرم اقلیدس<sup>۲</sup> تشکیل می‌شوند. با توجه به پیشینه پژوهش‌های علمی در زمینه درونیابی توسط توابع پایه شعاعی، یک نکته قابل شهود است و آن اینکه هیچ اتصالی بین گره‌های درونیابی استفاده شده برای این توابع در قالب المان وجود ندارد. حال در اینجا این ایده به ذهن می‌آمد که آیا می‌توان علاوه بر درونیابی ترم‌های غیر همگن کننده از مزیت و قدرت RBFها در درونیابی متغیرهای هندسی و فیزیکی (متغیر حالت معادله دیفرانسیل و مشتقات آن) خود معادله دیفرانسیل با استفاده از روش المان مرزی که در آنها ارتباط بین گره‌های درونیابی توسط المان‌ها برقرار می‌شود، استفاده کرد؟

در میان استفاده از توابع بسط به عنوان توابع پایه در یک ترکیب خطی، می‌توان به سری بسط-فوریه و تابع پایه شعاعی J-بسط در پیشینه پژوهش‌های علمی، اشاره کرد. چندی قبل، حمزه جواران و همکاران [46] استفاده از J-بسط را در تقریب ترم اینرسی معادله ناویه (ترم غیر همگن کننده) پیشنهاد کردند و با حل معادلات دیفرانسیل مربوط به شرایط مرزی بینهایت نتایج نسبتاً خوبی را بدست آوردند. تابع پایه‌ی شعاعی J-بسط تنها از خواص تابع بسط کرووی نوع اول بهره می‌جوید. اما در اغلب حالات، تابع بسط نوع اول نمی‌تواند به تنهایی تمام خواص یک پدیده فیزیکی را بیان نماید. برای نمونه، در حل معادله دیفرانسیل بسط برای ایجاد یک حل کامل، تابع نیومن (تابع بسط نوع دوم) به صورت یک ترکیب خطی به تابع بسط

$$\sum_{j=1}^n \phi_j(\xi) = 1 + 0i$$

- خاصیت افراز واحد

- قطعه قطعه پیوسته از مرتبه بینهایت

- دارا بودن هم‌زمان میدان توابع چندجمله‌ای، بسط نوع

اول و دوم

### ۵- گسسته سازی عددی

از معادله (۵) می‌توان به عنوان معادله اصلی برای استفاده از المان‌های هنکل کروی در BEM بهره جست، چرا که در آن همه انتگرال‌گیری‌ها روی مرز تعریف شده‌اند و هیچ انتگرال‌گیری روی حوزه در آن مشاهده نمی‌شود. بدین صورت که مرز مسئله با یک سری از المان‌های هنکل کروی گسسته می‌شود و در هر یک از آنها پتانسیل و شار مربوطه با درونیابی به وسیله مقادیر گرهی‌شان تعیین می‌شوند. برای هر نقطه مرزی  $i$ ، فرم گسسته معادله (۵) به صورت رابطه زیر قابل حصول است [5].

$$\sum_{j=1}^{NE} \bar{r}_j \left( \int_{\Gamma_j} q^* \Phi d\Gamma \right) F_j^i - \sum_{j=1}^{NE} \left( \int_{\Gamma_j} u^* \Phi d\Gamma \right) F_j^i \quad (11)$$

که در آن  $NE$  بیانگر تعداد المان‌های هنکل کروی و  $\Phi$  معرف بردار  $1 \times 3$  توابع شکل هنکل کروی (معادله ۸) است. معادله (۱۱) را می‌توان به صورت یک جمع روی  $N$  گره مرزی به فرم ماتریسی زیر نوشت:

$$\mathbf{Hu} = \mathbf{Gq} + \mathbf{D} \quad (12)$$

که در آن

$$\mathbf{D} = \mathbf{HF} - \mathbf{GF}_{,n} \quad (13)$$

$\mathbf{H}$  و  $\mathbf{G}$  ماتریس‌های  $N \times N$  مشهور روش المان مرزی هستند که با توابع شکل هنکل کروی حاصل می‌شوند. همچنین  $\mathbf{u}, \mathbf{q}, \mathbf{F}, \mathbf{F}_{,n}$  معرف بردارهایی با  $N$  درایه هستند.

$$\phi_2(\xi) = (1 - \bar{c}) - g(\xi)$$

$$\phi_3(\xi) = \frac{1}{2}(\xi + \bar{c} + g(\xi)) \quad (8)$$

که در آنها تابع مختلط  $g(\xi)$  و  $\bar{c}$  عبارت است از:

$$\bar{c} = 2c \left[ -\varepsilon^{n+1} h_n^{(1)}(\varepsilon) + \alpha \right] \quad (9)$$

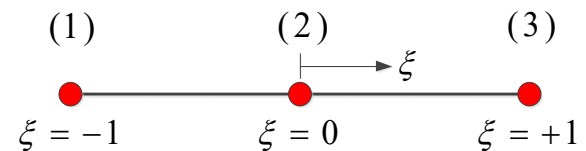


Fig. 1. Three-node element in the natural coordinate system

شکل ۱. المان سه گرهی در دستگاه مختصات طبیعی

اما نکته بسیار مهم اینکه اگر توابع شکل به دست آمده  $\phi_1(\xi)$  و  $\phi_3(\xi)$  با توابع شکل کلاسیک المان خطی لاگرانژی مقایسه شوند نتایج جالبی حاصل می‌شود:

$$\frac{1}{2}(\xi+1) \quad \frac{1}{2}(\xi+\bar{c}+g(\xi)) \quad (10)$$

مشاهده می‌شود که تنها تفاوت بین این دو نوع تابع شکل، تابع  $g(\xi)$  است که به انتهای تابع شکل هنکل کروی اضافه شده است و به نظر می‌رسد یکی از مزیت‌های تابع شکل هنکل همین تابع الحاقی  $g(\xi)$  باشد که با توجه به توابع قدرتمندی که در خود جای داده است، در بهبود دقت موثر است.

### ۴- خواص توابع شکل هنکل کروی

خواص توابع شکل هنکل کروی شامل موارد زیر است:

- خاصیت دلتای کرونیگر  $\phi_m(\xi_n) = \delta_{mn} (1 + 0i)$

## ۶- وفقی کردن پارامتر شکل

با مروری بر توابع پایه‌ی شعاعی پیشین، این نکته قابل‌شهود است که معمولاً این نوع از توابع انترپولاسون دارای تعدادی پارامتر شکل است. در پیشینه پژوهش‌های علمی، هدف از بکارگیری پارامتر شکل، افزایش دقت و کارایی RBFها در درون‌یابی گزارش شده است [57]. برخی توابع پایه شعاعی شامل یک پارامتر شکل می‌باشند که از آن جمله می‌توان به توابع مخروطی، چند ربعی، چند ربعی معکوس، گوسین و بسل نوع اول اشاره کرد [46]. بعضی دیگر دارای دو پارامتر شکل مانند J-RBF [47] و مختلط فوریه [48-50] و برخی شامل سه پارامتر مثل تابع مرکب مخروطی-اسپلاین [38] و هستند. تابع شکل پیشنهادی دارای دو پارامتر شکل  $n, \epsilon$  است که  $n$  از مجموعه اعداد صحیح و  $\epsilon$  از مجموعه اعداد حقیقی مثبت می‌باشد. بنابراین تابع شکل هنکل کروی شامل دو پارامتر است. به طور کلی، پارامتر شکل بیانگر عددی ثابت است که می‌تواند در جهت افزایش دقت مسئله انتخاب شود [54]. این بدین معنی است که مقدار مطلوب پارامتر شکل می‌تواند در مسائل مختلف، بسته به نوع آنالیز (ارتعاش آزاد و یا اجباری)، ماهیت بار وارد شده و مواردی از قبیل آن، متفاوت باشد. برای نمونه سامان و راشد در مرجع [42] دو پارامتر شکل  $C=0.01, 1$  در کاربرد توابع پایه شعاعی چند ربعی برای ارتعاش اجباری پیشنهاد کرده‌اند، در حالیکه در مرجع [43] از سه پارامتر شکل متفاوت دیگر  $C=0.01, 0.1, 3$  برای ارتعاش آزاد استفاده کرده‌اند. به عنوان مثالی دیگر می‌توان به مرجع [39] اشاره کرد که در آن پارامترهای شکل ارائه شده برای مسائل مجزا در ارتعاش اجباری، متفاوت است. این مطالب حاکی از آن است که استفاده‌کنندگان از توابع پایه‌ی شعاعی، همواره در جستجوی مقداری مطلوب برای پارامتر شکل هستند که در پی آن بهترین نتایج برای مسئله مورد نظرشان به وجود آید. بنابراین ضرورت یک روند سعی و خطا در انتخاب پارامتر شکل ضروری به نظر می‌رسد [46].

در پیشینه پژوهش‌های علمی، استفاده از یک مسئله بهینه سازی برای پیدا کردن پارامترهای مجهول RBF نیز گزارش شده است [57 و 45 و 42]، اما استفاده از روش‌های بهینه سازی نیازمند تابع هدف است که با توجه به مراجع مذکور، این تابع بیشتر از

تفاوت‌های بین حل‌های عددی و تحلیلی حاصل می‌شود. اگرچه روش‌های بهینه سازی نتایج دقیق‌تری نسبت به پروسه‌های سعی و خطا ارائه می‌دهند، لکن محدودیت اصلی آنها در وابستگی به تابع هدف مناسب است. این چالش برای خیلی از مسائل عملی که حل دقیق آنها موجود نیست وجود دارد.

در این مقاله، از یک پروسه سعی و خطای ساده که بر پایه نتایج آنالیز دو مش متوالی استوار است، برای وفقی سازی استفاده شده است. در این روش از حل‌های عددی ونه تحلیلی برای پیدا کردن جواب مطلوب استفاده می‌شود. روش پیشنهادی از نرخ همگرایی بالایی برخوردار است که این امر در مثال‌های ارائه شده در قسمت بعد کاملاً مشهود است. مراحل انجام در زیر آورده شده است:

الف- یک مش درشت (تحت عنوان مش اولیه) برای مسئله در نظر گرفته می‌شود.

ب- با حل مسئله، مقادیر گرهی مش اولیه حاصل می‌شود.  
ج- برای تولید مش ثانویه، هر یک از المان‌های مش اولیه به دو المان تقسیم می‌شود.

د- با حل مسئله، مقادیر گرهی مش ثانویه نیز بدست می‌آید.  
ه- در این مرحله معیار همگرایی به صورت "جمع اختلاف بین مقادیر گرهی دو مش متوالی" در نظر گرفته می‌شود.

و- پارامتر شکل طوری محاسبه می‌شود که معیار همگرایی مرحله بالا کمترین شود.

این روش از کارایی بسیار بالایی برخوردار است به طوریکه نتایج نمونه‌های ارائه شده (قسمت ۷) کاملاً درستی این مطلب را نشان می‌دهد.

## ۷- نمونه‌های عددی

دو نمونه عددی در رابطه با کاربرد توابع شکل هنکل کروی در روش المان مرزی برای حل مسائل پتانسیل مورد استفاده قرار گرفته است. برای نشان دادن کارایی و دقت این روش، نتایج روش پیشنهادی با نتایج حاصل از توابع شکل کلاسیک لاگرانژ و همچنین با حل تحلیلی مقایسه شده است. در نمونه دوم نتایج در دو مش ارائه شده است.

جدول ۱. نتایج حاصل از توابع شکل پیشنهادی هنکل کروی، توابع شکل کلاسیک لاگرانژ و حل تحلیلی در نمونه اول.

Node	Unknown Boundary Value	Lagrange Shape Function	Spherical Hankel Shape Function	Exact
1	q (left boundary)	50.3145 (0.63%)	50.0004 (0.83e-3%)	50
2	u	150.0000 (0.94e-13%)	150.0000 (0.72e-12%)	150
3	q (right boundary)	-50.3145 (0.63%)	-50.0004 (0.83e-3%)	-50
4	q	-49.2167 (1.57%)	-50.0015 (0.30e-2%)	-50
5	q (right boundary)	-50.3145 (0.63%)	-50.0004 (0.83e-3%)	-50
6	u	150.0000 (0.32e-12%)	150.0000 (0.19e-12%)	150
7	q (left boundary)	50.3145 (0.63%)	50.0004 (0.83e-3%)	50
8	q	49.2167 (1.57%)	50.0015 (0.30e-2%)	50

Table 1. The results of proposed spherical Hankel shape functions, classic Lagrange shape functions and analytical solution for the first example

۲-۲- حوزه حلقوی شکل با شرایط مرزی همگن

یک حوزه رینگ شکل با شعاع داخلی ۱ و شعاع خارجی ۲ با شرایط مرزی همگن در مرزهای داخلی و خارجی به عنوان مثال دوم با معادله دیفرانسیل پواسون انتخاب شده است (شکل ۳-الف). حل تحلیلی آن با معادله  $u(r) = -\frac{3}{\ln 2} \ln r + r^2 - 1$  بیان می‌شود که در آن

$r = \sqrt{x^2 + y^2}$  . از لحاظ کاربرد مهندسی، این مسئله

مصادق کامل پیچش یک عضو منشوری با مقطع حلقوی می‌باشد که در آن تابع تنش پراوتل در مختصات قطبی به فرم معادله بالا قابل حصول است. به منظور مش‌بندی مرز مسئله از دو تیپ المان‌بندی (چهار و هشت المان مرزی سه گرهی هنکل کروی)، مطابق شکل‌های (۳-ب و ۳-ج)، استفاده شده است. به گونه‌ای که در حالت استفاده از ۴ المان، هر نیم کمان دایره داخلی و خارجی به عنوان یک المان و در حالت استفاده از ۸ المان، هر ربع کمان دایره داخلی و خارجی به عنوان یک المان عمل می‌کند. نتایج عددی حاصل از توابع شکل پیشنهادی با نتایج حاصل توابع شکل کلاسیک لاگرانژ و همچنین با حل تحلیلی مقایسه شده‌اند. این مقایسه‌ها برای هر دو نوع مش‌بندی چهار المان و هشت المان بطور جداگانه

۷-۱- مسئله انتقال حرارت در یک فضای مستطیل شکل

نخستین مسئله‌ای که در این بخش بررسی شده است، یک نمونه از مسئله حرارت در حوزه چهارضلعی مطابق شکل ۲-ا است. مرزهای چپ و راست دارای شرایط مرزی دریکله و مرزهای بالا و پایین دارای شرایط مرزی نیومن هستند (شکل ۲-ا). معادله حاکم بر این مسئله از نوع معادله دیفرانسیل لاپلاس بوده و حل تحلیلی آن به صورت  $u(x, y) = 300 - 50x$  قابل بیان است. به منظور حل این مسئله با استفاده از روش پیشنهادی، مطابق شکل ۲-ب از چهار المان سه گرهی (هر ضلع مستطیل یک المان) برای مش‌بندی مرز مسئله استفاده شده است. نتایج بدست آمده از توابع شکل هنکل کروی با توابع شکل کلاسیک لاگرانژ و حل دقیق در قالب مقادیر مجهول مرزی در جدول (۱) مقایسه شده‌اند. با مقایسه بین نتایج به دست آمده ملاحظه می‌شود که پاسخ‌های به دست آمده از روش پیشنهاد شده با پاسخ‌های روش تحلیلی هماهنگی بیشتری دارند.

شکل ۲. الف) هندسه و شرایط مرزی حوزه مستطیلی با معادله دیفرانسیل لاپلاس. ب) المان‌بندی مرز مسئله با استفاده از چهار المان سه گرهی هنکل کروی.

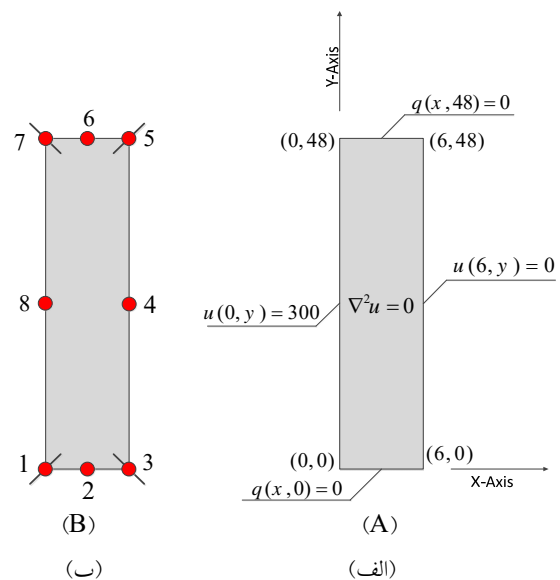


Fig. 2. (A) Geometry and boundary conditions of the rectangular domain with the Laplace differential equation (B) The discretization of the problem's boundary by using four three-node spherical Hankel elements

جدول ۲. نتایج حاصل از توابع شکل پیشنهادی هنکل کروی، توابع شکل کلاسیک لاگرانژ و حل تحلیلی در نمونه سوم با معادله دیفرانسیل پواسون برای حالت استفاده از چهار المان

Node	Unknown Boundary Value	Lagrange Shape Function	Spherical Hankel Shape Function	Exact
1	q	1.1043 (39.85%)	1.9107 (4.07%)	1.8360
2	q	1.5861 (13.61%)	1.8279 (0.44%)	1.8360
3	q	1.1043 (39.85%)	1.9107 (4.07%)	1.8360
4	q	1.5861 (13.61%)	1.8279 (0.44%)	1.8360
5	q	3.0194 (29.69%)	2.3281 (0.18e-3%)	2.3281
6	q	2.4409 (4.85%)	2.3195 (0.37%)	2.3281
7	q	3.0194 (29.69%)	2.3281 (0.18e-3%)	2.3281
8	q	2.4409 (4.85%)	2.3195 (0.37%)	2.3281

Table 2. The results of proposed spherical Hankel shape functions, classic Lagrange shape functions and analytical solution for the third example with Poisson differential equation using four elements

جدول ۳. نتایج حاصل از توابع شکل پیشنهادی هنکل کروی، توابع شکل کلاسیک لاگرانژ و حل تحلیلی در مثال سوم با معادله دیفرانسیل پواسون برای حالت استفاده از هشت المان.

Node	Unknown Boundary Value	Lagrange Shape Function	Spherical Hankel Shape Function	Exact
1	q	1.7931 (2.34%)	1.8360 (0.27e-4%)	1.8360
2	q	1.8186 (0.95%)	1.8366 (0.35e-1%)	1.8360
3	q	1.7931 (2.34%)	1.8360 (0.27e-4%)	1.8360
4	q	1.8186 (0.95%)	1.8366 (0.35e-1%)	1.8360
5	q	1.7931 (2.34%)	1.8360 (0.27e-4%)	1.8360
6	q	1.8186 (0.95%)	1.8366 (0.35e-1%)	1.8360
7	q	1.7931 (2.34%)	1.8360 (0.27e-4%)	1.8360
8	q	1.8186 (0.95%)	1.8366 (0.35e-1%)	1.8360
9	q	2.3776 (2.13%)	2.3291 (0.45e-1%)	2.3281
10	q	2.3373 (0.40%)	2.3270 (0.48e-1%)	2.3281
11	q	2.3776 (2.13%)	2.3291 (0.45e-1%)	2.3281
12	q	2.3373 (0.40%)	2.3270 (0.48e-1%)	2.3281
13	q	2.3776 (2.13%)	2.3291 (0.45e-1%)	2.3281
14	q	2.3373 (0.40%)	2.3270 (0.48e-1%)	2.3281
15	q	2.3776 (2.13%)	2.3291 (0.45e-1%)	2.3281
16	q	2.3373 (0.40%)	2.3270 (0.48e-1%)	2.3281

Table 3. The results of proposed spherical Hankel shape functions, classic Lagrange shape functions and analytical solution for the third example with Poisson differential equation using eight elements

به ترتیب در جداول (۲ و ۳) ارائه شده‌اند. همان‌گونه که از جداول پیداست، نتایج حاصل از توابع شکل پیشنهادی در مقایسه با توابع شکل لاگرانژ، هماهنگی بیشتری با حل‌های تحلیلی دارد که این موضوع در حالت استفاده از چهار المان مشهودتر است.

شکل ۳. (الف) هندسه و شرایط مرزی حوزه رینگ شکل با معادله دیفرانسیل پواسون. (ب) المان‌بندی مرزهای مسئله با استفاده از چهار المان سه‌گره‌ای هنکل کروی. (پ) المان‌بندی مرزهای مسئله با استفاده از هشت المان سه‌گره‌ای هنکل کروی.

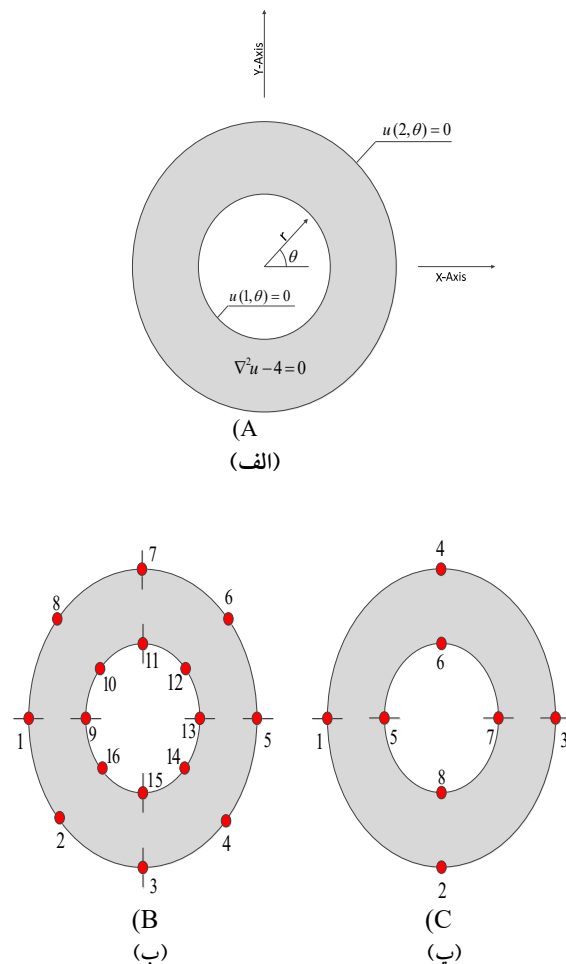


Fig. 3. (A) Geometry and boundary conditions of the ring-shaped domain with Poisson differential equation (B) The discretization of the problem's boundary by using four three-node spherical Hankel elements (C) The discretization of the problem's boundary by using eight three-node spherical Hankel elements



## ۸- نتیجه گیری

در این مقاله، برای مدل‌سازی مسائل پتانسیل دو بعدی، یک آنالیز المان مرزی جدید پیشنهاد شد. به منظور تقریب متغیرهای حالت معادلات دیفرانسیل پواسون و لاپلاس (پتانسیل‌ها و شارها)، روش المان مرزی بر مبنای المان‌های هنکل کروی بازفرمول‌بندی شد. ترم‌های چندجمله‌ای به بسط تابعی‌ای که در آن فقط از تقریب توابع پایه‌ی شعاعی هنکل کروی استفاده می‌شود، الحاق شدند و توابع انترپولاسیون روش المان مرزی توسط غنی‌سازی توابع پایه‌ی شعاعی هنکل کروی حاصل شدند. مشارکت میدان توابع نوع اول و دوم بسط در فضای مختلط علاوه بر اغنای میدان توابع چندجمله‌ای، سبب بالا بردن کارایی و قدرت انترپولاسیون پیشنهادی شد. توابع شکل پیشنهادی، بر خلاف توابع شکل کلاسیک لاگرانژ، از خاصیت قطعه قطعه پیوسته از مرتبه بینهایت بهره می‌برند. به علاوه برای نشان دادن عدم سینگولاریتی، حد توابع در حالتی که نرم اقلیدس به سمت صفر میل می‌نماید، محاسبه شد. تعدادی نمونه عددی برای نشان دادن کارایی و دقت روش حاضر ارائه شد و نتایج حاصل با نتایج حل تحلیلی و نتایج توابع شکل کلاسیک لاگرانژ مقایسه شد. همان‌گونه که از نتایج این مقایسه‌ها پیدا بود، روش پیشنهادی از دقت بسیار بالاتری نسبت به سایر روش‌های ذکر شده برخوردار است. با توجه با دقت توابع شکل هنکل در مدل‌سازی مسائل دو بعدی، استفاده از این توابع انترپولاسیون برای مدل‌سازی مسائل سه بعدی برای کارهای آینده نیز پیشنهاد می‌شود.

## References

## ۹- مراجع

- [1] Kreyszig E. 2006 Advanced engineering mathematics. *John Wiley & Sons, Inc.*
- [2] Mirzajani M., Khaji N. 2017 Stress wave propagation modelling in one-dimensional micropolar rods using a new Wave Finite Element Method. *Modares Mechanical Engineering*, 17(5), 405-412 (In Persian).
- [3] Nikpoo B., Khodakarami M.I. 2017 Quantitative solution of 2-D inverse elastodynamics problems using hybrid FDM-FEM and PSO. *Modares Civil Engineering journal*, 17(4), 263-275 (In Persian).
- [4] Baniassadi M., Baghani M., Eskandari A.H. 2017 A finite element analysis for shape memory polymer Timoshenko beams. *Modares Mechanical Engineering*, 17(8), 351-359 (In Persian).
- [5] Brebbia C.A., Telles J., Wrobel L. 1984 Boundary element techniques – Theory and Applications in Engineering. *Berlin and New York: Springer Verlag.*
- [6] Friedrich J. 2002 A linear analytical boundary element method (BEM) for 2D homogeneous potential problems. *Computers & Geosciences*, 28, 679–692.
- [7] Farcas A., Elliott L., Ingham D.B., Lesnic D. 2003 The dual reciprocity boundary element method for solving Cauchy problems associated to the Poisson equation. *Engineering Analysis with Boundary Elements*, 27, 955–962.
- [8] Zhou H.L., Niu Z.R., Wang X.X. 2003 Regularization of nearly singular integrals in the BEM of potential problems. *Applied Mathematics and Mechanics*, 24, 1208–1214.
- [9] Zhou H., Niu Z.h., Cheng C.h., Guan Z.h. 2007 Analytical integral algorithm in the BEM for orthotropic potential problems of thin bodies. *Engineering Analysis with Boundary Elements*, 31, 739–748.
- [10] Gao X.W. 2010 Source point isolation boundary element method for solving general anisotropic potential and elastic problems with varying material properties. *Engineering Analysis with Boundary Elements*, 34, 1049–1057.
- [11] Wolf J.P. 2004 The scaled boundary finite element method. *John Wiley & Sons Ltd.*
- [12] Deeks A.J., Cheng L. 2003 Potential flow around obstacles using the scaled boundary finite-element method. *International Journal for Numerical Methods in Fluids*, 41, 721–741.
- [13] Teng B., Zhao M., He G.H. 2006 Scaled boundary finite element analysis of the water sloshing in 2D containers. *International Journal for Numerical Methods in Fluids*, 52, 659–678.
- [14] Zhang Z., Zhao P., Liew K.M. 2009 Improved element-free Galerkin method for two-dimensional potential problems. *Engineering Analysis with Boundary Elements*, 33, 547–554.
- [15] Peng M., Cheng Y. 2009 A boundary element-free method (BEFM) for two-dimensional potential problems. *Engineering Analysis with Boundary Elements*, 33, 77–82.
- [16] Mukherjee Y.X., Mukherjee S. 1997 The boundary node method for potential problems. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 40, 797–815.
- [17] Tan F., Wang Y.H. 2010 Multiple reciprocity hybrid boundary node method for potential problems. *Engineering Analysis with Boundary Elements*, 34, 369–376.
- [18] Ma H., Qin Q.H. 2007 Solving potential problems by a boundary-type meshless method – the boundary point method based on BIE. *Engineering Analysis with Boundary Elements*, 31, 749–761.
- [19] Chen T., Raju I.S. 2003 A coupled finite element and meshless local Petrov–Galerkin method for two-dimensional potential problems. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 192, 4533–4550.

- inhomogeneous partial differential equations. *Boundary Elements Communications*, 5(2), 57–61.
- [33] Agnantiaris J.P., Polyzos D., Beskos D.E. 1996 Some studies on dual reciprocity BEM for elastodynamic analysis. *Computational Mechanics*, 17, 270–277.
- [34] Bridges T.R., Wrobel L.C. 1994 On the calculation of natural frequencies of microstructures using DRBEM. *Proceedings of the Boundary Element Method (BEM) XVI Conference*, 529–536.
- [35] Golberg M.A. 1995 The numerical evaluation of particular solutions in the BEM—a review. *Boundary Elements Communications*, 6(3), 99–106.
- [36] Chen C.S. 1995 The method of fundamental solution for non-linear thermal explosions. *Communications in Numerical Methods in Engineering*, 11, 675–681.
- [37] Karur S.R., Ramachandran P.A. 1995 Augmented thin plate spline approximation in DRM. *Boundary Elements Communications*, 6(2), 55–58.
- [38] Mehraeen S., Noorzad A. 2001 Application of radial basis functions on dual reciprocity BEM for dynamic analysis of pierced shear wall. *International Series on Advances in Boundary Elements*, 10, 299–308.
- [39] Rashed Y.F. 2002 Transient dynamic boundary element analysis using Gaussian based mass matrix. *Engineering Analysis with Boundary Elements*, 26, 265–279.
- [40] Rashed Y.F. 2008 Free Vibration of Structures with Trigonometric SIN(R) Function in the Dual Reciprocity Boundary Element Analysis. *Advances in Structural Engineering*, 11(4), 397–409.
- [41] Agnantiaris J.P., Polyzos D., Beskos D.E. 2001 Free vibration analysis of non-axisymmetric and axisymmetric structures by the dual reciprocity BEM. *Engineering Analysis with Boundary Elements*, 25, 713–723.
- [42] Samaan M.F., Rashed Y.F. 2007 BEM for transient 2D elastodynamics using multiquadric functions. *International Journal of Solids and Structures*, 44, 8517–8531.
- [43] Samaan M.F., Rashed Y.F. 2009 Free vibration multiquadric boundary elements applied to plane elasticity. *Applied Mathematical Modelling*, 33, 2421–2432.
- [44] Hamzehei Javaran S., Khaji N. 2015 Analysis of free and forced vibration problems using boundary element dual reciprocity method based on inverse multiquadric basis functions. *Journal of numerical methods in engineering*, 32(1), 51–64 (In Persian).
- [45] Hamzeh Javaran S., Khaji N., Moharrami H. 2010 A dual reciprocity BEM approach using new Fourier radial basis functions applied to 2D elastodynamic transient analysis. *Engineering Analysis with Boundary Elements*, 35, 85–95.
- [46] Hamzeh Javaran S., Khaji N., Noorzad A. 2011 First kind Bessel function (J-Bessel) as radial basis function for plane dynamic analysis using dual reciprocity boundary element method. *Acta Mech*, 218, 247–258.
- [20] Khaji N., Khodakarami M.I. 2011 A new semi-analytical method with diagonal coefficient matrices for potential problems. *Engineering Analysis with Boundary Elements*, 35, 845–854.
- [21] Shojaee S., Valizadeh N., Izadpanah E., Bui T., Vu T.V. 2012 Free vibration and buckling analysis of laminated composite plates using the NURBS-based isogeometric finite element method. *Composite Structures*, 94, 1677–1693.
- [22] Jari H., Atri H.R., Shojaee S. (2015). Nonlinear thermal analysis of functionally graded material plates using a NURBS based isogeometric approach. *Composite Structures*, 119, 333–345.
- [23] Shojaee S., Daneshmand A. 2015 Crack Analysis in Media with Orthotropic Functionally Graded Materials Using Extended Isogeometric Analysis. *Engineering Fracture Mechanics*, 147, 203–227.
- [24] Nguyen B.H., Tran H.D., Anitescu C., Zhuang X., Rabczuk, T. 2016 An isogeometric symmetric Galerkin boundary element method for two-dimensional crack problems. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 306, 252–275.
- [25] Hamzehei-Javaran S., Shojaee S. 2017 The solution of elastostatic and dynamic problems using the boundary element method based on spherical Hankel element framework. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 112(13) 2067–2086.
- [26] Hamzehei-Javaran S., Shojaee S. 2018 Improvement of numerical modeling in the solution of static and transient dynamic problems using finite element method based on spherical Hankel shape functions. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 115(10) 1241–1265.
- [27] Farmani S., Ghaeini-Hessaroeiyeh M., Hamzehei-Javaran S. 2017 The improvement of numerical modeling in the solution of incompressible viscous flow problems using finite element method based on spherical Hankel shape functions. *International Journal for Numerical Methods in Fluids*, 87(2) 70–89.
- [28] Bahrampour M., Hamzehei-Javaran S., Shojaee S. 2018 New Insight into Viscoelastic Finite Element Modeling of Time-Dependent Material Creep Problems Using Spherical Hankel Element Framework. *International Journal of Applied Mechanics*, 10(8), 1–23.
- [29] Nardini D., Brebbia C.A. 1983 A new approach to free vibration analysis using boundary elements. *Applied Mathematical Modelling*, 7(3), 157–162.
- [30] Brebbia C.A., Nardini D. 1983 Dynamic analysis in solid mechanics by an alternative boundary elements procedure. *International Journal of Soil Dynamics and Earthquake Engineering*, 2(4), 228–233.
- [31] Nardini D., Brebbia C.A. 1985 Boundary integral formulation of mass matrices of dynamic analysis. In: *Brebbia, C.A., editor, Topics in Boundary Element Research. Berlin: Springer.*
- [32] Golberg M.A., Chen C.S. 1994 The theory of radial basis functions applied to the BEM for

- basis functions. *Communications in Numerical Methods in Engineering*, 15, 137–150.
- [53] Golberg M.A., Chen C.S., Ganesh M. 2000 Particular solutions of 3D Helmholtz-type equations using compactly supported radial basis functions. *Engineering Analysis with Boundary Elements*, 24, 539–547.
- [54] Rashed Y.F. 2002 BEM for dynamic analysis using compact supported radial basis functions. *Computer and Structures*, 80, 1351–1367.
- [55] Samaan M.F., Rashed Y.F., Ahmed M.A. 2007 The dual reciprocity method applied to free vibrations of 2D structures using compact supported radial basis functions. *Computational Mechanics*, 41(1), 85–106.
- [56] Katsikadelis J.T. 2002 Boundary Elements – Theory and Applications. *Amsterdam: Elsevier Science Ltd.*
- [57] Wang J.G., Liu G.R. 2002 On the optimal shape parameters of radial basis functions used for 2-D meshless methods. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 191, 2611–2630.
- [47] Fornberg B., Larsson E., Wright G. 2006 A new class of oscillatory radial basis functions. *Computers and Mathematics with Applications*, 51, 1209–1222.
- [48] Hamzehei Javaran S., Khaji N. 2014 Dynamic analysis of plane elasticity with new complex Fourier radial basis functions in the dual reciprocity boundary element method. *Applied Mathematical Modelling*, 38, 3641–3651.
- [49] Hamzehei-Javaran S., Khaji N. 2018 Complex Fourier element shape functions for analysis of 2D static and transient dynamic problems using dual reciprocity boundary element method. *Engineering Analysis with Boundary Elements*, 95, 222–237.
- [50] Izadpanah E., Shojaee S., Hamzehei-Javaran S. 2018 Time discontinuous finite element analysis of two-dimensional elastodynamic problems using complex Fourier shape functions. *Journal of Applied and Computational Mechanics*, 4, 442–456.
- [51] Wendland H. 1995 Piecewise polynomial, positive definite and compactly supported radial basis functions of minimal degree. *Advances in Computational Mathematics*, 4, 389–396.
- [52] Chen C.S., Brebbia C.A., Power H. 1999 Dual reciprocity method using compactly supported radial

# Formulation and Application of Spherical Hankel Elements in Numerical Modelling of Potential Problems using Boundary Element Method

S. Hamzehei-Javaran<sup>1\*</sup>, S. Shojaei<sup>1</sup>

1.Civil Engineering Department, Shahid Bahonar University of Kerman, Kerman, Iran

\* s.hamzeheijavaran@uk.ac.ir

## Abstract

In this paper, a new boundary element analysis for the modeling of two-dimensional potential problems is proposed. The boundary element method is reformulated here based on spherical Hankel elements for the purpose of approximation of the state variables of the Poisson and Laplace differential equations (potentials and fluxes). Spherical Hankel function is obtained by combining Bessel function of the first (similar to J-Bessel ones) and second (also called Neumann functions) kind so that the properties of both mentioned functions will be combined and result in a robust interpolation tool. The interpolation functions of the boundary element method are obtained using the enrichment of the spherical Hankel radial basis functions. To this end, the expansion of a function in which only the spherical Hankel radial basis functions approximations are used have been given polynomial terms. Generally, radial basis function (RBF) is an efficient tool in finding the solution of non-homogeneous partial differential equations. Its main idea is the expansion of non-homogeneous term by its values in interpolation nodes, based on Euclidean norm that leads to obtaining a particular solution. Although the J-Bessel RBF contains the features of the first kind of Bessel function, it usually cannot represent the full properties of a physical phenomenon. Therefore, using the combination of the first and second kind of Bessel function in complex space (Hankel function) may lead to more accurate and robust results. In other words, the solution of Bessel equation can be referred as a prominent usage of both first and second kind of Bessel, which shows that using them together may result in more accuracy and robustness. The aforementioned discussion brings this matter to mind whether it is possible to present RBFs that benefit from both Bessel functions of the first and second kind. Therefore, by the idea of combining spherical Hankel in imaginary space, enrichment of them for a three-node element in the natural coordinate system is explained in this paper. Moreover, the algebraic manipulations and formulations are reduced because of profiting from the advantages of complex number space in functional space. It is also possible for the proposed shape function to satisfy both Bessel function fields and polynomial functions, unlike classic Lagrange shape functions that only satisfy the polynomial function fields. Moreover, the proposed shape functions benefit from the infinite piecewise continuous property, which does not exist in the classic Lagrange shape functions with limited continuity. The spherical Hankel function of the first kind has a strong singularity in its imaginary part, the spherical Neumann function. This issue results in the fact that when the Euclidean norm tends to zero, the limit does not exist. In the following, an extra term with power  $n + 1$  is applied to remove this singularity. After the elimination of the singularity, the limit state of coinciding source point and field point is calculated. In the end, to demonstrate the accuracy and efficiency of the proposed shape functions, several numerical examples are solved and compared with the analytical results as well as those obtained by classic Lagrange shape functions. The numerical results show that the proposed Hankel shape functions represent more accurate solutions, using fewer degrees of freedom, in comparison with classic Lagrange shape functions.

**Keywords:** Spherical Hankel elements, Boundary element method, 2D potential problems, Poisson's and Laplace's equations