

## مطالعه رفتار الکتروترمو مکانیکی پوسته‌های پیزوالکتریک با استفاده از تحلیل هم‌هندسه

زهرا قدیمی<sup>۱</sup>، بهروز حسنی<sup>۲</sup>

۱ دانشجوی دکتری، دانشکده مهندسی مکانیک، دانشگاه فردوسی، مشهد

۲ استاد، دانشکده مهندسی مکانیک، دانشگاه فردوسی، مشهد، b\_hassani@um.ac.ir

تاریخ دریافت: ۱۳۹۵/۰۳/۲۹

تاریخ پذیرش: ۱۳۹۵/۰۸/۱۹

### چکیده

در این پژوهش با استفاده از تحلیل هم‌هندسه رفتار الکترومکانیکی پوسته‌های کامپوزیتی پیزوالکتریک<sup>۱</sup> بررسی شده است. روش‌های تولید شکل‌های هندسی مانند نربز و اسپلین‌ها، اساس روش تحلیل هم‌هندسه است. در روش هم‌هندسه، برخلاف روش اجزای محدود، برای تولید مدل محاسباتی و نیز تقریب فضای حل از توابع پایه یکسان استفاده می‌شود. در این مقاله برای تحلیل سازه پوسته‌ای کامپوزیتی از نظریه تغییر شکل برشی مرتبه اول میندلین راینر<sup>۲</sup> استفاده شده است که در آن هر نقطه کنترلی دارای پنج درجه آزادی، شامل سه درجه آزادی تغییر مکانی و دو درجه آزادی چرخشی، است. برای مدلسازی میدان الکتریکی تغییرات پتانسیل الکتریکی در راستای ضخامت لایه‌های پیزوالکتریک خطی فرض شده است. کار انجام شده با حل چند مثال مختلف معتبرسازی شده است. برای پوسته بام اسکوردلیس‌لو مقدار جابه‌جایی در نقطه میانی لبه آزاد با خطای ۰/۰۶۶ درصد از مقدار دقیق آن و برای پوسته یک‌سر گیردار بیشترین مقدار خطا در جابه‌جایی نقطه میانی لبه آزاد آن، ۰/۰۳۹ درصد، به دست آمده است. در مثال‌های بعد، هدف رسیدن به تغییر شکل دلخواه پوسته با اعمال ولتاژ است. نخست، با افزایش ولتاژ اعمالی به یک پوسته چندلایه، تحت بار گسترده، تغییر شکل برون‌صفحه‌ای آن صفر شده است. سپس برای بررسی کنترل اعوجاج گرمایی، پوسته‌های کامپوزیتی متقارن و پادمقارن در معرض گرادیان دما قرار گرفته‌اند. با اعمال ولتاژ با قطبیت‌های یکسان یا مخالف، پیچش یا خمش حرارتی یا هر دو در پوسته جبران شده است.

### واژگان کلیدی

تحلیل هم‌هندسه، پوسته، مواد کامپوزیت، پیزوالکتریک، گرادیان دما

#### ۱. مقدمه

می‌شوند. نظریه‌ها و معادلات پیچیده حاکم بر پوسته‌ها، نقش روش‌های عددی را در حل این معادلات پررنگ کرده است. با

پیوسته‌ها به دلیل وزن کم و استحکام مناسب در ترکیب با تقویت‌کننده‌ها، در صنعت هوافضا به‌طور وسیعی به‌کار برده

پیشرفت علوم کامپیوتری، روش‌های گوناگون عددی در حل مسائل سازه‌ها به‌وجود آمده‌اند. برخی از روش‌های رایج‌تر عبارت‌اند از روش تفاضل محدود، المان محدود و روش‌های بدون شبکه که در پی هم به‌منظور مرتفع کردن نقاط ضعف روش‌های قبلی توسعه یافته‌اند. از پرکاربردترین این روش‌ها، که نخستین‌بار برای تحلیل تنش در سازه‌ها پیما به‌کار برده شد، روش اجزای محدود است. با استفاده از روش اجزای محدود می‌توان انواع پیچیدگی‌های هندسه، انواع بارگذاری و ماده را مدل نمود و نتایج را با دقت مناسب استخراج کرد. در واقع با استفاده از این روش یک مسئله با بی‌نهایت درجه آزادی به یک مسئله با درجه آزادی محدود تبدیل می‌شود و مجموعه‌ای از معادلات جبری همزمان حل می‌شوند. در روش مذکور، تقریب‌سازی هندسی و فضای حل با استفاده از توابع پایه درونیاب لاگرانژ و هرمیتی صورت می‌گیرد و در واقع اجزای محدود نمی‌تواند هندسه را به‌طور دقیق مدل‌سازی کند. این ضعف در روش‌های بدون شبکه هم وجود دارد و ضعف در اعمال دقیق شرایط مرزی منجر به دقت پایین‌تر می‌شود.

روش تحلیل هم‌هندسه با انگیزه رفع ضعف‌های بیان‌شده به‌وجود آمد. ایده اصلی روش هم‌هندسه استفاده از توابع پایه پرکاربرد بی‌اسپلاین و نربز در فضای هندسه و حل است و تفاوت آن با روش اجزای محدود در مدل‌سازی دقیق هندسه با استفاده از این توابع پایه به‌جای تقریب با چندجمله‌ای‌های قطعه‌قطعه است.

هیوز و همکاران (۲۰۰۵) نشان دادند که روش هم‌هندسه جایگزین مناسبی برای روش اجزای محدود مبتنی بر چندجمله‌ای است، در حالی که مزایای زیادی در تولید هندسه دقیق و اصلاح شبکه دارند [۱]. با گذشت کمتر از یک دهه از پیشنهاد این روش، کاربردهای زیادی از آن در زمینه‌های مختلف مهندسی از جمله در مسائل اثرودینامیک، انتقال حرارت، محیط‌های چندفازی، رشد ترک و جز این‌ها به چشم می‌خورد [۲-۶]. همچنین تحلیل پوسته بر مبنای نظریه‌های مختلف حاکم بر آن از جمله نظریه ورق کیرشرف [۷-۸] و نظریه مرتب‌ظ اول برشی [۹]. با استفاده از تحلیل هم‌هندسه انجام شده‌است. حسینی و همکاران (۲۰۱۳) نیز تحلیل غیرخطی پوسته را با استفاده از تحلیل هم‌هندسه انجام دادند [۱۰]. تحلیل هم‌هندسه به‌علت عدم نیاز به تولید شبکه جدید، برای مسائلی که هندسه مسئله تغییر می‌کند، همانند رشد ترک و بهینه‌سازی سازه‌ها توصیه شده‌است. در زمینه بهینه‌سازی

شکل و توپولوژی پوسته به‌تازگی تحقیقات گسترده‌ای توسط حسینی و همکاران انجام شده است [۱۱-۱۳].

در این مقاله رفتار پوسته کامپوزیتی با لایه‌های پیزوالکتریک توسط تحلیل هم‌هندسه مطالعه شده است. پیزوالکتریک‌ها در صنایع هوافضایی بسیار پرکاربردند و عکس‌العمل خوبی نسبت به ولتاژ دارند. پیزوالکتریک‌ها، که در آنها حسگر<sup>۳</sup> و عملگر<sup>۴</sup> به‌کار برده شده است، به سازه متصل می‌شود و رفتار و شکل آن را کنترل می‌کنند. از سال ۲۰۰۰ م به بعد، تحقیقات گسترده‌ای روی چگونگی مدل‌سازی سازه با لایه‌های پیزوالکتریک انجام شده است و المان‌های مختلفی برای این منظور در مدل‌سازی مسئله مورد استفاده قرار گرفته است. در این میان به‌علت ضخامت کم لایه‌ها المان ورق و پوسته منجر به خطای کمتر در تحلیل‌های استاتیکی و دینامیکی می‌شدند [۱۴-۱۸]. در این مقاله با استفاده از فرضیات ساده‌کننده، روابط ساختاری المان پوسته، مبتنی بر نظریه تغییر شکل برشی مرتبه اول، استخراج شده است. لایه‌های پیزوالکتریک به‌طور کامل به سازه می‌چسبند؛ از اینرو می‌توان در بسیاری از موارد، تغییرات ناخواسته که بر اثر فشار یا گرادیان دما در سازه ایجاد می‌شود، را با اعمال ولتاژ برطرف کرد. در اینجا با استفاده از تحلیل هم‌هندسه، که قابلیت مدل‌سازی دقیق هندسه و حل را دارد، پوسته کامپوزیتی با لایه‌های پیزوالکتریک مدل‌سازی شده و پس از اعمال آثار دما و ولتاژ در روابط استخراج‌شده برای المان پوسته کامپوزیتی، تغییر شکل پوسته تحت فشار، دما و ولتاژ کنترل شده است. این کار روش خوبی برای رسیدن به رفتار دلخواه در سازه می‌باشد.

## ۲. معادلات ساختاری پیزوالکتریک

روابطی که برای تنش و کرنش مکانیکی وجود دارد، در مورد تنش و کرنش پیزوالکتریک نیز صادق است. اگر ماتریس [C] ماتریس ضرائب الاستیسیته، ماتریس [e] ماتریس ضرائب دی‌الکتریک و ماتریس [e] ماتریس کوپلینگ پیزوالکتریک باشد، آنگاه رابطه بین متغیرهای مستقل (جابجایی  $u$  و پتانسیل الکتریکی  $\phi$ ) و متغیرهای وابسته (تنش  $\sigma$  و جابه‌جایی الکتریکی  $d$ ) توسط معادلات ساختاری زیر بیان می‌شود.

$$\begin{aligned}\sigma(u, \phi) &= C \varepsilon(u) - e E(\phi) \\ d(u, \phi) &= e^T \varepsilon(u) - \varepsilon E(\phi)\end{aligned}\quad (1)$$

میدان الکتریکی - پتانسیل الکتریکی، رابطه انرژی الکتریکی به دست می‌آید. همچنین  $[K_{\phi\phi}]$  ماتریس سختی الکتریکی<sup>۷</sup> نامیده می‌شود.

$$V = -\frac{1}{2} [\{\phi\}^T [K_{\phi\phi}] \{\phi\} + \{\delta\}^T [K_{\phi\delta}] \{\phi\}] \quad (7)$$

$$[K_{\phi\phi}] = \int_v [B_\phi]^T \{\epsilon\} [B_\phi] dV$$

رابطه انرژی جنبشی نیز به صورت ۸ تعریف می‌شود که در آن  $[M]$  ماتریس جرم می‌باشد.

$$T = -\frac{1}{2} [\{\delta\}^T [M] \{\delta\}] \quad (8)$$

$$[M] = \int_v \rho [R]^T [R] dV$$

کار مجازی ناشی از جابه‌جایی مجازی  $\delta q$  و پتانسیل الکتریکی مجازی  $\delta \phi$  در اثر اعمال نیروی مکانیکی و بار الکتریکی بدین شکل نوشته می‌شود.

$$\delta w = \int_v \{\delta q\}^T [F_v] dV + \int_\Omega \{\delta q\}^T [F_\Omega] d\Omega - \delta \phi Q + \{\delta q\}^T [F_p] - \int_\Omega \{\delta \phi\}^T [Q_\Omega] d\Omega \quad (9)$$

که در آن  $F_v$  نیروی حجمی،  $F_\Omega$  نیروی سطحی،  $F_p$  نیروی متمرکز،  $Q_\Omega$  بار الکتریکی سطحی و  $Q$  بار الکتریکی متمرکزند. معادلات دینامیکی مواد پیزوالکتریک با استفاده از اصل همپلتون استخراج می‌شوند.

$$[M_{uu}]\{\ddot{q}\} + [K_{uu}]\{q\} + [K_{u\phi}]\{\phi\} = \{f\} \quad (10)$$

$$[K_{\phi u}]\{q\} + [K_{\phi\phi}]\{\phi\} = \{g\}$$

همچنین نیروهای  $\{f\}$  و  $\{g\}$  نیز به صورت زیر نوشته می‌شوند.

$$\{f\} = \int_v R^T \{F_v\} dV + \int_\Omega R^T \{F_\Omega\} d\Omega + [R]^T \{F_p\} \quad (11)$$

$$\{g\} = \int_v R^T \{Q_\Omega\} dV - [R]^T Q$$

بنابراین معادلات عملگر و حسگر با استفاده از معادلات حرکت به صورت ۱۲ به دست می‌آیند.

$$[M_{uu}]\{\ddot{q}\} + ([K_{uu}] - [K_{u\phi}] K_{\phi\phi}^{-1} [K_{\phi u}])\{q\} = \{f_q\} - [K_{u\phi}] \{\phi_s\} \quad (12)$$

$$\{\phi_s\} = [K_{\phi\phi}]^{-1} [K_{\phi u}]\{q_s\}$$

به طوری که در این روابط  $\{\phi_s\}$  ولتاژ اعمالی بر عملگر و  $\{q_s\}$  ولتاژ حس شده توسط حسگر است. برای تحلیل استاتیکی و در حالتی که پیزوالکتریک تنها به عنوان عملگر استفاده شود، رابطه ۱۳ به صورت ذیل خلاصه می‌شود.

که در آن  $\{E\}$  بردار کرنش و  $\{E\}$  میدان الکتریکی است. میدان الکتریکی در هر لایه پیزوالکتریک، با استفاده از تغییرات پتانسیل در جهت ضخامت بیان می‌شود.

$$\phi_k = \{\phi_x, \phi_y, \phi_z\} = J_k^{-1} \{\phi_r, \phi_s, \phi_t\} \quad (2)$$

به طوری که  $J_k^{-1}$  معکوس ماتریس ژاکوبین در لایه پیزوالکتریک است. در این مقاله تغییرات پتانسیل الکتریکی در جهت ضخامت خطی فرض شده است.

$$\phi_k = (\phi_0 + t\phi) \quad t_{1k} \leq t \leq t_{2k} \quad (3)$$

که در آن  $\phi_0$  پتانسیل الکتریکی لایه میانی و  $\phi_t$  تغییرات میدان الکتریکی در جهت ضخامت لایه است. با جایگذاری رابطه ۳ در رابطه ۲، میدان الکتریکی ثابت در جهت ضخامت به دست می‌آید. چون ورودی عملگرها اختلاف پتانسیل الکتریکی است، رابطه میدان الکتریکی بر حسب اختلاف پتانسیل بیان می‌شود.

$$E_k = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{t_k} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ \Delta\phi \end{Bmatrix}_k \quad (4)$$

با توجه به تغییرات پتانسیل الکتریکی برای لایه پیزوالکتریک و با درون‌یابی به وسیله توابع پایه می‌توان ولتاژ را در تمام پوسته محاسبه کرد.

$$\phi_k = [\sum R_j \phi_0 + t \sum R_j \phi_t] \quad (5)$$

به طوری که پتانسیل الکتریکی در هر لایه پیزوالکتریک ثابت و در راستای ضخامت لایه پیزوالکتریک تغییرات خطی دارد؛ از اینرو پوسته دارای یک درجه آزادی الکتریکی  $\phi$  در هر لایه پیزوالکتریک است؛ مطابق آنچه در مرجع [۱۹] اثبات شده است. روابط ساختاری پیزو الکتریک به صورت خلاصه ارائه شده است. برای مواد پیزوالکتریک چگالی انرژی پتانسیل از ترکیب انرژی کرنشی و انرژی الکتریکی به دست می‌آید. با استفاده از اصل تغییرات، تابع انرژی کرنشی به صورت زیر بیان می‌شود.

$$V = \frac{1}{2} \{\delta\}^T [K_{uu}] \{\delta\} + \frac{1}{2} \{\delta\}^T [K_{u\phi}] \{\phi\} \quad (6)$$

$$[K_{uu}] = \int_v [B_u]^T \{C\} [B_u] dV$$

$$[K_{u\phi}] = \int_v [B_u]^T \{e\} [B_\phi] dV$$

در روابط فوق،  $\delta$  بردار درجات آزادی،  $[K_{uu}]$  و  $[K_{u\phi}]$  به ترتیب ماتریس سختی مکانیکی<sup>۵</sup>، ماتریس کوپلینگ الکتریکی - مکانیکی<sup>۶</sup> می‌باشند. با استفاده از روابط کرنش - جابه‌جایی و

از اصل کار مجازی به دست می‌آید. در روش هم‌هندسه محیط هر وصله توسط دهانه‌های گرهی<sup>۱</sup> به المان‌های گرهی<sup>۱</sup> تقسیم می‌شود و با انتگرال‌گیری گوس<sup>۱۱</sup> روی هر یک از این المان‌ها در نهایت حاصل انتگرال روی سطح وصله<sup>۱۲</sup> به دست می‌آید. در محاسبه ماتریس سختی، مشتقات توابع پایه باید در دستگاه کلی محاسبه شوند، از اینرو برای ارتباط بین دستگاه مختصات کلی و فضای پارامتری<sup>۱۳</sup> ژاکوبین زیر تعریف می‌شود:

$$J_1 = \begin{bmatrix} x_{1r} & y_{1r} & z_{1r} \\ x_{1s} & y_{1s} & z_{1s} \\ x_{1t} & y_{1t} & z_{1t} \end{bmatrix} \quad (17)$$

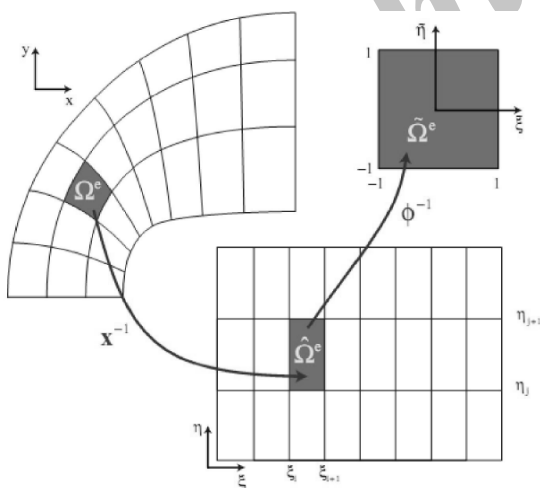
با توجه به اینکه انتگرال‌گیری در روش گوس در فضای نرمال انجام می‌شود، باید توسط یک نگاشت دیگر، فضای پارامتری نیز به فضای انتگرال‌گیری منتقل می‌گردد، این نگاشت به شکل زیر تعریف می‌شود. همچنین  $(\zeta, \eta)$  متغیرهای تعریف‌شده در فضای انتگرال‌گیری می‌باشند.

$$r = \frac{1}{2}((r_{i+1} - r_i)\zeta + (r_{i+1} + r_i)) \quad (18)$$

$$s = \frac{1}{2}((s_{i+1} - s_i)\eta + (s_{i+1} + s_i))$$

این نگاشت نیز منجر به ایجاد ژاکوبین  $J_2$  می‌شود که از رابطه ۱۹ محاسبه می‌شود.

$$J_2 = \begin{bmatrix} r_{,\zeta} & s_{,\zeta} \\ r_{,\eta} & s_{,\eta} \end{bmatrix}, \quad drds = |J_2| d\zeta d\eta \quad (19)$$



شکل ۱. فضاهای فیزیکی، پارامتری و انتگرال‌گیری در تحلیل هم‌هندسه

در شکل ۱، این نگاشت‌ها از فضای فیزیکی به پارامتری و سپس انتگرال‌گیری نشان داده شده است. در پوسته کامپوزیتی، به دلیل تغییر خصوصیات ماده از لایه‌ای به لایه‌ای دیگر، به منظور

$$[K_{uu}]\{q\} = \{F_q\} - [K_{u\phi}]\{\phi_u\} \quad (13)$$

### ۳. نیروی ناشی از اختلاف دما

نیروی ناشی از اختلاف دما همانند نیروی پیزوالکتریک محاسبه می‌شود. در اینجا با فرض تغییرات خطی دما در جهت ضخامت پوسته، اختلاف دمای هر لایه از پوسته کامپوزیتی  $\{\Delta T_k\}$  در نظر گرفته شده است و نیروی ناشی از اختلاف دما از رابطه ۱۴ به دست می‌آید.

$$\begin{aligned} \{\sigma\}_T &= [C]^k \alpha^k \Delta T_k \\ \{F\}_T &= \int_v B_u^T [\sigma_T]^k dV \end{aligned} \quad (14)$$

### ۴. تحلیل هم‌هندسه

فرم ماتریسی هندسه پوسته با استفاده از رابطه ۱۵ بیان شده است که در آن  $R$  ماتریس توابع پایه نریز،  $n+1$  تعداد نقاط کنترلی<sup>۱۴</sup> و  $\{x_i, y_i, z_i\}$  مختصات هر کدام از این نقاط هستند.

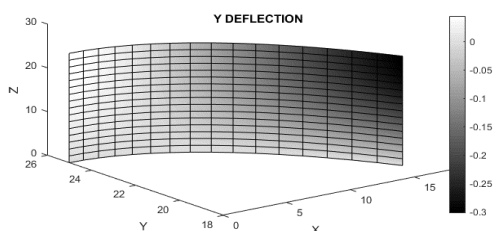
$$\begin{Bmatrix} x \\ y \\ z \end{Bmatrix} = \sum_0^n R_i \begin{Bmatrix} x_i \\ y_i \\ z_i \end{Bmatrix} + \sum_0^n R_i t \frac{T_i}{2} V_{3i} \quad (15)$$

که در آن  $T_i$  ضخامت پوسته و  $t$  راستای عمود بر سطح پوسته در آن نقطه است. رابطه ۱۶ تغییر مکان پوسته را با توجه به فرضیه میندلین رایزنر بیان می‌کند که هر نقطه کنترلی شامل سه درجه آزادی جابه‌جایی  $(u, v, w)$  و دو درجه آزادی دورانی  $(\alpha, \beta)$  است. پارامترهای  $(\alpha, \beta)$  دوران حول دو محور فرضی هستند که این محورها بر محور عمود بر صفحه، در نقطه مورد نظر عمود هستند.

$$\begin{Bmatrix} u \\ v \\ w \end{Bmatrix} = \sum_0^n R_i \begin{Bmatrix} u_i \\ v_i \\ w_i \end{Bmatrix} + t \frac{T_i}{2} \begin{bmatrix} -V_{2i} \\ V_{1i} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \alpha \\ \beta \end{Bmatrix} \quad (16)$$

در رابطه ۱۶، بردارهای  $V_{3i}$  و  $V_{2i}$ ،  $V_{1i}$  دستگاه مختصات محلی در هر گره متناظر را تشکیل می‌دهند. در واقع رابطه ۱۶ نگاشتی از فضای  $(r, s, t)$  به فضای  $(x, y, z)$  برای یک نقطه روی پوسته است. با توجه به اینکه  $p = \{x, y, z\}$  بردار موقعیت است، عبارات  $\{x_{r,s,t}, y_{r,s,t}, z_{r,s,t}\}$  و  $\{x_{r,s,t}, y_{r,s,t}, z_{r,s,t}\}$  بیانگر مماس بر سطح میانی متناظر با نقطه کنترلی در جهت‌ها هستند. بنابراین بردار عمود بر سطح میانی، از ضرب خارجی این دو بردار حاصل می‌شود که به ترتیب سطرهای اول و دوم ماتریس ژاکوبین هستند. انتخاب امتداد بردارهای  $V_{2i}$  و  $V_{1i}$  اختیاری است. ماتریس سختی در روش هم‌هندسه همانند روش اجزای محدود، با استفاده

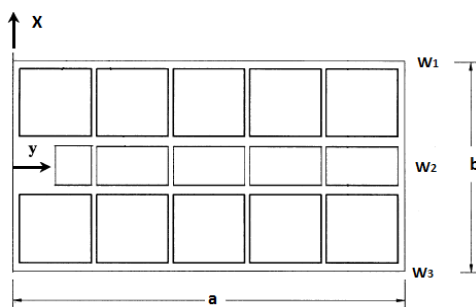
خطای ۰/۰۶۶ درصد از مقدار دقیق آن، که عدد ۰/۳۰۲۴ است، به دست آمده است.



شکل ۳. تغییر شکل بام اسکوردلیس لو تحت اثر وزنش

## ۵-۲. صفحه یکسر گیردار متقارن پیزوالکتریک

دومین مثال مورد بررسی کار تجربی انجام شده توسط کراولی و لازاروس است [۲۰]. این پژوهشگران تغییر شکل یک صفحه چندلایه متقارن گرافیت اپوکسی  $[0/\pm 45]_s$  یکسر گیردار را، که دو لایه عملگر پیزو به بالا و پایین آن چسبیده بود را بررسی کردند. آنها با اعمال ولتاژ ثابت  $157/6$  ولت به لایه بالا و پایین در پوسته خمش ایجاد کردند. مشخصات مربوط به جنس لایهها در جدول ۱ ذکر شده است.



شکل ۴. هندسه و ابعاد پیزوالکتریکها روی صفحه یکسر گیردار

جدول ۱. خصوصیات مواد استفاده شده در لایهها [۲۰]

	PZT G1195	T300/976
<b>Elastic Properties</b>		
$E_{11}$	63	150
$E_{22}$	63	9
$\nu_{12}$	0.3	0.3
$G_{12}$	24.2	7.1
<b>Piezoelectric properties</b>		
$d_{31}(10^{-10} \text{ mV}^{-1})$	2.54	0
$d_{32}(10^{-10} \text{ mV}^{-1})$	2.54	0

شکل ۵ مقایسه مقادیر به دست آمده، برای جابهجایی خارج صفحه‌ای خط مرکزی پوسته، را با دادههای تجربی کراولی و حل

محاسبه ماتریس سختی باید انتگرال گیری در هر لایه مجزا صورت گیرد.

$$d\zeta = \frac{t_k}{t} d\zeta_k \quad (20)$$

با جایگزینی رابطه ۲۰ می توان مرزهای انتگرال گیری را برای هر لایه از ۱- تا ۱+ تعیین نمود.

$$K = \sum_1^{NE} \sum_1^{NL} \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 B^T C^k B |J1| |J2| w \frac{t_k}{t} d\zeta d\eta d\xi \quad (21)$$

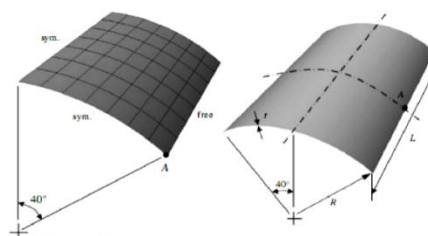
به طوری که در رابطه ۲۱،  $B$  ماتریس مشتقات نرینز،  $w$  ماتریس وزن،  $t_k$  ضخامت هر لایه و ضخامت کل پوسته است.

## ۵. حل مثالهای عددی

در این بخش مثالهایی از تحلیل پوستهها حل شدهاند و نتایج آنها با یافتههای موجود در مراجع مکانیک و هوافضا مقایسه شدهاند. در ابتدا به منظور نشان دادن کارا بودن روش استفاده شده در تحلیل پوستهها، یکی از مسائل استاندارد و پرچالش در مراجع، موسوم به پوسته اسکوردلیس - لو<sup>۴</sup> را حل کرده و سپس به حل مثالهای موجود در زمینه پوسته پیزوالکتریک پرداخته شده است.

### ۵-۱. بام اسکوردلیس لو

در اینجا روش هم‌هندسه برای تحلیل سازه بام اسکوردلیس لو تحت اثر وزن خود به کار می‌رود. مطابق شکل ۲ پارامترهای هندسی  $L = R = 25m$  تعریف شده است. مقدار مدول الاستیک و ضریب پواسون  $\nu = 0$  و  $E = 432 \times 10^6 \text{ N/m}^2$  در نظر گرفته شده است. با توجه به تقارن سازه، تنها یک چهارم آن با شرایط مرزی نشان داده شده در شکل مدلسازی شده است.



شکل ۲. سازه اسکوردلیس لو و مدل تحلیلی با شرایط مرزی

در شکل ۳ تغییر مکان پوسته مورد نظر تحت وزن خود نمایش داده شده است. مقدار جابهجایی در نقطه میانی لبه آزاد (نقطه A) عدد ۰/۳۰۲۶ محاسبه شده است که با تقریب خوبی و

عددی مراجع دیگر نشان می‌دهد که انطباق خوبی را نشان می‌دهد. بیشترین مقدار خطا در نقطه میانی لبه آزاد پوسته دیده می‌شود که ۰/۰۳۹ درصد می‌باشد؛ در حالی که کمترین خطا در مراجع ۰/۰۵۸ درصد به دست آمده است.

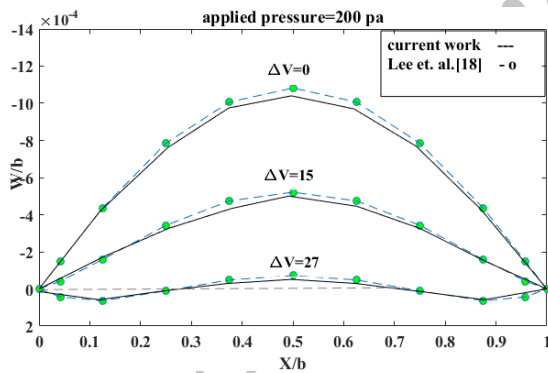
پوسته، تقریباً به  $7 \times 10^{-5}$  برابر عرض پوسته کاهش یافت. این عدد با استفاده از تحلیل هم‌هندسه تقریباً  $5 \times 10^{-5}$  به دست آمده است که تطابق قابل قبولی را نشان می‌دهد.

### ۵-۳-۱. اعمال گرادیان حرارتی

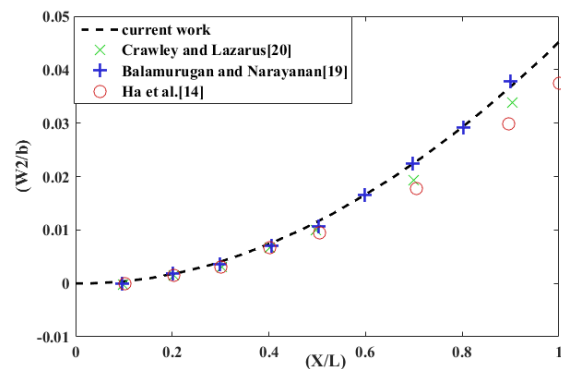
میرزا و کیووا (۲۰۰۲) با در نظر گرفتن هندسه پوسته، شرایط مرزی، چیدمان و جنس لایه‌های مشابه، برای خنثی‌نمودن جابه‌جایی سازه که تحت گرادیان حرارتی در جهت ضخامت قرار دارد از اعمال ولتاژ استفاده کردند. اختلاف دمای  $\Delta T = 2T$  در جهت ضخامت پوسته به گونه‌ای اعمال می‌شود که لبه بالایی دارای درجه حرارت  $T$  و لبه پایینی دارای درجه حرارت  $-T$  باشد. شکل ۷ تغییر شکل پوسته در معرض گرادیان دمای ۵۰ درجه سانتی‌گراد را نشان می‌دهد. بیشترین مقدار جابه‌جایی در مرکز پوسته تقریباً  $0.014$  برابر عرض پوسته است. سپس ولتاژ اعمال شده افزایش می‌یابد تا خمش ناشی از گرادیان دما را از بین ببرد. شکل ۸ کانتور تغییر شکل پوسته را برای دمای ۵۰ درجه سانتی‌گراد و ولتاژ ثابت ۳۵ ولت نشان می‌دهد که جابه‌جایی در مرکز پوسته تقریباً به  $0.0016$  برابر عرض پوسته کاهش یافته است.

### ۵-۳-۳. پوسته کامپوزیتی تحت فشار با لایه‌های پیزوالکتریک

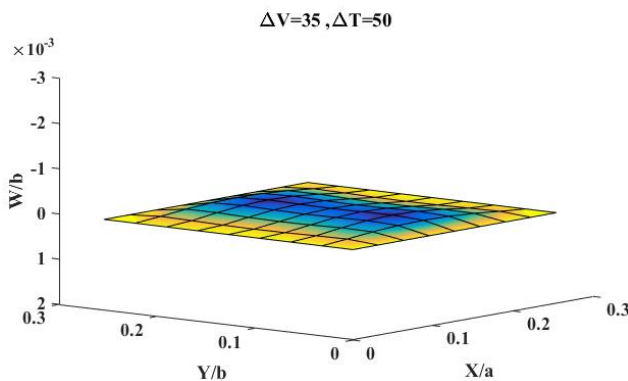
مثال مورد بررسی در این قسمت، پوسته کامپوزیتی هشت‌لایه، با لایه‌چینی  $[0/90/0]_s$  از ماده گرافیت اپوکسی است که لایه‌های بالا و پایین آن از جنس پیزوالکتریک هستند. شرایط مرزی در هر چهار طرف تکیه‌گاه ساده است و بار گسترده ۲۰۰ پاسکال بر آن اعمال می‌شود. شکل ۶ مقادیر به دست آمده جابه‌جایی خط مرکزی پوسته تحت فشار را بدون اعمال ولتاژ نشان می‌دهد که تقریباً  $0.01$  برابر عرض پوسته است. لی و همکاران (۲۰۰۳) با استفاده از روش المان محدود و با فرض ولتاژ ثابت و مخالف در لایه بالا و پایین تغییر شکل پوسته را بررسی کردند [۱۸]. آنها با اعمال ولتاژهای مختلف سعی کردند تغییر شکل ناشی از فشار را خنثی کنند. شکل ۶ نتایج به دست آمده مشابه آنچه آنها ارائه کرده بودند را نشان می‌دهد. آنها ولتاژ ۲۷ ولت را به پوسته اعمال کردند که در این حالت بیشترین جابه‌جایی به دست آمده برای مرکز



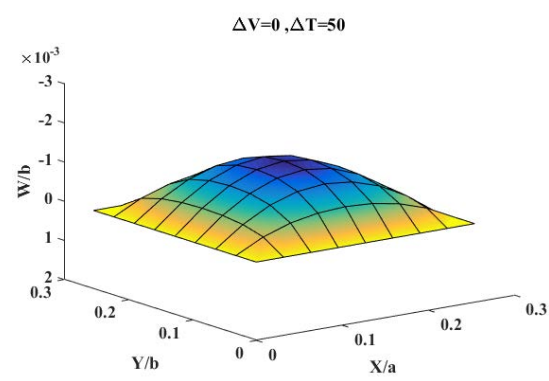
شکل ۶. خمش پوسته تحت فشار و ولتاژ



شکل ۵. خمش طولی صفحه یک‌سر گیردار با لایه‌های پیزوالکتریک

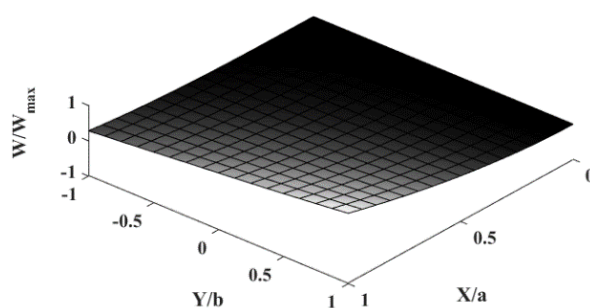


شکل ۸. خمش پوسته تحت اثر دما و ولتاژ

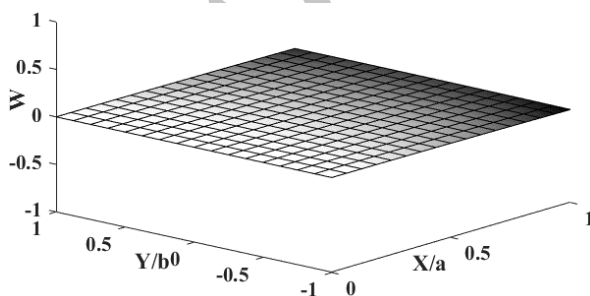


شکل ۷. خمش پوسته تحت اثر دما

مشخص‌تری دیده می‌شود. در ادامه برای کنترل پیچش پوسته می‌توان به لایه بالا و پایین پوسته ولتاژ با قطبیت یکسان اعمال کرد. شکل ۱۱ تغییر شکل پوسته را تحت ولتاژ ۱۴۵ ولت نشان می‌دهد؛ که در آن پیچش صفر و خمش بدون تغییر باقی مانده است. تغییر شکل به‌دست آمده در این مورد، کاملاً با نتایج کار لی مطابقت دارد [۲۳]. لی در ادامه با اعمال ولتاژ ۱۸۵ و -۱۰۵ ولت به لایه‌های پیزوالکتریک در بالا و پایین پوسته، سعی کرد اثر دما را کاملاً از بین ببرد. شکل ۱۲ تغییر شکل به‌دست آمده برای پوسته را با اعمال ولتاژ ۱۸۵ و -۱۰۵ ولت به لایه‌های پیزو الکتریک را نشان می‌دهد. همان‌طور که مشاهده می‌شود، اثر دما با اعمال ولتاژ خنثی شده است. در نتیجه می‌توان با اعمال ولتاژ انتخابی به سازه پیزوالکتریک، اعوجاج گرمایی را به دلخواه تغییر داد.



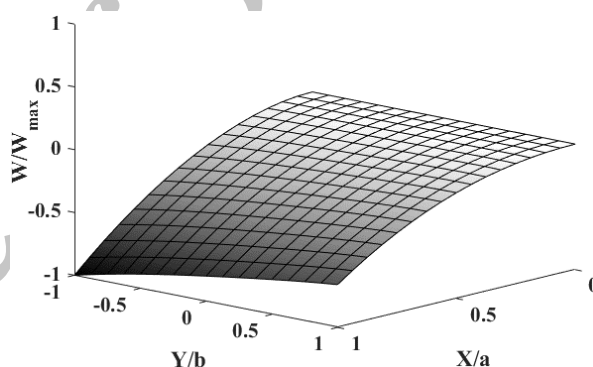
شکل ۱۰. تغییر شکل پوسته تحت گرادیان دمای ۳۰ درجه و ولتاژ ۴۰ ولت در لایه بالا و پایین پیزوالکتریک



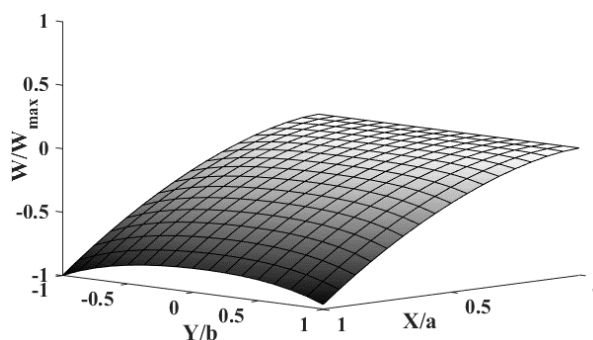
شکل ۱۲. تغییر شکل پوسته تحت گرادیان دمای ۳۰ درجه و ولتاژ ۱۸۵ ولت در لایه بالا و -۱۰۵ ولت در لایه پایین پیزوالکتریک

#### ۴-۵. کنترل اعوجاج گرمایی پوسته با اعمال ولتاژ

در این قسمت، پوسته‌ای کامپوزیتی پادمتقارن یک‌سر گیردار، با ابعاد  $372 \times 228$  میلی‌متر و چیدمان لایه‌ای  $[P/45_3/-45_3/P]_s$  در معرض گرادیان حرارتی ۳۰ درجه سانتی‌گراد در راستای ضخامت پوسته قرار دارد، مورد بررسی قرار گرفته است. شکل ۹ تغییر شکل پوسته را تحت گرادیان دما نشان می‌دهد که با توجه به چیدمان لایه‌ها خمش و پیچش حرارتی را شامل می‌شود. با اعمال ولتاژ می‌توان خمش، پیچش یا هر دو را در پوسته از بین برد. برای کنترل کردن خمش، ولتاژ با قطبیت مخالف به لایه بالا و پایین اعمال شده است. شکل ۱۰ تغییر شکل پوسته را تحت ولتاژ ۴۰ ولت نشان می‌دهد. همان‌طور که در شکل مشاهده می‌شود، خمش حرارتی در پوسته از بین رفته است، در حالی که پیچش بدون تغییر باقی مانده است. با توجه به نبود خمش، پیچش به‌طور



شکل ۹. تغییر شکل پوسته تحت گرادیان دمای ۳۰ درجه



شکل ۱۱. تغییر شکل پوسته تحت گرادیان دمای ۳۰ درجه و ولتاژ  $145 \pm$  در لایه بالا و پایین پیزوالکتریک

#### ۶. نتیجه‌گیری

بررسی شد و در پوسته‌های مختلف سعی شد با اعمال ولتاژ مناسب، تغییر شکل ناشی از فشار و دما خنثی شود. در نمونه‌های

در این مقاله، رفتار پوسته پیزوالکتریک، که کاربرد زیادی در پوسته بال و بدنه هواپیما دارد، با استفاده از روش هم‌هندسه

کرد و به رفتار دلخواه در چندلایه دست پیدا کرد. چون در روش هم‌هندسه می‌توان هندسه‌های دارای انحنا و پیچیدگی را دقیق‌تر مدل کرد، می‌توان مسائل کاربردی‌تر از جمله کماتش و فلاتر پوسته بال را دقیق‌تر بررسی و با تغییر پارامترهای هندسی و ولتاژ، رفتار سازه را پیشگویی کرد.

بررسی‌شده بیشترین مقدار خطا کمتر از ۰/۱ درصد بوده است. در مطالعه پاسخ خمشی و پیچشی چندلایه‌ها نشان داده شد که رسیدن به تغییر شکل دلخواه در پوسته به‌راحتی امکان‌پذیر است. همچنین می‌توان با انتخاب پارامترهای هندسی و لایه‌چینی مناسب برای پوسته و لایه پیزوالکتریک، شکل آن را بهتر کنترل

## ۷. مآخذ

- [1] T. J. R. Hughes, J. A. Cottrell, Y. Bazilevs, Isogeometric analysis: CAD, finite elements, NURBS, exact geometry and mesh refinement, *Comput. Methods Appl. Mech. Eng.* Vol. 194, pp. 4135–4195, 2005.
- [2] M. C. Hsu, I. Akkerman & Y. Bazilevs, High-performance computing of wind turbine aerodynamics using isogeometric analysis, *Computers & Fluids*, Vol. 49, No.1, pp. 93-100, 2011.
- [3] D. Anders, K. Weinberg, R. Reichardt, Isogeometric analysis of thermal diffusion in binary blends, *Computational Materials Science*, Vol. 52, No. 1, pp. 182-188, 2012.
- [4] Y. Bazilevs, V. M. Calo, J. A. Cottrell, J. A. Evans, T. J. R. Hughes, S. Lipton & T. Sederberg, Isogeometric analysis using T-splines, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, Vol. 199, No. 5, pp. 229-263, 2010.
- [5] Y. Bazilevs, M. C. Hsu & M. A. Scott, Isogeometric fluid-structure interaction analysis with emphasis on non-matching discretizations, and with application to wind turbines, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, Vol. 249, pp. 28-41, 2012.
- [6] M. Cuomo, L. Contrafatto, L. A. Greco, variational model based on isogeometric interpolation for the analysis of cracked bodies, *International Journal of Engineering Science*, Vol. 80, pp. 173-188, 2014.
- [7] J. Kiendl, K. U. Bletzinger, J. Linhard & R. Wüchner, Isogeometric shell analysis with Kirchhoff–Love elements, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, Vol. 198, No. 49, pp. 3902-3914, 2009.
- [8] N. Nguyen-Thanh, J. Kiendl, H. Nguyen-Xuan, R. Wüchner, K. U. Bletzinger, Y. Bazilevs & T. Rabczuk, Rotation free isogeometric thin shell analysis using PHT-splines, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, Vol. 200, No. 47, pp. 3410-3424, 2011.
- [9] D. J. Benson, Y. Bazilevs, M. C. Hsu & T. J. R. Hughes, Isogeometric shell analysis: the Reissner–Mindlin shell, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, Vol. 199, No. 5, pp. 276-289, 2010.
- [10] S. Hosseini, J. J. Remmers, C. V. Verhoosel & R. Borst, An isogeometric solid-like shell element for nonlinear analysis, *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, Vol. 95, No. 3, pp. 238-256, 2013.
- [11] J. M. Kiendl, *Isogeometric analysis and shape optimal design of shell structures*, PhD thesis, Technische universität münchen, 2011.
- [12] B. Hassani, S. M. Tavakkoli, & H. Ghasemnejad, Simultaneous shape and topology optimization of shell structures, *Structural and Multidisciplinary Optimization*, Vol. 48, No. 1, pp. 221-233, 2013.
- [13] S. M. Tavakkoli, B. Hassani & H. Ghasemnejad, Isogeometric topology Optimization of Structures by using mma, *Int. J. Optim. Civil Eng*, Vol. 3, No. 2, pp. 313-326, 2013.
- [14] S. K. Ha, C. Keilers, F. K. Chang, Finite element analysis of composite structures containing distributed piezoceramic sensors and actuators, *American Institute of Aeronautics and Astronautics Journal*, Vol. 3, No. 3, pp. 772–780, 1992.
- [15] W. S. Hwang, H. C. Park, Finite element modelling of piezoelectric sensors and actuators *AIAA J*, Vol. 31, pp. 930-937, 1993.
- [16] H. S. Tzou, R. Ye, Analysis of piezoelectric structures with laminated piezoelectric triangular shell elements, *American Institute of Aeronautics*



- and Astronautics Journal*, Vol. 34, No. 1, pp. 110-115 1996.
- [17] A. Benjeddou, Advances in piezoelectric finite element modeling of adaptive structural elements: a survey, *Computers and Structures*, Vol. 76, pp. 347-363, 2000.
- [18] S. Lee, N. S. Goo, H. C. Park, K. J. Yoon, C. Cho, A nine-node assumed strain shell element for analysis of a coupled electro-mechanical system, *Smart Mater. Struct*, Vol. 12, pp. 355-362, 2003.
- [19] V. Balamurugan, S. Narayanan, Shell finite element for smart piezoelectric composite plate/shell structures and its application to the study of active vibration control, *Finite Elem. Anal. Des.* Vol. 37, pp. 713-38, 2001.
- [20] E. F. Crawley, K. B Lazarus, Induced strain actuation of isotropic and anisotropic plates. *AIAA J*, Vol. 29, pp. 944-51, 1991.
- [21] H. Kioua, S. Mirza, Piezoelectric induced bending and twisting of laminated composite shallow shells, *Smart Mater. Struct*, Vol. 9, pp. 476-484, 2000.
- [22] S. N. Atluri, S. Shen, *The Meshless Local Petrov-Galerkin (MLPG) Method*, Tech Science Press, USA. Fifth edition, Volume 2: Solid Mechanics, 2002.
- [23] O. C. Zienkiewicz, *The Finite Element Method*, Fifth edition published by Butterworth-Heinemann. 2000.
- [24] H. J. Lee, D. A. Saravanos, Generalized Finite Element Formulation for Smart Multilayered Thermal Piezoelectric Composite Plate, *International Journal of Solids and Structures*, Vol. 34, No. 26, pp. 3355-3371, 1997.

پی نوشت

- 
1. isogeometric analysis
  2. Mindlin-Reissner theory
  3. sensor
  4. actuator
  5. stiffness matrix
  6. Electro mechanical coupling matrix
  7. electric stiffness matrix
  8. control points
  9. knot vector
  10. knot element
  11. Gaussian quadrature
  12. patch
  13. parametric space
  14. Scordelis-Lo-roof