

ارتعاش جانبی صفحه گرافنی تک‌لایه تحت تأثیر میدان مغناطیسی دو بعدی با روش مربعات دیفرانسیلی

آرزو اسماعیلی^۱، حسن بیگلری^۲

۱ دانشجوی کارشناسی ارشد، دانشکده مهندسی مکانیک، دانشگاه تبریز، تبریز

۲ استادیار، دانشکده مهندسی مکانیک، دانشگاه تبریز، تبریز، hbiglari@tabrizu.ac.ir

تاریخ دریافت: ۱۳۹۵/۰۳/۰۸

تاریخ پذیرش: ۱۳۹۵/۱۲/۱۰

چکیده

در این مقاله، معادله حاکم بر ارتعاش جانبی صفحه گرافنی تک‌لایه تحت تأثیر میدان مغناطیسی دوبعدی درون صفحه‌های، با احتساب نیرو و ممان خمشی ناشی از آن، برای شرایط تکیه‌گاهی مختلف برای نخستین بار توسط روش مربعات دیفرانسیلی بررسی شده است. برای تعیین معادله حاکم بر ارتعاش صفحه از تئوری غیرمحلّی با در نظر گرفتن نیروی مغناطیسی لورنتز بهره گرفته شده است. پس از استخراج معادله دیفرانسیل حاکم، معادله حاصل بی‌بعد شده و فرکانس ارتعاش به ازای شرایط تکیه‌گاهی مختلف به دست می‌آید. اثر سفتی بستر الاستیک، پارامتر غیرمحلّی، نسبت منظر ورق و اثر میدان مغناطیسی دوبعدی بر فرکانس پایه مورد بحث و بررسی قرار گرفته است. نتایج این بررسی نشان می‌دهد که افزایش سفتی بستر الاستیک، پارامتر غیرمحلّی و نسبت منظر سبب افزایش فرکانس پایه می‌شود. اما اعمال میدان مغناطیسی دوبعدی داخل صفحه‌ای باعث کاهش سفتی خمشی، افزایش نیروی فشاری داخل صفحه‌ای و در نتیجه کاهش فرکانس پایه می‌گردد.

واژگان کلیدی

صفحه گرافنی، تئوری غیرمحلّی، میدان مغناطیسی، نیروی لورنتز، روش عددی مربعات دیفرانسیل

۱. مقدمه

ضد خوردگی رزین است؛ زیرا گرافن درصد بیشتری از نور را جذب می‌کند و خواص آب‌گریزی برای دفع آب دارد [۱]. به‌تازگی پژوهش‌هایی در حوزه خواص مکانیکی، مغناطیسی و سایر خواص فیزیکی نانوسازه‌ها تحت میدان مغناطیسی خارجی انجام شده است. مطالعه درباره این موضوعات برای کاربردهای فناوری آینده مثل سیستم‌های نانوالکترومکانیکی، نانوحسگرها و نانوکامپوزیت‌ها ضروری است. مطالعه روی نانوسازه‌ها مثل نانولوله‌های کربنی و

با پیشرفت فناوری نانو، مطالعه درباره خواص سازه‌های نانو نیز گسترش یافته است. به‌تازگی استفاده از گرافن به‌عنوان پرکننده‌های نانویی رسنا در تهیه نانوکامپوزیت‌های صنعتی در زمینه هوافضا، توجهات زیادی را به خود جلب کرده است. این امر به‌دلیل امکان غلبه بر مشکلات مربوط به سازه هواپیما مانند هدایت الکتریکی و در نتیجه حفاظت در مقابل صاعقه است. علاوه بر این، گرافن موردی ایده‌آل به‌منظور افزایش خواص

صفحات گرافنی تحت اثر میدان مغناطیسی در بین محققان مورد توجه ویژه قرار گرفته است. اثر میدان مغناطیسی بر خواص نانولوله‌های کربنی تک‌جداره و چندجداره در سال‌های گذشته در مراجعی چون [۲] و [۳] صورت گرفته است. در همین زمان، بررسی تأثیر میدان مغناطیسی بر صفحات گرافنی نیز آغاز شده است [۴-۷].

ونگ و همکاران (۲۰۰۹) فرومغناطیس بودن مواد مبتنی بر گرافن را در دمای اتاق به صورت تجربی نشان دادند [۸]. رفتار فرومغناطیسی صفحات گرافنی در دمای اتاق به دلیل برخی از نقص‌های اتمی در ساختار صفحات گرافنی است. مورمو و ادیکاری (۲۰۱۱) در مورد ناپایداری محوری نانولوله‌های دوجداره تحقیق کردند [۹]. تحلیل تأثیر مقیاس در بارهای خمشی نانولوله دوجداره با مودهای سنکرون و آسنکرون در مطالعات آنها انجام شده است. آنها در مقاله مشابهی ارتعاش غیرمحلّی نانوصفحه‌های دوجداره را، که توسط محیط الاستیک بهم متصل شده‌اند، مطالعه کردند [۱۰]. این مقاله نقطه شروعی برای تحقیقات بیشتر در مورد رفتار نانوصفحات بر پایه گرافن مهیا کرد.

مورمو و پراڈهان (۲۰۰۹) در مورد تحلیل ارتعاشات نانوصفحه‌ها تحت پیش‌بار فشاری غیرمحوری تحقیق کردند [۱۱]. در مطالعات آنها، تأثیر مقیاس کوچک و پیش‌فشار غیرمحوری بر فرکانس غیر محلی بررسی شد. کیانی (۲۰۱۲) ارتعاش نانولوله‌های کربنی دوجداره بر بستر الاستیک در معرض بار محوری را مطالعه کرد [۱۲].

اخیراً تأثیر میدان مغناطیسی بر رفتار صفحات گرافنی و نانولوله‌های کربنی، محققان را مجذوب خود کرده است [۱۳-۱۵]. بعضی از آزمایش‌ها روی نانولوله‌های کربنی تحت میدان الکترومغناطیس انجام شده است. کیانی (۲۰۱۲) انتشار موج عرضی در نانولوله‌های کربنی تک‌جداره بر بستر الاستیک در معرض میدان مغناطیسی طولی با استفاده از مدل الاستیسیته غیرمحلّی را مطالعه کرده است [۱۶]. نتایج این تحقیق، تأثیر میدان مغناطیسی طولی بر مشخصات موج‌های برشی و خمشی در نانولوله‌های کربنی تک‌جداره تعبیه شده روی بستر الاستیک را نشان می‌دهد. مورمو و همکاران (۲۰۱۳) تأثیر میدان مغناطیسی درون‌صفحه‌ای بر ارتعاش عرضی صفحه گرافن تک‌لایه حساس به مغناطیس بر بستر وینکلر را با استفاده از نظریه صفحه الاستیک غیرمحلّی و با در نظر گرفتن نیروی مغناطیسی لورنتز

بیان کردند [۱۷]. آنها تأثیر میدان مغناطیسی درون‌صفحه‌ای بر فرکانس‌های طبیعی بالاتر و نسبت ابعاد مختلف صفحه گرافنی تک‌لایه را بررسی کردند. کیانی (۲۰۱۴) در مورد ارتعاش آزاد نانوصفحه‌های رسانا در معرض میدان مغناطیسی درون‌صفحه‌ای تک‌جهته با استفاده از تئوری ورق تغییر شکل برشی غیر محلی تحقیق کرد [۱۸]. او همچنین در مورد تأثیر پارامترهای تعیین‌کننده در فرکانس‌های خمشی نانوصفحه‌های تک‌لایه و نانولوله‌های در معرض میدان مغناطیسی یک‌بعدی، با استفاده از تئوری صفحه کیرشرف بحث کرده است [۱۹].

در این مقاله، آثار اعمال میدان مغناطیسی درون‌صفحه‌ای دوبعدی در ارتعاش جانبی نانوصفحات گرافنی بررسی می‌شود. صفحه گرافنی در یک محیط الاستیک، مانند ماتریس پلیمری، قرار دارد. برای روابط ساختاری، از نظریه الاستیسیته غیرمحلّی استفاده می‌شود. با استفاده از تئوری ورق غیرمحلّی و با در نظر گرفتن نیرو و خمش اعمال شده به ورق گرافنی، ناشی از میدان مغناطیسی درون‌صفحه‌ای دوبعدی از طریق معادلات ماکسول، معادلات ارتعاش خمشی صفحه گرافنی به دست آمده و با استفاده از روش مربعات دیفرانسیلی حل می‌شود. اثر سفتی بستر الاستیک، پارامتر غیرمحلّی و نسبت منطری ورق، با و بدون وجود میدان مغناطیسی، روی فرکانس پایه ورق با شرایط تکیه‌گاهی مختلف مورد بحث و بررسی قرار می‌گیرد. نتایج این بررسی نشان می‌دهد که افزایش سفتی بستر الاستیک، پارامتر غیرمحلّی و نسبت منطری سبب افزایش فرکانس پایه در تمامی شرایط تکیه‌گاهی می‌شود. اما اعمال میدان مغناطیسی داخل صفحه‌ای سبب افزایش نیروی فشاری و خمشی داخل صفحه‌ای و در نتیجه کاهش فرکانس پایه می‌شود. در این مقاله اثر میدان مغناطیسی دوبعدی با احتساب نیرو و ممان خمشی ناشی از آن، همچنین حل معادله حاکم با استفاده از روش مربعات دیفرانسیل برای شرایط تکیه‌گاه‌های مختلف برای نخستین بار صورت در نظر گرفته شده است.

۲. فرمول‌نویسی ریاضی

۲-۱. روابط ماکسول

با فرض اینکه J بردار چگالی جریان، h بردار توزیع میدان مغناطیسی و e بردار قدرت میدان الکتریکی باشد، روابط ماکسول به صورت زیر بیان می‌شوند [۲۰]:

صفحه‌ای و گشتاور خمشی ناشی از میدان مغناطیسی در نظر گرفته شده به صورت روابط ۱۲ و ۱۳ است [۱۹]. در این روابط h ضخامت صفحه گرافن مورد نظر است.

$$\begin{aligned} f_x &= -\eta H_y \left\{ H_x (u_{y,xx} + u_{y,yy} + u_{z,yz}) \right. \\ &\quad \left. - H_y (u_{x,xx} + u_{x,yy} + u_{z,xz}) \right\} \\ f_y &= \eta H_x \left\{ H_x (u_{y,xx} + u_{y,yy} + u_{z,yz}) \right. \\ &\quad \left. - H_y (u_{x,xx} + u_{x,yy} + u_{z,xz}) \right\} \end{aligned} \quad (11)$$

$$\begin{aligned} f_z &= \eta \left\{ H_x^2 (u_{y,yz} + u_{z,xx} + u_{z,zz}) + H_y^2 (u_{x,xz} + \right. \\ &\quad \left. u_{z,yy} + u_{z,zz}) + H_x H_y (-u_{x,yz} - u_{y,xz} + 2u_{z,xy}) \right\} \\ \mathbf{F}_m &= F_{mx} \mathbf{i} + F_{my} \mathbf{j} + F_{mz} \mathbf{k} = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \mathbf{f} dz \end{aligned} \quad (12)$$

$$\mathbf{M}_m = M_{mx} \mathbf{i} + M_{my} \mathbf{j} + M_{mz} \mathbf{k} = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \mathbf{f} z dz \quad (13)$$

۲-۲. تئوری غیرمحلی

با توجه به خواص مکانیکی، شیمیایی و الکتریکی برتر، عناصر نانوسازه‌ها مثل نانوتیرها، نانوغشاها و نانوصفحات به‌طور معمول به‌عنوان اجزای سازنده در دستگاه‌های نانوالکترومکانیکی استفاده می‌شوند. از اینرو، پیش‌بینی دقیق مشخصات ارتعاشی نانوسازه‌ها برای طراحی‌های مهندسی و تولید ضروری است. در بین سه روش ارائه‌شده برای تحلیل نانوسازه‌ها؛ یعنی مکانیک اتمی، مکانیک اتمی - محیط پیوسته و مکانیک محیط پیوسته، روش سوم هزینه محاسباتی کمتری نسبت به دو روش قبلی دارد. از سوی دیگر، تئوری پیوسته کلاسیک نمی‌تواند اثر اندازه و مقیاس را پیش‌بینی کند. در مقیاس نانو اثر اندازه مهم است. هم نتایج آزمایشگاهی و هم نتایج مربوط به شبیه‌سازی دینامیک مولکولی نشان می‌دهد که اثر مقیاس در خواص مکانیکی مواد، وقتی ابعاد این سازه‌ها کوچک می‌شوند، بسیار مهم و پرمعناست. برای حل این مشکل از نظریه محیط پیوسته غیرمحلی، که توسط ارینگن توسعه یافته است، برای پیش‌بینی دقیق رفتار مکانیکی نانوسازه‌ها در مدل‌های پیوسته استفاده شود. ماهیت این تئوری بر این فرض استوار است که تنش در یک نقطه از جسم علاوه بر کرنش آن نقطه تابعی از کرنش سایر نقاط آن جسم نیز می‌باشد. از تئوری الاستیسیته غیرمحلی در زمینه ارتعاشات و آنالیز پایداری سازه‌ها با ابعاد میکرو و نانو استفاده می‌شود [۲۱-۲۲].

$$\mathbf{J} = \nabla \times \mathbf{h} \quad (1)$$

$$\nabla \times \mathbf{e} = -\eta \frac{\partial \mathbf{h}}{\partial t} \quad (2)$$

$$\nabla \mathbf{h} = 0 \quad (3)$$

$$\mathbf{e} = -\eta \left(\frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t} \times \mathbf{H} \right) \quad (4)$$

$$\mathbf{h} = \nabla \times (\mathbf{U} \times \mathbf{H}) \quad (5)$$

که در آن، H بردار میدان مغناطیسی، U بردار جابه‌جایی، η ضریب میدان مغناطیسی و ∇ اپراتور هامیلتون است که به‌صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\nabla = \frac{\partial}{\partial x} \mathbf{i} + \frac{\partial}{\partial y} \mathbf{j} + \frac{\partial}{\partial z} \mathbf{k} \quad (6)$$

که i, j, k بردارهای واحدند. در تحقیق حاضر، بردار میدان مغناطیسی اعمال‌شده به صفحه گرافنی به‌صورت $H = (H_x, H_y, 0)$ در نظر گرفته شده است. همچنین، بردار جابه‌جایی هر نقطه از ورق طبق تئوری کیرشهف به‌صورت زیر است [۱۹]:

$$\begin{aligned} \mathbf{U} &= u_x \mathbf{i} + u_y \mathbf{j} + u_z \mathbf{k} \\ u_x(x, y, z, t) &= u(x, y, t) - zw_{,x}(x, y, t) \end{aligned} \quad (7)$$

$$u_y(x, y, z, t) = v(x, y, t) - zw_{,y}(x, y, t)$$

$$u_z(x, y, z, t) = w(x, y, t)$$

که u, v و w جابه‌جایی‌های صفحه میانی ورق گرافن در راستای x, y و z هستند. با جایگذاری بردار میدان مغناطیسی و جابه‌جایی در رابطه (۵) بردار توزیع میدان مغناطیسی طبق رابطه ۸ حاصل می‌شود:

$$\mathbf{h} = \left\{ -H_x (u_{y,y} + u_{z,z}) + H_y u_{x,x} \right\} \mathbf{i} - \left\{ H_y (u_{x,x} + u_{z,z}) - H_x u_{y,x} \right\} \mathbf{j} + \left\{ H_x u_{z,x} + H_y u_{z,y} \right\} \mathbf{k} \quad (8)$$

همچنین با استفاده از رابطه ۱ چگالی جریان به‌دست می‌آید:

$$\begin{aligned} \mathbf{J} &= \left\{ -H_x (u_{y,xz} - u_{z,xy}) + H_y (u_{x,xz} + u_{z,yy} \right. \\ &\quad \left. + u_{z,zz}) \right\} \mathbf{i} - \left\{ H_x (u_{y,yz} + u_{z,zx} + u_{z,zz}) \right. \\ &\quad \left. + H_y (u_{z,xy} + u_{x,yz}) \right\} \mathbf{j} + \left\{ H_x (u_{y,xx} + \right. \\ &\quad \left. u_{y,yy} + u_{z,yz}) - H_y (u_{x,xx} + u_{x,yy} + u_{z,xz}) \right\} \mathbf{k} \end{aligned} \quad (9)$$

نیروی لورنتز ناشی از میدان مغناطیسی دوبعدی درون صفحه‌ای به‌صورت زیر است [۲۰]:

$$\mathbf{f} = f_x \mathbf{i} + f_y \mathbf{j} + f_z \mathbf{k} = \eta (\mathbf{J} \times \mathbf{H}) \quad (10)$$

با توجه به رابطه ۹، مؤلفه‌های نیروی لورنتز به‌صورت رابطه ۱۱ به‌دست می‌آیند. در تحلیل ارتعاش جانبی صفحه گرافن، فقط محاسبه جابه‌جایی $w = w(x, y, t)$ مد نظر است. نیروی درون

$$M_{xx,xx}^{nl} + 2M_{xy,xy}^{nl} + M_{yy,yy}^{nl} - kw + M_{my,y} + M_{mx,x} + F_{mz} = \rho h w_{,tt} \quad (18)$$

که ρ چگالی صفحه گرافن است. ممان‌های غیر محلی $M_{\alpha\beta}^{nl}$ در رابطه ۱۸ توسط روابط زیر به ممان‌های محلی $M_{\alpha\beta}^l$ در رابطه ۱۸ مربوط می‌شود [۲۴]:

$$M_{xx}^{nl} - (e_0 a)^2 \nabla^2 M_{xx}^{nl} = M_{xx}^l = -D(w_{,xx} + \nu w_{,yy}) \quad (19)$$

$$M_{yy}^{nl} - (e_0 a)^2 \nabla^2 M_{yy}^{nl} = M_{yy}^l = -D(w_{,yy} + \nu w_{,xx}) \quad (20)$$

$$M_{xy}^{nl} - (e_0 a)^2 \nabla^2 M_{xy}^{nl} = M_{xy}^l = -D(1-\nu)w_{,xy} \quad (21)$$

که ∇^2 اپراتور لاپلاسین، $D = Eh^3/12(1-\nu^2)$ صلبیت خمشی، E مدول الاستیسیته و ν نسبت پواسون صفحه گرافن است. با ترکیب معادلات ۱۹ تا ۲۱ و معادله ۱۸ با روابط ۱۲ و ۱۳، معادله ارتعاش عرضی غیرمحلی صفحه گرافن تحت تحریک میدان مغناطیسی به صورت ۲۲ حاصل می‌شود:

$$D\nabla^4 w + \rho h \ddot{w} - k(e_0 a)^2 \nabla^2 w - (e_0 a)^2 \rho h \nabla^2 \ddot{w} + kw - \eta h \{ H_x^2 (w_{,xx} - w_{,yy}) + H_y^2 (w_{,yy} - w_{,xx}) + 4H_x H_y w_{,xy} \} + (e_0 a)^2 \eta h \nabla^2 \{ H_x^2 (w_{,xx} - w_{,yy}) + H_y^2 (w_{,yy} - w_{,xx}) + 4H_x H_y w_{,xy} \} + \frac{\eta h^3}{12} \{ H_x^2 \times (w_{,xxyy} - w_{,yyxx}) + H_y^2 (w_{,xyxy} - w_{,yxyx}) - 2H_x H_y \times (w_{,xxyy} - w_{,yyxx}) \} - (e_0 a)^2 \frac{\eta h^3}{12} \{ H_x^2 \nabla^4 w_{,yy} + H_y^2 \nabla^4 w_{,xx} - 2H_x H_y \nabla^4 w_{,xy} \} = 0 \quad (22)$$

با توجه به رفتار هارمونیک خیز جانبی ورق در ارتعاش آزاد، خیز جانبی به صورت $w(x,y,t) = W(x,y)e^{i\omega t}$ در نظر گرفته شده و در معادله ۲۲ جایگذاری می‌شود. لذا معادله دیفرانسیل جزئی ۲۳ در حوزه مکان حاصل می‌شود:

$$D\nabla^4 W - \omega^2 \rho h W - k(e_0 a)^2 \nabla^2 W + \omega^2 (e_0 a)^2 \times \rho h \nabla^2 W + kW - \eta h \{ H_x^2 (W_{,xx} - W_{,yy}) + H_y^2 (W_{,yy} - W_{,xx}) + 4H_x H_y W_{,xy} \} + (e_0 a)^2 \eta h \nabla^2 \{ H_x^2 (W_{,xx} - W_{,yy}) + H_y^2 (W_{,yy} - W_{,xx}) + 4H_x H_y W_{,xy} \} + \frac{\eta h^3}{12} \times \{ H_x^2 (W_{,xxyy} - W_{,yyxx}) + H_y^2 (W_{,xyxy} - W_{,yxyx}) - 2H_x H_y (W_{,xxyy} - W_{,yyxx}) \} - (e_0 a)^2 \frac{\eta h^3}{12} \{ H_x^2 \times \nabla^4 W_{,yy} + H_y^2 \nabla^4 W_{,xx} - 2H_x H_y \nabla^4 W_{,xy} \} = 0 \quad (23)$$

برای سهولت حل معادله ۲۳، پارامترهای زیر تعریف می‌شوند:

در این بخش، بیان مختصری از الاستیسیته غیرمحلی اعمال شده به نانوسازه‌ها ارائه شده است. در نظریه الاستیسیته غیرمحلی، معادله ساختاری برای جسم الاستیک همگن خطی و همسانگرد به صورت زیر است [۲۲]:

$$\sigma_{ij}(x) = \int_V \phi(|x-x'|, \alpha) \sigma_{ij}^c(x') dV \quad (14)$$

$$\sigma_{ij}^c(x') = C_{ijkl} \varepsilon_{kl}(x')$$

که σ_{ij} ، ε_{kl} ، C_{ijkl} و V به ترتیب تنش غیرمحلی، تنش کلاسیک، کرنش کلاسیک، تانسور سفتی الاستیسیته مرتبه چهارم و حجم جسم هستند. تابع کرنل $\phi(|x-x'|, \alpha)$ به عنوان مدول غیرمحلی شناخته می‌شود. مدول غیرمحلی به صورت یک تابع میرایی عمل می‌کند. طبق رابطه ۱۴، آثار غیرمحلی در نقطه مرجع x به کرنش تمام نقاط x' مربوط می‌شود. عبارت $|x-x'|$ نشان‌دهنده فاصله در نرم اقلیدسی و α ثابت مادی است که به مشخصه‌های طولی داخلی (پارامتر شبکه، اندازه سلول، فاصله پیوند کربن-کربن) و خارجی (طول ترک، طول موج و جز این‌ها) بستگی دارد. مدول غیرمحلی که توسط ارینگن ارائه شده، به صورت زیر است [۲۲]:

$$\phi(|x|, \alpha) = \frac{1}{2\pi l^2 \alpha^2} K_0 \left(\frac{\sqrt{x \cdot x}}{l\alpha} \right) \quad (15)$$

که در آن، K_0 تابع بسل اصلاح شده و ثابت مادی $\alpha = e_0 a / l$ می‌باشد. پارامتر غیر محلی e_0 ثابتی برای کالیبره کردن مدل با نتایج تجربی است. براساس تحقیقات ارینگن [۲۲]، مقدار عددی e_0 برابر با ۰/۳۹ گزارش شده است. مقادیر مختلف پارامتر غیرمحلی e_0 توسط محققان مختلف در مرجع [۲۳] آمده است. پارامترهای a و l (در تعریف ثابت مادی α) مشخصه‌های طولی داخلی و خارجی نانوسازه می‌باشد. در نهایت، رابطه ساختاری ۱۴ به فرم دیفرانسیلی زیر مورد استفاده قرار می‌گیرد [۲۴]:

$$(1 - \alpha^2 l^2 \nabla_L^2) \sigma_{ij}(x) = \sigma_{ij}^c(x) = C_{ijkl} \varepsilon_{kl}(x) \quad (16)$$

که در آن، ∇_L^2 لاپلاسین است. برای نانوسازه‌های دوبعدی مثل صفحه گرافن، معادله ۱۶ به فرم ۱۷ ساده می‌شود [۲۴]:

$$\left[1 - (e_0 a)^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right] \sigma = \sigma_{ij}^c \quad (17)$$

۳-۲. معادلات حاکم

معادله حاکم بر ارتعاش عرضی صفحه گرافن روی بستر الاستیک با ثابت k براساس گشتاورهای غیرمحلی به صورت ۱۸ است [۱۷]:

$$\begin{aligned}
 & \left(1 - \mu^2 M_{py} + \mu^2 M_{px} + \frac{\bar{h}^2}{12} M_{py} \right) \sum_{k=1}^n c_{i,k}^{(4)} \bar{W}_{k,j} \\
 & + r^2 \left(2 + \frac{\bar{h}^2}{12} M_{px} + \frac{\bar{h}^2}{12} M_{py} \right) \sum_{k_1=1}^n \sum_{k_2=1}^m c_{i,k_1}^{(2)} \bar{c}_{j,k_2}^{(2)} \bar{W}_{k_1,k_2} \\
 & + r^4 \left(1 - \mu^2 M_{px} + \mu^2 M_{py} + \frac{\bar{h}^2}{12} M_{px} \right) \sum_{k=1}^m c_{j,k}^{(4)} \bar{W}_{i,k} \\
 & + K \bar{W}_{i,j} - 4M_{pxy} r \sum_{k_1=1}^n \sum_{k_2=1}^m c_{i,k_1}^{(1)} \bar{c}_{j,k_2}^{(1)} \bar{W}_{k_1,k_2} \\
 & + (M_{py} - M_{px} - \mu^2 K) \sum_{k=1}^n c_{i,k}^{(2)} \bar{W}_{k,j} \\
 & + r^2 (-M_{py} + M_{px} - \mu^2 K) \sum_{k=1}^m \bar{c}_{j,k}^{(2)} \bar{W}_{i,k} \\
 & + \left(4\mu^2 r M_{pxy} - \frac{\bar{h}^2 r}{6} M_{pxy} \right) \sum_{k_1=1}^n \sum_{k_2=1}^m c_{i,k_1}^{(3)} \bar{c}_{j,k_2}^{(1)} \bar{W}_{k_1,k_2} \\
 & + \left(4\mu^2 r^3 M_{pxy} - \frac{\bar{h}^2 r^3}{6} M_{pxy} \right) \sum_{k_1=1}^n \sum_{k_2=1}^m c_{i,k_1}^{(1)} \bar{c}_{j,k_2}^{(3)} \bar{W}_{k_1,k_2} \quad (26) \\
 & + \frac{\bar{h}^2 \mu^2 r^2}{12} (-M_{px} - 2M_{py}) \sum_{k_1=1}^n \sum_{k_2=1}^m c_{i,k_1}^{(4)} \bar{c}_{j,k_2}^{(2)} \bar{W}_{k_1,k_2} \\
 & + \frac{\bar{h}^2 \mu^2 r^4}{12} (-2M_{px} - M_{py}) \sum_{k_1=1}^n \sum_{k_2=1}^m c_{i,k_1}^{(2)} \bar{c}_{j,k_2}^{(4)} \bar{W}_{k_1,k_2} \\
 & - \frac{\bar{h}^2 \mu^2}{12} M_{py} \sum_{k=1}^n c_{i,k}^{(6)} \bar{W}_{k,j} - \frac{\bar{h}^2 \mu^2 r^6}{12} M_{px} \sum_{k=1}^m \bar{c}_{j,k}^{(6)} \bar{W}_{i,k} \\
 & + \frac{\bar{h}^2 \mu^2 r}{6} M_{pxy} \sum_{k_1=1}^n \sum_{k_2=1}^m c_{i,k_1}^{(5)} \bar{c}_{j,k_2}^{(1)} \bar{W}_{k_1,k_2} \\
 & + \frac{\bar{h}^2 \mu^2 r^3}{3} M_{pxy} \sum_{k_1=1}^n \sum_{k_2=1}^m c_{i,k_1}^{(3)} \bar{c}_{j,k_2}^{(3)} \bar{W}_{k_1,k_2} \\
 & + \frac{\bar{h}^2 \mu^2 r^5}{12} M_{pxy} \sum_{k_1=1}^n \sum_{k_2=1}^m c_{i,k_1}^{(1)} \bar{c}_{j,k_2}^{(5)} \bar{W}_{k_1,k_2} \\
 & = \Omega^2 \left(\bar{W}_{i,j} - \mu^2 \sum_{k=1}^n c_{i,k}^{(2)} \bar{W}_{k,j} - \mu^2 r^2 \sum_{k=1}^m \bar{c}_{j,k}^{(2)} \bar{W}_{i,k} \right)
 \end{aligned}$$

برای حل کامل معادله دیفرانسیل، شرایط مرزی آن باید اعمال شود. یکی از نکات مهم در روش مربعات دیفرانسیلی، نحوه اعمال شرایط مرزی در فرایند حل است.

۲-۵. اعمال شرایط مرزی

شرایط مرزی برای تکیه‌گاه‌های ساده (SSSS) به صورت روابط ۲۷ و برای تکیه‌گاه‌های گیردار (CCCC) به صورت روابط ۲۸ است:

$$\begin{aligned}
 \bar{W}(0, \bar{y}, t) = 0, \bar{W}(1, \bar{y}, t) = 0 \\
 \bar{W}(\bar{x}, 0, t) = 0, \bar{W}(\bar{x}, 1, t) = 0 \quad (27)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \bar{W} = \frac{W}{h}, \bar{x} = \frac{x}{L}, \bar{y} = \frac{y}{b}, \bar{h} = \frac{h}{L}, r = \frac{L}{b} \\
 \Omega_{mn} = \omega_{mn} L^2 \sqrt{\frac{\rho h}{D}}, \mu = \frac{e_0 a}{L}, K = \frac{kL^4}{D} \quad (24)
 \end{aligned}$$

$$M_{px} = \frac{\eta h H_x^2 L^2}{D}, M_{py} = \frac{\eta h H_y^2 L^2}{D},$$

$$M_{pxy} = \frac{\eta h H_x H_y L^2}{D}$$

در روابط بالا، L طول و b عرض ورق گرافنی است. با استفاده از پارامترهای بی‌بعد، معادله حاکم بر ارتعاش جانبی ورق گرافنی به صورت زیر به دست می‌آید:

$$\begin{aligned}
 & \frac{M_{py} \bar{h}^2 \mu^2}{12} \frac{\partial^6 \bar{W}}{\partial \bar{x}^6} - \frac{M_{px} \bar{h}^2 \mu^2 r^6}{12} \frac{\partial^6 \bar{W}}{\partial \bar{y}^6} + \frac{\bar{h}^2 \mu^2 r^2}{12} \times \\
 & (-M_{px} - 2M_{py}) \frac{\partial^6 \bar{W}}{\partial \bar{x}^4 \partial \bar{y}^2} + \frac{\bar{h}^2 \mu^2 r^4}{12} (-2M_{px} - \\
 & M_{py}) \frac{\partial^6 \bar{W}}{\partial \bar{x}^2 \partial \bar{y}^4} + \frac{\bar{h}^2 \mu^2 r}{6} M_{pxy} \frac{\partial^6 \bar{W}}{\partial \bar{x}^5 \partial \bar{y}} + \frac{\bar{h}^2 \mu^2 r^5}{12} \times \\
 & M_{pxy} \frac{\partial^6 \bar{W}}{\partial \bar{x} \partial \bar{y}^5} + \frac{\bar{h}^2 \mu^2 r^3}{3} M_{pxy} \frac{\partial^6 \bar{W}}{\partial \bar{x}^3 \partial \bar{y}^3} + (1 - \mu^2 M_{py} \\
 & + \mu^2 M_{px} + \frac{\bar{h}^2}{12} M_{py}) \frac{\partial^4 \bar{W}}{\partial \bar{x}^4} + r^2 \left(2 + \frac{\bar{h}^2}{12} M_{px} + \right. \\
 & \left. \frac{\bar{h}^2}{12} M_{py} \right) \frac{\partial^4 \bar{W}}{\partial \bar{x}^2 \partial \bar{y}^2} + r^4 (1 - \mu^2 M_{px} + \mu^2 M_{py} + \\
 & \left. \frac{\bar{h}^2}{12} M_{px} \right) \frac{\partial^4 \bar{W}}{\partial \bar{y}^4} + \left(4\mu^2 r M_{pxy} - \frac{\bar{h}^2 r}{6} M_{pxy} \right) \frac{\partial^4 \bar{W}}{\partial \bar{x}^3 \partial \bar{y}} \\
 & + \left(4\mu^2 r^3 M_{pxy} - \frac{\bar{h}^2 r^3}{6} M_{pxy} \right) \frac{\partial^4 \bar{W}}{\partial \bar{x} \partial \bar{y}^3} - 4r M_{pxy} \times \\
 & \frac{\partial^2 \bar{W}}{\partial \bar{x} \partial \bar{y}} + (M_{py} - M_{px} - \mu^2 K) \frac{\partial^2 \bar{W}}{\partial \bar{x}^2} + r^2 (-M_{py} + \\
 & M_{px} - \mu^2 K) \frac{\partial^2 \bar{W}}{\partial \bar{y}^2} + K \bar{W} = \\
 & \Omega^2 \left(\bar{W} - \mu^2 \frac{\partial^2 \bar{W}}{\partial \bar{x}^2} - \mu^2 r^2 \frac{\partial^2 \bar{W}}{\partial \bar{y}^2} \right) \quad (25)
 \end{aligned}$$

ملاحظه می‌شود که با وجود مشتق‌های جزئی از مرتبه‌های فرد در معادله حاکم رابطه ۲۵، امکان حل تحلیلی برای انواع شرایط مرزی وجود ندارد. لذا در ادامه، حل معادله فوق با استفاده از روش عددی مربعات دیفرانسیل صورت می‌پذیرد.

۲-۴. حل معادله با روش مربعات دیفرانسیلی

با اعمال روش مربعات دیفرانسیل، معادله دیفرانسیل جزئی ۲۵ به معادله جبری ۲۶ تبدیل می‌شود (توضیح بیشتر در پیوست).

$$\frac{1}{\omega^2} \begin{bmatrix} [G_0] & [G_1]^T \\ [G_1] & [0] \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \{\bar{W}\} \\ \{\lambda\} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} [E_0] & [E_1]^T \\ [E_1] & [0] \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \{\bar{W}\} \\ \{\lambda\} \end{Bmatrix} \quad (33)$$

با حل معادله بالا به صورت یک مسئله مقدار ویژه و بردار ویژه، می توان فرکانس های طبیعی و شکل مودها را به دست آورد.

۳. بحث و بررسی نتایج

۳-۱. اعتبارسنجی

در این بخش، فرکانس پایه حاصل از حل عددی معادله ۲۶ با نتایج حل تحلیلی به دست آمده توسط کیانی [۱۹] برای ورق مربع گرافنی با شرایط مرزی چهار لبه تکیه گاه ساده (SSSS) و مشخصات زیر اعتبارسنجی می شود:

$$M_{py} = M_{pxy} = 0, r = 1, \bar{h} = 0.013$$

فرکانس بی بعد برای صفحه گرافن تحت تحریک میدان مغناطیسی یک بعدی و برای تکیه گاه های ساده، به صورت تحلیلی توسط کیانی مطابق رابطه زیر محاسبه شده است [۱۹].

$$\Omega_{mn} = \left(\frac{\xi_{mn}}{1 + \mu^2 \xi_{mn}} + M_{px} \left(\eta_{mn} + \frac{(n\pi\bar{h}r)^2}{12} \xi_{mn} \right) + K \right)^{\frac{1}{2}} \quad (34)$$

که در آن پارامترهای ξ_{mn} و η_{mn} به صورت زیر تعریف می شوند:

$$\xi_{mn} = (m\pi)^2 + (n\pi r)^2 \quad (35)$$

$$\eta_{mn} = (m\pi)^2 - (n\pi r)^2$$

m و n شماره شکل مود ارتعاشی صفحه گرافن هستند.

در جدول ۱، فرکانس پایه بی بعد ورق گرافنی حاصل از مقاله حاضر با نتایج تحلیلی به دست آمده از رابطه ۳۴ در چهار حالت مختلف مقایسه شده است. نتایج حاصل از روش دیفرانسیل مربعات به ازای تعداد نقاط شبکه بندی مختلف ($n=12,13,17$) ارائه شده است. نتایج جدول نشان دهنده تطابق خوب نتایج روش مربعات دیفرانسیلی با نتایج تحلیلی مرجع [۱۹] است. مطابق جدول، نتایج روش مربعات دیفرانسیل در تعداد نقاط شبکه بندی $n=13$ کاملاً همگرا می شود. لذا در ادامه، برای شبکه بندی طولی و عرضی ورق از ۱۳ نقطه استفاده شده است. برای نشان دادن قابلیت روش مربعات دیفرانسیل در تعیین درست شکل مودهای ارتعاشی، در شکل ۱ چهار شکل مود اول ورق گرافنی با چهار لبه

$$\frac{\partial^2 \bar{W}}{\partial x^2} \Big|_{\text{along } \bar{x}=0,1}, \frac{\partial^2 \bar{W}}{\partial y^2} \Big|_{\text{along } \bar{y}=0,1}$$

$$\bar{W}(0, \bar{y}, t) = 0, \bar{W}(1, \bar{y}, t) = 0$$

$$\bar{W}(\bar{x}, 0, t) = 0, \bar{W}(\bar{x}, 1, t) = 0$$

(۲۸)

$$\frac{\partial \bar{W}}{\partial x} \Big|_{\text{along } \bar{x}=0,1}, \frac{\partial \bar{W}}{\partial y} \Big|_{\text{along } \bar{y}=0,1}$$

با اعمال روش مربعات دیفرانسیلی به شرایط مرزی، روابط

جبری زیر حاصل می شود [۲۶-۲۷]:

الف) تکیه گاه های ساده (SSSS):

$$\begin{cases} \bar{W}_{1,j} = 0, \bar{W}_{N,j} = 0 \\ \bar{W}_{i,1} = 0, \bar{W}_{i,N} = 0 \end{cases}, i=1,2,\dots,n, j=1,2,\dots,m$$

$$\sum_{k=1}^n c_{1,k}^{(2)} \bar{W}_{k,j} = 0, \sum_{k=1}^n c_{n,k}^{(2)} \bar{W}_{k,j} = 0, \quad (29)$$

$$\sum_{k=1}^m c_{1,k}^{(2)} \bar{W}_{i,k} = 0, \sum_{k=1}^m c_{m,k}^{(2)} \bar{W}_{i,k} = 0$$

ب) تکیه گاه های گیردار (CCCC):

$$\begin{cases} \bar{W}_{1,j} = 0, \bar{W}_{N,j} = 0 \\ \bar{W}_{i,1} = 0, \bar{W}_{i,N} = 0 \end{cases}, i=1,2,\dots,n, j=1,2,\dots,m$$

$$\sum_{k=1}^n c_{1,k}^{(1)} \bar{W}_{k,j} = 0, \sum_{k=1}^n c_{n,k}^{(1)} \bar{W}_{k,j} = 0, \quad (30)$$

$$\sum_{k=1}^m c_{1,k}^{(1)} \bar{W}_{i,k} = 0, \sum_{k=1}^m c_{m,k}^{(1)} \bar{W}_{i,k} = 0$$

برای اعمال شرایط مرزی ۲۹ یا ۳۰، روش های مختلفی

توسط پژوهشگران مختلف به کار گرفته شده است. در این مقاله،

اعمال شرایط مرزی توسط روش ویلسون صورت می پذیرد.

۲-۵-۱. روش اعمال شرایط مرزی ویلسون

در حالت کلی شرایط مرزی به صورت زیر است [۲۵]:

$$[G_1] \{\bar{W}\} = \omega^2 [E_1] \{\bar{W}\} \quad (31)$$

که E_1 و G_1 ماتریس های ضرایب مربوط به شرایط مرزی

هستند. با ترکیب معادلات حاکم و شرایط مرزی، دستگاه معادلات

جبری زیر حاصل می شود [۲۵]:

$$\frac{1}{\omega^2} \begin{bmatrix} [G_0] \\ [G_1] \end{bmatrix} \{\bar{W}\} = \begin{bmatrix} [E_0] \\ [E_1] \end{bmatrix} \{\bar{W}\} \quad (32)$$

که E_0 و G_0 ماتریس های ضرایب مربوط به جابه جایی نقاط

آزمایشی در نظر گرفته شده روی صفحه گرافن هستند. به

پیشنهاد ویلسون، با استفاده از روش ضرایب لاگرانژ، معادله ۳۲

می تواند به ماتریس مربعی زیر تبدیل شود [۲۵]:

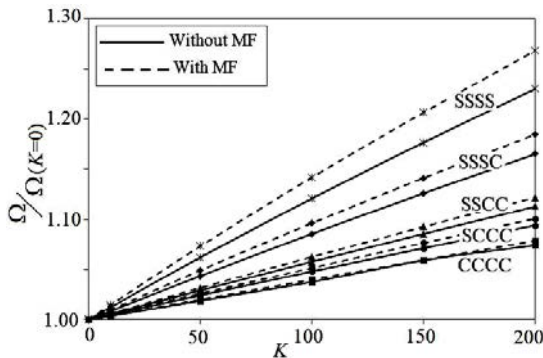
دیگر گیردار (SSCC)، یک لبه تکیه‌گاه ساده و سه لبه گیردار (SCCC) و چهار طرف گیردار (CCCC) ارائه شده است. برای بررسی این اثر مقدار پارامتر غیر محلی μ برابر با صفر در نظر گرفته شده است. اثر میدان مغناطیسی در نتایج جدول ۲ لحاظ نشده است، اما در نتایج جدول ۳ لحاظ شده است. همچنین، نتایج جدول ۲ و ۳ به صورت ترسیمی در شکل ۲ نمایش داده شده است. در شکل ۲ مشاهده می‌شود که با افزایش سفتی بستر الاستیک بی‌بعد، فرکانس پایه بی‌بعد، در تمامی شرایط تکیه‌گاهی، به صورت تقریباً خطی افزایش می‌یابد. هرچه شرایط مرزی ورق مقیدتر باشد، تأثیر سفتی بستر بر فرکانس پایه آن کمتر است.

جدول ۲. تأثیر سفتی بستر الاستیک K بدون وجود میدان مغناطیسی

K	Ω				
	CCCC	SCCC	SSCC	SSSC	SSSS
۰	۲۵/۹۸۵	۳۱/۸۲۵	۲۸/۹۵۰	۲۳/۶۴۶	۱۹/۷۳۹
۱۰	۳۶/۱۲۳	۳۱/۹۸۲	۲۹/۱۲۳	۲۳/۸۵۶	۱۹/۹۹۰
۵۰	۳۶/۶۷۳	۳۲/۶۰۲	۲۹/۸۰۱	۲۴/۶۸۰	۲۰/۹۶۷
۱۰۰	۳۷/۳۴۸	۳۳/۳۶۰	۳۰/۶۲۹	۲۵/۶۷۳	۲۲/۱۲۷
۱۵۰	۳۸/۰۱۲	۳۴/۱۰۱	۳۱/۴۳۴	۲۶/۶۲۹	۲۳/۲۳۰
۲۰۰	۳۸/۶۶۴	۳۴/۸۲۶	۳۲/۲۲۰	۲۷/۵۵۲	۲۴/۲۸۲

جدول ۳. تأثیر سفتی بستر الاستیک K با وجود میدان مغناطیسی

K	Ω				
	CCCC	SCCC	SSCC	SSSC	SSSS
۰	۳۴/۹۳۰	۳۰/۶۹۰	۲۷/۷۸۳	۲۲/۲۴۴	۱۸/۱۲۲
۱۰	۳۵/۰۷۳	۳۰/۸۵۲	۲۷/۹۶۳	۲۲/۴۶۸	۱۸/۳۹۶
۵۰	۳۵/۶۳۹	۳۱/۴۹۴	۲۸/۶۶۹	۲۳/۳۴۱	۱۹/۴۵۳
۱۰۰	۳۶/۳۳۳	۳۲/۲۷۸	۲۹/۵۲۸	۲۴/۲۸۹	۲۰/۶۹۸
۱۵۰	۳۷/۰۱۵	۳۳/۰۴۳	۳۰/۳۶۳	۲۵/۳۹۳	۲۱/۸۷۳
۲۰۰	۳۷/۶۸۴	۳۳/۷۹۲	۳۱/۱۷۵	۲۶/۳۵۹	۲۲/۹۸۷



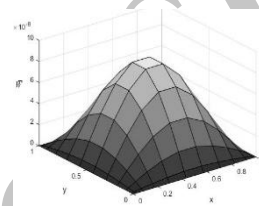
شکل ۲. اثر سفتی بستر الاستیک بر فرکانس پایه بی‌بعد

تکیه‌گاه ساده (SSSS)، به همراه فرکانس‌های مربوطه حاصل از روش مربعات دیفرانسیلی و روش تحلیلی (رابطه ۳۴) به ازای مشخصات زیر نشان داده شده است:

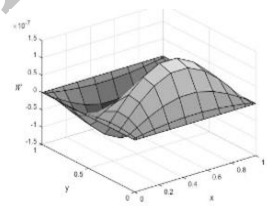
$$K = 10, M_{px} = 20, M_{py} = M_{pxy} = 0, \mu = 0, \\ r = 1, \bar{h} = 0.013$$

جدول ۱. مقایسه فرکانس پایه بی‌بعد حاصل از کار حاضر و حل تحلیلی

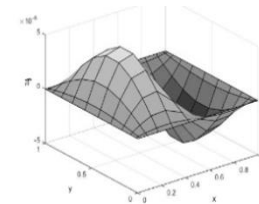
Ω_{anal}	$\Omega_{\text{DQM}}(12)$	$\Omega_{\text{DQM}}(13)$	$\Omega_{\text{DQM}}(17)$	K	M_{px}	μ
۱۹/۷۳۹۲۰	۱۹/۷۳۹۲۰	۱۹/۷۳۹۲۰	۱۹/۷۳۹۲۰	۰	۰	۰
۱۹/۹۹۲۲۷	۱۹/۹۹۲۲۷	۱۹/۹۹۲۲۷	۱۹/۹۹۲۲۷	۱۰	۲۰	۰
۱۹/۹۹۱۰۷	۱۹/۷۴۹۷۹	۱۹/۷۰۲۴۹	۱۹/۴۷۰۴۲	۱۰	۲۰	۰/۰۰۲۵
۱۹/۶۴۲۷۱	۱۹/۶۴۲۷۱	۱۹/۶۴۲۷۱	۱۹/۶۴۲۷۱	۰	۲۰	۰/۰۰۲۲۵



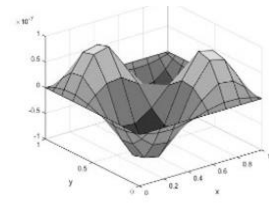
$\Omega_{\text{anal}}=19.9922$
 $\Omega_{\text{DQM}}=19.9922$
الف) مود یک - یک



$\Omega_{\text{anal}}=43.0534$
 $\Omega_{\text{DQM}}=43.0533$
ب) مود یک - دو



$\Omega_{\text{anal}}=55.1138$
 $\Omega_{\text{DQM}}=55.1138$
ج) مود دو - یک



$\Omega_{\text{anal}}=79.0257$
 $\Omega_{\text{DQM}}=79.0256$
د) مود دو - دو

شکل ۱. چهار شکل مود اول ورق گرافنی به روش مربعات دیفرانسیل

۳-۲. نتایج تحقیق

در این قسمت، بررسی‌های پارامتری در مورد تأثیر سفتی بستر الاستیک، میدان مغناطیسی دوبعدی، پارامتر غیرمحلی، شرایط مرزی و نسبت منظری ورق گرافنی بر فرکانس پایه آن مورد بررسی قرار می‌گیرد. تمامی نتایج به ازای $r=1$ و $\bar{h}=0.013$ به دست آمده‌اند. در جدول ۲ و ۳، اثر سفتی بستر الاستیک بی‌بعد بر فرکانس پایه بی‌بعد Ω ورق گرافنی برای شرایط مرزی مختلف چهار لبه تکیه‌گاه ساده (SSSS)، سه لبه تکیه‌گاه ساده و یک لبه گیردار (SSSC)، دو لبه مقابل تکیه‌گاه ساده و دو لبه

با مقایسه نتایج جدول ۲ و ۳ ملاحظه می‌شود که با اعمال میدان مغناطیسی بی‌بعد $M_{px}=M_{py}=20$ فرکانس پایه کاهش یافته است. مطابق رابطه ۲۵، میدان مغناطیسی داخل صفحه‌ای دو اثر مختلف روی صفحه دارد: اولاً باعث کاهش سفتی خمشی ورق می‌شود (ضرایب مشتق مرتبه چهارم W). ثانیاً باعث اعمال نیروی داخل صفحه‌ای فشاری به ورق می‌شود (ضرایب مشتق مرتبه دوم W). هر دو اثر منجر به کاهش سفتی خمشی صفحه گرافنی و در

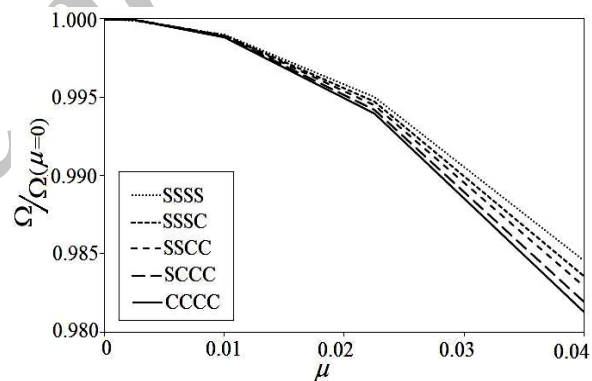
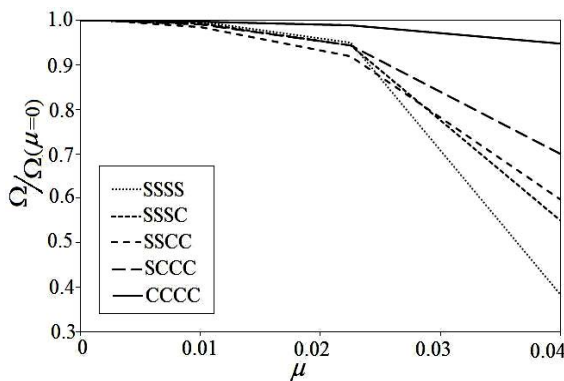
نتیجه کاهش فرکانس پایه آن می‌شود. در جدول ۴ و ۵ اثر پارامتر غیرمحلّی بی‌بعد μ بر فرکانس پایه بی‌بعد Ω ورق گرافنی برای شرایط مرزی مختلف ارائه شده است. در نتایج جدول ۴، اثر میدان مغناطیسی داخل صفحه‌ای لحاظ نشده است. در حالی که در جدول ۵ این اثر لحاظ شده است. همچنین ثابت بستر الاستیک بی‌بعد برابر صفر قرار داده شده است. نتایج عددی جدول ۴ و ۵ در شکل ۳ ترسیم شده است.

جدول ۴. تأثیر پارامتر غیرمحلّی μ بدون وجود میدان مغناطیسی

Ω					μ
CCCC	SCCC	SSCC	SSSC	SSSS	
۳۵/۹۸۵	۳۱/۸۲۵	۲۸/۹۵۰	۲۳/۶۴۶	۱۹/۷۳۹	۰
۳۵/۹۸۲	۳۱/۸۲۳	۲۸/۹۴۸	۲۳/۶۴۴	۱۹/۷۳۷	-۰.۰۰۲۵
۳۵/۹۴۲	۳۱/۷۸۹	۲۸/۹۱۹	۲۳/۶۲۱	۱۹/۷۱۹	-۰.۰۱۰۰
۳۵/۷۶۸	۳۱/۶۴۰	۲۸/۷۹۱	۲۳/۵۲۱	۱۹/۶۴۱	-۰.۰۲۲۵
۳۵/۳۱۲	۳۱/۲۵۱	۲۸/۴۵۶	۲۳/۲۵۷	۱۹/۴۳۴	-۰.۰۴۰۰

جدول ۵. تأثیر پارامتر غیرمحلّی μ با وجود میدان مغناطیسی

Ω					μ
CCCC	SCCC	SSCC	SSSC	SSSS	
۳۴/۹۳۰	۳۰/۶۹۰	۲۷/۷۸۳	۲۲/۲۴۴	۱۸/۱۲۲	۰
۳۴/۹۲۷	۳۰/۶۷۳	۲۷/۷۶۰	۲۲/۲۳۷	۱۸/۱۲۱	-۰.۰۰۲۵
۳۴/۸۷۹	۳۰/۴۰۷	۲۷/۴۰۶	۲۲/۱۰۵	۱۸/۰۷۰	-۰.۰۱۰۰
۳۴/۵۸۹	۲۸/۹۷۴	۲۵/۵۶۴	۲۱/۰۱۹	۱۷/۲۴۵	-۰.۰۲۲۵
۳۳/۱۳۴	۲۱/۴۷۹	۱۶/۵۸۳	۱۲/۲۶۰	۱۶/۹۶۹	-۰.۰۴۰۰

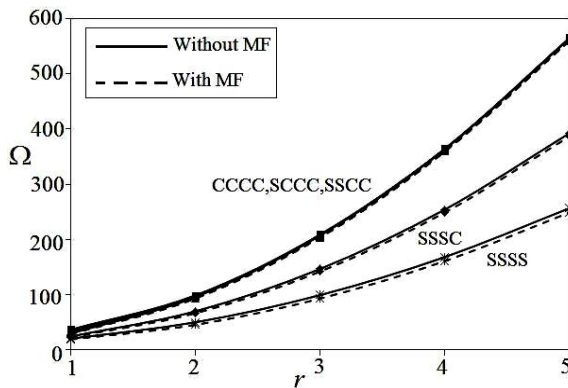


شکل ۳. اثر پارامتر غیرمحلّی بر فرکانس پایه بی‌بعد؛ (الف) بدون اثر میدان مغناطیسی، (ب) با میدان مغناطیسی $M_{px}=M_{py}=20$

مطابق نتایج جداول و شکل، ملاحظه می‌شود که تأثیر تغییر پارامتر محلّی بی‌بعد μ بر فرکانس پایه بی‌بعد ورق Ω بدون اثر میدان مغناطیسی ناچیز است؛ اما چنانچه میدان مغناطیسی بر ورق اعمال گردد، حساسیت فرکانس پایه بی‌بعد Ω به تغییرات پارامتر محلّی بی‌بعد μ به‌طور چشمگیری افزایش می‌یابد. هرچه تقید شرایط مرزی کمتر باشد، این حساسیت بیشتر است. مطابق شکل، افزایش پارامتر غیرمحلّی سبب کاهش فرکانس پایه می‌شود. در شکل ۴، تأثیر پارامتر غیرمحلّی بی‌بعد μ بر فرکانس پایه بی‌بعد Ω ورق گرافنی در حضور میدان مغناطیسی یک بعدی $M_{px}=100$ و $M_{py}=0$ مطابق روش عددی دیرانسلی مربعات و فرمول تحلیلی

کیانی [۱۹] مقایسه شده است. مطابق شکل در حضور میدان مغناطیسی یک‌بعدی، با افزایش پارامتر غیرمحلّی، فرکانس پایه بی‌بعد افزایش می‌یابد. همچنین نتایج کار حاضر با نتایج رابطه تحلیلی کیانی [۱۹] در تطابق کامل است. در جدول ۶ و ۷، اثر نسبت منظری بی‌بعد ورق r بر فرکانس پایه بی‌بعد Ω ورق گرافنی برای شرایط مرزی مختلف ارائه شده است. در نتایج جدول ۶ اثر میدان مغناطیسی در نظر گرفته شده و در جدول ۷ در نظر گرفته نشده است. برای بررسی اثر نسبت منظری، پارامتر غیرمحلّی μ و ثابت بستر الاستیک بی‌بعد برابر با صفر فرض شده است. نتایج عددی جداول ۶ و ۷، در شکل ۵ ترسیم شده

مقدار M_{py} تغییر داده شده است. همچنین پارامتر غیرمحملی μ و ثابت بستر الاستیک بی‌بعد برابر با صفر است. این نتایج به صورت تصویری در شکل ۶ ترسیم شده است. نتایج نشان می‌دهد افزایش نسبت میدان مغناطیسی M_{py}/M_{px} باعث کاهش فرکانس پایه بی‌بعد می‌شود. شدت این تأثیر تابعی از شرایط مرزی ورق می‌باشد.



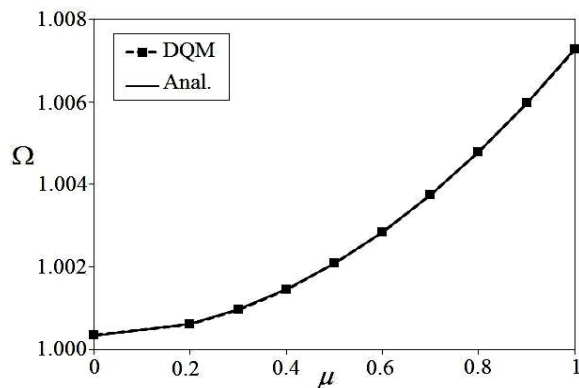
شکل ۵. اثر نسبت منطری بی‌بعد ورق بر فرکانس پایه بی‌بعد

جدول ۷. تأثیر نسبت ابعاد ورق با وجود میدان مغناطیسی

Ω					r
CCCC	SCCC	SSCC	SSSC	SSSS	
۳۴/۹۳۰	۳۰/۶۹۰	۲۷/۷۸۳	۲۲/۲۴۴	۱۸/۱۲۲	۱
۸۸/۳۹۳	۶۰/۱۵۸	۳۷/۴۲۸	۳۷/۰۵۶	۳۶/۷۴۲	۲
۱۹۸/۳۵۳	۱۳۴/۶۳۱	۸۳/۱۹۱	۸۳/۱۲۸	۸۳/۰۶۹	۳
۳۵۴/۲۳۲	۲۴۱/۵۵۱	۱۵۰/۹۳۰	۱۵۰/۹۱۱	۱۵۰/۸۹۴	۴
۵۵۵/۲۱۹	۳۷۹/۷۹۶	۲۳۹/۰۶۴	۲۳۹/۰۵۵	۲۳۹/۰۴۹	۵

با اعمال میدان مغناطیسی داخل صفحه‌ای دوبعدی فرکانس پایه کاهش یافته است. افزایش پارامتر غیرمحملی سبب کاهش فرکانس پایه بی‌بعد می‌شود. این اثر با حضور میدان مغناطیسی دوبعدی بیشتر می‌شود. در صورتی که با اعمال میدان مغناطیسی یک‌بعدی، نتیجه معکوس حاصل می‌شود. با افزایش نسبت منظر بی‌بعد، فرکانس پایه بی‌بعد افزایش می‌یابد. شدت این افزایش، در شرایط مرزی CCCC، SCCC و SSSC بیشتر و در شرایط مرزی SSSS کمتر است. همچنین با اعمال میدان مغناطیسی بی‌بعد فرکانس پایه کاهش پیدا می‌کند. علت این امر، کاهش سفتی خمشی و اعمال نیروی فشاری داخل صفحه‌ای است.

مشاهده می‌شود که با افزایش نسبت منطری بی‌بعد r ، فرکانس پایه بی‌بعد افزایش می‌یابد. شدت این افزایش، در شرایط مرزی CCCC، SCCC و SSSC بیشتر و در شرایط مرزی SSSS کمتر است. در جدول ۸، تأثیر نسبت میدان مغناطیسی در دو راستا M_{py}/M_{px} بر فرکانس پایه بی‌بعد نمایش داده شده است. در این جدول، مقدار M_{px} ثابت و برابر با ۲۰ در نظر گرفته شده و



شکل ۴. مقایسه منحنی فرکانس - پارامتر غیرمحملی طبق کار حاضر و فرمول تحلیل کینتی [۱۸] در میدان مغناطیسی $M_{px}=100, M_{py}=0$

جدول ۶. تأثیر نسبت منطری بی‌بعد ورق بدون وجود میدان مغناطیسی

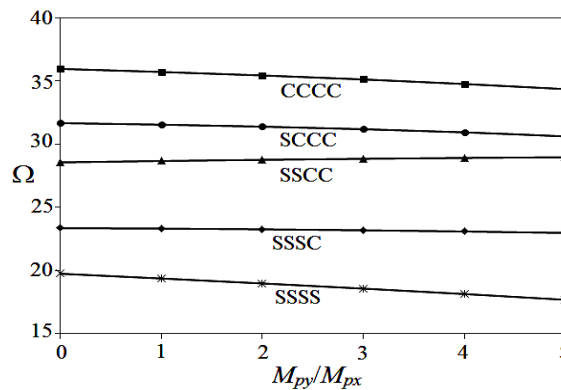
Ω					r
CCCC	SCCC	SSCC	SSSC	SSSS	
۲۵/۹۸۵	۳۱/۸۲۵	۲۸/۹۵۰	۲۳/۶۴۶	۱۹/۷۳۹	۱
۹۱/۱۹۴	۶۳/۹۸۲	۴۲/۵۸۶	۴۲/۲۳۹	۴۱/۹۴۵	۲
۲۰۲/۰۲۱	۱۳۹/۶۶۳	۹۰/۰۳۸	۸۹/۹۷۷	۸۹/۹۲۳	۳
۳۵۸/۳۲۸	۲۴۷/۱۷۵	۱۵۸/۵۶۴	۱۵۸/۵۴۶	۱۵۸/۵۳۰	۴
۵۵۹/۵۵۶	۳۸۵/۷۶۰	۲۴۷/۱۴۹	۲۴۷/۱۴۱	۲۴۷/۱۳۴	۵

۴. نتیجه‌گیری

در این مقاله، معادله حاکم بر ارتعاش جانبی صفحه گرافنی تک‌لایه تحت میدان مغناطیسی دوبعدی درون‌صفحه‌ای، با اعمال تئوری غیرمحملی به دست آمد. پس از استخراج معادله دیفرانسیل حاکم بر مسئله، بر مبنای روش تفکیک متغیرها، معادله حاصل بی‌بعد شده و فرکانس ارتعاش به ازای تکیه‌گاه‌های مختلف با استفاده از روش مربعات دیفرانسیلی به دست آمد. اهم نتایج حاصل از مقاله بدین شرح است. با افزایش سفتی بستر الاستیک بی‌بعد، فرکانس پایه بی‌بعد در تمامی شرایط تکیه‌گاهی به صورت تقریباً خطی افزایش می‌یابد. هرچه شرایط مرزی ورق مقیدتر باشد، تأثیر سفتی بستر بر فرکانس پایه آن کمتر است.

جدول ۸. تأثیر نسبت میدان مغناطیسی در دو راستا بر فرکانس پایه

Ω					M_{py}/M_{px}
CCCC	SCCC	SSCC	SSSC	SSSS	
۲۵/۹۲۶	۳۲/۰۲۱	۲۹/۶۵۸	۲۴/۱۶۷	۱۹/۷۴۰	۰
۳۴/۹۳۰	۳۰/۶۹۰	۲۷/۷۸۳	۲۲/۲۴۴	۱۸/۱۲۲	۱
۳۳/۷۱۱	۲۹/۰۲۸	۲۵/۴۹۳	۱۹/۸۱۶	۱۶/۱۷۷	۲
۳۲/۱۷۵	۲۶/۹۰۴	۲۲/۵۴۵	۱۶/۴۰۹	۱۳/۶۶۶	۳
۳۰/۱۵۰	۲۴/۰۳۰	۱۸/۳۷۸	۹/۷۲۸	۹/۷۵۰	۴



شکل ۶. نسبت میدان مغناطیسی بر فرکانس پایه طبیعی بی‌بعد

پایوست: روش مربعات دیفرانسیلی

امروزه روش‌های عددی مختلفی برای حل مسائل شرایط اولیه یا مسائل شرایط مرزی در علوم فیزیک و مهندسی در دسترس می‌باشند. در سال‌های اخیر، روش مربعات دیفرانسیلی برای حل سریع و مؤثر مسائل مختلف علوم و مهندسی بسیار مورد توجه بوده است. روش مربعات دیفرانسیلی یک روش عددی برای حل معادلات دیفرانسیلی است. این روش، در سال ۱۹۷۰ م توسط ریچارد بلمن و همکارش کستی به‌وجود آمد [۲۶]. مسئله مهم در روش مربعات دیفرانسیلی، تعیین ضرایب وزنی است. به‌دست آوردن ضرایب وزنی، وقتی مرتبه معادلات سیستم بزرگ و تعداد نقاط شبکه زیاد است، بسیار دشوار است.

از اواخر سال ۱۹۸۰ م، در سایه تلاش‌های مبتکرانه محققان در محاسبه ضرایب وزنی، روش مربعات دیفرانسیلی به‌طور چشمگیری پیشرفت کرد. در نتیجه، روش مربعات دیفرانسیلی به‌عنوان یک روش عددی قدرتمند در دهه گذشته پدیدار شده است. در مقایسه با روش‌های تفاضل محدود و المان محدود، روش مربعات دیفرانسیل با استفاده از تعداد نقاط شبکه کم و در نتیجه تلاش محاسباتی اندک، نتایج عددی بسیار دقیقی ارائه می‌دهد [۲۶]. لذا این روش در تحقیقات بسیاری برای بررسی

رفتار دینامیکی و استاتیکی نانولوله‌ها و نانوصفحات به‌کار گرفته شد [۲۷-۳۰]. استفاده از روش مربعات دیفرانسیلی دو مزیت نسبت به سایر روش‌های عددی دارد: اولاً، در این روش توابع در یک مختصات مرجع و با استفاده از چندجمله‌ای‌های مراتب بالا تقریب زده می‌شوند. ثانیاً، روش مذکور مشتق تابع در یک نقطه را مستقیماً برحسب مقادیر تابع در نقاط مجاور تقریب می‌زند. در این روش، مشتق تابع توسط یک سری شامل ضرایب وزنی و مقادیر تابع در نقاط گره‌ای تقریب زده می‌شود. بنا به روش بیان شده، مشتق m ام تابع تک متغیره $f(x, \tau)$ به فرم زیر تقریب زده می‌شود [۲۶]:

$$\frac{\partial^m f(X_i, \tau)}{\partial X^m} = f_X^{(m)}(X_i, \tau) = \sum_{j=1}^N c_{i,j}^{(m)} f(X_j, \tau) \quad (36)$$

$$i, j = 1, 2, \dots, N, \quad m = 1, 2, \dots, N-1$$

به‌طوری‌که N تعداد نقاط شبکه‌بندی موجود در راستای هر یک از متغیرهای مشتق‌گیری می‌باشد. در رابطه ۳۶، عبارت $C_{i,j}^{(m)}$ ضرایب وزنی مربوط به نقاط i ام از دامنه حل می‌باشند. برای $C_{i,j}^{(1)}$ رابطه ۳۷ وجود دارد [۲۶]:

$$C_{i,j}^{(1)} = \frac{1}{X_j - X_i} \prod_{k=1, k \neq i}^N \frac{X_i - X_k}{X_j - X_k}, \quad j \neq i \quad (37)$$

این روش، توسط برت و مالیک پیشنهاد شد. توزیع نقاط شبکه‌بندی چبیشف - گوس - لوباتو در حالت دوبعدی به صورت زیر است:

$$\begin{cases} X_i = \frac{L}{2} \left[1 - \cos \left[\frac{(i-1)}{(N-1)} \pi \right] \right] \\ Y_i = \frac{b}{2} \left[1 - \cos \left[\frac{(i-1)}{(N-1)} \pi \right] \right] \end{cases} \quad i = 1, 2, \dots, N \quad (39)$$

به طوری که در رابطه بالا، L طول و b عرض صفحه است.

$$C_{i,i}^{(1)} = \sum_{k=1, k \neq i}^N \frac{1}{X_i - X_k}$$

توسط رابطه بازگشتی ۳۸، ضرایب وزنی $C_{i,j}^{(m)}$ بر حسب ضریب وزنی $C_{i,j}^{(1)}$ محاسبه شوند [۲۶]:

$$\begin{bmatrix} c^{(m)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c^{(1)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c^{(m-1)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c^{(m-1)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c^{(1)} \end{bmatrix} \quad (38)$$

$$m = 2, 3, \dots, N-1$$

در دقت و سرعت همگرایی روش مربعات دیفرانسیل، توزیع نقاط شبکه‌بندی نقش اساسی دارد. به عنوان ایده‌ای کارآمد، توزیع نقطه‌ای چبیشف - گوس - لوباتو جهت به کارگیری در شبکه‌بندی

۵. مآخذ

- graphene, *Nano Letters*, Vol. 9, No. 1, pp. 220-224, 2009.
- [9] T. Murmu, S. Adhikari, Axial instability of double-nano beam-systems, *Physics Letters A*, Vol. 375, pp. 601-608, 2011.
- [10] T. Murmu, S. Adhikari, Nonlocal vibration of bonded double-nanoplate-systems, *Composites: Part B*, Vol. 42, pp. 1901-1911, 2011.
- [11] T. Murmu, S. C. Pradhan, Vibration analysis of nanoplates under uniaxial prestressed conditions via nonlocal elasticity, *Journal of Applied Physics*, Vol. 106, 2009.
- [12] K. Kiani, Vibration analysis of elastically restrained double-walled carbon nanotubes on elastic foundation subjected to axial load using nonlocal shear deformable beam theories, *International Journal of Mechanical Sciences*, Vol. 68, pp. 16-34, 2012.
- [13] H. Ajiki, T. Ando, Energy bands of carbon nanotubes in magnetic fields, *Journal of Physical Society of Japan*, Vol. 65, pp. 505-514, 1996.
- [14] R. Saito, G. Dresselhaus, M. S. Dresselhaus, *Physical Properties of Carbon Nanotubes*, Imperial College Press, London, 1998.
- [15] A. Ghorbanpour Arani, S. Amir, Magneto-thermo-elastic stresses and perturbation of magnetic field vector in a thin functionally graded rotating disk, *Journal of Solid Mechanics*, Vol. 3, No. 4, pp. 392-407, 2011.
- [16] K. Kiani, Transverse wave propagation in elastically confined single-walled carbon nanotubes subjected to longitudinal magnetic
- [1] T. Monetta, A. Acquesta, F. Bellucci, Graphene/Epoxy coating as multifunctional material for aircraft structures, *Aerospace*, Vol. 2, pp. 423-434, 2015.
- [2] S. Bellucci, J. Gonzalez, F. Guinea, P. Onorato, E. Perfetto, Magnetic field effects in carbon nanotubes, *Journal of Physics: Condens Matter*. Vol. 19, No. 39, 2007.
- [3] S. Li, H. Xie, X. Wang, Dynamic characteristics of multi-walled carbon nanotubes under a transverse magnetic field, *Bulletin of Materials Science*, Vol. 34, pp. 45-52, 2011.
- [4] M. Kibalchenko, M. Payne, J. Yates, Magnetic response of single-walled carbon nanotubes induced by an external magnetic field, *American chemical society Nano*, Vol. 5, No. 1, pp. 537-545, 2011.
- [5] Z. Fu, Z. Wang, S. Li, P. Zhang, Magnetic quantum oscillations in a monolayer graphene under a perpendicular magnetic field, *Chinese Physics B*, Vol. 20, No. 5, 2011.
- [6] F. Lopez-Urias, J. Rodriguez-Manzo, E. Munoz-Sandoval, M. Terrones, H. Terrones, Magnetic response in finite carbon graphene sheets and nanotubes, *Optical Materials*, Vol. 29, No. 1, pp. 110-115, 2006.
- [7] K. Shizuya, Electromagnetic response and effective gauge theory of graphene in a magnetic field, *Physical Review B*, Vol. 75, 2007.
- [8] Y. Wang, Y. Huang, Y. Song, X. Zhang, Y. Ma, J. Liang, Room-temperature ferromagnetism of

- fields using nonlocal elasticity models, *Physica E*, Vol. 45, pp. 86-96, 2012.
- [17] T. Murmu, M. A. McCarthy, S. Adhikari, In-plane magnetic field affected transverse vibration of embedded single-layer graphene sheets using equivalent nonlocal elasticity approach, *Composite Structures*, Vol. 96, pp. 57-63, 2013.
- [18] K. Kiani, Free vibration of conducting nanoplates exposed to unidirectional in-plane magnetic fields using nonlocal shear deformable plate theories, *Physica E*, Vol. 57, pp. 179-192, 2014.
- [19] K. Kiani, Revisiting the free transverse vibration of embedded single-layer graphene sheets acted upon by an in-plane magnetic field, *Journal of mechanical science and Technology*, Vol. 28, No. 9, pp. 3511-3516, 2014.
- [20] T. Murmu, S. Adhikari, M. A. McCarthy, Axial vibration of embedded nanorods under transverse magnetic field effects via nonlocal elastic continuum theory, *Journal of Computational and Theoretical Nanoscience*, Vol. 11, No. 5, pp. 1230-1236, 2014.
- [21] P. Malekzadeh, A. R. Setoodeh, A. Alibeygi Beni, Small scale effect on the free vibration of orthotropic arbitrary straight-sided quadrilateral nanoplates, *Composite Structures*, Vol. 93, pp. 1631-1639, 2011.
- [22] A. Eringen, On differential-equations of nonlocal elasticity and solutions of screw dislocation and surface-waves, *Journal of Applied Physics*, Vol. 54, pp. 4703, 1983.
- [23] S. Narendar, S. Gopalakrishnan, Spectral finite element formulation for nanorods via nonlocal continuum mechanics, *Journal of Applied Mechanics-Trans ASME*, Vol. 78, No. 6, 2011.
- [24] S. C. Pradhan, A. Kumar, Vibration analysis of ortho-tropic graphene sheets using nonlocal elasticity theory and differential quadrature method, *Composite Structures*, Vol. 93, No. 2, pp. 774-779, 2011.
- [25] S. Rajasekaran, *Structural Dynamics of Earthquake Engineering*, Woodhead Publishing Series in Civil and Structural Engineering, 2009.
- [26] Chang Shu, *Differential Quadrature and its Application in Engineering*, Springer Verlag London Berlin Heidelberg, 1999.
- [27] R. Kolahchi, H. Hosseini, M. Esmailpour, Differential cubature and quadrature-Bolotin methods for dynamic stability of embedded piezoelectric nanoplates based on visco-nonlocal piezoelectricity theories, *Composite Structures*, Vol. 157, pp. 174-186, 2016.
- [28] R. Ansari, M. Faghieh Shojaei, A. Shahabodini, M. Bazdid-Vahdati, Three-dimensional bending and vibration analysis of functionally graded nanoplates by a novel differential quadrature-based approach, *Composite Structures*, Vol. 131, pp. 753-764, 2015.
- [29] S. C. Pradhan, R. Raj, Vibration analysis of nanoplate with various boundary conditions using DQ method, *Journal of Computational and Theoretical Nanoscience*, Vol. 8, No. 8, pp. 1432-1436, 2011.
- [30] M. Ghadiri, N. Shafiei, H. Alavi, Thermo-mechanical vibration of orthotropic cantilever and propped cantilever nanoplate using generalized differential quadrature method, *Mechanics of Advanced Materials and Structures*, 2016.