

## تعیین بردار سرعت یک جسم در حال حرکت به کمک داده‌های جی. پی. اس. با آنالیز و دسته‌بندی الگوریتم‌های مختلف مشتق‌گیری عددی

امیر پورصادق سادات محله<sup>۱</sup>، مهدی پورقلی<sup>۲</sup>، علیرضا یزدی‌زاده<sup>۳</sup>

۱ دانشجوی کارشناسی ارشد، دانشگاه شهید بهشتی، گروه کنترل، تهران

۲ استادیار، دانشگاه شهید بهشتی، گروه کنترل، تهران، m\_pourgholi@sbu.ac.ir

۳ دانشیار، دانشگاه شهید بهشتی، گروه کنترل، تهران

تاریخ دریافت: ۱۳۹۶/۰۹/۲۳

تاریخ پذیرش: ۱۳۹۷/۰۳/۱۳

### چکیده

محاسبه نرخ تغییرات یا به عبارتی مشتق‌گیری از سیگنال‌های دیجیتال همواره از مهم‌ترین چالش‌های موجود در زمینه پردازش سیگنال‌های دیجیتال بوده است. این در حالی است که در کاربردهای مختلف به ناچار باید به مشتق‌گیری از سیگنال‌های دیجیتال پرداخت. در بسیاری از کاربردها استفاده از روش‌های مرسوم مشتق‌گیری ناکارآمد است و منجر به افزایش شدید خطا و نویز تا حدود چند ده برابر می‌شوند. در این مقاله محاسبه سرعت از روی داده‌های همراه با نویز و گسسته در متغیر حالت مکان با روش‌های مختلف از لحاظ تئوری و عملی بررسی و مقایسه و در ادامه بهترین روش محاسبه نرخ تغییرات (مشتق‌گیری) برای کاربرد مذکور استخراج شده است. با بررسی‌های انجام‌شده ملاحظه می‌شود که روش فیلتر کالمن مناسب‌ترین عملکرد را در کمینه‌کردن مجموع مربعات خطا برای کاربرد محاسبه مشتق از داده‌های جی. پی. اس. دارد و به‌خوبی با فیلتر مناسب داده‌ها آثار نویز و خطا را از بین می‌برد. استفاده از روش فیلتر کالمن دارای حالت گذرای مناسب نیست. این مشکل با اصلاح روش و به‌کارگیری فیلتر کالمن تطبیقی با وزن‌دهی مناسب به داده‌های عملکرد حالت گذرا را نیز تا حد خوبی بهبود داده است. نتایج حاصل از اعمال الگوریتم‌های مورد بحث روی داده‌های واقعی جی. پی. اس. برای استخراج بردار سرعت لحظه‌ای گزارش شده است.

### واژگان کلیدی

پاسخ فرکانسی، تخمین سرعت، فیلتر کالمن تطبیقی، مشتق‌گیر، داده‌های جی. پی. اس.

### ۱. مقدمه

در بسیاری از کاربردهای تئوری و عملی، به محاسبه مشتق توابعی در بسیاری از کاربردهای تئوری و عملی، به محاسبه مشتق توابعی که با داده‌ها مشخص شده‌اند نیاز است. در این مواقع استفاده از روش‌های مرسوم تفاضلی ناکارآمد است؛ زیرا خطایی کوچک در داده‌ها سبب ایجاد خطایی بسیار بزرگ در مشتق می‌شود [۱-۲].

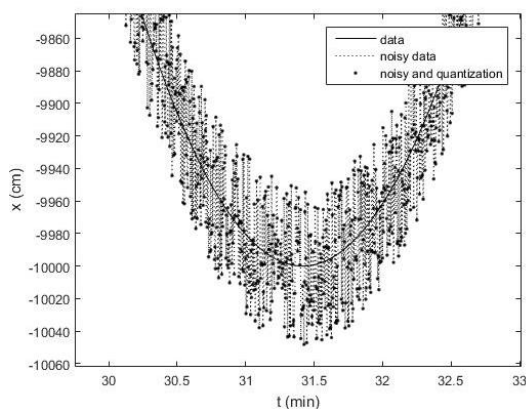
شده است اطلاعات مسیر فرضی به‌صورت تابع  $x(t)$  برحسب سانتی‌متر و نویزی با توزیع یکنواخت با حداکثر ۵۰ سانتی‌متر به داده‌ها اضافه شده باشد. پردازنده‌ای که مکان را می‌دهد هشت بیتی است، لذا خطای گسسته‌سازی نیز برای داده‌ها داریم. فرکانس نمونه‌برداری ۵ هرتز است. مسیر حرکت در راستای  $x$  به صورت شکل ۱ است.

$$x(t) = 10000 \sin\left(\frac{t}{400}\right)$$

معیار ارزیابی روابط مجموع مربعات نسبی خطا با رابطه ۱ در نظر گرفته شده است:

$$e_L^2 = \frac{\sum_{n=n_1}^{n_2} (v[n] - v_e[n])^2}{n_2 - n_1} \quad (1)$$

به‌طوری‌که در این رابطه  $v[n]$  سرعت درست در هر لحظه،  $v_e[n]$  سرعت تخمین زده شده در هر لحظه،  $n_1$  لحظه اولی که می‌توان سرعت را داشت و  $n_2$  لحظه انتهایی که می‌توان سرعت را داشت و  $e_L^2$  مجموع مربعات نسبی خطای تعریف‌شده در این مقاله است. شکل ۲ نمایی از مسیر حرکت اصلی فرضی همراه با نویز و خطای گسسته‌سازی را در بخش کوچکی از مسیر نشان می‌دهد که مجموع مربعات نسبی خطا در کل مسیر از رابطه ۱ برابر ۸۴۰ به‌دست می‌آید. در ادامه تمامی الگوریتم‌ها روی این مسیر فرضی که خطا و نویز آن مشخص است آزمایش شده و در انتها پس از ارائه یک نتیجه‌گیری اولیه نتایج اعمال الگوریتم‌ها روی داده‌های واقعی جی. پی. اس. نیز آورده شده است.

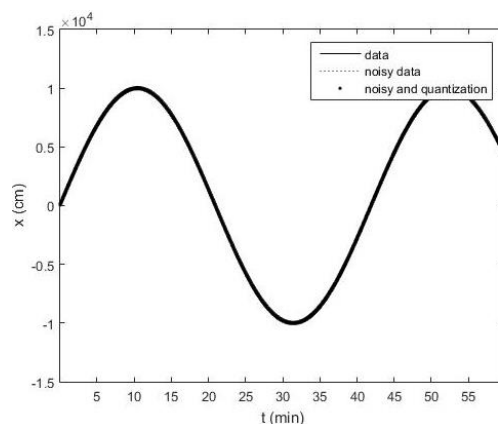


شکل ۲. قسمتی از مسیر فرضی با وجود نویز و خطای گسسته‌سازی

الگوریتم‌های جدیدی را برای محاسبه مشتق استخراج کرد. نتایج تا دو مرحله برون‌یابی ریچاردسون به‌صورت جدول ۱ نشان داده

یا وجود نویز در داده‌ها سبب بزرگ‌شدن اثر نویز در مشتق می‌گردد [۳-۴].

تینگنا و همکاران (۲۰۱۵) به‌کمک موقعیت‌های مختلف رتور در موتور مغناطیس دائم همزمان، به‌روش فیلتر کالمن خود تنظیم، خطای سرعت را تحلیل کرده‌اند [۵]. رونز و همکاران (۲۰۱۳) به بیان پاره‌ای از مشکلات مشتق‌گیرهای عددی در محاسبه سرعت و شتاب از روی داده‌های متناوب در نزدیکی رژیم گذرا با استفاده از روش‌های تطبیقی پرداخته‌اند [۶]. همچنین ایگر و همکاران (۲۰۱۶) به بحث فیزیکی بردارهای سرعت و شتاب لحظه‌ای و همچنین مشتقات مراتب بالاتر پرداخته‌اند [۷]. شیرانگ و همکاران [۲۰۱۷] در پژوهشی به آنالیز عملکرد الگوریتم تخمین سرعت البته به‌کمک حرکت ماهواره پرداخته و هسنس و همکاران (۲۰۱۸) در پژوهش خود از یک رویکرد غیرخطی برای تخمین سرعت از روی داده‌های جی. پی. اس. استفاده کرده‌اند [۹]. با توجه به اهمیت موضوع، هدف این مقاله آن است که برای داده‌های مکان گرفته شده با کمک جی. پی. اس.، که گسسته در زمان و مکان و خطادار و همراه با نویز هستند، با حذف نویز و آماده‌سازی داده‌ها، مشتق اول آن یعنی سرعت محاسبه شود. چون در این مقاله روابط و الگوریتم‌های متنوعی برای مشتق‌گیری عددی مورد بحث قرار گرفته است، نخست الگوریتم‌ها روی یک مسیر فرضی و تا حد ممکن منطبق با داده‌های جی. پی. اس. آزمایش شده تا در هر مرحله الگوریتم‌ها نیز ارزیابی شوند. فرض



شکل ۱. مسیر فرض شده برای حرکت

## ۲. الگوریتم‌های مبتنی بر بسط سری تیلور و درون‌یابی

روش‌های مختلف مشتق‌گیری مبتنی بر بسط تیلور در مرجع [۱۰] آمده است. با استفاده از برون‌یابی ریچاردسون می‌توان

استخراج شده از تخمین چند جمله‌ای بهترین نتیجه را دارد که علت آن در ادامه بررسی خواهد شد. شکل سرعت ایده‌آل و سرعت استخراج شده از بهترین الگوریتم این روابط؛ یعنی همان  $N=3$  در شکل ۳ آمده است که اختلاف بسیار زیاد با نتایج مطلوب به وضوح مشخص است. بدیهی است در صورت نویزدار بودن داده‌ها مشتق حاصل از الگوریتم‌های متداول مشتق‌گیری سبب چند برابر شدن اثر این نویز می‌شود. این مهم از مقایسه عدد ۸۴۰، که مربوط به مجموع مربعات نسبی خطای برای داده‌های اصلی است، با داده‌های جدول‌های ۳ و ۴ قابل استنتاج است. در ادامه با ارائه روش‌هایی سعی خواهد شد این مشکل برطرف شود.

شده است که در آن  $T$  فاصله زمان نمونه‌برداری است. از طریق روابط برون‌یابی مانند استرلینگ<sup>۱</sup> که در مرجع [۱۱] بیان شده یا روابط تقریب چند جمله‌ای در مرجع [۱۲] می‌توان روابط جدیدی برای محاسبه مشتق‌گیری عددی استخراج کرد که نتایج آن در جدول ۲ آمده است. با دقت در روابط مشخص است که به ازای  $N=3$  و  $N=5$  روابط مشابه الگوریتم سوم و چهارم اوایلر است. مجموع مربعات نسبی خطا برای این روابط روی این مسیر فرضی به صورت جدول‌های ۳ و ۴ است. اثر بزرگ‌شدن خطا و نویز در مجموع مربعات نسبی خطای سرعت نسبت به مکان به وضوح مشخص است و بر خلاف انتظار الگوریتم سوم ( $N=3$ ) در روابط

جدول ۱. الگوریتم‌های اول تا پنجم برای فرمول‌های مشتق استخراج شده از بسط سری تیلور

مرتبۀ خطا	فرمول مشتق‌گیری	الگوریتم
$o(h)$	$\dot{f}[n] = \frac{f[n+T] - f[n]}{T}$	اول
$o(h)$	$\dot{f}[n] = \frac{f[n] - f[n-T]}{T}$	دوم
$o(h^2)$	$\dot{f}[n] = \frac{f[n+T] - f[n-T]}{2T}$	سوم
$o(h^4)$	$\dot{f}[n] = \frac{-f[n+2T] + 8f[n+T] - 8f[n-T] + f[n-2T]}{12T}$	چهارم
$o(h^6)$	$\dot{f}[n] = \frac{f[n+4T] - 40f[n+2T] + 256f[n+T] - 256f[n-T] + 40f[n-2T] - f[n+4T]}{360T}$	پنجم

جدول ۲. فرمول‌های مشتق‌گیری مرتبه اول  $N$  نقطه‌ای استخراج شده به روش تقریب چند جمله‌ای به تابع

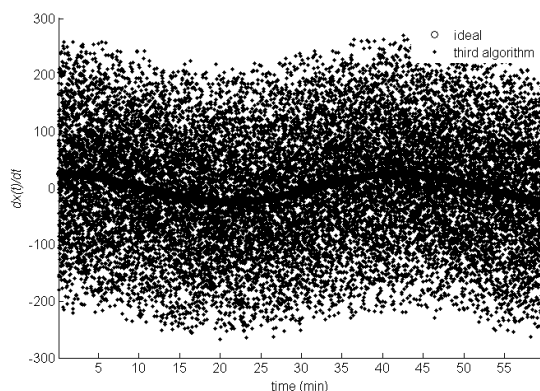
فرمول مشتق‌گیری	الگوریتم
$\dot{f}[n] = \frac{f[n+T] - f[n-T]}{2T}$	به ازای $N = 3$
$\dot{f}[n] = \frac{-f[n+2T] + 8f[n+T] - 8f[n-T] + f[n-2T]}{12T}$	به ازای $N = 5$
$\dot{f}[n] = \frac{f[n+3T] - 9f[n+2T] + 45f[n+T] - 45f[n-T] + 9f[n-2T] - f[n-3T]}{60T}$	به ازای $N = 7$
$\dot{f}[n] = \frac{-3f[n+4T] + 32f[n+3T] - 168f[n+2T] + 672f[n+T] - 672f[n-T] + 168f[n-2T] - 32f[n-3T] + 3f[n+4T]}{840T}$	به ازای $N = 9$

جدول ۳. مجموع مربعات نسبی خطا برای الگوریتم‌های اول تا پنجم استخراج شده از بسط سری تیلور

الگوریتم اول	الگوریتم دوم	الگوریتم سوم	الگوریتم چهارم	الگوریتم پنجم
۴۱۶۸۷	۴۱۶۸۷	۱۰۳۶۱	۱۸۷۵۷	۲۱۵۴۲

جدول ۴. مجموع مربعات نسبی خطا برای الگوریتم‌های استخراج‌شده از تقریب چندجمله‌ای

$N = 9$	$N = 7$	$N = 5$	$N = 3$
۲۴۴۷۴	۲۴۴۷۷	۱۸۸۷۳	۱۰۴۴۶



شکل ۳. سرعت واقعی و سرعت استخراج‌شده از بهترین الگوریتم مبتنی بر اویلر یعنی الگوریتم سوم

در اندازه پاسخ فرکانسی است. در مراجع [۱۱]، [۱۳] و [۱۵] روش‌هایی برای حذف ناهمواری‌های اندازه در پاسخ فرکانسی پیشنهاد شده که در شکل ۵ است بهبود اندازه پاسخ فرکانسی با استفاده از این روش‌ها نمایش داده شده است.

مجموع مربعات نسبی خطا برای اعمال این الگوریتم‌ها روی مسیر فرضی در نظر گرفته شده به صورت جدول ۵ است. با نگاه دقیق‌تر به فاز پاسخ‌های فرکانسی رسم شده مشخص است که همگی دارای فاز ثابت ۹۰ درجه هستند و مشکلی در فاز برای طراحی فیلتر مشتق‌گیر (برای پیاده‌سازی آفلاین) وجود ندارد و تمرکز اصلی روی بهبود اندازه پاسخ فرکانسی است. با ملاحظه پاسخ زمانی الگوریتم‌های مختلف بررسی شده مشخص است که همگی (به جز الگوریتم اول و دوم اویلر) حول نقطه صفر پادمقارن هستند.

## ۲-۲. تحلیل پاسخ فرکانسی فیلترها و تحلیل فاز آنها و رابطه آنها با تأخیر

در حالت کلی برای یک فیلتر دیجیتال می‌توان نوشت:

$$\begin{aligned} \omega H &= R(\omega) + jI(\omega) \quad \omega = 2\pi f \\ |^{\omega}H| &= \sqrt{R^2(\omega) + I^2(\omega)} \\ p(\omega) &= \arctan\left(\frac{I(\omega)}{R(\omega)}\right) \\ ^{\omega}H(\omega) &= |^{\omega}H(\omega)|e^{jp(\omega)} \end{aligned} \quad (5)$$

که در آن  $^{\omega}H(\omega)$  همواره مثبت است و  $p(\omega)$  دارای ناپیوستگی‌هایی است که این ناپیوستگی‌ها در زمانی رخ می‌دهد که اندازه بخواهد منفی شود، اما به علت همواره مثبت بودن اندازه

## ۱-۲. طراحی فیلترهای مشتق‌گیر

پاسخ فرکانسی فیلتر مشتق‌گیر ایده‌آل در حالت گسسته به صورت زیر است:

$$H_d(j\omega) = j\omega \quad 0 \leq |\omega| < \frac{\omega_s}{2} \quad (2)$$

که بیانگر این است که فیلتر مشتق‌گیر ایده‌آل دارای فاز ثابت  $\pi/2$  در همه فرکانس‌هاست و اندازه آن خطی است. با محاسبه عکس تبدیل فوریه این فیلتر برای محاسبه پاسخ ضربه این فیلتر داریم:

$$\begin{aligned} h(nT) &= \frac{1}{\omega_s} \int_{-\frac{\omega_s}{2}}^{\frac{\omega_s}{2}} j\omega e^{j\omega nT} d\omega \\ &= -\frac{1}{\omega_s} \int_0^{\frac{\omega_s}{2}} 2\omega \sin(\omega nT) d\omega \end{aligned} \quad (3)$$

$$h(nT) = \begin{cases} 0 & \text{for } n = 0 \\ \frac{1}{nT} \cos\pi n & \text{otherwise} \end{cases}$$

با استفاده از پنجره مستطیلی [۸] و سپس تبدیل Z گرفتن از سیگنال حاصل داریم:

$$H_{\omega}(z) = \frac{1}{6T} (2z^3 - 3z^2 + 6z - 6z^{-1} + 3z^{-2} - 2z^{-3}) \quad (4)$$

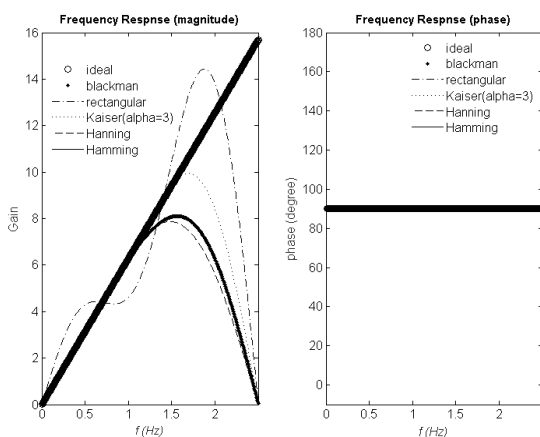
شکل پاسخ فرکانسی آن (تبدیل فوریه) در حالت آفلاین به صورت شکل ۴ است. (فرکانس نمونه برداری  $f_s = 5\text{Hz}$  است، لذا تمامی شکل‌های پاسخ فرکانسی در بازه  $0 \leq f \leq \frac{f_s}{2}$  رسم شده‌اند) همان‌گونه که مشاهده می‌شود دارای ناهمواری‌های

زمانی ایجاد شده برای فیلتری که دارای فاز خطی است به فرکانس وابسته نیست (مستقل از فرکانس است).

در حالت کلی برای فیلترهایی که پاسخ ضربه متقارن و پادمقارن دارند، منحنی فاز پاسخ فرکانسی خطی خواهد شد و در حالت پادمقارن ۹۰ درجه فاز نیز اضافه خواهد شد [۱۱]، لذا تأخیر ثابتی در حوزه زمان خواهیم داشت (این مهم به سادگی اثبات می شود). در حالت کلی تأخیر برابر زمانی است که حول آن تقارن داریم.

### ۲-۳. نگاهی به الگوریتم های مبتنی بر اویلر و درونیابی از دیدگاه تئوری فیلترها

منحنی اندازه و فاز آن برای پیاده سازی آفلاین پاسخ فرکانسی الگوریتم های مبتنی بر اویلر و درونیابی، در شکل های ۶ و ۷ نمایش داده شده است. علت بهتر بودن الگوریتم سوم اویلر و  $N=3$  در الگوریتم های مبتنی بر درونیابی قابل درک است. چون مسیر فرضی در نظر گرفته شده نسبت به فرکانس نمونه برداری فرکانس پایینی دارد (اکثر داده های واقعی به خصوص داده های دریافتی از گیرنده جی. پی. اس. نیز به این صورت است) و پاسخ فرکانس این الگوریتم ها دارای فیلتر پایین گذر بهتری است، لذا این بهتر بودن نتیجه قابل توجیح است.



شکل ۵. پاسخ فرکانسی فیلترهای طراحی شده به روش پنجره ای

$$y[i] = \frac{i}{N} \sum_{j=-\frac{N-1}{2}}^{\frac{N-1}{2}} x[i+j] \quad (9)$$

همچنین فیلتر سینک دارای رابطه ۱۰ است:

$$h[n] = \frac{\sin(2\pi f, n)}{n\pi} \quad (10)$$

این اتفاق نمی تواند بیافتد، لذا اثر آن با جهش در فاز مشاهده می شود [۱۵]. این مشکل را می توان با نمایش  $H(\omega)$  به فرم زیر حل کرد:

$$H(\omega) = A(\omega)e^{j\theta(\omega)} \quad (6)$$

که در آن  $A(\omega)$  می تواند مثبت یا منفی باشد و  $\theta(\omega)$  همواره پیوسته است. حال فرض کنیم در حالت خاص پاسخ فرکانسی یعنی  $\theta(\omega)$  خطی باشد، لذا داریم:

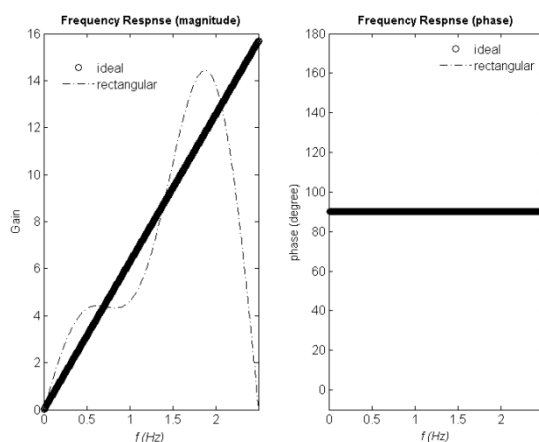
$$\theta(\omega) = -M \cdot \omega \quad (7)$$

حال اگر فرض کنیم که پاسخ ضربه فیلتر همواره دارای مقادیر حقیقی است و سیگنال ورودی نیز به صورت تابع عبور سیگنال  $x_1[n] = \cos(\omega_1 n + \varphi_1)$  باشد؛ فیلتر  $H(\omega)$  به صورت زیر خواهد بود:

$$y_1[n] = A(\omega_1) \cos(\omega_1 n + \varphi_1 + \theta(\omega_1)) \quad (8)$$

$$y_1[n] = A(\omega_1) \cos\left(\omega_1 \left(n + \frac{\theta(\omega_1)}{\omega_1}\right) + \varphi_1\right)$$

لذا این بیان که در فیلترهای دارای فاز خطی، فاز خطی موجب یک تأخیر ثابت در حوزه زمان می شود [۱۴]، به وضوح در رابطه ۸ مشخص است و مقدار این تأخیر  $-\theta(\omega_1)/\omega_1$  است. باید توجه داشت که از لحاظ دیمانسیون این منحنی فاز خطی، که واحد آن رادیان است، منجر به تأخیر زمانی ثابت، که واحد آن ثانیه است، می شود. در واقع نکته بسیار مهم این است که تأخیر



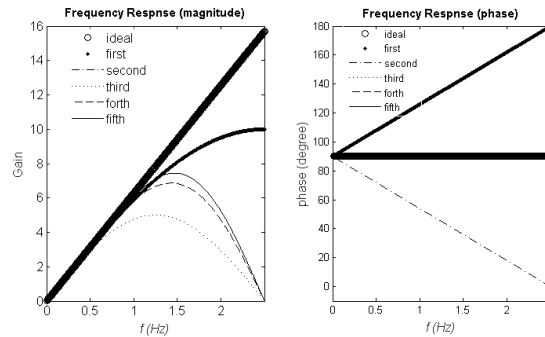
شکل ۶. پاسخ فرکانسی فیلتر مشتق گیر با طراحی پنجره مستطیلی

### ۲-۴. اصلاح الگوریتم های مبتنی بر درونیابی و اویلر با طراحی فیلتر پایین گذر ابتدایی

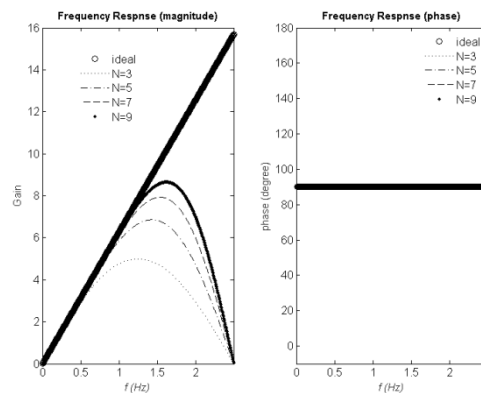
از جمله فیلترهایی که برای حذف نویز معرفی می شود، فیلتر میانگین گیر متحرک و فیلتر سینک<sup>۲</sup> است. فیلتر میانگین گیر متحرک دارای رابطه ۹ است:

که باز فیلتر سینک در پاسخ فرکانسی دارای ناهمواری است که با اصلاح بلکمن تا حدودی می‌توان آن را برطرف کرد. مجموع مربعات نسبی خطا برای اعمال فیلتر پایین‌گذر ابتدایی و اعمال الگوریتم‌های اوپلر و درونیابی در جدول‌های ۵ و ۶ آورده شده است. عملکرد بهتر فیلتر میانگین‌گیر متحرک مشهود است.

که باز فیلتر سینک در پاسخ فرکانسی دارای ناهمواری است که با اصلاح بلکمن<sup>۳</sup> تا حدودی می‌توان آن را برطرف نمود. مجموع مربعات نسبی خطا برای اعمال فیلتر پایین‌گذر ابتدایی و اعمال الگوریتم‌های اوپلر و درونیابی در جدول‌های ۵ و ۶ آورده شده است. عملکرد بهتر فیلتر میانگین‌گیر متحرک مشهود است.



شکل ۶. پاسخ فرکانسی الگوریتم‌های اول تا پنجم استخراج‌شده از بسط تیلور



شکل ۷. پاسخ فرکانسی روش‌های مبتنی بر درونیابی

جدول ۷ است. عملکرد مناسب این روش نسبت به الگوریتم‌های تا به اینجای کار مشخص است. لازم به ذکر است که هرچه  $N$  بزرگتر شود نتایج بهتر خواهد شد ولی  $N$  بیشتر معادل تأخیر زمانی بیشتر است و ممکن است سیستم نتواند این تأخیر را بپذیرد.

### ۳. روش‌هایی با تعمیم بحث فیلترها

در ادامه تمرکز روی الگوریتم‌های آنالاین است و از این پس پیاده‌سازی آنالاین روش‌ها را ارائه خواهیم کرد. در این قسمت به مقایسه سه روش مشتق‌گیری، که به نوعی تعمیم بحث فیلترها است، می‌پردازیم. اولین روش همان پیاده‌سازی آنالاین روش مشتق‌گیری لانکرس است که همان‌طور که مشاهده شد در بین روش‌های آنالاین دارای بهترین نتیجه بود. دومین روش برگرفته از مرجع [۱۸] است.

### ۲-۵. طراحی فیلترهای مشتق‌گیر مقاوم در حذف نویز

از جمله روش‌هایی که برای این منظور در [۱۲] پیشنهاد شده روش طراحی به روش ساویزکی - گولی<sup>۴</sup> است. همچنین روش دیگری تحت نام مشتق‌گیر لانکرس<sup>۵</sup> و عملکرد بسیار بهتر در [۱۶] و [۱۷] معرفی شده است. پاسخ زمانی این روش نهایتاً منجر به رابطه ۱۱ می‌گردد:

$$\hat{f}(x) = \frac{\sum_{n=-k}^k n f(x + nh)}{2 \sum_{n=1}^k n^2 h} \quad (11)$$

همان‌طور که از پاسخ فرکانسی این روش مشخص است، مورد استفاده این روش زمانی است که فرکانس‌های موجود در سیگنال نسبت به نرخ نمونه‌برداری کوچک باشد و بدینم نویزهایی در داده‌ها وجود دارد. مجموع مربعات نسبی خطا اعمال این الگوریتم‌ها روی مسیر حرکت در نظر گرفته شده به‌صورت

جدول ۵. مجموع مربعات نسبی خطا برای الگوریتم‌های اول تا پنجم استخراج شده از بسط سری تیلور

پس از عبور از فیلتر میانگین گیر متحرک با  $N = 11$  و فیلتر سینک با  $N = 11$  و  $f_c = 0.05$

همراه با فیلتر	الگوریتم اول	الگوریتم دوم	الگوریتم سوم	الگوریتم چهارم	الگوریتم پنجم
میانگین گیر متحرک	۴۲۲	۴۲۲	۲۱۳	۲۹۴	۳۱۷
سینک	۵۳۹	۵۳۹	۴۶۳	۵۲۸	۵۳۶

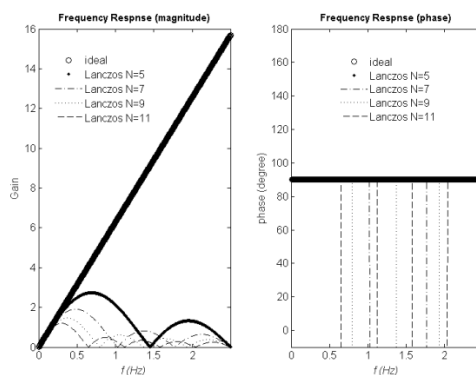
جدول ۶. مجموع مربعات نسبی خطا برای الگوریتم‌های استخراج شده از تقریب چندجمله‌ای

پس از عبور از فیلتر میانگین گیر متحرک با  $N = 11$  و فیلتر سینک با  $N = 11$  و  $f_c = 0.05$

همراه با فیلتر	$N = 3$	$N = 5$	$N = 7$	$N = 9$
میانگین گیر متحرک	۲۱۲	۲۹۲	۳۳۴	۶۳۱
سینک	۴۶۵	۵۳۱	۵۴۲	۵۴۷

جدول ۷. مجموع مربعات نسبی خطا برای فرمول مشتق گیری مقاوم در از بین بردن نویز طراحی به روش مشتق گیر لانکزس

$N = 3$	$N = 5$	$N = 7$	$N = 9$
۲۰۱۹	۷۲۰	۳۳۴	۱۸۴



شکل ۸ پاسخ فرکانسی روش مشتق گیری مقاوم به روش مشتق گیر لانکزس

سپس از طریق الگوریتم دوم اویلر مشتق محاسبه می‌شود

یعنی:

$$v(k) = \frac{y[k] - y[k-1]}{T} \quad (13)$$

که با ترکیب دو رابطه بالا، فرمول زیر برای مشتق گیری

استخراج می‌شود:

$$v(k) = \frac{x[k] - x[k-n]}{nT} \quad (14)$$

در این روش کار با به کارگیری یک الگوریتم تطبیقی مقدار  $n$

یعنی طول پنجره به دست می‌آید. باید  $n = \max\{1, 2, 3, \dots\}$

به دست آید؛ به طوری که:

$$|y_{k-i} - {}^L y_{k-i}| \leq d, \quad \forall i \in \{1, 2, \dots, n\} \quad (15)$$

که در آن  ${}^L y_{k-i} = a_n + b_n(k-i)T$  است و داریم:

$$a_n = x_k - b_n(n-k)T \quad (16)$$

سومین روش ایده یافتن مشتق به روش طراحی کنترل کننده

است که می‌تواند به عنوان نماینده‌ای از فیلترهای پاسخ ضربه

نامحدود تلقی گردد.

### ۳-۱. روش میانگین گیر متحرک تطبیقی

در مرجع [۱۸] به نوعی به طراحی یک فیلتر میانگین گیر متحرک

پرداخته شده که می‌تواند مشکل تأخیر را حل کند. این روش با

استفاده از یک الگوریتم تطبیقی تأخیر را طوری حداقل می‌کند که

واریانس خطا مینیمم شود. در این روش ابتدا یک فیلتر

میانگین گیر متحرک به شکل زیر به داده‌های مکان که خطادار و

نویزی هستند اعمال می‌شود:

$$y[k] = \frac{x[k] + x[k+1] + x[k-2] + \dots + x[k-n]}{n} \quad (17)$$

$$\frac{\hat{X}(z)}{X(z)} = \frac{\frac{kTz^{-1}}{1-z^{-1}}}{1 + \frac{kTz^{-1}}{1-z^{-1}}} = \frac{kTz^{-1}}{1 + (kT-1)z^{-1}}$$

$$= \frac{kT}{z + (kT-1)} \quad (19)$$

$$\frac{\hat{V}(z)}{X(z)} = \frac{k}{1 + \frac{kTz^{-1}}{1-z^{-1}}} = \frac{k(1-z^{-1})}{1 + (kT-1)z^{-1}}$$

$$= \frac{k(z-1)}{z + (kT-1)}$$

البته باید توجه داشت که این بهره تجربی و این روابط در حالتی به دست آمده است که ما شناخت کافی از داده‌ها داریم و در حالت کلی این جواب نمی‌تواند پاسخگوی حل همه مسائل باشد.

### ۳-۳. نتایج شبیه‌سازی این روش‌ها

مجموع مربعات نسبی خطا این سه روش در جدول ۸ خلاصه شده است. همان‌گونه که ملاحظه می‌شود، بهبود قابل توجه در نتایج مشهود است. شکل‌های مشتق به صورت زیر است. همچنین طول پنجره‌هایی که الگوریتم تطبیقی، به دست آورده در شکل ۱۱ آورده شده است. مشخص است که در نزدیکی رخ دادن اکسترمم‌ها، چون سرعت نزدیک صفر است، از حداکثر طول پنجره بهره برده شده و وقتی که تغییرات سرعت بیشتر است از طول پنجره کمتری استفاده شده است.

جدول ۸ مجموع مربعات نسبی خطا برای سه الگوریتم آنلاین ذکر شده

کنترل‌کننده	میانگین‌گیر متحرک تطبیقی	لانکرس با N = 11
بهره ساده	۲/۰۵	۱۸۸/۳۷
۴/۰۷		

### ۴. روش‌های تخمین و پیش‌بینی برای محاسبه مشتق

روش تخمین حداقل مربعات یک روش کاملاً آفلاین است و پیاده‌سازی آنلاین آن نتایج چندان مطلوبی ندارد و حجم محاسبات بالایی را می‌طلبد. برای رفع مشکل استفاده از روش تخمین مینیمم واریانس بازگشتی پیشنهاد می‌شود [۱۹]. روش مینیمم واریانس بازگشتی را به نوعی می‌توان زیرمجموعه روش فیلتر کالمن تلقی کرد؛ زیرا فیلتر کالمن به نوعی دینامیک متغیرها را نیز لحاظ کرده که در روش تخمین مینیمم واریانس اینگونه نیست. با در نظر گرفتن  $Q=0$  در روش فیلتر کالمن همان نتایج روش مینیمم واریانس بازگشتی حاصل می‌گردد. لذا در مطالعه فقط روش فیلتر کالمن و سپس اصلاح آن به منظور بهبود نتایج را بررسی خواهد شد.

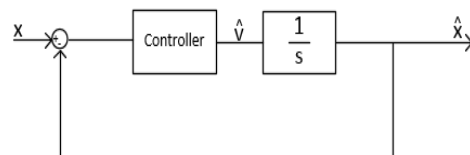
$$\hat{v}_k = b_n = \frac{y_k - y_{k-n}}{nT}$$

که در [۱۸] اثبات شده این روش می‌تواند واریانس خطا به فرم خطای گسسته‌سازی مکانی را حداقل کند. در این روش انتخاب حداکثر طول پنجره ممکن و همچنین مقدار  $d$  (حداقل انحراف مجاز برای خط تخمین زده شده از نقاط مابین) چالش برانگیز است و باید در انتخاب آن توجه جدی شود. در این مقاله برای شبیه‌سازی مقدار حداکثر طول پنجره ۲۰۰ و مقدار  $d$  برابر ۵۰ یعنی حداکثر خطایی که خود داده‌های مکان داشتند قرار داده شده است. انتخاب این مقادیر از جمله مشکلات این روش است که نمی‌توان آن را برای تمام داده‌ها تعمیم داد.

### ۳-۲. استخراج مشتق از طریق طراحی کنترل‌کننده برای

#### سیستم انتگرال‌گیر دیجیتالی

فرض کنیم حلقه کنترل شکل ۹ را داریم:



شکل ۹. حلقه کنترل در نظر گرفته شده برای طراحی الگوریتم مشتق‌گیر

در این صورت اگر بتوان کنترل‌کننده‌ای طراحی شود که بتواند به نحو مطلوبی  $x$  حذف نویز شده را تخمین بزند تلاش کنترلی یعنی  $\hat{v}$  همان مشتق ما خواهد بود. باید توجه داشت که حلقه کنترل بالا را باید به صورت دیجیتالی پیاده‌سازی شود. در اینجا  $1/s$  یعنی انتگرال‌گیری را به صورت زیر پیاده‌سازی می‌کنیم:

$$\hat{x}(k) = \hat{x}(k-1) + \hat{v}(k-1)T$$

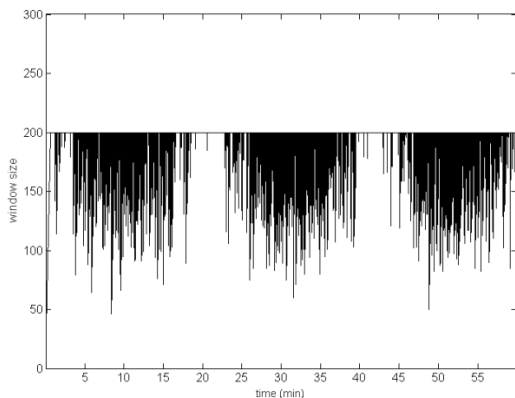
$$\frac{\hat{X}(z)}{\hat{V}(z)} = \frac{Tz^{-1}}{1-z^{-1}} \quad (17)$$

حال باید کنترل‌کننده طراحی شود. چون سیستم در دل خودش انتگرال‌گیر دارد، کنترل‌کننده را به یک بهره ساده  $k$  محدود می‌کنیم. به صورت تجربی ملاحظه می‌شود که اگر بهره از رابطه زیر تعیین گردد می‌تواند به نحو مطلوبی  $x$  را فیلتر کند و در نتیجه  $\hat{v}$  را تخمین بزند.

$$k = 0.001842 \frac{\sqrt{\max(x)}}{\sqrt[3]{\max(\text{noise})}} \quad (18)$$

با این کنترل‌کننده داریم:





شکل ۱۱. شکل طول پنجره‌های حاصل از الگوریتم میانگین‌گیر متحرک تطبیقی

$$\hat{x}(k+1|k+1) = F(k)\hat{x}(k|k) + P(k+1|k)H^T(k+1)[H(k+1)P(k+1|k)H^T(k+1) + R(k+1)]^{-1}[y(k+1) - H(k+1)F(k)\hat{x}(k)] \quad (25)$$

$$P(k+1|k+1) = P(k+1|k) - P(k+1|k)H^T(k+1)[H(k+1)P(k+1|k)H^T(k+1) + R(k+1)]^{-1}H(k+1)P(k+1|k) \quad (26)$$

سه رابطه اخیر در واقع ماهیت فیلتر کالمن را تشکیل می‌دهد. می‌توان گفت کار این فیلتر تخمین حالت  $x(k)$  است، وقتی که خود  $x(k)$  در طی معادلاتی متحول می‌شود. در اینجا نیز برای شبیه‌سازی از سه مدل سرعت ثابت، شتاب ثابت، جرم ثابت که به ترتیب دارای روابط زیر است استفاده می‌شود:

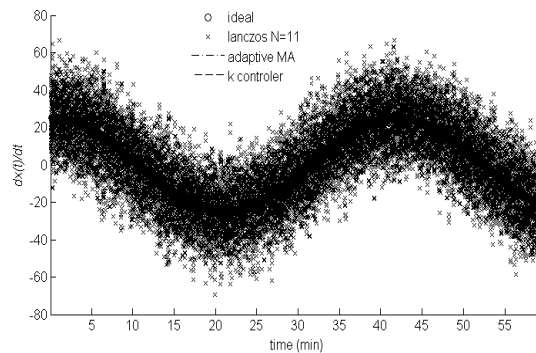
$$\begin{aligned} x(kT+1) &= \begin{bmatrix} 1 & T \\ 0 & 1 \end{bmatrix} x(kT) + u(kT) \\ y(kT) &= [1 \quad 0]x(kT) + w(kT) \end{aligned} \quad (27)$$

$$\begin{aligned} x(kT+1) &= \begin{bmatrix} 1 & T & \frac{T^2}{2} \\ 0 & 1 & T \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} x(kT) + u(kT) \\ y(kT) &= [1 \quad 0 \quad 0]x(kT) + w(kT) \end{aligned} \quad (28)$$

$$x(kT+1) = \begin{bmatrix} 1 & T & \frac{T^2}{2} & \frac{T^3}{6} \\ 0 & 1 & T & \frac{T^2}{2} \\ 0 & 0 & 1 & T \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} x(kT) + u(kT) \quad (29)$$

$$y(kT) = [1 \quad 0 \quad 0 \quad 0]x(kT) + w(kT)$$

برای شبیه‌سازی لازم است  $R$  و  $Q$  در روش فیلتر کالمن تنظیم شدند. ماتریس  $R$  واریانس نویز اندازه‌گیری است که با توجه به شکل نویز در نظر گرفته شده قابل استخراج است؛ هرچند می‌توان آن را به نوعی درجه آزادی در نظر گرفت؛ زیرا مقدار آن



شکل ۱۰. نتیجه حاصل از سه الگوریتم مشتق‌گیری آنلاین بررسی شده

#### ۴-۱. روش فیلتر کالمن معمولی

فرض کنیم اندازه‌گیری‌ها با روابط زیر با مجهولات در ارتباط باشد:

$$y(k) = Hx(k) + w(k) \quad (20)$$

که در آن  $w(k)$  نویز اندازه‌گیری است و دارای شرایط زیر است:

$$\begin{aligned} E[w(k)] &= 0 \\ E[w(k)w^T(k)] &= R(k) \end{aligned} \quad (21)$$

که  $R(k)$  ماتریسی ارزش اطلاعات و ثابت است، همچنین  $y(k)$  مقادیر اندازه‌گیری شده  $H(k)$  یک ماتریس معلوم که ارتباط‌دهنده فضای مجهولات یعنی  $x(k)$  با فضای شناخته شده یعنی  $y(k)$  می‌باشد و ماتریس ثابتی است.  $x(k)$  متغیر مطلوب است. حال فرض کنیم  $x$  خود در طی گذشت زمان طبق رابطه خطی و از پیش دانسته متحول می‌شود. این رابطه به صورت زیر است:

$$x(k+1) = F(k)x(k) + u(k) \quad (22)$$

که در آن  $u(k)$  نویز و دارای شرایط زیر است:

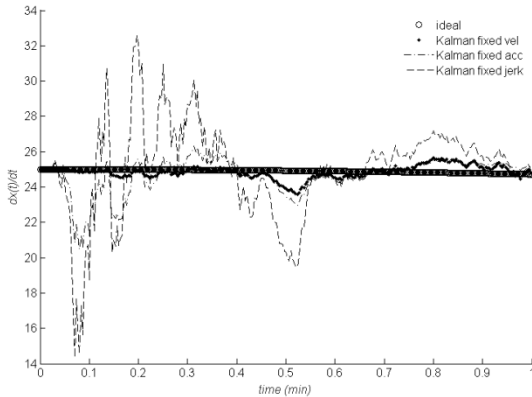
$$\begin{aligned} E[u(k)] &= 0 \\ E[u(k)u^T(k)] &= Q(k) \end{aligned} \quad (23)$$

شرایط حاکم بر  $Q(k)$  همانند  $R(k)$  است، از اینرو می‌توان آن را ثابت در نظر گرفت.  $F(k)$  ماتریسی است که  $x(k)$  مطابق آن متحول می‌شود.

با استفاده از قضیه مینیمم واریانس ارتقایافته بیان شده و محاسبه ماتریس کوواریانس در هر مرحله روابط زیر برای پیاده‌سازی فیلتر کالمن برای کاربرد این پژوهش استخراج می‌گردد.

$$P(k+1|k) = F(k)P(k|k)F^T(k) + Q(k) \quad (24)$$

اشتباهی را تخمین بزند و داری خطای زیادی باشد. فیلتر کالمن تطبیقی می‌تواند با حذف تاثیر داده‌های گذشته با استفاده از فاکتور فراموشی  $\lambda(k) \geq 1$  بر روی معادله ماتریس کوواریانس به صورت زیر رفع این مشکل به کار رود [۲۰]:



شکل ۱۲. دقایق ابتدایی روش فیلتر کالمن معمولی

عملکرد روش فیلتر کالمن تطبیقی بالا که با نام فیلتر کالمن تطبیقی محو شونده<sup>۷</sup> شناخته می‌شود به شدت به  $\lambda(k)$  وابسته است و باید یک الگوریتم بهینه برای محاسبه آن به کار رود. در این مقاله یک کاربرد جدید از روش فیلتر کالمن تطبیقی را ارائه می‌شود. این روش قادر است که نتایج دقایق ابتدایی تخمین یا به نوعی حالت گذرای پاسخ تخمین را تا حد قابل قبولی بهبود بخشد. همان‌گونه که ملاحظه می‌شود، این روش می‌تواند نتایج ابتدای کار را بهبود بخشد. مجموع مربعات نسبی خطا از ابتدا تا انتهای حرکت برای روش فیلتر کالمن تطبیقی و فیلتر کالمن معمولی به ازای ماتریس  $Q$  مشابه یکدیگر و  $P(0)$  مشابه و با تعیین  $R$  که حتی المقدور منجر به بهترین نتیجه گردد (با سعی و خطا) به صورت جدول ۱۰ می‌شود. همچنین شکل دقایق ابتدایی آن‌ها به صورت شکل ۱۳ است. مشاهده می‌شود که الگوریتم تطبیقی به خوبی توانسته در نتایج ابتدایی بهبود حاصل کند.

#### ۵. اعمال نتایج به داده‌های واقعی جی. پی. اس.

در این قسمت بهترین الگوریتم‌های استخراج شده را روی یک مجموع داده‌های واقعی اعمال نموده و با استفاده از روش فیلتر کالمن تطبیقی تخمین لحظات اولیه را نیز بهبود خواهیم بخشید.

#### ۵-۱. اعمال الگوریتم‌ها به مجموعه اول داده‌ها

داده‌های طول و عرض جغرافیایی دریافتی از یک گیرنده جی. پی. اس. به صورت شکل ۱۴ است.

معمولاً به راحتی قابل دسترس نیست. با در نظر گرفتن واریانس نویز فرایند برابر  $q$  ماتریس  $Q$  برای سه مدل در نظر گرفته شده، به صورت زیر قابل استخراج است:

$$Q_{fixed\ Acc.} = q \begin{bmatrix} T^5 & T^4 & T^3 \\ \frac{20}{8} & \frac{8}{3} & \frac{6}{2} \\ T^4 & T^3 & T^2 \\ \frac{8}{6} & \frac{3}{2} & T \end{bmatrix}$$

$$Q_{fixed\ Jerk} = q \begin{bmatrix} T^7 & T^6 & T^5 & T^4 \\ \frac{252}{72} & \frac{30}{24} & \frac{24}{6} & \frac{6}{2} \\ T^6 & T^5 & T^4 & T^3 \\ \frac{72}{20} & \frac{8}{3} & \frac{6}{2} & T \\ T^5 & T^4 & T^3 & T^2 \\ \frac{30}{24} & \frac{8}{6} & \frac{3}{2} & T \end{bmatrix}$$

در اینجا  $q$  آزادی عملی است که در اختیار است و باید با توجه به فرایند تنظیم شود. با در نظر گرفتن  $R = 1$  و  $q$  مناسب و همچنین به علت اطلاعات دقیق از شرایط اولیه با فرض  $P(0) = 10^{-4}I$ ، مجموع مربعات نسبی خطا با حذف ۳ دقیقه اول به صورت جدول ۹ به دست آمده است.

جدول ۹. مجموع مربعات نسبی خطا از سه مدل در روش فیلتر کالمن معمولی

مدل سرعت ثابت با $q = 10^{-4}$	مدل شتاب ثابت با $q = 10^{-9}$	مدل جرک ثابت با $q = 10^{-14}$
۰/۳۹۰۶	۰/۰۴۲۷	۰/۰۳۶۷

بهبود قابل توجه نتایج نشان‌دهنده عملکرد مناسب این روش است. تنها ایراد این روش این است که نتایج دقایق ابتدایی آن مناسب نیست (شکل ۱۲).

#### ۴-۲. اعمال روش فیلتر کالمن تطبیقی به منظور بهبود حالت گذرای پاسخ

هدف این قسمت از مقاله اصلاح روش فیلتر کالمن و بهبود نتایج است. روش فیلتر کالمن معمولی یک روش بهینه تخمین حالت مینیمم واریانس است که از روی داده‌های اندازه‌گیری شده  $y[0], y[1], \dots, y[k-1]$  به تخمین حالت  $x(k)$  می‌پردازد. این روش وقتی دارای کارایی مناسب است که مدل دینامیکی در نظر گرفته شده برای سیستم و همچنین اندازه‌گیری‌ها مناسب باشند. وقتی این دو مناسب نباشند فیلتر کالمن می‌تواند حالت‌های

جدول ۱۰. مقایسه مجموع مربعات نسبی خطا برای دو روش فیلتر کالمن معمولی و تطبیقی با سه مدل در نظر گرفته شده

فیلتر کالمن معمولی	مدل سرعت ثابت با $R = 1$	مدل شتاب ثابت با $R = 1$	مدل جرک ثابت با $R = 1$
	۰/۴۱۴۰	۰/۵۸۰۳	۱/۱۳۵۹
فیلتر کالمن تطبیقی	مدل سرعت ثابت با $R = 0.7$	مدل شتاب ثابت با $R = 820$	مدل جرک ثابت با $R = 5000$
	۰/۴۰۹۸	۰/۲۵۷۳	۰/۹۱۲۷

به صورت جدول ۱۱ به دست می آید. نتایج مشتقات حاصله به صورت شکل ۱۵ است. همچنین شکل خطای مشتق به صورت شکل ۱۶ است. در مجموع همانند نتایج داده های مسیر فرضی در نظر گرفته شده، می توان الگوریتم محاسبه مشتق با روش فیلتر کالمن با مدل شتاب ثابت را بهتر از باقی روش ها ارزیابی کرد. سرعت های استخراج شده از روش فیلتر کالمن با دو مدل شتاب ثابت و جرک ثابت را به عنوان بهترین الگوریتم ها انتخاب کرده و به منظور بهتر کردن نتایج لحظات ابتدایی آن از روش تطبیقی استفاده می کنیم. چون این دو مدل همزمان مشتق اول و دوم را می توانند محاسبه کنند، لذا از این نظر نیز دارای اهمیت هستند. مجموع مربعات نسبی خطا در کل مسیر به صورت جدول ۱۲ است. بهبود نتایج فیلتر کالمن تطبیقی در شکل ۱۳ مشهود است. همچنین گفتنی است با روش تطبیقی حساسیت الگوریتم به مقدار  $R$  و  $Q$  کم می شود.

همان طور که پیش بینی می شد نتایج حاصل از اعمال طراحی کنترل کننده برای سیستم انترگرال گیر دیجیتال با یک گین ساده در پیاده سازی آنلاین دارای نتیجه مطلوبی نبود. مجموع مربعات نسبی خطای جدید تعریف شده که بتواند دید بهتری نسبت به خطا بر حسب متر به ما بدهد به صورت رابطه ۳۰ استفاده شده است:

$$e_s^2 = \sum_{n=n_1}^{n_2} (v[n] - v_e[n])^2 \frac{\pi}{180} \times 6400000 \quad (30)$$

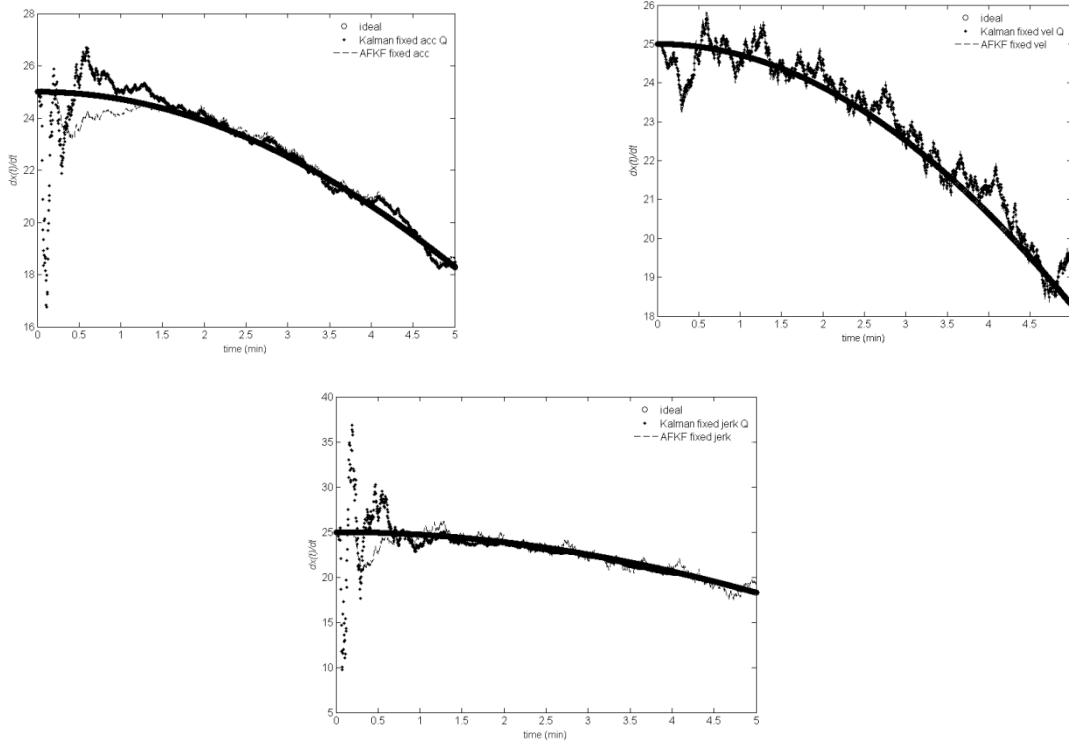
که در آن  $e_s^2$  به طور تقریبی معادل با مجموع مربعات خطا بر حسب متر است که در اینجا تعریف شده است. برای استفاده از فیلتر کالمن در هر سه مدل  $R=I$  فرض گردیده و شرایط اولیه به صورت درست و  $P(0) = 10^{-3}$  قرار داده شده است.  $q$  به ترتیب برابر  $10^{-1}$  و  $10^{-2}$  و  $10^{-3}$  برای مدل سرعت ثابت و شتاب ثابت و جرک ثابت در نظر گرفته شده است. با حذف ۳ دقیقه اول مجموع مربعات خطا برای سرعت

جدول ۱۱. مجموع مربعات خطا برای الگوریتم های لانکرس و میانگین گیر متحرک تطبیقی و مدل های مختلف در نظر گرفته شده برای فیلتر کالمن برای مشتق عرض جغرافیایی و طول جغرافیایی

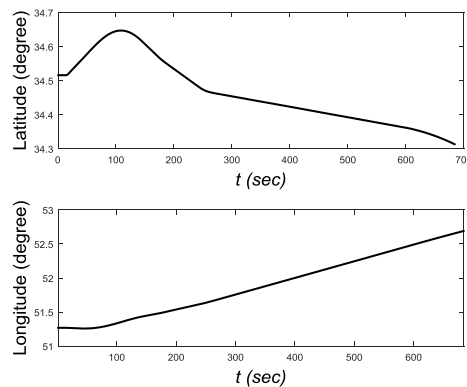
روش	عرض جغرافیایی	طول جغرافیایی
لانکرس با $N = 11$	۰/۲۴۱۹	۰/۲۴۵۲
میانگین گیر متحرک تطبیقی	۰/۶۹۶۵	۰/۶۵۳۹
کالمن با مدل سرعت ثابت و $q = 10^{-1}$	۰/۲۹۷۱	۰/۳۱۵۹
کالمن با مدل جرک ثابت و $q = 10^{-2}$	۰/۰۷۹۰	۰/۱۵۳۲

جدول ۱۲. مجموع مربعات خطا برای مشتق عرض جغرافیایی و طول جغرافیایی در کل حرکت برای روش فیلتر کالمن معمولی و تطبیقی با دو مدل شتاب ثابت و جرک ثابت

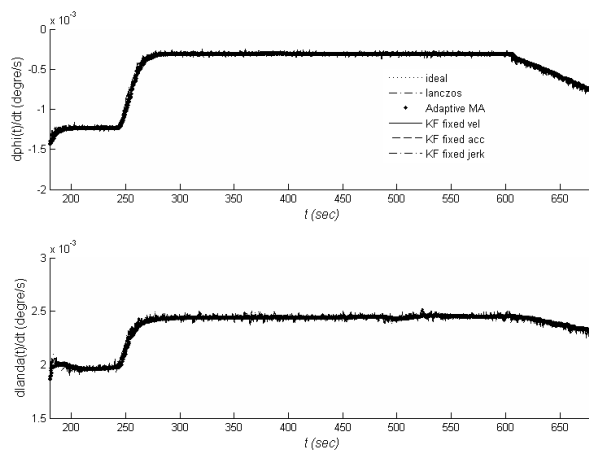
روش فیلتر کالمن	عرض جغرافیایی	طول جغرافیایی
تطبیقی شتاب ثابت	۰/۸۸۳۱	۰/۱۳۹۶
تطبیقی جرک ثابت	۰/۲۹۴۱	۰/۲۱۶۴
معمولی شتاب ثابت	۱/۵۸۴۰	۰/۱۷۲۱
معمولی جرک ثابت	۴/۱۸۹۰	۰/۳۸۱۹



شکل ۱۳. مقایسه ۱۰ دقیقه ابتدایی فیلتر کالمن معمولی و تطبیقی



شکل ۱۴. داده‌های دریافتی از جی. پی. اس. (طول جغرافیایی و عرض جغرافیایی) برای یک جسم در حال حرکت



شکل ۱۵. مشتق‌های طول و عرض جغرافیایی یک جسم در حال حرکت

با استفاده از الگوریتم‌های لانکزس و میانگین‌گیر متحرک تطبیقی و مدل‌های مختلف در نظر گرفته شده برای فیلتر کالمن

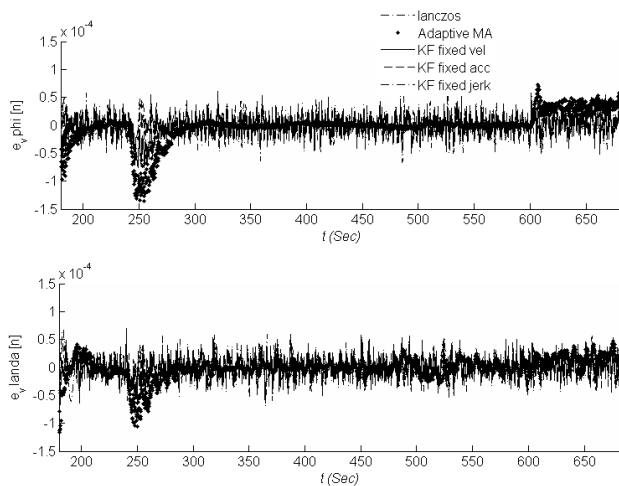
خطا هستند، نتایج قابل تکرار است، لذا در فیلتر کالمن معمولی ابتدا  $R=I$  قرار داده شد و برای تنظیم  $Q$  با امتحان مقادیر مختلف  $q$  آن مقداری که منجر به جواب مناسب گردد استخراج شده است. برای فیلتر کالمن تطبیقی نیز با همان  $Q$  قبلی، این بار با تغییر در  $R$ ، آن مقداری که دارای جواب مناسبی بود استخراج گردیده است. لازم به ذکر است که در صورت استفاده از روش تطبیقی، حساسیت الگوریتم به مقدار  $R$  و  $Q$  کاهش می‌یابد.

### ۶. نتیجه‌گیری

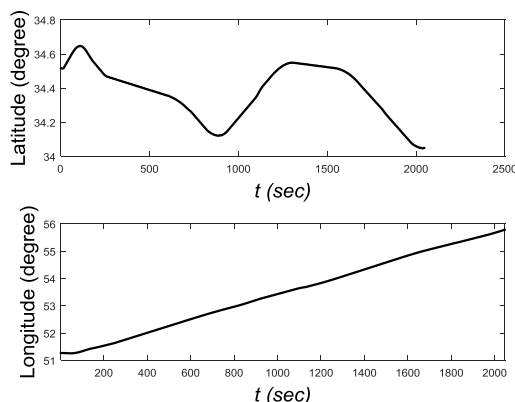
در این مطالعه مشخص شد که روش فیلتر کالمن تطبیقی دارای عملکرد مناسب با معیار مجموع مربعات خطا نسبت به سایر روش‌های مشتق‌گیری است. در الگوریتم‌های مبتنی بر اویلر و درویابی وقتی اطمینان داشته باشیم مشتق مراتب بالای یک مجموع داده‌هایی صفر باشند و داده‌ها شامل خطا و نویز نیستند می‌توانند مشتق را به‌صورت دقیق اعلام نمایند.

### ۵-۲. اعمال روش فیلتر کالمن معمولی و تطبیقی به‌عنوان بهترین روش‌ها با معیار در نظر گرفته شده روی مجموعه دوم داده‌ها

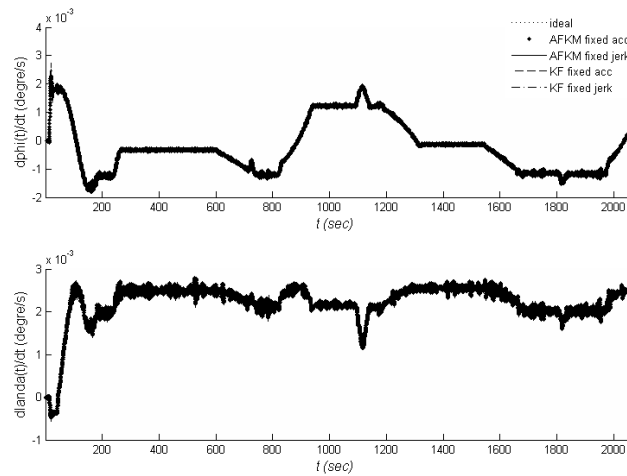
حال نتایج اعمال روش‌های فیلتر کالمن معمولی و تطبیقی با همان  $R$  و  $Q$  روی داده‌های دریافتی از همان گیرنده‌ی جی. پی. اس. قبلی روی حرکتی که دارای مانورهای بیشتری است را در نظر می‌گیریم. داده‌های طول و عرض جغرافیایی به‌صورت شکل ۱۷ دریافت شده‌اند. شکل مشتق حاصل از اعمال روش‌های فیلتر کالمن معمولی و تطبیقی و خطای آنها به‌ترتیب در شکل‌های ۱۸ و ۱۹ آورده شده است. همان‌طور که مشخص است، مرتبه خطا تغییری نکرده است و در همان حدود است. در واقع پس از اعمال فیلتر کالمن و تنظیم  $R$  و  $Q$  این الگوریتم برای هر نوع آزمایش دیگری با همین  $R$  و  $Q$  تنظیم شده مناسب خواهد بود. جهت تنظیم، ابتدا  $R$  و  $Q$  چنان تعیین می‌شود که پاسخ آفلاین مناسب باشد. چون در تمام آزمایش‌هایی که به‌نوعی شامل همین نوع



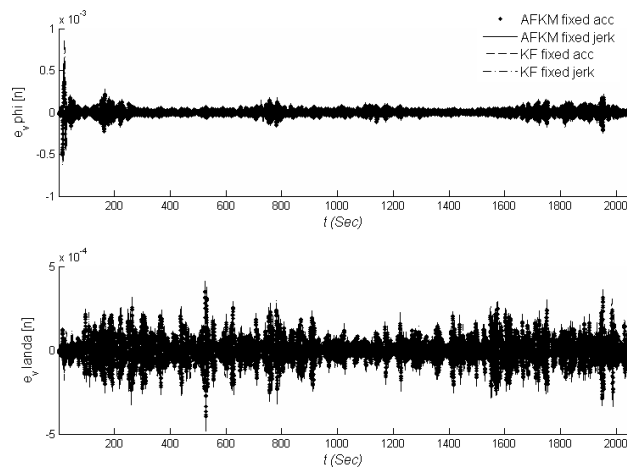
شکل ۱۶. خطای حاصل از مشتق‌های طول و عرض جغرافیایی یک جسم در حال حرکت با استفاده از الگوریتم‌های لانکرس و میانگین‌گیر متحرک تطبیقی و مدل‌های مختلف در نظر گرفته شده برای فیلتر کالمن



شکل ۱۷. داده‌های دریافتی از جی. پی. اس. (طول و عرض جغرافیایی) برای یک جسم در حال حرکت دارای مانورهای بیشتر با گیرنده قبلی



شکل ۱۸. مشتق‌های طول و عرض جغرافیایی یک جسم در حال حرکت با استفاده از فیلتر کالمن معمولی و تطبیقی با دو مدل شتاب ثابت و حرکت ثابت در همهٔ زمان‌ها



شکل ۱۹. خطای مشتق‌های طول و عرض جغرافیایی یک جسم در حال حرکت با استفاده از فیلتر کالمن معمولی و تطبیقی با دو مدل شتاب ثابت و حرکت ثابت در همهٔ زمان‌ها

که اطلاعات مناسبی در مورد رنج فرکانس سیگنال در اختیار باشد می‌تواند گزینهٔ مناسبی باشد. تمامی الگوریتم‌های این گروه پاسخ ضربهٔ محدود<sup>۸</sup> هستند، لذا به‌راحتی در هر لحظهٔ مستقل از خروجی لحظات گذشته مشتق اعلام می‌گردد. این روش‌ها نیز در صورت پیاده‌سازی آنالاین شامل یک تأخیر ذاتی هستند. این روش‌ها نیز دارای محاسبات کم شامل تعداد محدود جمع و ضرب هستند. روش استخراج مشتق از طریق طراحی کنترل‌کننده برای سیستم انتگرال‌گیر دیجیتال تنها با یک بهرهٔ ساده روش خوبی برای فیلترکردن و محاسبهٔ مشتق در حالت کلی نیست و وقتی تعداد فرکانس محدودی در سیگنال وجود داشته باشد؛ یعنی مثلاً فقط شامل یک سینوس همراه با نویز باشد می‌تواند به‌خوبی منجر به

این روش‌ها وقتی که داده‌ها دارای خطا و نویز باشند سبب افزایش شدید خطا و نویز می‌شوند. عیب دیگر این روش‌ها آف‌لاین بودن آنها (به‌جز الگوریتم دوم اوپلر) است که در صورت پیاده‌سازی آنالاین شامل تأخیر می‌باشند به‌نوعی سبب افزایش بیشتر خطا می‌شوند. همان‌طور که دیده شد، می‌توان در صورت وجود نویز در سیستم، عملکرد آنها را با طراحی فیلترهایی بهبود بخشید، اما باز شامل نتایج مطلوب نیستند. در این الگوریتم‌ها پیاده‌سازی راحت و محاسبات اندک است و برای کاربردهای واقعی در زمان‌هایی که نیاز به دقت بالای مشتق‌گیری نیست و از پردازنده با قابلیت محدود استفاده می‌شود گزینه مناسبی است. روش‌های مبتنی بر طراحی فیلتر دیجیتال مشتق‌گیر در صورتی

نسبت به حجم محاسبات روش خوبی ارزیابی نمی‌گردد. همچنین چون روش تخمین مینیمم واریانس بازگشتی به‌نوعی زیرمجموعه روش فیلتر کالمن است، لذا به‌جای این روش می‌توان از فیلتر کالمن که دارای قابلیت‌های بیشتری است، استفاده کرد. روش فیلتر کالمن معمولی دارای بهینه‌ترین روش با معیار مجموع مربعات خطا است. هزینه این بهینه‌سازی محاسبات بیشتر است. لذا باید توجه داشت که پردازنده مورد استفاده توانایی حجم محاسبات مورد نظر را داشته باشد. روش فیلتر کالمن معمولی دارای حالت گذرای مناسب نیست، لذا با طراحی فیلتر کالمن به‌صورت تطبیقی می‌توان حالت گذرای آن را اصلاح نمود.

حذف نویز و محاسبه مشتق گردد. این روش نیز دارای محاسبات اندک است و جهت پیاده‌سازی به‌صورت آنالاین مناسب است. مشتق‌گیری با اعمال روش میانگین‌گیر متحرک تطبیقی نیز می‌تواند با اعمال یک الگوریتم تطبیقی طول پنجره را طوری تنظیم کند که منجر به حداکثر تأخیر قابل قبول و در نتیجه حداکثر دقت ممکن شود. این روش نیز به سادگی قابل درک و پیاده‌سازی است. همچنین محاسبات آن نیز وابسته به حداکثر طول پنجره تنظیم شده است. از بین روش‌های بررسی شده در قضایای تخمین و پیش‌بینی، روش پیاده‌سازی آنالاین روش تخمین حداقل مربعات، به‌علت محاسبات بالا و نتیجه نامناسب

## ۷. مأخذ

- [1] D. Murio, Automatic numerical differentiation by discrete mollification, *Computers & Mathematics with Applications*, vol. 13, pp. 381-386, 1987.
- [2] I. Knowles, R. J. Renka, Methods for numerical differentiation of noisy data, *Electronic Journal of Differential Equations Conference*, 2014, pp. 235-246.
- [3] R. Chartrand, Numerical differentiation of noisy, nonsmooth data, *ISRN Applied Mathematics*, vol. 2011, 2011.
- [4] D. Petrinovic, Causal Cubic Splines: Formulations, Interpolation Properties and Implementations, *IEEE Transactions on Signal Processing*, vol. 56, pp. 5442-5453, 2008.
- [5] S. Tingna, W. Zheng, X. Changliang, Speed Measurement Error Suppression for PMSM Control System Using Self-Adaption Kalman Observer, *Industrial Electronics, IEEE Transactions on*, vol. 62, pp. 2753-2763, 2015.
- [6] R. Ronsse, S. De Rossi, N. Vitiello, T. Lenzi, M. C. Carrozza, A. J. Ijspeert, Real-Time Estimate of Velocity and Acceleration of Quasi-Periodic Signals Using Adaptive Oscillators, *Robotics, IEEE Transactions on*, vol. 29, pp. 783-791, 2013.
- [7] David Eager, Ann-Marie Pendrill, and Nina Reistad. "Beyond velocity and acceleration: jerk, snap and higher derivatives, *European Journal of Physics*, vol. 37, no. 6, 2016, pp. 065008.
- [8] Ye, Shirong, Yongwei Yan, Dezhong Chen, Performance Analysis of Velocity Estimation with BDS, *The Journal of Navigation*, vol. 70, no. 3, 2017, pp. 580-594.
- [9] Jakob M. Hansen, et al. Nonlinear Observer for Tightly Coupled Integrated Inertial Navigation Aided by RTK-GNSS Measurements, *IEEE Transactions on Control Systems Technology*, 2018.
- [10] C. F. Gerald, *Applied numerical analysis*, Pearson Education India, 2004.
- [11] A. Antoniou, *Digital signal processing*, McGraw-Hill Toronto, Canada, 2006.
- [12] P. Holoborodko, Smooth noise robust differentiators, *Consulted on*, vol. 7, p. 2015, 2008.
- [13] A. V. Oppenheim, R. W. Schaffer, *Discrete-time signal processing*, Pearson Higher Education, 2010.
- [14] S. W. Smith, *The scientist and engineer's guide to digital signal processing*, 1997.
- [15] R. G. Lyons, *Understanding digital signal processing*, Pearson Education, 2010.
- [16] C. Groetsch, Lanczo's generalized derivative, *The American mathematical monthly*, vol. 105, pp. 320-326, 1998.
- [17] L. Washburn, The Lanczos derivative, Dept. of Maths, Whitman College, USA, Senior Project Archive, 2006.
- [18] F. Janabi-Sharifi, V. Hayward, C. S. J. Chen, Discrete-time adaptive windowing for velocity estimation, *IEEE Transactions on Control Systems Technology*, vol. 8, pp. 1003-1009, 2000.

- [19] D. G. Luenberger, *Optimization by vector space methods*, John Wiley & Sons, 1969.
- [20] M. Rao, Q. Xia, Y. Ying, *Modeling and advanced control for process industries:*

*applications to paper making processes*, Springer Science & Business Media, 2013.

## پی نوشت

- 
1. Stirling
  2. sinc
  3. Blackman
  4. Savitzky-Golay
  5. Lanczos
  6. IIR
  7. Adaptive Fading Kalman Filter (AFKF)
  8. FIR