

## طراحی قانون هدایت پیش‌بین در یک مساله هدایت دو بعدی با وجود محدودیت در شتاب ورودی

ولی‌اله غفاری

استادیار، گروه مهندسی برق، دانشکده مهندسی، دانشگاه خلیج فارس، بوشهر، vghaffari@pgu.ac.ir

تاریخ دریافت: ۹۷/۰۴/۱۶

تاریخ پذیرش: ۹۸/۱۰/۲۱

### چکیده

در این مقاله، به منظور طراحی قانون هدایت پیش‌بین، یک روش مبتنی بر نامساوی ماتریسی خطی LMI پیشنهاد می‌گردد. برای رسیدن به این هدف، ابتدا با نوشتن معادله‌های حاکم بر حرکت جسم و هدف در دستگاه مختصات دو بعدی، مساله هدایت و قانون هدایت پیش‌بین فرموله می‌شود. در قانون هدایت پیش‌بین، با استفاده از یک مدل دینامیکی رفتار سیستم هدایت می‌تواند پیش‌بینی شود. سپس در هر لحظه دلخواه از زمان، یک سیگنال فرمان به گونه‌ای محاسبه می‌گردد تا یک تابع هزینه مینیمم شود. در این مطالعه برای طراحی قانون هدایت پیش‌بین، یک قانون هدایت متناسب با تغییرات زاویه خط دید، با بهره متغیر (نامعلوم) انتخاب می‌گردد. با استفاده از مفاهیم و تعاریف LMI، مساله طراحی قانون هدایت پیش‌بین به حل یک مساله دیگر مینیمم‌یابی تبدیل می‌گردد. در هر لحظه از زمان، چنین مساله بهینه‌یابی مبتنی بر LMI می‌تواند به صورت عددی حل شود. سپس با توجه به جواب بدست آمده، بهره قانون هدایت پیشنهادی بروزرسانی شود. الگوریتم هدایت پیشنهادی در یک سیستم هدایت دو بعدی شبیه‌سازی می‌گردد. نتایج شبیه‌سازی بیانگر اثر بخشی و کارایی روش هدایت پیشنهادی در مقایسه با روش هدایت موجود می‌باشد.

### واژگان کلیدی

نامساوی ماتریسی خطی، هدایت پیش‌بین، قانون هدایت، سیستم‌های دارای محدودیت کنترل.

### ۱. مقدمه

تغییرات (نرخ) آن، فرامین هدایت به جسم داده می‌شود. تغییرات زاویه خط دید را می‌توان با استفاده از یک جستجوگر<sup>۲</sup> اندازه‌گیری نمود [۳]. از این جهت، الگوریتم‌های هدایت مبتنی بر تغییرات زاویه خط دید دارای کاربردهای فراوانی می‌باشند. در روش‌های هدایت مبتنی بر نرخ زاویه خط دید، فرمان هدایت بایستی به گونه‌ای محاسبه شود تا تغییرات زاویه خط دید صفر شود. بدیهی است اگر در یک سیستم هدایت، زاویه خط دید تغییراتی نداشته

امروزه انتخاب یک الگوریتم هدایت کارآمد، در وسیله‌ها و اجسام هدایت‌پذیر، یک امر کلیدی و اجتناب‌ناپذیر می‌باشد [۱]. برای هدایت اجسام، روش‌ها و ابزارهای مختلف و متنوعی از قبیل هدایت آشیانه‌ای، سیمی، اینرسی، لیزری، نوری و... وجود دارد. اما عمده روش‌های هدایت، مبتنی بر زاویه خط دید<sup>۱</sup> LOS می‌باشد [۲]. در این روش‌ها، با اندازه‌گیری زاویه خط دید یا

باشد آن وقت جسم با حفظ زاویه فعلی، به هدف مورد نظر خواهد رسید.

از این رو تحلیل پایداری حلقه هدایت، نقش کلیدی در طراحی الگوریتم هدایت مطلوب خواهد داشت. یکی از ساده ترین و پرکاربردترین قوانین هدایت موجود، قانون هدایت تناسبی  $PN^3$  می باشد. در هدایت تناسبی، متناسب با حاصل ضرب سرعت نزدیک شونده و نرخ زاویه خط دید، فرمان هدایت ایجاد می گردد [۵،۴]. پس قانون هدایت تناسبی، یک تابع خطی از نرخ زاویه خط دید می باشد. برای بهبود و افزایش کارایی سیستم هدایت، می توان توابع غیرخطی از زاویه خط دید نیز به عنوان قانون هدایت مورد استفاده قرار گیرد. در این صورت، سیستم هدایت حلقه بسته دارای رفتار غیرخطی می باشد. بنابراین تحلیل پایداری و مطالعه عملکرد سیستم هدایت با بکارگیری روش های ریاضی پیشنهاد شده برای سیستم های غیرخطی مانند قضیه پایداری لیاپانوف، خطی سازی با فیدبک، قضیه منفعل بودن و... ممکن می گردد [۶].

روابط ریاضی حاکم بر یک سیستم هدایت مبتنی بر زاویه خط دید، معمولاً معادله دیفرانسیل معمولی می باشد. پس می توان مانند یک سیستم دینامیکی با مساله هدایت برخورد شود. با استفاده از تئوری های موجود در تحلیل سیستم های غیرخطی، روش های غیرخطی متنوعی برای هدایت اجسام پیشنهاد شده است. از آن جمله می توان به طراحی قانون هدایت با روش های غیرخطی [۸،۷]، استفاده از ایده مدلغزشی [۹-۱۱]، گام به عقب [۱۲]، مقاوم [۱۳،۱۴]، تطبیقی [۱۵]، پایدار در زمان محدود [۱۶،۱۷]، وجود نوین اندازه گیری [۱۸] و روش های هوشمند [۱۹] اشاره نمود. اخیراً از روش هایی از قبیل استفاده از کانارد نوسانی [۲۰]، الگوریتم هدایت زیر بهینه [۲۱]، قانون هدایت غیرخطی [۲۲]، هدایت بهینه غیرخطی [۲۳] برای هدایت جسم پرنده استفاده شده است.

در یک سیستم هدایت، معمولاً واحد جستجوگر با یک بلوک مشتق گیر مدل سازی می گردد. روشن است که مشتق گیر به تغییرات زاویه خط دید حساس می باشد. همچنین واحد مشتق گیر، به طور ضمنی، به منظور تولید فرمان هدایت، لحظات آینده زاویه خط دید را در قانون هدایت در نظر می گیرد [۳]. برخی از الگوریتم های هدایت مانند روش تعقیب رو به جلو<sup>۴</sup> مسیر آینده هدف را پیش بینی می نماید تا بتواند موقیعت خود را به هدف مورد نظر برساند [۲۴،۲۵].

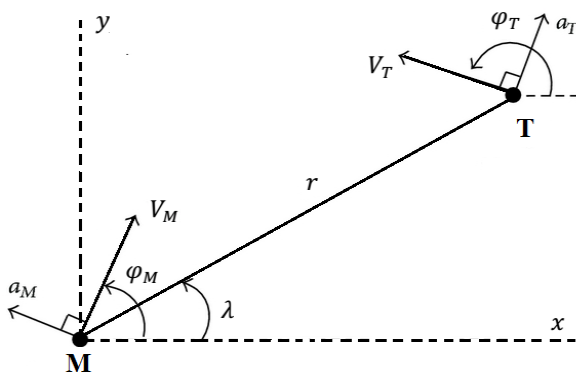
با در اختیار داشتن یک مدل ریاضی می توان حالت یا آینده آن سیستم دینامیکی را پیش بینی نمود. سپس بر اساس رفتار پیش بینی شده، یک کنترل کننده مناسب برای آن سیستم طراحی نمود [۲۶]. کنترل پیش بین مبتنی بر مدل<sup>۵</sup> (یا به اختصار کنترل پیش بین MPC) یک زیرشاخه جدید از علم کنترل بهینه می باشد. پس مشابه با روش های کنترل بهینه، در روش های کنترل پیش بین نیز یک تابع هزینه وجود دارد. از مزیت های رویکرد پیش بین در مقایسه با روش های دیگر آن است که محدودیت های سیستم (اشباع عملگر) را می توان در قانون کنترل لحاظ نمود. روش های پیش بین می توانند در هر لحظه از زمان، به صورت بلادرنگ، مورد استفاده قرار گیرند. بدین صورت که در آن لحظه یک تخمینی از آینده سیستم را انجام می دهد و سیگنال های ورودی سیستم را به گونه ای محاسبه می کند تا علاوه بر این که محدودیت های آن سیستم بر آورده می شود یک تابع هزینه نیز مینیمم شود [۲۷]. بدیهی است که در روش های کنترل پیش بین علاوه بر این که در هر لحظه از زمان، پایداری مجانبی سیستم حلقه بسته با وجود قانون پیش بین، تضمین می گردد عملکرد بهینه آن سیستم نیز در نظر گرفته می شود.

برای سیستم های دینامیکی خطی ساده با نمایش گسسته زمان مانند سیستم های مرتبه اول، فرمول های فرم بسته ای مانند کنترل ماتریسی دینامیکی<sup>۶</sup> DMC، کنترل الگوریتمی مبتنی بر مدل<sup>۷</sup> MAC، کنترل پیش بین عمومی<sup>۸</sup> GPC و... برای تحقق کنترل پیش بین وجود دارد. در روش های ذکر شده، معمولاً از پاسخ ضربه یا پاسخ پله آن سیستم خطی، برای تولید سیگنال کنترل، استفاده می شود [۲۶]. روش های پیش بین اگر چه ابتدا به دلیل سادگی معادله های جبری، برای سیستم های گسسته زمان مطرح شده اند اما برای سیستم های پیوسته زمان (خطی و غیرخطی) نیز مفاهیم موجود کنترل پیش بین تعمیم داده شده اند [۲۸].

در حال حاضر، یک رویکرد کلیدی برای طراحی سیستم کنترل و تحلیل پایداری در یک سیستم دینامیکی، استفاده از روش های مبتنی بر نامساوی های ماتریسی خطی<sup>۹</sup> LMI می باشد [۲۹]. با توجه به مطرح شدن الگوریتم های محاسباتی بهبود یافته و همچنین پیشرفت های شگرفی که در حوزه محاسبات رایانشی صورت گرفته است، در مقایسه با سایر رویکردها، استفاده از روش های طراحی مبتنی بر LMI می تواند کارآمدتر باشد. در

$$\begin{cases} \frac{dr}{dt} = V_T \cos(\lambda - \varphi_T) - V_M \cos(\lambda - \varphi_M) \\ r \frac{d\lambda}{dt} = -V_T \sin(\lambda - \varphi_T) + V_M \sin(\lambda - \varphi_M) \end{cases} \quad (3)$$

در این مساله، سرعت جسم  $V_M$  و سرعت هدف  $V_T$  مقادیری ثابت فرض می‌گردد. زاویه لحظه‌ای جسم و هدف، در دستگاه مختصات اینرسی، به ترتیب با متغیرهای  $\varphi_M$  و  $\varphi_T$  مشخص می‌شود. شماتیک مساله رهگیری در شکل ۱ نشان داده شده است.



شکل ۱. مساله رهگیری در دستگاه مختصات دوبعدی [۱۸]

همچنین متغیرهای  $\lambda$  و  $r$  به ترتیب بیانگر زاویه خط دید و فاصله جسم از هدف می‌باشد. با تعریف متغیرهای نرخ زاویه خط دید  $x = \frac{d\lambda}{dt}$  و سرعت نزدیک شونده  $v_c = -\frac{dr}{dt}$ ، می‌توان به رابطه زیر رسید:

$$\frac{dx}{dt} = \frac{1}{r}(2v_c x + w - u) \quad (4)$$

در رابطه (۴)،  $u = V_M \cos(\lambda - \varphi_M) \frac{d\varphi_M}{dt}$  شتاب جانبی جسم و  $w = V_T \cos(\lambda - \varphi_T) \frac{d\varphi_T}{dt}$  شتاب جانبی هدف می‌باشد.

قوانین هدایت مختلف و متنوعی برای این مساله می‌تواند انتخاب شوند. ساده‌ترین قانون هدایت، هدایت تناسبی می‌باشد که به صورت زیر نوشته می‌شود:

$$u_{PN} = N v_c x, \quad N > 2 \quad (5)$$

در هدایت تناسبی PN، متناسب با حاصل ضرب سرعت نزدیک شونده  $v_c$  و تغییرات زاویه خط دید  $x$ ، شتاب جانبی به جسم اعمال می‌گردد.

اگر شتاب لحظه‌ای هدف  $w$ ، معلوم باشد آن وقت قانون هدایت زیر می‌تواند به کار گرفته شود:

$$u = w + u_{PN} + \theta x \quad (6)$$

سیستم‌های خطی و مستقل از زمان، با روش مبتنی نامساوی ماتریسی خطی، می‌توان کنترل پیش بین طراحی نمود [۳۱، ۳۰]. بنابراین در این مقاله از ایده طراحی کنترل پیش بین مبتنی بر LMI، برای طراحی قانون هدایت پیش بین استفاده شده است. ساختار مطالب مقاله به صورت ذیل می‌باشد: ابتدا در بخش بعد، به معرفی مفاهیمی از ماتریس‌ها پرداخته شده است. در بخش ۳، مساله هدایت پیش بین و انتخاب قانون هدایت تعریف می‌گردد. سپس با تبدیل مساله هدایت پیش بین به مساله بهینه‌یابی دیگر، یک قانون هدایت پیش بین، در بخش ۴ پیشنهاد می‌شود. در بخش ۵، روش پیشنهادی در یک مساله هدایت شبیه‌سازی می‌گردد تا اثر بخشی روش پیش بین را نشان دهد. در نهایت، نتیجه‌گیری مقاله در بخش ۶ آورده شده است.

## ۲. پیش نیاز از ریاضیات

روش ارائه شده در این مقاله، یک الگوریتم هدایت پیش بین بوده که بهره (پارامتر) آن از حل مساله مینیمم‌یابی با وجود قیدهای LMI بدست می‌آید. بنابراین در این بخش، به اختصار به ذکر مفاهیم مورد نیاز از نامساوی ماتریس‌ها پرداخته شده است.

ماتریس متقارن  $Z \in \mathbb{R}^{n \times n}$  مثبت موکد<sup>۱</sup> (معین) می‌باشد اگر و تنها اگر عبارت جبری  $x^T Z x$ ، به ازای بردار غیر صفر  $x \in \mathbb{R}^n$ ، همواره مقداری مثبت گردد [۳۲]. نشان داده شده است ماتریس متقارن  $Z$ ، مثبت موکد می‌باشد اگر و تنها اگر همه مقادیر ویژه آن مثبت باشد [۳۲]. در حالت خاص، ماتریس متقارن  $A \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$  به صورت زیر مثبت موکد می‌باشد [۲۹]:

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ b & c \end{bmatrix} \quad (1)$$

اگر و تنها اگر شرایط  $a > 0$  و  $ac > b^2$  هم زمان برقرار باشد. به طور مشابه ماتریس متقارن  $B \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$  به صورت زیر مثبت موکد می‌باشد [۲۹]:

$$B = \begin{bmatrix} a & b & c \\ b & d & 0 \\ c & 0 & e \end{bmatrix} \quad (2)$$

اگر و تنها اگر هم‌زمان نامساوی‌های  $d > 0$ ،  $e > 0$  و  $ade - eb^2 - dc^2 > 0$  برقرار باشد.

## ۳. تعریف مساله

در دستگاه مختصات دو بعدی، روابط ریاضی حاکم بر حرکت جسم و هدف به صورت زیر نوشته می‌شود [۱]:

(۱۲) آن است که در لحظات معلوم  $t_k, k = 0, 1, 2, \dots$  تابع هزینه زیر مینیمم شود:

$$J(t_k) = \int_{t_k}^{+\infty} (q\hat{x}^2(\tau|t_k) + (\hat{u}(\tau|t_k) - Nv_c\hat{x}(\tau|t_k) - w(\tau))^2) d\tau \quad (13)$$

لازم به ذکر است در تابع هزینه (۱۳)، اگر چه مساله هدایت در بازه زمانی محدودی مطالعه می شود اما با توجه به این نکته که عبارت های  $x$  و  $u$  با گذشت زمان به صفر همگرا می شود افق پیش بینی نامحدود انتخاب شده است. متغیرهای  $\hat{x}(\tau|t_k)$  و  $\hat{u}(\tau|t_k)$  به ترتیب نمایش گر نرخ زاویه خط دید و شتاب اعمالی پیش بینی شده است.

نرخ زاویه خط دید با مدل دینامیکی (معادله دیفرانسیل) زیر می تواند پیش بینی شود:

$$\frac{d}{dt}\hat{x}(\tau|t_k) = -\frac{1}{r(t_k)}((N-2)v_c(t_k) + \theta(k))\hat{x}(\tau|t_k) \quad (14)$$

$\forall \tau \geq t_k, \hat{x}(t_k|t_k) = x(t_k)$   
آن وقت در تابع هزینه (۱۳)، قانون هدایت پیش بین به صورت رابطه زیر می تواند استفاده گردد:

$$u(\tau|t_k) = w(t_k) + Nv_c(t_k)\hat{x}(\tau|t_k) + \theta(k)\hat{x}(\tau|t_k), \tau \geq t_k, k = 0, 1, 2, \dots \quad (15)$$

در قانون هدایت پیش بین (۱۵)، بهره  $\theta(k)$  در لحظه معلوم  $t_k$ ، با حل یک مساله مینیمم یابی بدست خواهد آمد.

لازم به ذکر می باشد که بین متغیر های زمان  $t$  و  $\tau$  تفاوت آشکاری وجود دارد. متغیر  $t$  بیانگر زمان واقعی سیستم هدایت و متغیر  $\tau$  بیانگر زمان مجازی می باشد. متغیر  $\tau$  برای پیش بینی رفتار سیستم هدایت در زمان  $t_k$  مورد استفاده قرار می گیرد. بنابراین قانون هدایت به صورت زیر بدست می آید:

$$u(t) = w(t) + Nv_c(t)x(t) + \theta(k)x(t), t_k \leq t < t_{k+1} \quad (16)$$

بهره ثابت  $\theta(k)$  در لحظه معلوم  $t_k$  بروز رسانی می گردد.

**فرض ۱:** در لحظه معلوم  $t_k$ ، سرعت نزدیک شونگی  $v_c(t_k)$  و فاصله نسبی جسم از هدف  $r(t_k)$  را در اختیار داریم.

**فرض ۲:** شتاب جانبی  $u(t)$  در نامساوی زیر صدق می کند:

$$|u(t) - \bar{u}(t)| \leq \delta_u \quad (17)$$

در بخش بعد برای سیستم هدایت دو بعدی ذکر شده، به طراحی قانون هدایت پیش بین پرداخته می شود.

در رابطه (۶)، بایستی ثابت ناوبری  $N > 2$  و بهره  $\theta \geq 0$  انتخاب گردد. با قانون هدایت (۶)، سیستم هدایت به صورت زیر نوشته خواهد شد:

$$\frac{dx}{dt} = \frac{1}{r}(2v_c x - u_{PN} - \theta x), \forall \theta \geq 0 \quad (7)$$

پس خواهیم داشت:

$$\frac{dx}{dt} = -\frac{1}{r}((N-2)v_c + \theta)x, \forall \theta \geq 0 \quad (8)$$

از رابطه (۷) دیده می شود که سیستم هدایت با قانون هدایت (۶)، پایدار جانبی خواهد شد. پس زاویه خط دید  $x$ ، به مقدار صفر همگرا خواهد شد ( $\lim_{t \rightarrow +\infty} x(t) = 0$ ). بدیهی است اگر هدف مورد نظر، شتابی نداشته باشد ( $w = 0$ ) آن وقت شتاب جانبی اعمال شده به جسم  $u$ ، نیز به مقدار صفر همگرا خواهد شد ( $\lim_{t \rightarrow +\infty} u(t) = 0$ ).

روشن است که با انتخاب بهره کلی  $\hat{\theta} = \theta + Nv_c$ ، قانون هدایت می تواند به صورت رابطه زیر بیان شود:

$$u = w + \hat{\theta}x \quad (9)$$

در این مقاله چون می خواهیم روش هدایت پیشنهادی بر حسب قانون هدایت تناسبی نوشته شود فرم (۶) انتخاب شده است. بدیهی است در قانون هدایت (۶)، با جایگذاری  $\theta = 0$  به هدایت تناسبی منجر خواهد شد. همچنین بدون از دست دادن کلیت مساله، می توان  $N = 0$  قرار داد. در قانون (۶)، اگر زمان به بی نهایت میل نماید ( $t \rightarrow +\infty$ ) آن وقت متغیر  $\bar{u}$  می تواند به صورت زیر تعریف گردد:

$$\bar{u} = w + u_{PN} \quad (10)$$

قانون هدایت (۶)، به صورت زیر بازنویسی خواهد شد:

$$u = \bar{u} + \theta x \quad (11)$$

در این مساله به دنبال آن هستیم پارامترهای قانون هدایت (۶)، به گونه ای انتخاب شود تا تابع هزینه زیر مینیمم شود:

$$J(u) = \int_{t_0}^{t_f} (qx^2(t) + (u(t) - \bar{u}(t))^2) dt \quad (12)$$

در تابع هزینه (۱۲)، وزن  $q \geq 0$  بوده و متغیرهای  $t_0$  و  $t_f$  به ترتیب زمان شروع و نهایی هدایت می باشد. روشن است که مساله هدایت فقط در بازه زمانی  $t_0$  و  $t_f$  مطرح می شود. در تابع هزینه (۱۲)، عبارت های  $x$  و  $u$  با گذشت زمان به صفر همگرا می شود. در نتیجه تابع هزینه (۱۲)، مقدار محدودی می باشد.

قانون هدایت بایستی به گونه ای انتخاب شود تا تابع هزینه (۱۲) مینیمم شود. یک راه حل برای مینیمم نمودن تابع هزینه

با ساده سازی رابطه (۲۸)، داریم:

$$2p\hat{x}(\tau|t_k) \left( -\frac{1}{r(t_k)} ((N-2)\hat{x}(\tau|t_k)v_c(t_k) + \theta(k)\hat{x}(\tau|t_k)) \right) \leq - \left( q\hat{x}^2(\tau|t_k) + (\hat{u}(\tau|t_k) - u_{PN}(\tau|t_k) - w(\tau))^2 \right), \forall \tau \geq t_k \quad (29)$$

با انتخاب تابع لیپانف  $V(\hat{x}) = p\hat{x}^2, p > 0$  و استفاده از رابطه پیش بینی نرخ زاویه خط دید (۱۴)، خواهیم داشت:

$$\frac{d}{dt} V(\hat{x}(\tau|t_k)) = 2p\hat{x}(\tau|t_k) \frac{d}{dt} \hat{x}(\tau|t_k) \leq - \left( q\hat{x}^2(\tau|t_k) + (\hat{u}(\tau|t_k) - u_{PN}(\tau|t_k) - w(\tau))^2 \right) \quad (30)$$

از رابطه (۳۰)، از لحظه  $t_k$  تا بی نهایت، انتگرال گیری می نماییم:

$$\int_{t_k}^{+\infty} \frac{d}{dt} V(\hat{x}) d\tau \leq - \int_{t_k}^{+\infty} \left( q\hat{x}^2(\tau|t_k) + (\hat{u}(\tau|t_k) - u_{PN}(\tau|t_k) - w(\tau))^2 \right) d\tau \quad (31)$$

رابطه (۳۱)، به صورت زیر می تواند نوشته شود:

بنابراین با در نظر گرفتن متغیر  $\alpha = \frac{\gamma}{p}$  به رابطه (۱۹) منجر می گردد. نامساوی (۲۱)، معادل با نامساوی زیر است:

$$\beta^2 \leq \alpha \delta_u^2 \quad (32)$$

با استفاده از نامساوی (۱۹)، خواهیم داشت:

$$x^2(t) \leq \alpha \quad (33)$$

داریم:

$$\beta^2 x^2(t) \leq \alpha x^2(t) \delta_u^2 \leq \alpha^2 \delta_u^2 \quad (34)$$

با ساده سازی، می توان به رابطه زیر رسید:

$$\left| \frac{\beta}{\alpha} x(t) \right| = |\theta(k)x(t)| \leq \delta_u \quad (35)$$

در نهایت خواهیم داشت:

$$|u(t) - u_{PN}(t) - w(t)| \leq \delta_u \quad (36)$$

اثبات قضیه ۱ به پایان رسید.

بنابراین به شرط برآورده شدن نامساوی های (۱۹)، (۲۰) و

(۲۱)، اگر کمترین مقدار  $\gamma$  یافت شود آن وقت قانون هدایت

پیشنهادی (۲۲)، یک قانون هدایت پیش بین خواهد بود.

دیده شد که با استفاده از یک مدل دینامیکی (۱۴)، رفتار و

آینده سیستم هدایت، می تواند پیش بینی شود.

با انجام محاسبات بلادرنگ، فرمان شتاب جانبی جسم  $u(t)$

به گونه ای محاسبه گردید که تابع هزینه (۱۳)، در لحظه معلوم

$t_k$ ، مینیمم شود.

#### ۴. طراحی قانون هدایت پیش بین

در این بخش، برای طراحی قانون هدایت پیش بین، شرایط کافی برای وجود الگوریتم هدایت ذکر می گردد.

**قضیه ۱:** سیستم هدایت با فرض های (۱) و (۲) را در نظر بگیرید.

اگر در لحظه  $t_k$ ، اعداد  $\alpha > 0, \gamma > 0, \beta$  به گونه ای یافت شود که مساله مینیمم یابی زیر دارای جواب باشد:

$$\text{Min } \gamma \quad (18)$$

$$\text{subject to} \quad x^2(t_k) \leq \alpha \quad (19)$$

$$\begin{bmatrix} \alpha \frac{2(N-2)v_c(t_k)}{r(t_k)} + \beta \frac{2}{r(t_k)} & \alpha \sqrt{q} & \beta \\ \alpha \sqrt{q} & \gamma & 0 \\ \beta & 0 & \gamma \end{bmatrix} \geq 0 \quad (20)$$

$$\begin{bmatrix} \alpha & \beta \\ \beta & \delta_u^2 \end{bmatrix} \geq 0 \quad (21)$$

آن وقت با انتخاب قانون هدایت زیر

$$u(t) = w(t) + u_{PN}(t) + \frac{\beta}{\alpha} x(t), \quad (22)$$

$$t_k \leq t < t_{k+1}$$

سیستم هدایت پایدار جانبی شده و تابع هزینه (۱۳) مینیمم

می گردد. همچنین عدد  $\gamma$ ، کران بالای تابع هزینه (۱۳) خواهد

بود.

**اثبات:** نامساوی (۲۰) معادل با نامساوی زیر می باشد:

$$\alpha \frac{2(N-2)v_c(t_k)}{r(t_k)} + \beta \frac{2}{r(t_k)} - \alpha^2 \frac{q}{\gamma} - \frac{\beta^2}{\gamma} \geq 0 \quad (23)$$

با ساده سازی رابطه (۲۳) داریم:

$$\alpha^2 q + \beta^2 - \frac{2\gamma}{r(t_k)} (\alpha(N-2)v_c(t_k) + \beta) \leq 0 \quad (24)$$

داریم:

$$q + \frac{\beta^2}{\alpha^2} - \frac{2\gamma}{\alpha r(t_k)} \left( (N-2)v_c(t_k) + \frac{\beta}{\alpha} \right) \leq 0 \quad (25)$$

حال با تعریف متغیرهای اسکالر  $\alpha = \frac{\gamma}{p}$  و  $\theta = \frac{\beta}{\alpha}$ ، نامساوی

زیر را می توان نوشت:

$$q + \theta^2(k) - \frac{2}{r(t_k)} p \left( (N-2)v_c(t_k) + \theta(k) \right) \leq 0 \quad (26)$$

داریم:

$$\left( q + \theta^2(k) - \frac{2p}{r(t_k)} \left( (N-2)v_c(t_k) + \theta(k) \right) \right) \hat{x}^2(\tau|t_k) \leq 0, \forall \tau \geq t_k \quad (27)$$

نامساوی (۲۷) به صورت زیر می تواند بیان گردد:

$$\left( -\frac{2p}{r(t_k)} \left( (N-2)v_c(t_k) + \theta(k) \right) \right) \hat{x}^2(\tau|t_k) \leq - \left( q + \theta^2(k) \right) \hat{x}^2(\tau|t_k), \forall \tau \geq t_k \quad (28)$$

$$\frac{d}{dt} \varphi_M = \frac{u}{V_M \cos(\lambda - \varphi_M)} \quad (43)$$

بنابراین با حل هم زمان معادله‌های دیفرانسیل غیرخطی (۳) و (۴۳)، سیستم هدایت شبیه‌سازی می‌گردد.

در نرم افزار Matlab، معادلات دیفرانسیل ذکر شده با روش انتگرال‌گیری ODE 45 با گام ثابت ۱۰ میلی‌ثانیه، به صورت عددی حل شده است. به منظور حل مساله مینیمم‌یابی (ذکر شده در قضیه ۱) از جعبه ابزار LMI Lab استفاده شده است. سخت افزار مورد استفاده برای شبیه‌سازی، یک رایانه مجهز به سیستم عامل ویندوز ۱۰ (۶۴ بیتی)، با حافظه رم 12GB و پردازنده Intel Core i5-4440 با سرعت 3.10GHz می‌باشد.

برای حل عددی معادله‌های حرکت و قوانین هدایت، موقعیت اولیه جسم را مبدأ دستگاه مختصات می‌گیریم  $x_M(0) = 0$  و  $y_M(0) = 0$ . فاصله نسبی اولیه جسم از هدف ۵ کیلومتر  $(r(0) = 5000)$ ، زاویه خط دید اولیه ۹۰ درجه  $(\lambda(0) = 90)$ ، زاویه اولیه جسم ۱۰ درجه  $(\varphi_M(0) = 10)$  لحاظ گردد. پس در دستگاه مختصات دو بعدی، مختصات جسم از رابطه زیر بدست می‌آید:

$$\begin{cases} \frac{d}{dt} x_M = V_M \cos(\varphi_M) \\ \frac{d}{dt} y_M = V_M \sin(\varphi_M) \end{cases} \quad (44)$$

مختصات اولیه هدف به صورت زیر محاسبه می‌گردد:

$$\begin{cases} x_T(0) = r(0) \cos(\lambda_0) = 0 \\ y_T(0) = r(0) \sin(\lambda_0) = 5000 \end{cases} \quad (45)$$

مختصات لحظه‌ای هدف از معادله دیفرانسیل زیر بدست خواهد آمد:

$$\begin{cases} \frac{d}{dt} x_T = V_T \cos(\varphi_T) \\ \frac{d}{dt} y_T = V_T \sin(\varphi_T) \end{cases} \quad (46)$$

به منظور بررسی کارایی و اثر بخشی روش هدایت، قانون هدایت پیشنهادی با قانون هدایت تناسبی  $PN$  مقایسه می‌گردد. در روش هدایت تناسبی، انتخاب پارامتر  $N = 3$ ، منجر به قانون هدایت بهینه می‌گردد. به همین دلیل، هدایت تناسبی با ضریب ناوبری  $N = 3$  استفاده می‌گردد. قانون هدایت پیش‌بین، ذکر شده در قضیه ۱، با وزن  $q = 1$  در تابع هزینه، استفاده می‌شود.

با روش هدایت پیشنهادی به طور متناوب با دوره تناوب ۴ ثانیه بهره هدایت محاسبه شده و به صورت بلادرنگ قانون هدایت بروزرسانی می‌گردد. شتاب اعمال شده به جسم  $u(t)$  با در نظر گرفتن محدودیت حداکثر شتاب اعمالی به جسم (محدوده

در ادامه به بررسی حالت خاصی از قضیه ۱ که کاربردهای فراوانی در سیستم هدایت می‌تواند داشته باشد پرداخته شده است.

**نتیجه ۱:** سیستم هدایت با فرض‌های ۱ و ۲ را در نظر بگیرید. همچنین فرض کنید زاویه هدف تغییرات نداشته باشد (شتاب هدف صفر باشد). اگر در لحظه  $t_k$ ، اعداد  $\alpha > 0$ ،  $\gamma > 0$  و  $\beta$  به گونه‌ای یافت شود که مساله مینیمم‌یابی زیر دارای جواب باشد:

$$\text{Min } \gamma \quad (38)$$

subject to

$$x^2(t_k) \leq \alpha \quad (39)$$

$$\begin{bmatrix} \beta \frac{2}{r(t_k)} - \alpha \frac{4v_c(t_k)}{r(t_k)} & \alpha \sqrt{q} & \beta \\ \alpha \sqrt{q} & \gamma & 0 \\ \beta & 0 & \gamma \end{bmatrix} \geq 0 \quad (40)$$

$$\begin{bmatrix} \alpha & \beta \\ \beta & \delta_u^2 \end{bmatrix} \geq 0 \quad (41)$$

آن وقت با انتخاب قانون هدایت زیر

$$u(t) = \frac{\beta}{\alpha} x(t), t_k \leq t < t_{k+1} \quad (42)$$

سیستم هدایت توصیف شده با معادله‌های حرکت (۳)، پایدار جانبی شده و تابع هزینه (۱۳) مینیمم خواهد شد. همچنین عدد مثبت  $\gamma$ ، کران بالای تابع هزینه (۱۳) می‌باشد. به علاوه محدودیت شتاب جسم  $|u(t)| \leq \delta_u$  نیز برآورده خواهد شد. در بخش بعد، به منظور بررسی کارایی الگوریتم هدایت پیشنهادی، نتایج مطرح شده در قضیه ۱، در یک سیستم هدایت دو بعدی شبیه‌سازی می‌شود. نتایج بدست آمده با قانون هدایت تناسبی مقایسه می‌گردد.

## ۵. شبیه‌سازی عددی

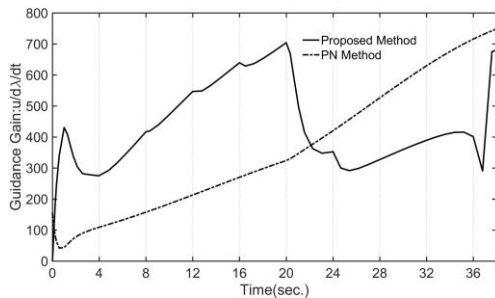
در دستگاه مختصات اینرسی، هدفی را در نظر بگیرید که با سرعت ثابت ۲۰۰ متر بر ثانیه  $(V_T = 200)$  و با زاویه متغیر با زمان  $\varphi_T(t)$  (بر حسب درجه) به صورت زیر در حرکت می‌باشد:

$$\varphi_T(t) = \begin{cases} t + 20 & 0 \leq t < 20 \\ 60 - t & 20 \leq t < 40 \end{cases}$$

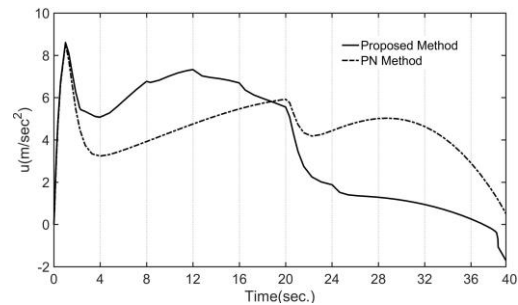
در نتیجه هدف دارای شتاب جانبی هدف غیر صفر می‌باشد. به منظور شبیه‌سازی سیستم هدایت، سرعت جسم ۳۰۰ متر بر ثانیه  $(V_M = 300)$  در نظر گرفته شده و محدودیت حداکثر شتاب جسم ۱۰ متر بر مجذور ثانیه  $(\delta_u = 10)$  می‌باشد. با استفاده از قانون هدایت پیشنهادی، تغییرات زاویه جسم  $\varphi_M$  از رابطه زیر بدست می‌آید:

فاصله نسبی جسم از هدف  $r(t)$  در شکل ۶، زاویه جسم  $\varphi_M(t)$  و تغییرات سرعت نزدیک شوندگی  $v_c(t)$  در شکل‌های ۷ و ۸ آورده شده است. در شکل ۵ مسیر پیموده شده توسط جسم و هدف، در دستگاه مختصات دو بعدی، نشان داده شده است. مطابق شکل ۶ دیده می‌شود در زمان کمتری جسم به هدف مورد نظر خواهد رسید.

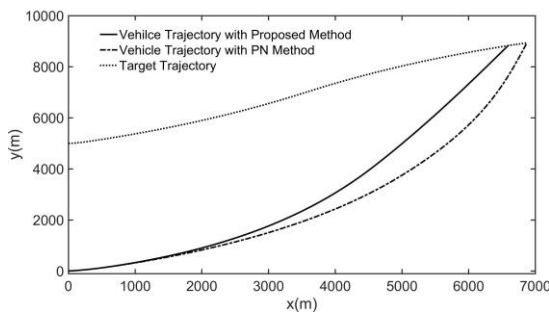
مجاز شتاب جسم)، در شکل ۲ نشان داده شده است. در شکل ۳، بهره قانون‌های هدایت (حاصل عبارت  $\frac{u(t)}{\lambda(t)}$  بر حسب زمان) و تغییرات زاویه خط دید  $\lambda(t)$  در شکل ۴ آورده شده است. لازم به ذکر است در قانون هدایت تناسبی  $u(t) = N v_c(t) \dot{\lambda}(t)$  بوده و در قانون هدایت پیشنهادی  $u(t) = \theta(t) \dot{\lambda}(t)$  می‌باشد. از شکل ۳ روشن است که روش هدایت پیشنهادی شبیه به هدایت تناسبی بوده اما بهره آن در حین پرواز، تغییر می‌یابد.



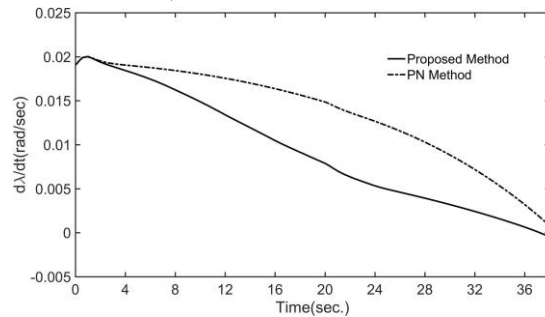
شکل ۳. بهره قانون هدایت



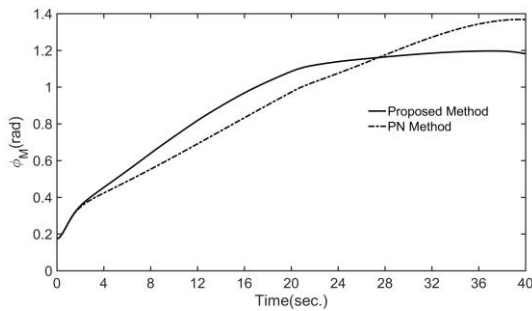
شکل ۲. شتاب اعمالی به جسم



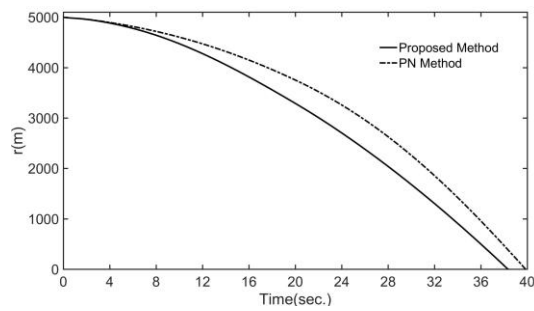
شکل ۵. مسیر حرکت جسم و هدف



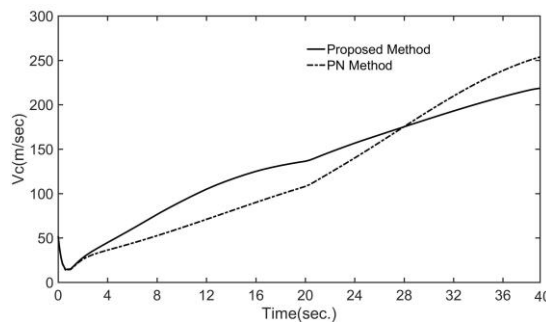
شکل ۴. تغییرات زاویه خط دید



شکل ۷. زاویه جسم در دستگاه مختصات اینرسی

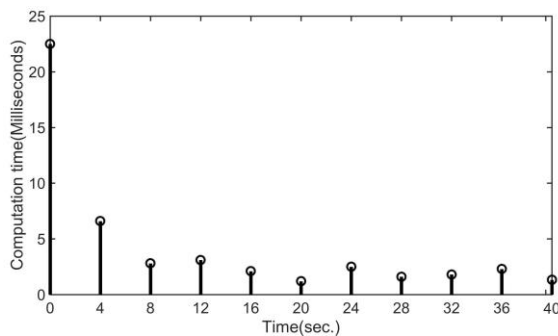


شکل ۶. فاصله نسبی جسم از هدف



شکل ۸. سرعت نزدیک شوندگی

می‌باشد که در مقایسه با دوره تناوب ۴ ثانیه قابل صرف نظر می‌باشد. در نتایج شبیه سازی، با مقایسه بین روش هدایت تناسبی و پیش‌بین، دیده می‌شود که روش هدایت پیش بین محدودیت حداکثر شتاب را در طراحی قانون هدایت لحاظ می‌نماید و همچنین عملکرد سیستم با روش هدایت پیش‌بین به طور قابل توجهی بهبود یافته است.



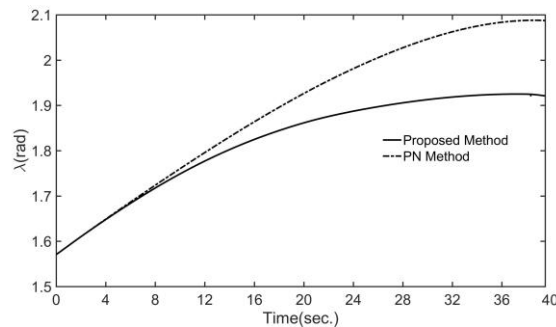
شکل ۱۰. زمان لازم برای محاسبه قانون هدایت

هدایت تناسبی استفاده نمی‌شود. همچنین با توجه به نتایج شبیه‌سازی عددی انجام شده، کارایی روش هدایت پیشنهادی در مقایسه با روش هدایت موجود دیده می‌شود.

## ۶. نتیجه گیری

در این مقاله، یک روش مبتنی بر نامساوی ماتریسی خطی، برای طراحی قانون هدایت پیش‌بین، پیشنهاد گردید. در قانون هدایت پیش‌بین رفتار و آینده سیستم هدایت، با استفاده از یک مدل دینامیکی، پیش بینی خواهد شد. سپس، در هر لحظه از زمان، فرمان شتاب جانبی به گونه‌ای محاسبه می‌گردد تا تابع هزینه معلومی مینیمم شود. یک قانون هدایت متناسب با تغییرات زاویه خط دید، با بهره نامعلوم به عنوان قانون هدایت پیش‌بین انتخاب می‌گردد. مساله طراحی قانون هدایت پیش‌بین به حل یک مساله دیگر مینیمم‌یابی تبدیل گردید. دیده شد که اگر در هر لحظه از زمان، چنین مساله بهینه‌یابی دارای قیدهای ماتریسی به صورت عددی حل گردد آن وقت بهره قانون هدایت پیشنهادی بروزسانی خواهد شد. الگوریتم هدایت پیشنهادی در سیستم هدایت دو بعدی شبیه‌سازی گردید. نتایج شبیه‌سازی بدست آمده، بیانگر کارایی روش هدایت پیشنهادی در مقایسه با روش هدایت موجود بود.

در شکل ۹، زاویه خط دید جسم با هدف  $\lambda(t)$  در دستگاه مختصات اینرسی مشاهده می‌گردد. روش پیشنهادی به صورت بلادرنگ بهره قانون هدایت را محاسبه می‌نماید. پس به نظر می‌رسد روش پیشنهادی یک الگوریتم هدایت زمان‌بری می‌باشد. در شکل ۱۰، زمان لازم برای محاسبه و بروزسانی بهره را نشان می‌دهد. حداکثر زمان لازم برای تعیین بهره، ۲۳ میلی ثانیه



شکل ۹. زاویه خط دید در دستگاه مختصات اینرسی

در قانون هدایت پیشنهادی، ارتباطی معناداری بین فرکانس بروزسانی بهره قانون هدایت و فرکانس داده برداری از سنسورهای اندازه گیری وجود ندارد. در حل معادله دیفرانسیل غیرخطی حاکم بر مساله هدایت، از روش انتگرال‌گیری عددی با گام ثابت ۱۰ میلی‌ثانیه استفاده شده است. از این رو در هر ۱۰ میلی ثانیه، داده‌های سنسورهای اندازه‌گیری در اختیار الگوریتم هدایت پیشنهادی قرار می‌گیرد. بنابراین در روش پیشنهادی، بهره قانون هدایت به طور متناوب در هر ۴ ثانیه تغییر می‌کند. پس در لحظات معینی (مضرب‌های صحیح ۴ ثانیه) یک مساله مینیمم‌یابی بایستی به صورت عددی، بلادرنگ حل می‌شود.

اگر چنین مساله مینیمم‌یابی دارای جواب بود بهره قانون هدایت، می‌تواند بروزسانی گردد. اگر آن مساله مینیمم‌یابی دارای جواب نبود می‌توان از جواب مرحله قبل استفاده نمود. حتی می‌توان مساله مینیمم‌یابی عددی فقط یک بار (در لحظه شروع  $t_k = 0$ ) حل نمود و بهره قانون هدایت در طی پرواز مقدار ثابتی باشد.

در روش هدایت پیش‌بین، با استفاده از یک مدل دینامیکی، رفتار سیستم هدایت پیش‌بینی می‌گردد. سپس در هر لحظه از زمان، قانون هدایت به گونه‌ای انتخاب می‌شود تا یک تابع هزینه، وابسته به تغییرات زاویه خط دید و مقدار شتاب اعمالی، مینیمم گردد. از چنین رویکردی در الگوریتم‌های هدایت موجود مانند



- [1] G. M. Siouris, Missile guidance and control systems: Springer Science Business Media, 2004.
- [2] P. Zarchan, Tactical and strategic missile guidance: American Institute of Aeronautics and Astronautics, 2012.
- [3] N. F. Palumbo, R. A. Blauwkamp, and J. M. Lloyd, Basic principles of homing guidance, Johns Hopkins APL Technical Digest, vol. 29, pp. 25-41, 2010.
- [4] C. Y. Li and W. X. Jing, Geometric approach to capture analysis of PN guidance law, Aerospace Science and Technology, vol. 12, pp. 177-18, 2008.
- [5] J. Heyrani Nobari, New insight in the pursue-escape geometry by the inspiration of PN guidance, Journal of Control, vol. 4, pp. 29-35, 2010. (in Persian)
- [6] H. K. Khalil, Nonlinear systems. New Jersey: Prentice-Hall, 1996.
- [7] D. Chwa and J. Y. Choi, Adaptive nonlinear guidance law considering control loop dynamics, IEEE Transactions on Aerospace and Electronic Systems, vol. 39, pp. 1134-1143, 2003.
- [8] A. Saleem and A. Ratnoo, Lyapunov-based guidance for impact time control and simultaneous arrival, Journal of Guidance, Control and Dynamics, vol. 39, pp. 164-173, 2015.
- [9] D. Cho, H. J. Kim, and M. J. Tahk, Nonsingular sliding-mode guidance for impact time control, Journal of Guidance, Control, and Dynamics, vol. 39, pp. 61-68, 2015.
- [10] J. Moon, K. Kim, and Y. Kim, Design of missile guidance law via variable structure control, Journal of Guidance, Control, and Dynamics, vol. 24, pp. 659-664, 2001.
- [11] V. Behnam Gol, I. Mohammad Zaman, A. Vali, and N. A. Ghahramani, Guidance law design using finite time second order sliding-mode control, Journal of Control, vol. 5, pp. 36-44, 2011. (in Persian)
- [12] V. Behnamgol, A. Vali, and A. Mohammadi, A new backstepping sliding-mode guidance law considering control loop dynamics, Journal of Space Science and Technology, vol. 8, pp. 9-17, 2016. (in Persian)
- [13] S. S. Moosapour, G. Alizadeh, and S. Khanmohammadi, Three-dimensional optimal robust guidance law design for missile using sliding-mode control and SDRE, Journal of Control, vol. 6, pp. 55-64, 2012. (in Persian)
- [14] D. Chwa, Robust nonlinear disturbance observer-based adaptive guidance law against uncertainties in missile dynamics and target maneuver, IEEE Transactions on Aerospace and Electronic Systems, vol. 54, pp. 1739-1749, 2018.
- [15] D. Zhou, C. Mu, and W. Xu, Adaptive sliding-mode guidance of a homing missile, Journal of guidance, control, and dynamics, vol. 22, pp. 589-594, 1999.
- [16] Binazadeh, M. H. Shafiei, and E. Bazregarzadeh, New approach in guidance law design based on finite-time partial stability theorem, Journal of Space Science and Technology, vol. 8, pp. 1-7, 2015. (in Persian)
- [17] D. Zhou, S. Sun, and K. L. Teo, Guidance laws with finite time convergence, Journal of guidance, control and dynamics, vol. 32, pp. 1838-1846, 2009.
- [18] V. Ghaffari and P. Karimaghaee, Performance and stability investigation of a line of sight based guidance system in the presence of measurement noise, Journal of Space Science and Technology, vol. 11, pp. 31-40, 2018. (in Persian)
- [19] S. A. H. Tabatabaei, A. Yousefi Koma, S. M. Ayati, and S. S. Mohtasebi, Design and simulation of a fuzzy-supervisory control system and an optimized three-dimensional fuzzy carrot-chasing guidance algorithm for a fixed-wing MAV, Modares Mechanical Engineering, vol. 16, pp. 10-20, 2016. (in Persian)
- [20] M. Mirzaei and M. M. Alishahi, Performance investigation of control and guidance system for a spinning flight vehicle with dithering canard, Modares Mechanical Engineering, vol. 14, pp. 169-175, 2014. (in Persian)
- [21] E. Jomehzadeh and F. Tavakoli, A closed-loop sub-optimal guidance design for sub-orbital flying system, Modares Mechanical Engineering, vol. 17, pp. 97-106, 2017. (in Persian)
- [22] A. R. Basohbat Novinzadeh and M. Asadi Matak, Design of stable nonlinear guidance of an underwater vehicle in the ship wake via estimated

- path by particle filter, Modares Mechanical Engineering, vol. 17, pp. 260-266, 2017. (in Persian)
- [23] A. R. Babaei and S. M. R. Setayandeh, Design of nonlinear optimal guidance law for high maneuver targets based on state dependent Riccati equation, Aerospace Knowledge and Technology Journal, vol. 6, pp. 93-107, 2017. (in Persian)
- [24] T. Shima and O. M. Golan, Head pursuit guidance, Journal of Guidance, Control, and Dynamics, vol. 30, pp. 1437-1444, 2007.
- [25] M. Weiss and T. Shima, Minimum effort pursuit evasion guidance with specified miss distance, Journal of Guidance, Control, and Dynamics, vol. 39, pp. 1069-1079, 2016.
- [26] E. F. Camacho and C. B. Alba, Model predictive control: Springer Science Business Media, 2013.
- [27] J. M. Maciejowski, Predictive control: with constraints: Pearson education, 2002 .
- [28] V. Ghaffari, A robust control system scheme based on model predictive controller (MPC) for continuous-time systems, Optimal Control Applications and Methods, vol. 38, pp. 1032-1041, 2017.
- [29] C. Scherer and S. Weiland, Linear matrix inequalities in control. Delft, Netherlands: Dutch Institute for Systems and Control, 2000.
- [30] F. A. Cuzzola, J. C. Geromel, and M. Morari, An improved approach for constrained robust model predictive control, vol. 38, pp. 1183-1189, 2002.
- [31] V. Ghaffari, S. V. Naghavi, and A. Safavi, Robust model predictive control of a class of uncertain nonlinear systems with application to typical CSTR problems, *Journal of Process Control*, vol. 23, pp. 493-499, 2013.
- [32] K. Hoffman and R. Kunze, *Linear Algebra*. New Jersey: Englewood Cliffs, 1971.

پی‌نوشت

- 
- <sup>1</sup> Line of Sight
  - <sup>2</sup> Seeker
  - <sup>3</sup> Proportional Navigation
  - <sup>4</sup> Head Pursuit
  - <sup>5</sup> Model Predictive Control
  - <sup>6</sup> Dynamic Matrix Control
  - <sup>7</sup> Model Algorithmic Control
  - <sup>8</sup> Generalized Predictive Control
  - <sup>9</sup> Linear Matrix Inequality
  - <sup>10</sup> Positive Definite Matrix