



ارایه معیارهای شکست جدید خطی و غیرخطی سنگ تحت تنش‌های سه محوری واقعی با تحلیل کلیدی نتایج حاصل از انواع سنگ‌ها

حسن مومیوند^{*}

۱- دانشیار گروه مهندسی معدن، دانشکده فنی، دانشگاه ارومیه

(دریافت ۱۳۹۵/۰۴/۱۶، پذیرش ۱۳۹۵/۱۲/۲۴)

چکیده

معیارهای شکست سه محوری واقعی متعددی وجود دارند که در ابتدا برخی از آن‌ها بیشتر برای شکست اجسام جامدی همچون فلزات ارایه شده‌اند. چنین معیارهایی در محیط‌های سنگی برای تحلیل پایداری چاه‌های نفت و برخی مغارهای ذخیره‌سازی استفاده می‌شوند. در این تحقیق به روشی جدید معیارهای شکست با استفاده از ۱۲ گروه نتایج حاصل از مقاومت فشاری سه محوری واقعی سنگ‌های گرانیت، مونزونیت، آمفیبولیت، آندزیت، دولومیت، آهک، ماسه سنگ، مرمر به صورت جامعی مورد تجزیه و تحلیل قرار گرفته‌اند. معیار $\sigma_{m,2}$ و میورل به علت شکل ویژه آن‌ها بر نتایج انطباق نشان ندادند. همچنین معیار شکست دراکر و پراگر به علت عدم همبستگی بین پارامترهای تعریف شده آن و ویژگی مکانیکی همچون زاویه اصطکاک داخلی (ϕ) بر نتایج انطباق نشان نداد، چنان‌که خاستگاه این معیار برای محیط خاکی بوده است. با بکارگیری شکل‌های متعدد معیار شکست طی تحلیلی گسترده، رابطه تابع توانی بین تنش برشی هشت وجهی (τ_{oct}) و تنش عمودی هشت وجهی (σ_{oct}) دارای توان ثابت (۰٫۷) انطباق خوبی با گروه‌های متعدد نتایج داشته و ضریب این معیار جدید (B) که از طریق برازش بر داده‌ها حاصل شد، همبستگی قابل قبولی با هر یک از پارامترهای ϕ ، m_i و σ_{ci} نشان داد. رابطه بین τ_{oct} و میانگین تنش اصلی حداکثر و حداقل ($\sigma_{m,2}$) نیز به صورت تابع توانی دارای توان ثابت ۰٫۷۵ انطباق خوبی با نتایج مختلف داشته است و ضریب این معیار (B') همبستگی خوبی با هر یک از پارامترهای ϕ ، m_i و σ_{ci} نشان داد. با تحلیل رابطه خطی بین تنش برشی هشت وجهی و تنش عمودی هشت وجهی برای ۱۲ گروه نتایج سنگ‌های مختلف و همچنین تحلیل رابطه بین مقدار پارامتر ثابت و ضریب خط با ویژگی‌های مکانیکی مانند زاویه اصطکاک داخلی (ϕ) و مقاومت چسبندگی (C)، معیار شکست دارای انطباق خوبی بر نتایج حاصل شد. این معیار جامع و جدید خطی در عین حال ساده و مستدل می‌تواند به سهم خود به تحلیل پایداری صحیح سازه‌های سنگی مورد استفاده کمک نماید. همچنین معیار شکست خطی مگی-کولمب (رابطه خطی بین τ_{oct} و $\sigma_{m,2}$) نیز بر نتایج انطباق خوبی نشان داد. معیارهای شکست خطی به علت داشتن مقدار پارامتر ثابت خط که به عنوان تابعی از ویژگی مکانیکی مقاومت چسبندگی و زاویه اصطکاک داخلی است، ترجیح داده می‌شوند.

کلمات کلیدی

معیار شکست سه محوری واقعی، تنش برشی، عمودی، هشت وجهی، سنگ.

^{*} نویسنده مسئول و عهده دار مکاتبات Email: h.moomivand@urmia.ac.ir

۱- مقدمه

در این تحقیق به صورتی بنیادی معیارهای شکست سه محوری که مهم‌تراند با استفاده از ۱۲ گروه مختلف نتایج حاصل از آزمایش مقاومت فشاری سه محوری واقعی سنگ‌های گرانیت، مونزونیت، آمفیبولیت، آندزیت، دولومیت، آهک، ماسه‌سنگ، تراکیت، مرمر و شیل به سبک جدید و جامعی تجزیه و تحلیل شده‌اند. با صرف زمان طولانی و تحلیل حجیم داده‌ها در هر مرحله از بررسی کلیه ۱۲ گروه نتایج برای سنگ‌های مختلف و روابط تحلیل شده مربوط به آن‌ها در یک شکل آورده شده است. این باعث می‌شود تاثیر تنش عمودی هشت وجهی (σ_{oct}) بر مقاومت برشی هشت وجهی (τ_{oct}) برای نتایج سنگ‌های مختلف یک جا و به راحتی برای اولین بار با هم مقایسه شوند. در نهایت با تحلیل مدل‌های مختلف می‌توان معیارهای شکست مستدل و منطبق بر نتایج متعدد را طوری بدست آورد که بین پارامترهای آن‌ها و ویژگی‌های مکانیکی مهم رابطه صحیح و کاربردی حاصل شود.

۲- معیار شکست سنگ تحت تنش‌های سه محوری واقعی

در معیار شکست سنگ سالم تحت تنش‌های سه محوری واقعی سه تانسور تنش اصلی حداکثر، متوسط و حداقل برابر نیستند ($\sigma_1 > \sigma_2 > \sigma_3$). چنین معیارهایی به صورت رابطه بین تنش برشی هشت وجهی (τ_{oct}) و تنش عمودی هشت وجهی (σ_{oct}) هستند.

$$\tau_{oct} = f(\sigma_{oct}) \quad (1)$$

$$\sigma_{oct} = \frac{\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3}{3} = \frac{I_1}{3} \quad (2)$$

$$\tau_{oct} = \frac{1}{3} \sqrt{(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2} \quad (3)$$

که در آن I_1 اولین تغییرناپذیر است.

معیارهای شکست تنش سه محوری واقعی متعددی برای اجسام جامد همچون فلزات و سنگ رایج شده‌اند. از مرسوم‌ترین آن‌ها که در مکانیک سنگ به ویژه در تحلیل پایداری چاهای نفت استفاده می‌شوند می‌توان معیارهای تسلیم وِن مایرز [۱]، دراکر و پراگر [۲]، میورل [۳] و مگی-کولمب را نام برد [۹]، [۱۲]، [۱۰].

معیار وِن مایرز: این معیار با استفاده از تغییرناپذیر دوم تنش انحرافی (J_2) رایج شده است [۱]. در این معیار وقتی که J_2 به مقدار بحرانی ($\sigma_c^2/3$) برسد، جسم شروع به تسلیم

معیارهای شکست اجسام جامد تحت تنش سه محوری واقعی عموماً به صورت رابطه بین تنش عمودی هشت وجهی (σ_{oct}) و تنش برشی هشت وجهی (τ_{oct}) رایج شده‌اند [۵-۱]. رایج برخی از چنین معیارهایی مانند وِن مایرز [۱] سابقه طولانی داشته و برای بررسی شکست اجسام جامد از جمله فلزات بیشتر مورد استفاده قرار گرفته است. از این معیارها در محیط‌های سنگی برای تحلیل پایداری چاه‌های نفت و مغارهای ذخیره‌سازی زیرزمینی استفاده می‌شود. تحقیقات متعددی در مورد مدل‌های تحلیل پایداری چاه‌های نفت به عمل آمده است [۸-۶]. در کلیه مدل‌ها عموماً چاه را به صورت یک شکل مدور تحت میدان تنش‌های در برگیرنده در نظر گرفته‌اند. حداقل فشار سیال حفاری با تغییر در دانسیته گل حفاری با توجه به مقدار تنش‌های اطراف چاه و مقاومت سنگ در برگیرنده تعیین می‌شود. یک روش ارزیابی و مقایسه معیارهای شکست تحلیل پایداری در یک شرایط ژئومکانیکی ثابت و استفاده از فشار گل حفاری است. توسعه فناوری‌های اخیر در بررسی پایداری چاه‌های نفت نشان می‌دهد که بیشتر معیارهای شکست سه محوری برآورد درستی از مقاومت سنگ را نشان نمی‌دهند [۹]. حداقل دانسیته گل مصرفی استفاده شده در عمل برای تعدیل تنش در دیواره چاه در سه میدان نفتی، تفاوت قابل توجهی با مقدار پیش‌بینی شده دانسیته گل با استفاده برخی معیارهای شکست سه محوری نشان می‌دهد. این تفاوت به ویژه برای استفاده از معیارهای وِن مایرز [۱] و دراکر و پراگر [۲] به ترتیب تا ۶۴ و ۵۷ درصد حاصل شده است [۹]. ابتدا برخی از معیارهای شکست مقاومت فشاری سه محوری واقعی برای بررسی شکست در محیط غیرسنگی رایج شده‌اند. استفاده از چنین معیارهایی برای محیط سنگی نیاز به بازنگری جدی دارد.

تحلیل‌های متعددی روی معیارهای شکست سه محوری واقعی به عمل آمده و برخی روی مدل متفاوتی نسبت به دیگری تاکید کرده‌اند [۵، ۱۰، ۱۱]. در بیشتر تحلیل‌های انجام شده مانند هیمسون [۵] نه تنها تعداد گروه‌های نتایج اندک بوده بلکه هیچگونه رابطه‌ای بین پارامترهای معیار شکست (ثابت‌ها، ضرایب و توان‌ها) با سایر ویژگی‌های سنگ به صورت کمی وجود ندارد. تاکنون معیار شکست جامع و مستدلی به صورت رابطه بین تنش برشی هشت وجهی (τ_{oct}) و تنش عمودی هشت وجهی (σ_{oct}) برای سنگ رایج نشده است.

می‌کند.

ب- دراکر و پراگر محاطی:

$$k = \frac{\sqrt{3}\sigma_{ci} \cos \phi}{\sqrt{q}(3 - \sin \phi)} \quad (12)$$

$$J_2 = \frac{1}{6}(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2 = \frac{\sigma_{ci}^2}{3} \quad (4)$$

$$\alpha = \frac{6 \sin \phi}{\sqrt{3}(3 - \sin \phi)} \quad (13)$$

$$\sqrt{(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2} = \sqrt{2}\sigma_{ci} \quad (5)$$

در این معیار وقتی ضریب α برابر صفر شود، شبیه معیار ون‌مایرز [۱] می‌گردد.

$$\sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2 - \sigma_1\sigma_2 - \sigma_2\sigma_3 - \sigma_1\sigma_3} = \sigma_{ci} \quad (6)$$

معیار تسلیم میورل: این معیار بسط تئوری گریفیت در فضای سه بعدی و به صورت رابطه ۱۴ است [۳].

$$\tau_{oct} = \frac{\sqrt{2}}{3}\sigma_{ci} \quad (7)$$

$$\tau_{oct}^2 = 8\sigma_t\sigma_{oct} \quad (14)$$

تنش برشی در این معیار از یک سنگ به سنگ دیگر تنها با تغییر در مقاومت فشاری یک محوری تغییر می‌کند و $\sqrt{2}/3$ برابر آن است و برای یک سنگ خاص با افزایش تنش‌های فشاری تنش برشی دارای مقدار ثابتی است. نکته قابل توجه این است که چنین موضوعی در سنگ نمی‌تواند صدق نماید.

$$(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2 = 24\sigma_t(\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3) \quad (15)$$

معیار دراکر و پراگر: این معیار تعمیم یافته معیار ون‌مایرز و به صورت رابطه خطی بین ریشه دوم تغییرناپذیر دوم تنش انحرافی ($\sqrt{J_2}$) و اولین تغییرناپذیر (I_1) یا همان تنش عمودی (σ_{oct}) است [۲].

تغییر در ضریب این معیار تنها با تغییر در مقاومت کششی سنگ است.

$$\sqrt{J_2} = k + \alpha I_1 \quad (8)$$

معیار مگی-کولمب: مگی [۴] نشان داد که صفحه شکست در امتداد تنش اصلی متوسط اتفاق می‌افتد و مشاهدات بعدی نیز آن را تأیید نمود [۱۳-۱۵]. زاویه بین صفحه شکست و تنش اصلی حداقل با افزایش تنش اصلی حداقل کاهش و با افزایش تنش متوسط افزایش می‌یابد. در کل زاویه شکست با افزایش تنش عمودی اوکتاهدرال (σ_{oct}) کاهش می‌یابد [۱۶]. مگی [۴] با جایگزینی $\sigma_{m,2}$ (میانگین تنش اصلی حداکثر و حداقل) به جای σ_{oct} ، معیار شکست زیر را به صورت رابطه بین τ_{oc} و $\sigma_{m,2}$ ارائه نمود.

$$\tau_{oct} = f(\sigma_{m,2}) \quad (16)$$

که در آن:
k مقدار ثابت
 α ضریب

$$\sigma_{m,2} = \frac{\sigma_1 + \sigma_3}{2} \quad (17)$$

این معیار زمانی ارایه شد که اولین دستگاه اندازه‌گیری مقاومت فشاری سه محوری واقعی ساخته نشده بود. ضریب و مقدار ثابت این معیار تابع زاویه اصطکاک داخلی (ϕ) مقاومت فشاری یک محوری بوده و در دو حالت دراکر و پراگر محیطی (محیط بر سطح تسلیم مور-کولمب در صفحه هشت وجهی) و محاطی به صورت زیر تعیین می‌شود:

الف- دراکر و پراگر محیطی:

$$k = \frac{3\sigma_{ci} \cos \phi}{2\sqrt{q}\sqrt{9 + 3\sin^2 \phi}} \quad (9)$$

العجمی^۵ [۱۷] معیار شکست مقاومت فشاری سه محوری واقعی تعداد ۷ گروه نتایج مورد بررسی قرار داد. العجمی و زیمرمن^۶ [۱۱] و العجمی [۱۷] با استفاده از میانگین تنش اصلی حداکثر و حداقل ($\sigma_{m,2} = \frac{\sigma_1 + \sigma_3}{2}$) به جای تنش عمودی هشت وجهی (σ_{oct}) و رابطه معیار خطی دو بعدی کولمب و حل تنش برشی هشت وجهی (τ_{oct}) بر اساس شرایط $\sigma_3 = \sigma_2$ ، معیار شکست تعمیم یافته تحت عنوان مگی-کولمب به صورت زیر ارائه نمودند.

$$\alpha = \frac{3 \sin \phi}{\sqrt{9 + 3 \sin^2 \phi}} \quad (10)$$

$$\tau_{oct} = a + b\sigma_{m,2} \quad (18)$$

$$q = \frac{1 + \sin \phi}{1 - \sin \phi} \quad (11)$$

فشاری سه محوری واقعی سنگ ندارد. نکته قابل توجه این که تاکنون اشاره نشده است که چرا و به چه دلیلی از این معیار برای سازه‌های سنگی استفاده شده است.

در معیار تسلیم میورل [۳] می‌توان τ_{oct} را به عنوان تابعی از σ_{oct} به شکل رابطه ۲۴ نوشت.

$$\tau_{oct} = \sqrt{8\sigma_t\sigma_{oct}} = \sqrt{8\sigma_t}\sqrt{\sigma_{oct}} \quad (24)$$

که در آن σ_{oct} دارای توان ثابت ۰٫۵ است.

در مراحل بعد این تحقیق نشان داده می‌شود که در رابطه غیرخطی که بر ۱۲ گروه نتایج انطباق دارد، به طور متوسط σ_{oct} توان ۰٫۷ دارد، در نتیجه رابطه تنش برشی از درجه دو (τ_{oct}^2) و تنش عمودی (σ_{oct}) بر نتایج انطباق ندارد.

تعداد ۱۲ گروه نتایج آزمایش مقاومت فشاری سه محوری واقعی مورد استفاده در این تحقیق از انواع سنگ‌ها شامل: گرانیت‌های اینادا^{۱۱} و وسترلی^{۱۲} [۱۵، ۱۸]، مونزونیت اُریکاب^{۱۳} [۱۸]، آمفیبولیت کی‌تی‌بی^{۱۴} [۱۰، ۱۵]، آندزیت مَنزورو^{۱۵}، دولومیت دونهام^{۱۶}، آهک اسلنهورفن^{۱۷}، تراکیت مایزووهو^{۱۸}، مرمر یاماگوچی^{۱۹} [۱۸]، مرمر دانه درشت متراکم^{۲۰} [۱۹، ۲۰]، ماسه سنگ شیراهاما^{۲۱} [۱۴] و شیل یوبری^{۲۲} [۱۷] هستند.

رابطه بین τ_{oct} و σ_{oct} به صورت تابع توانی (رابطه ۲۲) با توان و ضریب متغیر برای هر یک از ۱۲ گروه نتایج حاصل از آزمایش مقاومت فشاری سه محوری واقعی سنگ‌های مختلف با استفاده برنامه برازش بر داده‌ها^{۲۳} [۲۱] مورد تجزیه و تحلیل قرار گرفت. کلیه داده‌های ۱۲ گروه مختلف و ۱۲ رابطه برازش بر آن‌ها در شکل ۱ نشان داده شده است. رابطه تابع توانی با توان و ضریب متغیر برای هر یک از گروه داده‌ها انطباق خوبی نشان داد (شکل ۱). همچنین نتایج با رابطه σ_{oct} و $\sigma_{m,2}$ به صورت تابع توانی (رابطه ۲۳) با توان و ضریب متغیر نیز تحلیل شد و ضریب همبستگی بهتری برای هر یک از گروه‌های نتایج حاصل شد (شکل ۲). اما ضرایب A' و A و توان‌های n' و n از یک نوع سنگ به سنگ دیگر متفاوت هستند. با تغییر ضرایب A' و A و توان‌های n' و n به صورت ناهمگون تغییر یافته و قانونمند نیستند. با چنین ناهمگونی در ضرایب و توان‌ها نمی‌توان نشان داد که ضرایب و توان‌های معادلات تابع چه ویژگی‌هایی از سنگ هستند.

$$\frac{1}{3}\sqrt{(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2} = a + b\frac{\sigma_1 + \sigma_3}{2} \quad (19)$$

$$a = \frac{2\sqrt{2}}{3} C \cos \phi = \frac{2\sqrt{2}}{3} \left(\frac{\sigma_{ci}}{1+q} \right) \quad (20)$$

$$b = \frac{2\sqrt{2}}{3} \sin \phi = \frac{2\sqrt{2}}{3} \left(\frac{1-q}{1+q} \right) \quad (21)$$

همیسون^۲ [۵] اشاره نمود که معیار خطی مگی-کولمب که با استفاده از ساده سازی و روابط مور-کلمب به جای تنش‌های سه محوری واقعی بکار گرفته شده است، مبین معیار شکست سه محوری واقعی نیست، هم‌چنان که با افزایش تنش متوسط زوایه شکست تا ۲۰ درجه افزایش می‌یابد [۱۶]. رابطه بین τ_{oct} و σ_{oct} و همچنین رابطه بین τ_{oct} و $\sigma_{m,2}$ به شکل تابع توانی انطباق خوبی بر چند گروه نتایج آزمایش به شرح زیر نشان داده‌است [۵، ۱۶، ۱۷].

$$\tau_{oct} = A\sigma_{oct}^n \quad (22)$$

$$\tau_{oct} = A'\sigma_{m,2}^{n'} \quad (23)$$

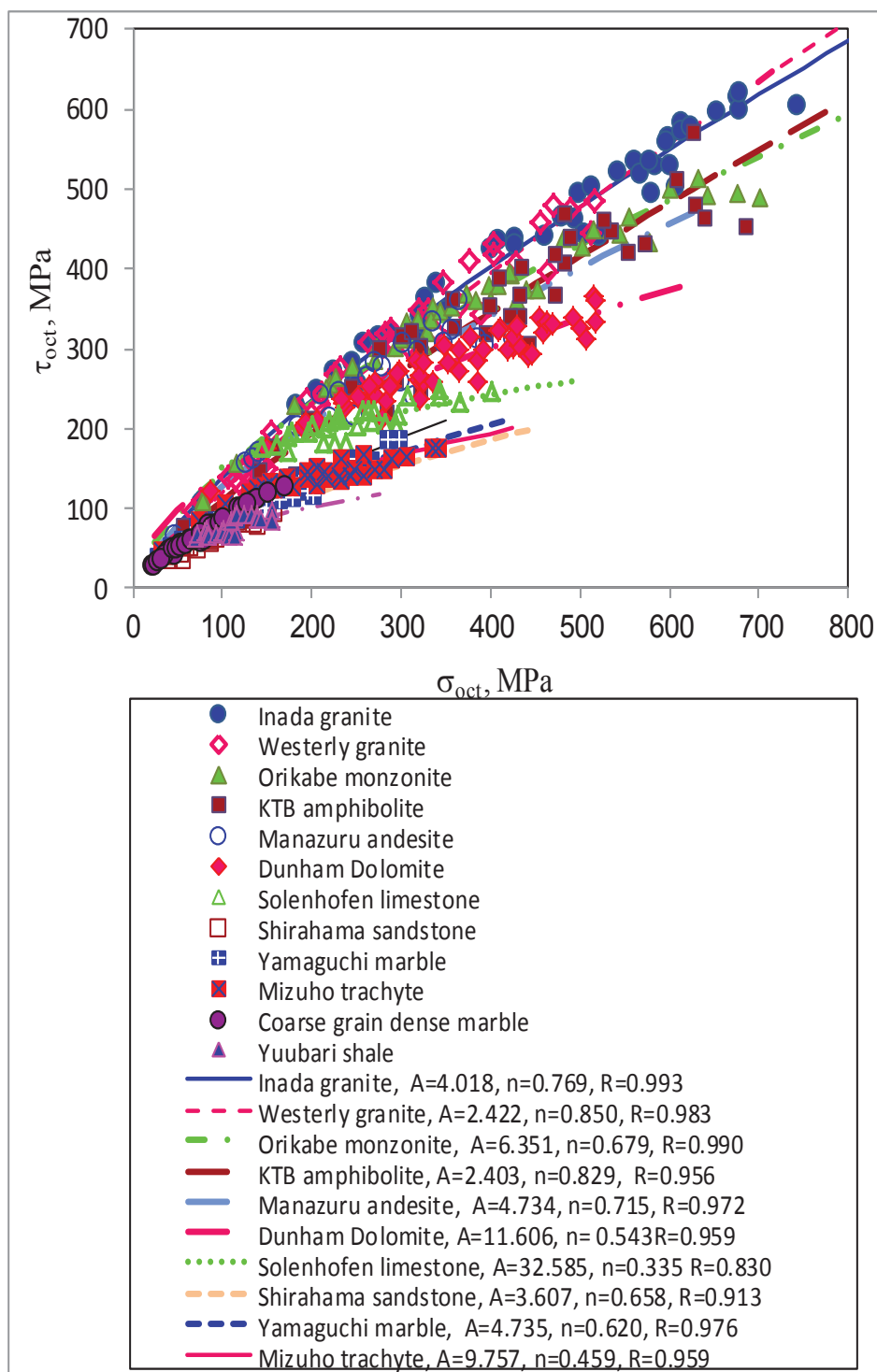
که در آن:

A' و A ضریب بوده و n' و n توان هستند.

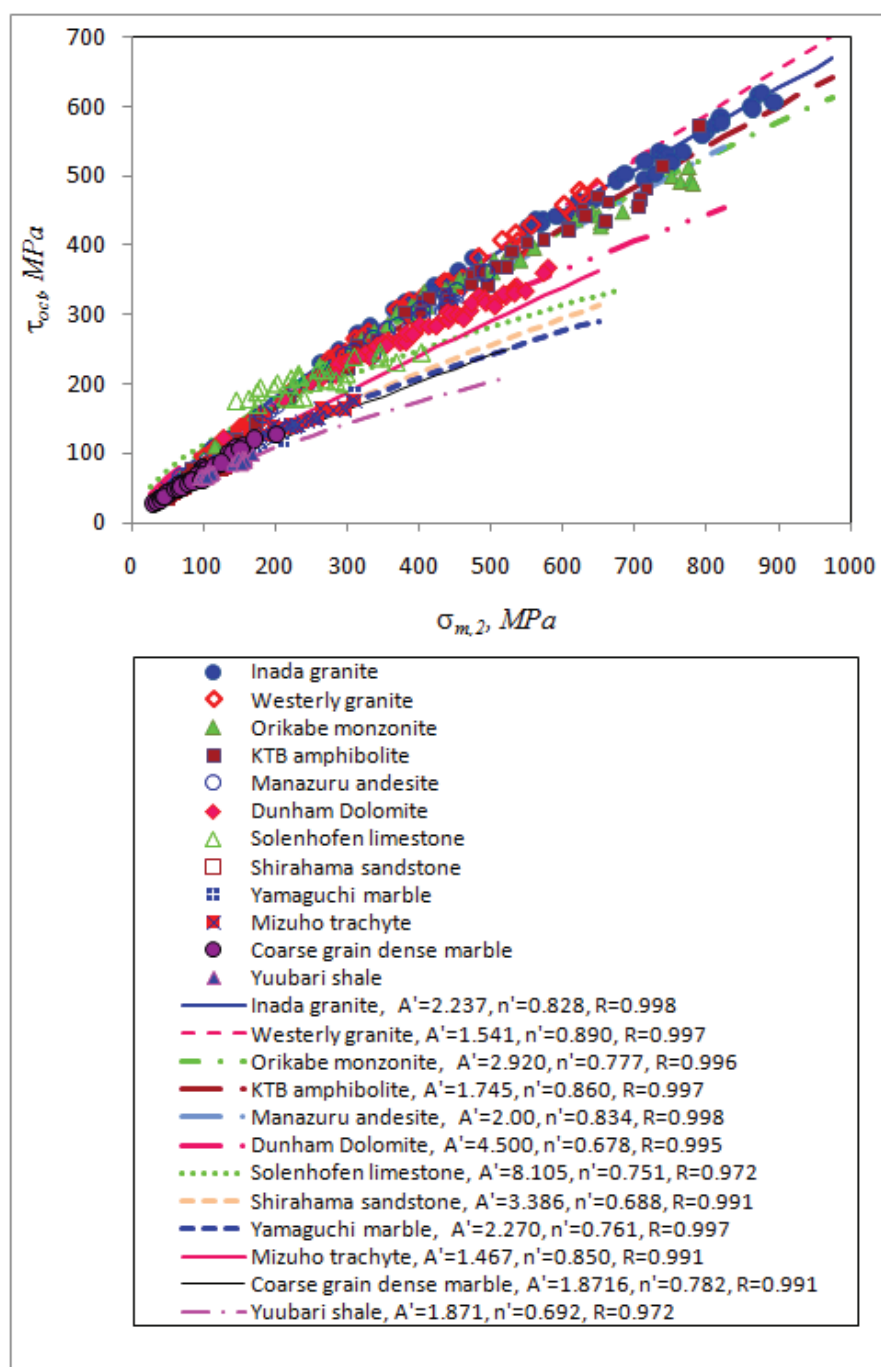
همچنین همیسون [۵] نشان داد که رابطه ۲۳ انطباق بهتری بر سه گروه نتایج سنگ‌های دولومیت^۸، آمفیبولیت^۹ و لای^{۱۰} دارد. اما ضرایب A' و A و توان‌های n' و n در رابطه ارایه شده توسط همیسون [۵] فقط اعداد ثابتی بوده، هیچگونه رابطه‌ای با ویژگی‌های مکانیکی سنگ مانند زاویه اصطکاک داخلی (ϕ) و مقاومت چسبندگی (C) نداشته و از تعداد سه گروه نتایج حاصل شده‌اند.

۳- تحلیل کلیدی معیار شکست سه محوری

معیارهای شکست ون‌مایرز [۱] و دراکر و پراگر [۲] بیشتر مربوط به اجسامی همچون فلزات و خاک در شرایطی که جسم به حالت تسلیم و شکل‌پذیر رسیده باشد، ارایه شده‌اند. این در صورتی است که سنگ یک ماده شکننده است و همچنین رفتار مکانیکی و مکانیزم شکست متفاوتی دارد. در معیار ون‌مایرز مقاومت برشی (τ_{oct}) از مقدار ثابت $\frac{\sqrt{3}\sigma_c}{2}$ تجاوز نمی‌کند و مقدار آن تنها با تغییر در مقاومت فشاری یک محوری تغییر می‌یابد. این در صورتی است که برای یک نوع سنگ دارای مقاومت فشاری یک محوری معین، با افزایش سطح تنش‌های سه محوری، تنش‌های عمودی (σ_{oct}) و برشی (τ_{oct}) افزایش می‌یابند. این معیار انطباقی بر نتایج اندازه‌گیری شده مقاومت



شکل ۱: رابطه بین σ_{oct} و τ_{oct} به صورت تابع توانی دارای توان (n) و ضریب (A) متغیر برای نتایج حاصل از آزمایش مقاومت فشاری سه محوری واقعی روی سنگ‌های گرانیت، مونزونیت، آمفیبولیت، آندزیت، دولومیت، آهک، ماسه سنگ، تراکیت، مرمر و شیل همراه با ضریب همبستگی (R)



شکل ۲: رابطه بین τ_{oct} و $\sigma_{m,2}$ به صورت تابع توانی دارای توان (n') و ضریب (A') متغیر برای نتایج حاصل از آزمایش مقاومت فشاری سه محوری واقعی روی سنگ‌های گرانیت، مونزونیت، آمفیبولیت، آندزیت، دولومیت، آهک، ماسه سنگ، تراکیت، مرمر و شیل همراه با ضریب همبستگی (R)

مقاومت فشاری یک محوری نتایج (σ_{ci}) در رابطه (۲۷) تعیین شد.

رابطه بین هر یک از ضرایب A و A' به ترتیب با پارامترهای ϕ ، m_1 و σ_{ci} مورد بررسی قرار گرفت. نتیجه نشان می‌دهد که همبستگی قابل قبولی بین آن‌ها وجود ندارد (شکل‌های ۵، ۶، ۷). همچنین رابطه‌های $\tau_{oct} = A\sigma_{ci}^n$ و $\tau_{oct} = A'\sigma_{m,2}^n$ شکل مناسبی ندارند زیرا دارای دو پارامتر متغیر ضریب و توان پیچیده هستند. بنابر روابط (۲۲) و (۲۳) ارزیابی شده توسط العجمی [۱۷]، هیمسون و روندیکی [۱۶] و هیمسون [۵] شکل مناسبی از معیار شکست را نشان ندادند و همچنین کاربردی نیستند.

رابطه بین τ_{oct} و σ_{oct} به صورت تابع توانی دارای مقدار توان (n) یکسان برای کلیه گروه‌ها و تعیین ضریب متغیر آن برای گروه‌های نتایج با استفاده از برنامه برازش داده‌ها در حالت‌های مختلف مورد تحلیل قرار گرفت. در نهایت توان ۰٫۷ که بر گروه‌های مختلف نتایج انطباق بهتری نشان داد، بدست آمد. کلیه داده‌های ۱۲ گروه مختلف و ۱۲ رابطه برازش بر آن‌ها در شکل ۸ نشان داده شده است. رابطه بین τ_{oct} و σ_{oct} که دارای توان ثابت بوده و تنها ضریب متغیر دارد با ضریب همبستگی قابل قبولی با استفاده از رابطه ۲۹ بدست آمد (شکل ۸).

$$\tau_{oct} = B\sigma_{oct}^{0.7} \quad (29)$$

که در آن B ضریبی است که از یک نوع سنگ به سنگ دیگری تغییر می‌کند.

به روش مشابه رابطه بین τ_{oct} و $\sigma_{m,2}$ نیز مورد تجزیه و تحلیل قرار گرفت و در نهایت رابطه تابع توانی با ضریب همبستگی بهتر به صورت زیر حاصل شد (شکل ۹).

$$\tau_{oct} = B'\sigma_{m,2}^{0.75} \quad (30)$$

که در آن B' ضریبی است که از یک نوع سنگ به سنگ دیگری تغییر می‌کند.

برای یافتن رابطه بین ضرایب معیارهای شکست غیرخطی جدید به صورت تابع توانی (معادلات، ۲۹ و ۳۰) و ویژگی‌های مکانیکی سنگ، رابطه بین هر یک از ضرایب B و B' با پارامترهای ϕ ، m_1 و σ_{ci} مورد بررسی قرار گرفت. همبستگی قابل قبولی بین هر یک از ضرایب B و B' و پارامترهای ϕ ، m_1 و σ_{ci} حاصل شد (شکل‌های ۱۰، ۱۱ و ۱۲). هر یک از ضرایب B و B' با افزایش ϕ ، m_1 و σ_{ci} افزایش می‌یابد. پارامترهای ϕ ،

برای تحلیل ضرایب، ثابت‌ها و توان‌های معیار شکست مقاومت برشی تنش هشت وجهی (τ_{oct}) به عنوان تابعی از تنش عمودی هشت وجهی (σ_{oct}) ، به ویژگی‌هایی مانند زاویه اصطکاک داخلی (ϕ) و مقاومت چسبندگی (C) در معیار شکست مور-کولمب نیاز است. نتایج آزمایش مقاومت فشاری سه محوری مرسوم که دو تنش اصلی حداقل و متوسط برابرند نیز برای ۱۲ گروه نتایج وجود داشت. پارامترهای مقاومت فشاری سه محوری در معیار مور-کولمب و همچنین هوک و همکاران [۲۲] در هر یک از گروه‌های زوج داده‌های تنش اصلی حداکثر (σ_1) و تنش اصلی حداقل (σ_3) با استفاده از رابطه‌های ۲۵ تا ۲۸ تعیین شد.

$$\sigma_1 = \sigma_{ci} + \frac{1 + \sin \phi}{1 - \sin \phi} \sigma_3 = \sigma_{ci} + q\sigma_3 \quad \text{معیار مور-کولمب} \quad (25)$$

$$\phi = \sin^{-1} \frac{q-1}{q+1} \quad (26)$$

$$C = \frac{\sigma_{ci}(1 - \sin \phi)}{2 \cos \phi} \quad (27)$$

$$\sigma_1 = \sigma_3 + \sigma_{ci} \sqrt{m_1 \frac{\sigma_3}{\sigma_{ci}} + 1} \quad \text{معیار هوک و همکاران [22]} \quad (28)$$

که در آن:

σ_1 تنش اصلی حداکثر به MPa

σ_3 تنش اصلی حداقل به MPa

σ_{ci} مقاومت فشاری یک محوری به MPa

q ضریب مقاومت فشاری سه محوری در معیار شکست مور-کولمب؛

ϕ زاویه اصطکاک داخلی به درجه؛

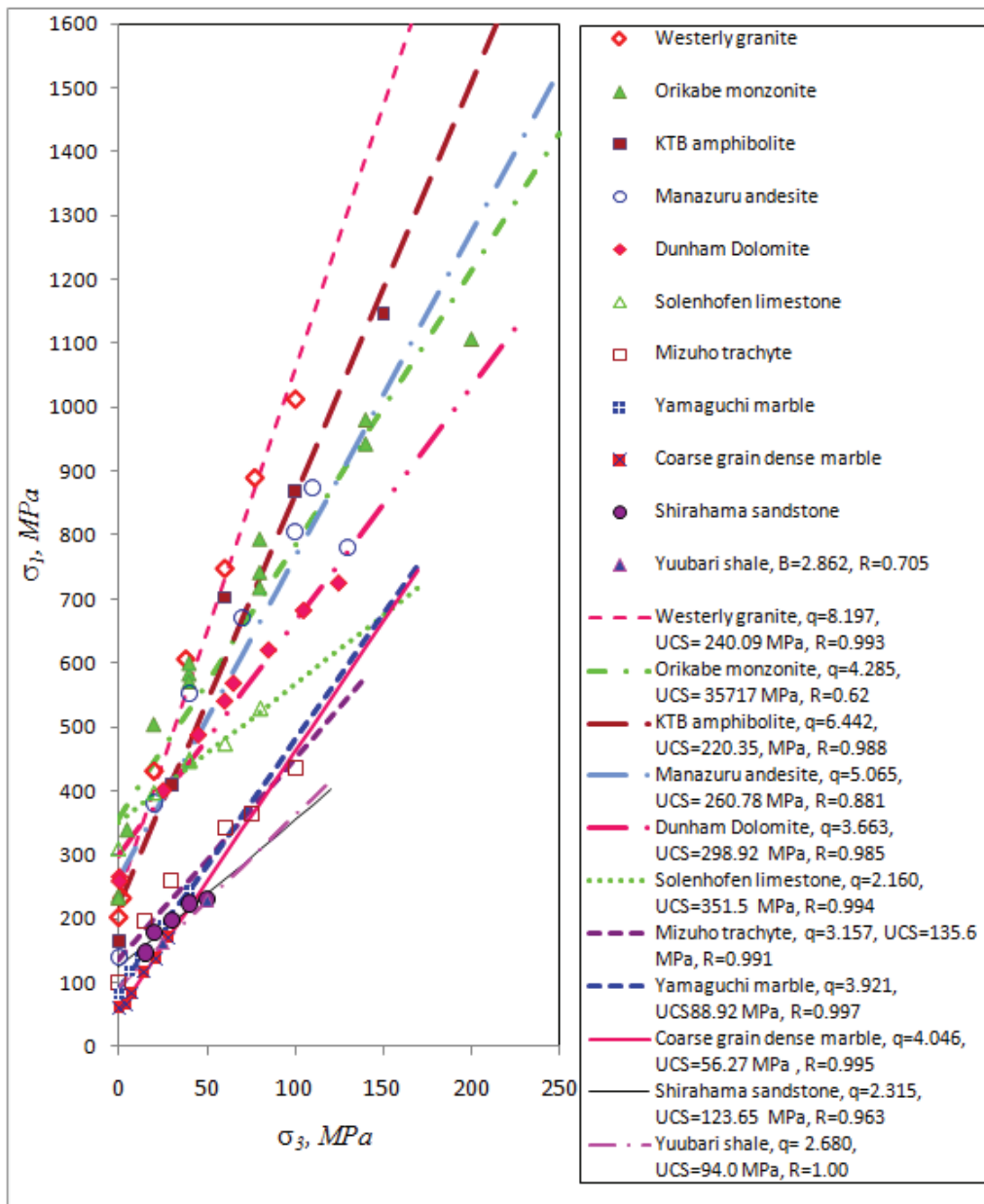
C مقاومت چسبندگی به MPa؛

m_1 ضریب مقاومت فشاری سه محوری در معیار شکست هوک و همکاران [۲۲].

با برازش معیار شکست مور-کولمب بر هر یک از گروه‌های نتایج، ضریب مقاومت فشاری سه محوری این معیار (q) تعیین شد (شکل ۳). همچنین با برازش معیار شکست هوک و همکاران [۲۲] بر هر یک از گروه نتایج، ضریب مقاومت فشاری سه محوری این معیار (m_1) نیز تعیین شد (شکل ۴). مقدار زاویه اصطکاک داخلی (ϕ) در هر یک از گروه‌های نتایج با استفاده از ضریب مقاومت فشاری سه محوری در معیار شکست مور-کولمب (رابطه ۳۰) بدست آمد. همچنین مقاومت چسبندگی (C) نیز با استفاده از زاویه اصطکاک داخلی (ϕ) و

متعددی نیز برای برآورد مقاومت فشاری یک محوری سنگ به صورت غیرمستقیم با استفاده از عدد سختی اشمیت، وزن و احد حجم و روزنه‌داری ارائه شده است [۲۳].
رابطه خطی بین ریشه دوم تغییرناپذیر دوم تنش انحرافی

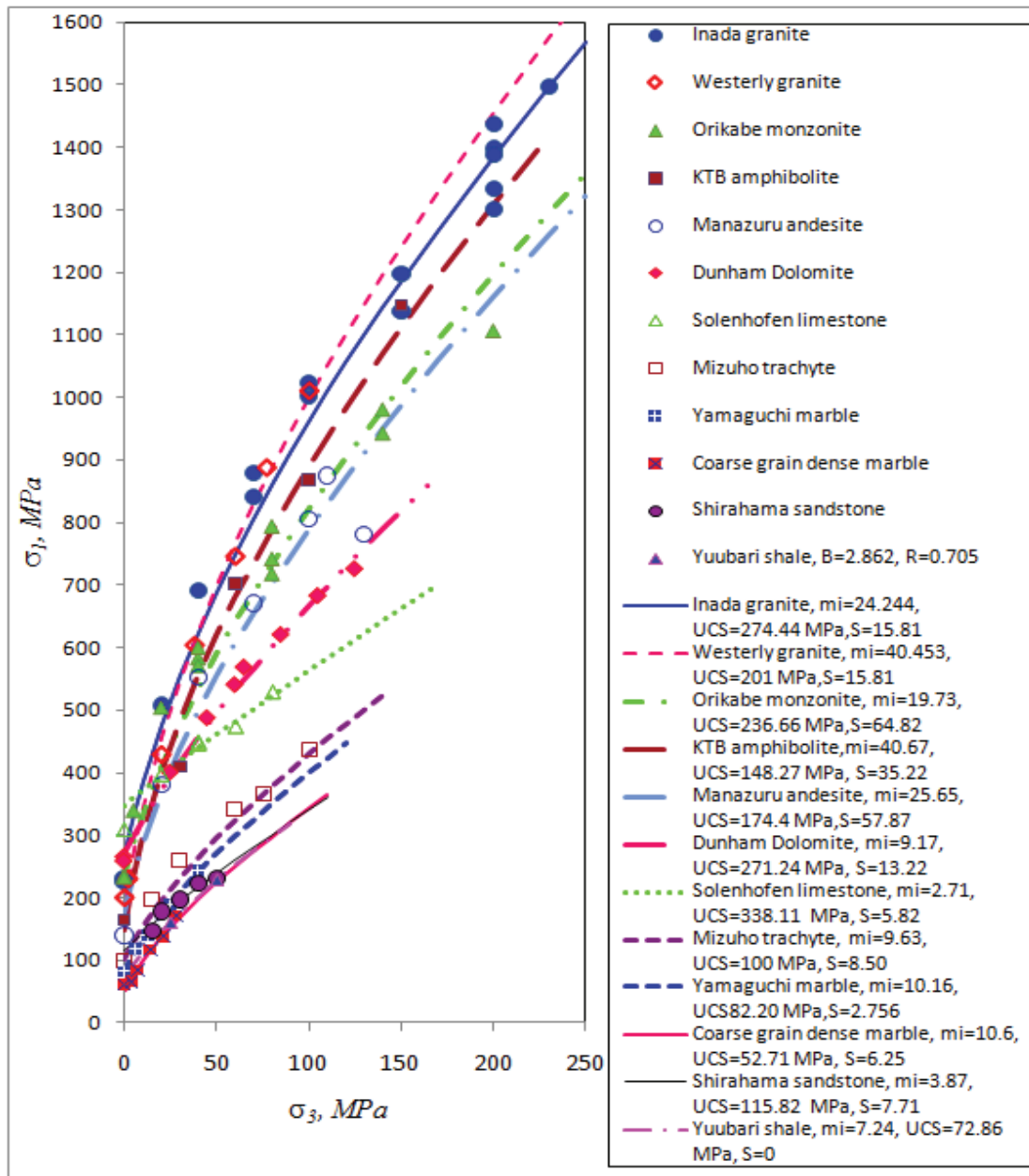
m_i و σ_{ci} با استفاده از آزمون‌های مقاومت فشاری سه محوری مرسوم و یک محوری به صورت مستقیم قابل تعیین هستند. پارامتر m_i به صورت غیرمستقیم با استفاده از جدول ارائه شده توسط هوک و همکاران [۲۲] قابل برآورد است. روش‌های



شکل ۳: معیار شکست مور-کولمب دارای ضریب مقاومت فشاری سه محوری (q) و مقاومت فشاری یک محوری (UCS) متغیر برای گروه‌های زوج داده‌های σ_3 و σ_1 سنگ‌های گرانیت، مونزونیت، آمفیبولیت، آندزیت، دولومیت، آهک، ماسه سنگ، تراکیت، مرمر و شیل همراه با ضریب همبستگی (R)

آمده نشان داد که مقدار ثابت k و ضریب α تعریف شده در معیار خطی دراکر و پراگر بر نتایج آزمایش‌های مقاومت فشاری سه محوری واقعی سنگ انطباق ندارند.

$(\sqrt{J_2} = \sqrt{3/2}\tau_{oct})$ و اولین تغییرناپذیر $(I_1 = \sigma_{oct})$ در معیار خطی دراکر و پراگر (رابطه ۸) با هر یک از ۱۲ گروه نتایج حاصل از آزمایش مقاومت فشاری سه محوری واقعی روی سنگ‌های مختلف مورد ارزیابی قرار گرفت. تحلیل به عمل



شکل ۴: معیار شکست هوک و همکاران (۱۹۹۲) دارای ضریب مقاومت فشاری سه محوری (m_i) و مقاومت فشاری یک محوری (UCS) متغیر برای زوج داده‌های σ_1 و σ_3 سنگ‌های گرانیت، مونزونیت، آمفیبولیت، آندزیت، دولومیت، آهک، ماسه سنگ، تراکیت، مرمر و شیل همراه با انحراف از معیار (S)

τ_{oct} و σ_{oct} به صورت رابطه ۳۱ است.

$$\tau_{oct} = a + m\sigma_{oct} \quad (31)$$

که در آن:

a مقدار ثابت

m یک ضریب است.

با استفاده از معیار کولمب و حل تنش برشی هشت وجهی (τ_{oct}) بر اساس شرایط $\sigma_3 = \sigma_2$ ، مقدار ثابت a در این معیار به عنوان تابعی از زاویه اصطکاک داخلی (ϕ) و مقاومت چسبندگی (C) به شرح رابطه ۳۲ تعریف شد.

$$a = \frac{2\sqrt{2}}{3} C \cos \phi = 0.943 C \cos \phi = 0.943 \left(\frac{\sigma_{ci}}{1+q} \right) \quad (32)$$

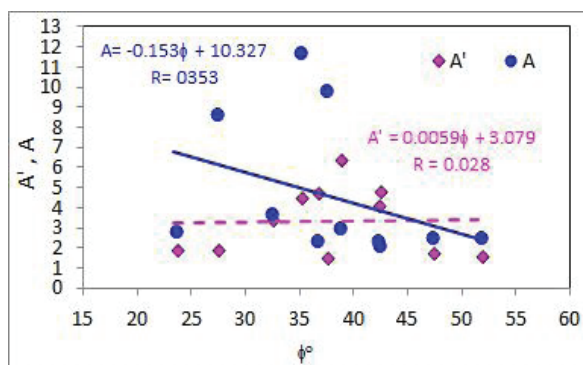
مقدار ثابت a در معادله ۳۲ با استفاده از زاویه اصطکاک داخلی (ϕ) و مقاومت چسبندگی (C) برای هر یک از ۱۲ گروه نتایج سنگ‌های مختلف تعیین شد. رابطه خطی بین τ_{oct} و σ_{oct} (معادله ۳۱) برای مقادیر ثابت و تعریف شده a با استفاده از نتایج مورد تحلیل قرار گرفت تا ضریب m برای هر گروه از نتایج از طریق بهترین برازش بر داده‌ها تعیین شود. رابطه خطی بین τ_{oct} و σ_{oct} برآزش بر داده‌ها همراه با مقادیر ثابت a و ضریب m آن برای ۱۲ گروه نتایج در شکل ۱۳ نشان داده شده است. هر یک از رابطه‌های بدست آمده به نحو مناسبی بر نتایج انطباق داشته و همبستگی قابل قبولی را نشان می‌دهد (شکل ۱۳).

رابطه خطی مگی-کلمب (رابطه بین τ_{oct} و $\sigma_{m,2}$) نیز به شیوه‌ای مشابه برای کلیه نتایج مورد تحلیل قرار گرفت. رابطه خطی مگی-کلمب (معادله ۱۸) به خوبی بر نتایج انطباق داشته و همبستگی خوبی را نشان داد (شکل ۱۴). اما در این رابطه $\sigma_{m,2}$ حاصل از میانگین تنش دو محوری حداقل و حداکثر بوده و نقش تنش متوسط دیده نمی‌شود.

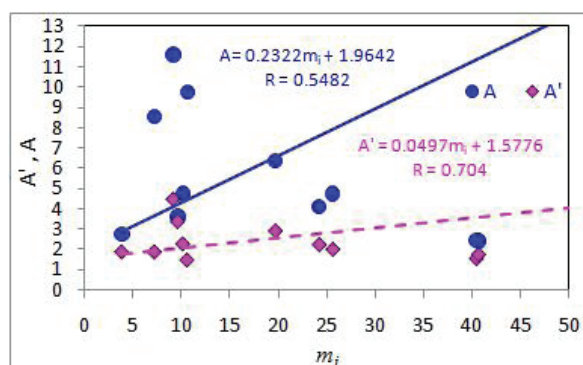
مقادیر ثابت a و ضریب m در رابطه ۳۱ از یک گروه به گروه دیگر متفاوت است (شکل ۱۳). پس از بررسی روابط متعدد بین مقدار ضرایب m در معیار شکست خطی جدید ارایه شده و پارامترهای زاویه اصطکاک داخلی (ϕ)، رابطه ۳۳ با ضریب همبستگی قابل قبولی ($R=0.903$) بدست آمد (شکل ۱۵).

$$m = \frac{2\sqrt{3}}{3} \sin \phi = \frac{2\sqrt{3}}{3} \left(\frac{1-q}{1+q} \right) = 1.154 \left(\frac{1-q}{1+q} \right) \quad (33)$$

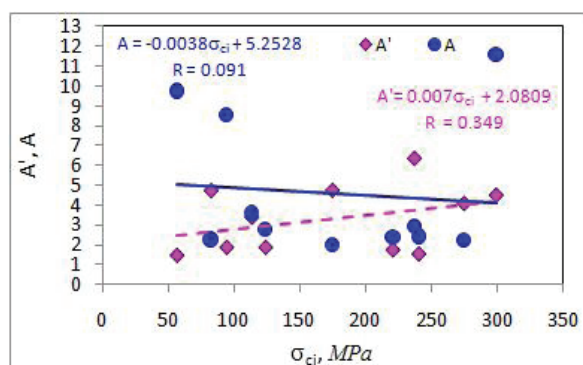
در نهایت معیار شکست جدید سه محوری واقعی به



شکل ۵: همبستگی غیر قابل قبول بین هر یک از ضرایب A و A' با پارامتر زاویه اصطکاک داخلی (ϕ) گروه‌های مختلف نتایج انواع سنگ‌ها



شکل ۶: همبستگی غیر قابل قبول بین هر یک از ضرایب A و A' با ضریب مقاومت فشاری سه محوری معیار هوک و همکاران (m_i) گروه‌های مختلف نتایج انواع سنگ‌ها



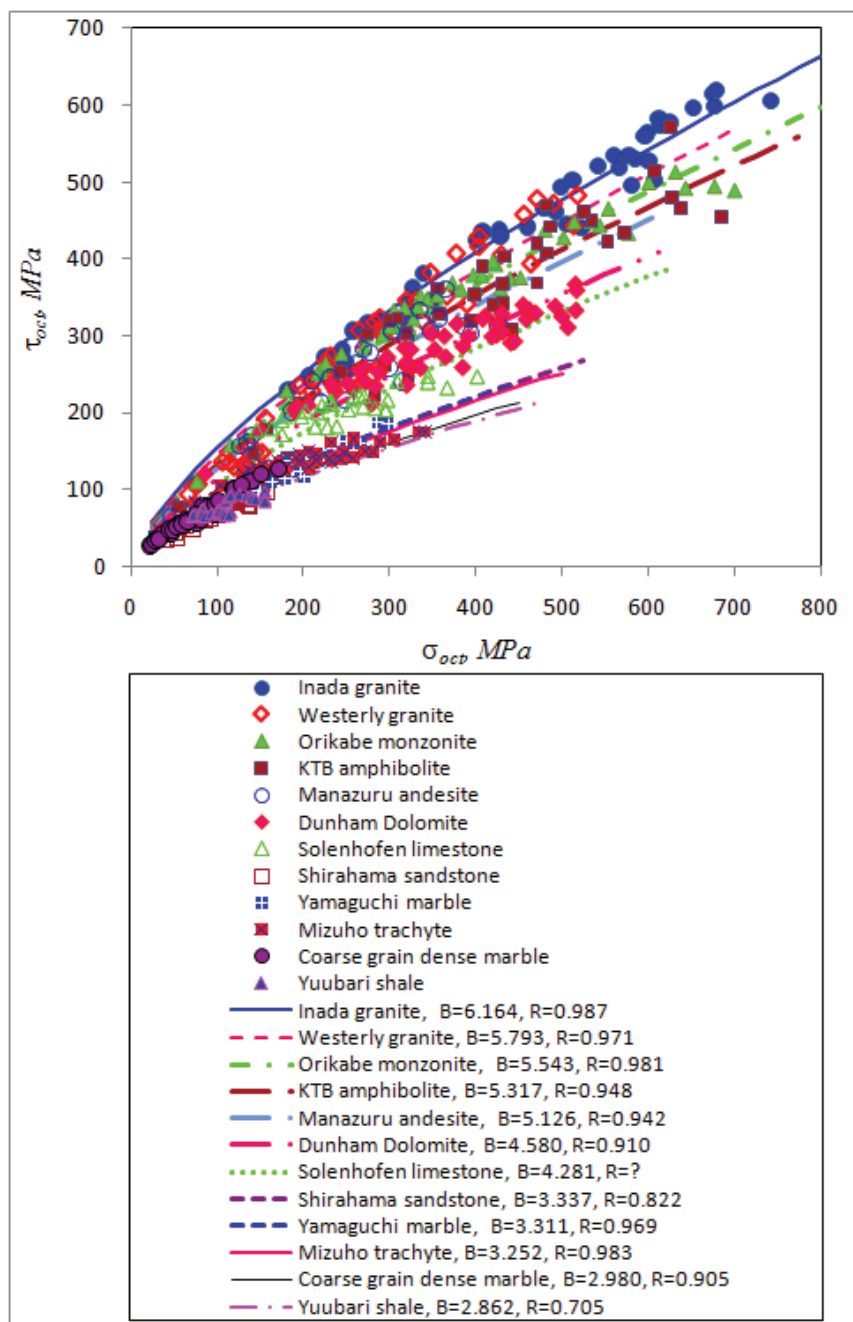
شکل ۷: همبستگی غیر قابل قبول بین هر یک از ضرایب A و A' با مقاومت فشاری یک محوری (σ_{ci}) گروه‌های مختلف نتایج انواع سنگ‌ها

وقتی تنش عمودی هشت وجهی به سمت صفر میل می‌کند، جسم تحت تنش برشی خالص قرار می‌گیرد. در تحلیل رابطه خطی بین τ_{oct} و σ_{oct} برای حالتی که $\sigma_{oct} = 0$ ، تنش برشی (τ_{oct}) دارای مقدار ثابتی است و رابطه خطی بین

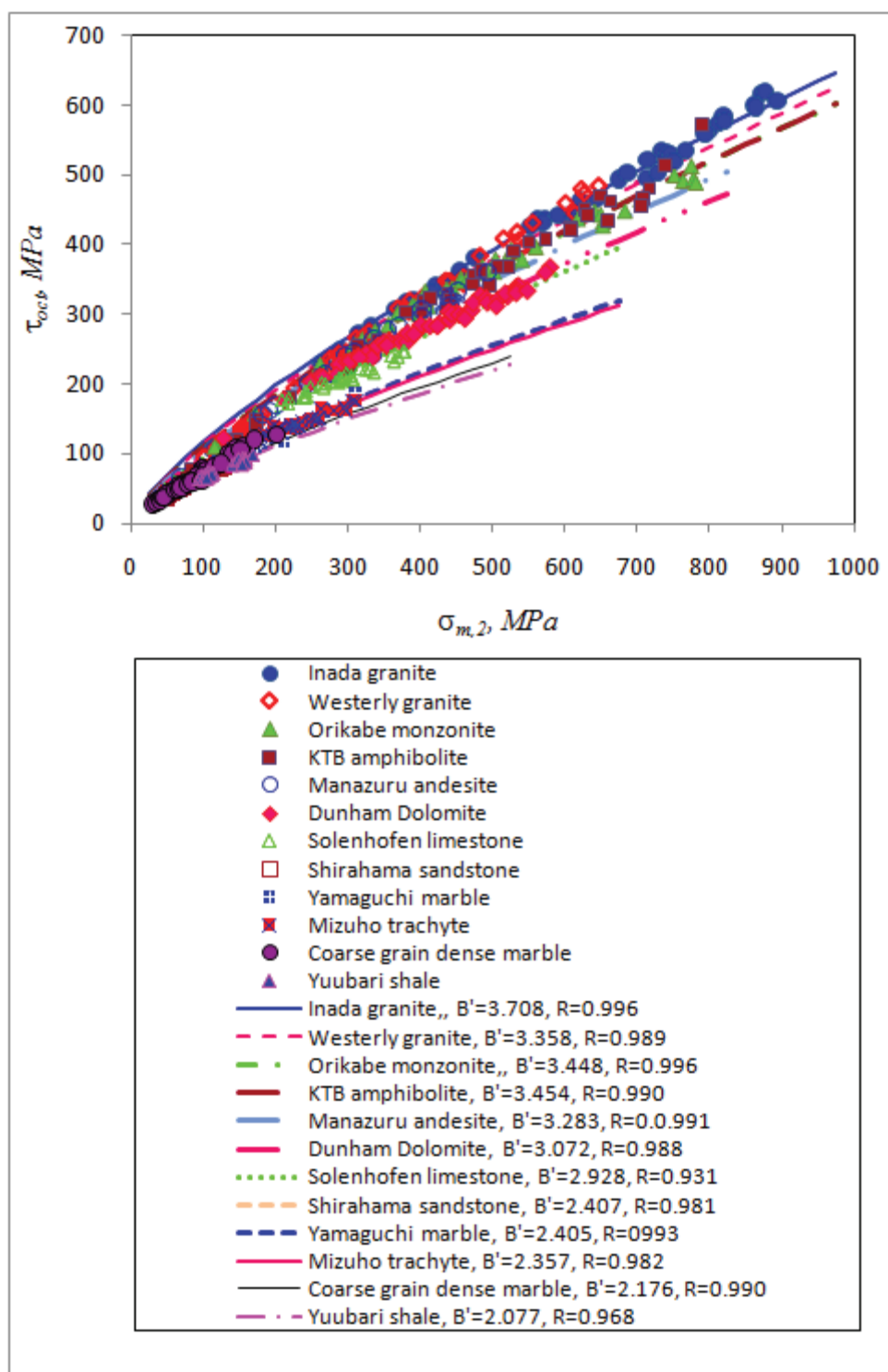
$$\tau_{oct} = \frac{2\sqrt{2}}{3} C \cos \phi + \frac{2\sqrt{3}}{3} \sin \phi \sigma_{oct} \quad (34)$$

$$\tau_{oct} = 0.943C \cos \phi + 1.154 \sin \phi \sigma_{oct} \quad (35)$$

صورت رابطه خطی بین تنش برشی هشت وجهی (τ_{oct}) و تنش عمودی هشت وجهی (σ_{oct}) به شرح رابطه‌های ۳۴ و ۳۵ خلاصه می‌شود.



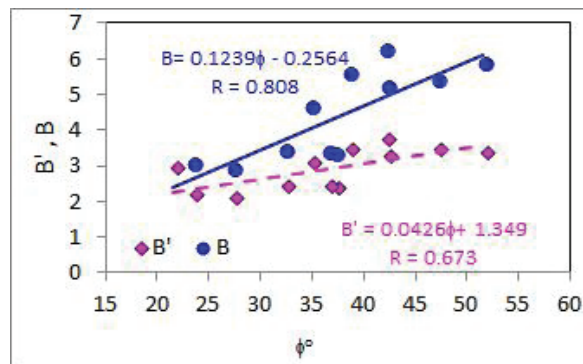
شکل ۸: معیار شکست به صورت غیرخطی (تابع توانی) رابطه بین τ_{oct} و σ_{oct} دارای توان ثابت ۰٫۷ و ضریب (B) متغیر برای نتایج حاصل از آزمایش مقاومت فشاری سه محوری واقعی روی سنگ‌های گرانیت، مونزونیت، آمفیبولیت، آندزیت، دولومیت، آهک، ماسه سنگ، تراکیت، مرمر و شیل همراه با ضریب همبستگی (R)



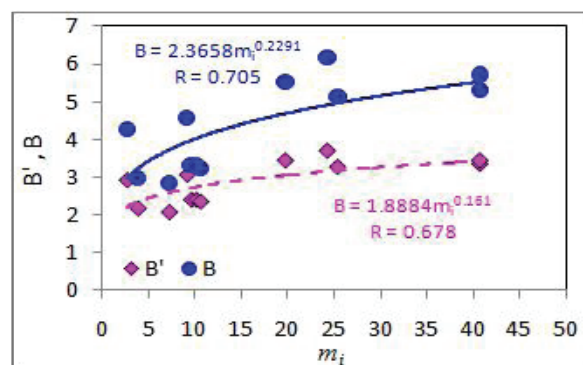
شکل ۹: معیار شکست به صورت غیرخطی (تابع توانی) رابطه بین $\sigma_{m,2}$ و τ_{oct} دارای توان ثابت ۰٫۷۵ و ضریب (B') متغیر برای نتایج حاصل از آزمایش مقاومت فشاری سه محوری واقعی روی سنگ‌های گرانیت، مونزونیت، آمفیبولیت، آندزیت، دولومیت، آهک، ماسه سنگ، تراکیت، مرمر و شیل همراه با ضریب همبستگی (R)

رابطه بین هریک از ضرایب m در معیار شکست خطی جدید ارایه شده (حاصل از برازش بر داده‌ها) و b در معیار مگی کولمب با زاویه اصطکاک داخلی (ϕ) در شکل ۱۵ نشان داده شده است. برای هریک از گروه‌های نتایج مقدار ضریب m در معیار شکست جدید بزرگتر از ضریب b در معیار مگی کولمب است و این مربوط به وجود تاثیر تنش متوسط در رابطه بین σ_{oct} و τ_{oct} است. همچنین رابطه بین هر یک از ضرایب m و b با ضریب مقاومت فشاری سه محوری در معیار شکست هوک و همکاران (m_i) و مقاومت فشاری یک محوری (σ_{ci}) در شکل‌های ۱۶ و ۱۷ نشان داده شده است. هر یک از ضرایب m و b با افزایش ϕ ، m_i و σ_{ci} افزایش می‌یابد. مقادیر ثابت a و ضرایب m و b از یک گروه به گروه دیگر متفاوت است.

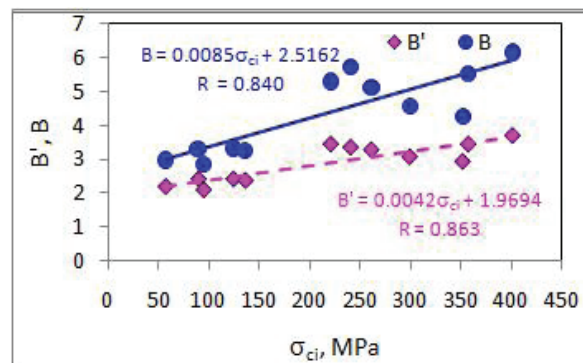
معیار شکست سه محوری واقعی به صورت رابطه خطی بین تنش برشی هشت وجهی (τ_{oct}) و تنش عمودی هشت وجهی (σ_{oct}) با استفاده از رابطه ۳۱ و مقدار ثابت a و ضریب m این معیار به ترتیب با استفاده از روابط ۳۲ و ۳۳ قابل تعیین‌اند. بعلاوه، می‌توان ضریب m را با استفاده از دو پارامتر ضریب مقاومت فشاری سه محوری در معیار شکست هوک و همکاران [۲۲] (m_i) و مقاومت فشاری یک محوری (σ_{ci}) نیز برآورد کرد (شکل‌های ۱۶ و ۱۷). معیارهای شکست خطی به علت داشتن مقدار پارامتر ثابت خط که به عنوان تابعی از ویژگی‌های مکانیکی مقاومت چسبندگی و زاویه اصطکاک داخلی است، ترجیح داده می‌شوند.



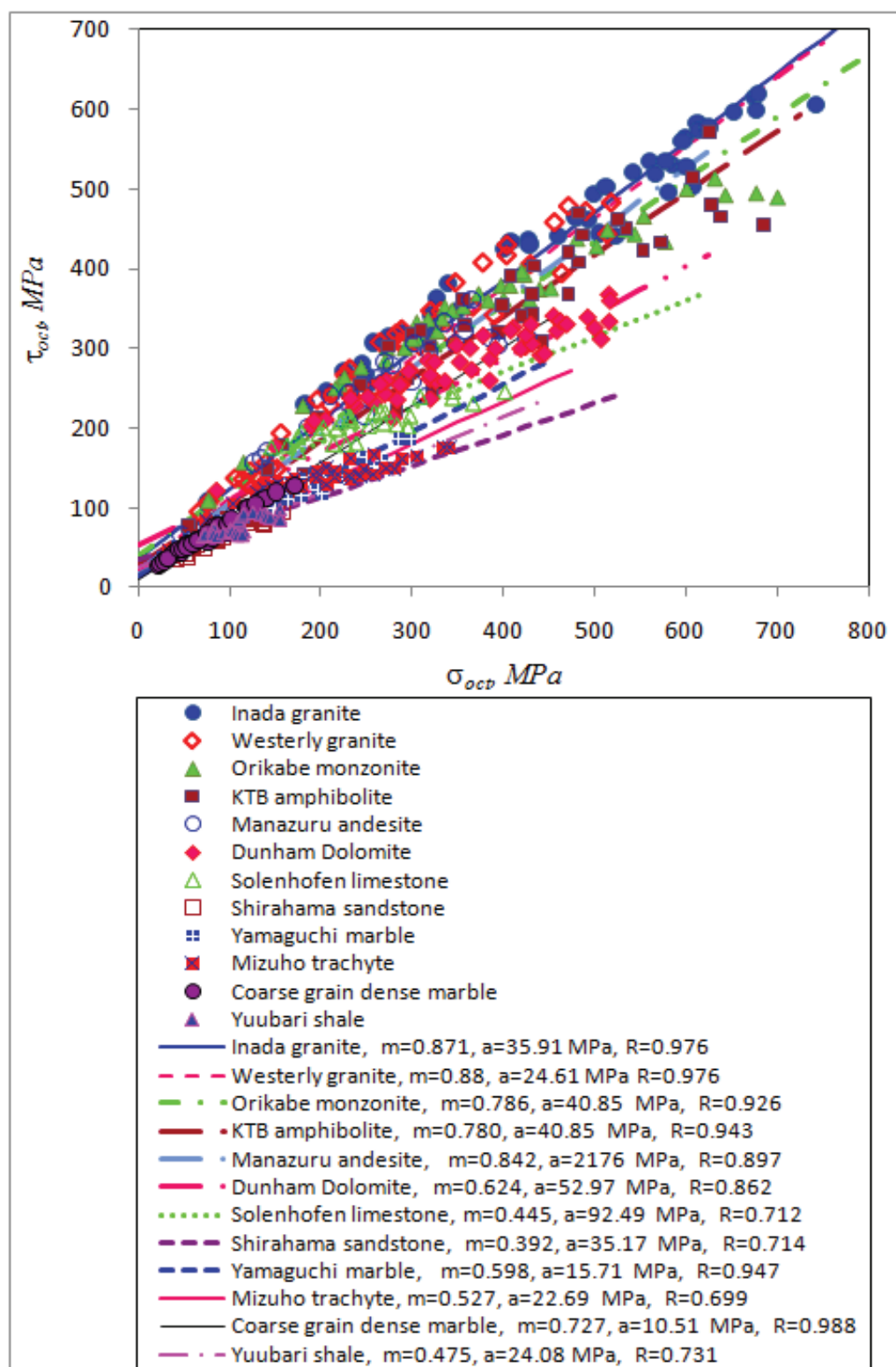
شکل ۱۰: رابطه بین هر یک از ضرایب B و B' در دو معیار شکست غیرخطی (تابع توانی) جدید و زاویه اصطکاک داخلی (ϕ) گروه‌های مختلف نتایج انواع سنگ‌ها



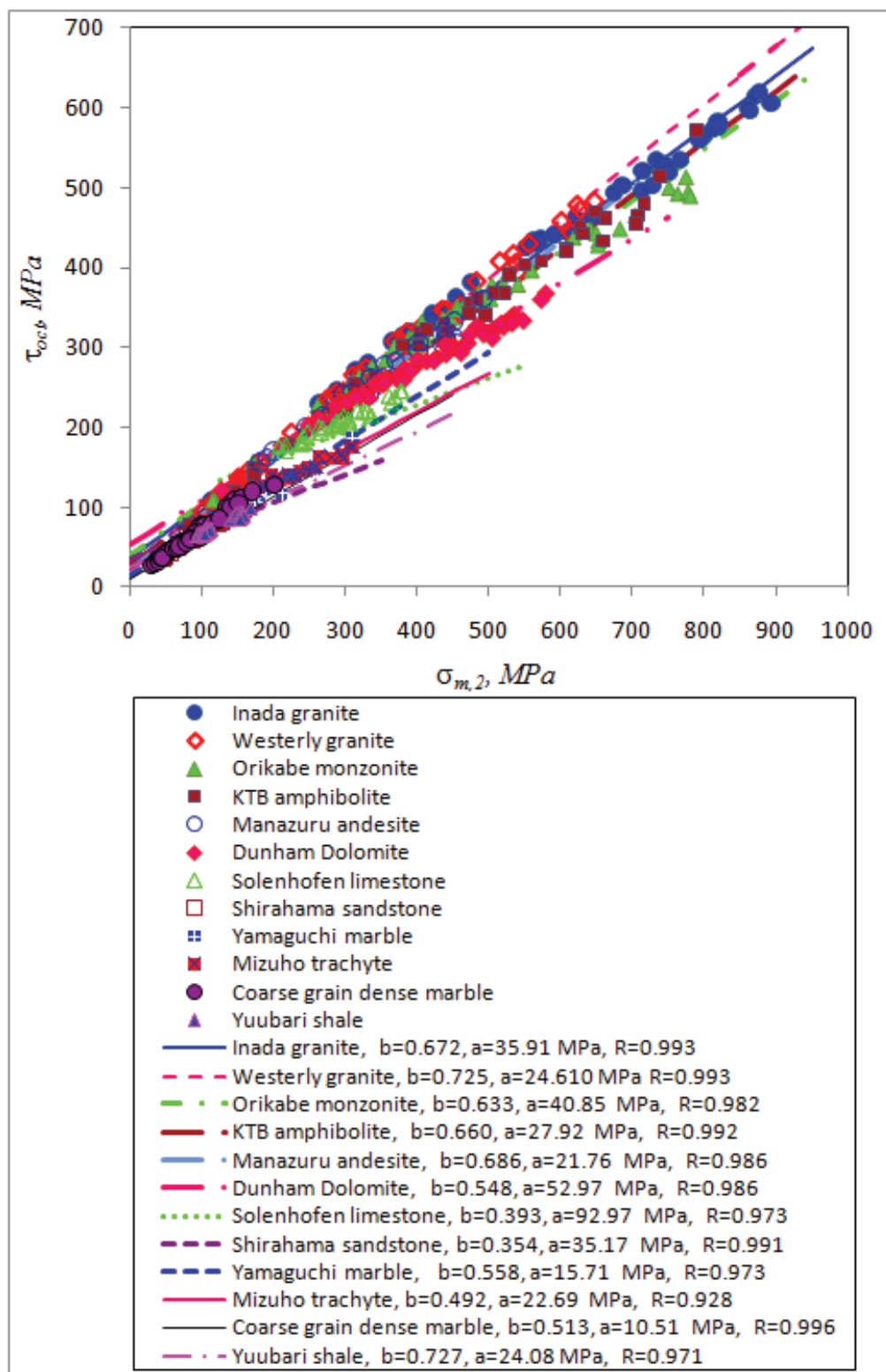
شکل ۱۱: رابطه بین هر یک از ضرایب B و B' در دو معیار شکست غیرخطی (تابع توانی) جدید و ضریب مقاومت فشاری سه محوری معیار هوک و همکاران (m_i) گروه‌های مختلف نتایج انواع سنگ‌ها



شکل ۱۲: رابطه بین هر یک از ضرایب B و B' در دو معیار شکست غیرخطی (تابع توانی) جدید و مقاومت فشاری یک محوری (σ_{ci}) گروه‌های مختلف نتایج انواع سنگ‌ها



شکل ۱۳: معیار شکست رابطه خطی بین τ_{oct} و σ_{oct} دارای ضریب m و مقدار ثابت a حاصل از $(2\sqrt{2}/3)C \cos \phi$ برای سنگ‌های گرانیت، مونزونیت، آمفیبولیت، آندزیت، دولومیت، آهک، ماسه سنگ، تراکیت، مرمر و شیل همراه با ضریب همبستگی (R)



شکل ۱۴: معیار شکست رابطه خطی بین τ_{oct} و $\sigma_{m,2}$ دارای ضریب b و مقدار ثابت a برای سنگ‌های گرانیت، مونزونیت، آمفیبولیت، آندزیت، دولومیت، آهک، ماسه سنگ، تراکیت، مرمر و شیل همراه با ضریب همبستگی (R)

۴- نتیجه گیری

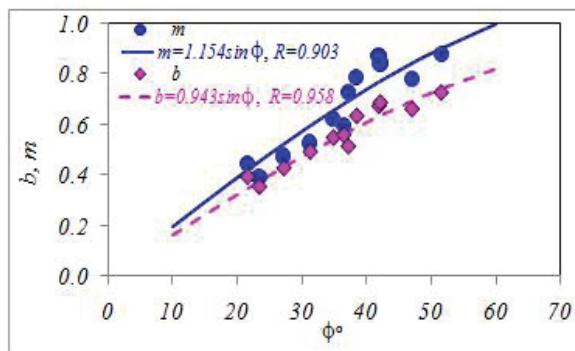
۱- در معیار شکست و ن مایز مقاومت برشی (τ_{oct}) از مقدار ثابت $\frac{\sqrt{3}\sigma_e}{2}$ بیشتر نمی شود و مقدار آن تنها با تغییر در مقاومت فشاری یک محوری تغییر می نماید. این در صورتی است که برای یک نوع سنگ دارای مقاومت فشاری یک محوری معین با افزایش سطح تنش های سه محوری، تنش های عمودی (σ_{oct}) و برشی (τ_{oct}) افزایش می یابند. این معیار انطباقی بر نتایج اندازه گیری شده مقاومت فشاری سه محوری واقعی سنگ ندارد. همچنین خاستگاه آن برای سنگ نبوده است. عوامل پیچیده می تواند در پایداری چاه نفت موثر باشد، چنانچه تاثیر عوامل دیگر بر پایداری چاه نفت بدرستی کنترل می شود، نقش چنین معیارهای ناکارآمدی برای سنگ که حتی بسیار دور از نتایج اندازه گیری مستقیم هستند، بهتر مشخص می شود. در نتیجه این تحقیق نشان می دهد که از چنین معیارهایی نباید برای سنگ استفاده کرد. اما قضاوت در باره استفاده از سابقه دیرینه معیار شکست و ن مایز در خصوص مصالح غیرسنگی خارج حیطه مهندسی مکانیک سنگ است.

۲- رابطه بین τ_{oct} و σ_{oct} و همچنین رابطه $\sigma_{m,2}$ و σ_{oct} صورت تابع توانی با توان و ضریب متغیر برای نتایج حاصل از آزمایش مقاومت فشاری سه محوری واقعی همبستگی خوبی را نشان می دهند، اما هر یک از ضرایب (A' و A) و توان های (n و n') آن ها همبستگی قابل قبولی با پارامترهای ϕ ، m_i و σ_{ci} نشان نمی دهد. همچنین رابطه های ۲۲ و ۲۳ شکل مناسبی ندارد زیرا دو پارامتر ضریب و توان متغیر، غیرکاربردی و پیچیده دارد.

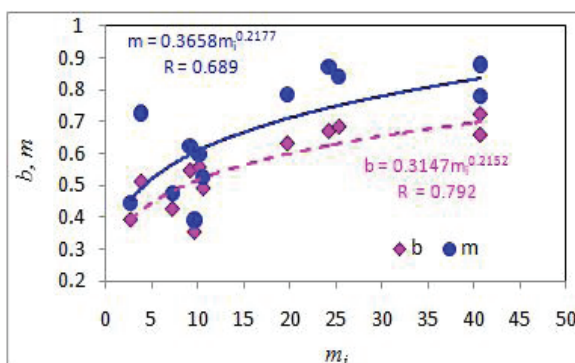
۳- معیار شکست جدید غیرخطی رابطه بین τ_{oct} و σ_{oct} به صورت تابع توانی دارای مقدار توان ثابت (n) برابر ۰٫۷ و ضریب متغیر B انطباق خوبی گروه های متعدد داده ها نشان می دهد. همچنین ضریب B (رابطه ۲۹) همبستگی قابل قبولی با هر یک از پارامترهای ϕ ، m_i و σ_{ci} سنگ دارد. همچنین رابطه بین τ_{oct} و $\sigma_{m,2}$ به صورت تابع توانی دارای مقدار توان ثابت (n') برابر ۰٫۷۵ و ضریب B' انطباق خوبی بر نتایج مختلف داشته و ضریب این رابطه (B' در معادله ۳۰) همبستگی خوبی با هر یک از پارامترهای ϕ ، m_i و σ_{ci} نشان می دهد.

۴- پارامترهای معیار دراگر و پراگر، انطباقی بر نتایج آزمایش مقاومت فشاری سه محوری واقعی سنگ نشان ندادند.

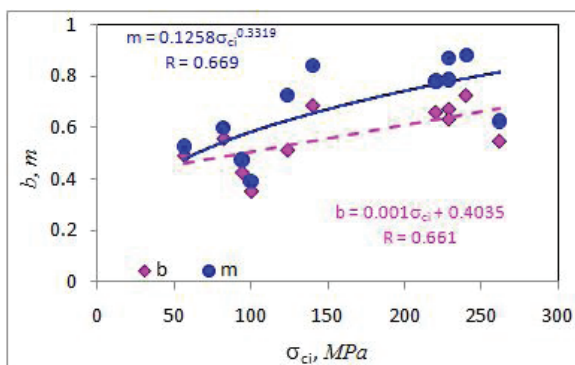
۵- معیار شکست جدید تحت تنش سه محوری واقعی به صورت رابطه خطی بین تنش برشی هشت وجهی و تنش



شکل ۱۵: رابطه بین هر یک از ضرایب m در معیار شکست خطی جدید و b در معیار شکست مگی کولمب با زاویه اصطکاک داخلی (ϕ) برای گروه های مختلف نتایج انواع سنگ ها



شکل ۱۶: رابطه بین هر یک از ضرایب m و b و ضریب مقاومت فشاری سه محوری معیار هوک و همکاران (m_i) برای گروه های مختلف نتایج انواع سنگ ها



شکل ۱۷: رابطه بین هر یک از ضرایب m و b و مقاومت فشاری یک محوری (σ_{ci}) برای گروه های مختلف نتایج انواع سنگ ها

- [11] Al-Ajmi, A. M., and Zimmerman, R.W. (2005). "Relation between the Mogi and the Coulomb failure criteria". International Journal of Rock Mechanics and Mining Sciences, 42: 431-439.
- [۱۲] فرهادی، محمد مهدی؛ ۱۳۹۱؛ "مدل سازی عددی پایداری چاه نفت بر اساس روش حفاری"، پایان نامه کارشناسی ارشد مکانیک سنگ، دانشکده مهندسی معدن، دانشگاه صنعتی سهند تبریز.
- [13] Spetzler, H. A., Sobolev, G. A., Sondergeld, C. H., Salov, B. G., Getting, I. C., and Koltsov, A. (1981). "Surface deformation, crack formation, and acoustic velocity changes in pyrophyllite under polyaxial loading". Journal of Geophysics Research, 86: 1070-1080.
- [14] Takahashi, M., and Koide, H. (1989). "Effect of the intermediate principal stress on strength and deformation behavior of sedimentary rocks at the depth shallower than 2000 m". Rock at Great Depth, Ed. By Maury, V. and Fourmaintraux, D., Balkema, Rotterdam, 1: 19-26.
- [15] Haimson, B. C., and Chang, C. (2002). "True triaxial strength of the KTB amphibolite under borehole wall conditions and its use to estimate the maximum horizontal in situ stress - art". Journal of Geophysics Research-Solid Earth, 107(2257): 2257-2271.
- [16] Haimson, B., and Rudnicki, J. W. (2010). "The effect of the intermediate principal stress on fault formation and fault angle in siltstone". Journal of Structure Geology, 32(11): 1701- 1711.
- [17] Al-Ajmi, A. M. (2006). "Wellbore stability analysis based on a new true-triaxial failure criterion". TRITA-LWR PhD Thesis.
- [18] Mogi, K. (2007). "Experimental Rock Mechanics". University of Tokyo, Taylor and Francis Group, London, UK, 359 pages.
- [19] Michelis, P. (1985). "Polyaxial yielding of granular rock". Journal of Engineering Mechanics ASCE, 111(8): 1049-1066.
- [20] Michelis, P. (1987). "True triaxial cyclic behavior of concrete and rock in compression". International Journal of Plasticity, 3(3): 249-270.
- [21] DataFit, (1992). "Data fitting by linear and multiple non-linear regression". P.O.Box 1743, Macquarie Centre, N. S. W. 2113, Australia.
- [22] Hoek E., Wood, D., and Shah, S. (1992). "A modified Hoek-Brown failure criterion for jointed rock masses". Eurock, London, 14-17 September, London, U.K., Thomas Telford, 209 - 214.
- [23] Moomivand, H. (2011). "Development of a new method
- عمودی هشت وجهی انطباق خوبی بر ۱۲ گروه نتایج از سنگ‌های متعدد نشان داد. مقدار ثابت آن (a) به عنوان تابعی از ویژگی مکانیکی ϕ ، و C یا q و σ_{ci} است و ضریب این معیار (m) که از طریق برازش بر داده‌ها بدست آمد، همبستگی قابل قبولی با ویژگی‌های مکانیکی از جمله زاویه اصطکاک داخلی (ϕ) نشان می‌دهد. معیار شکست یکی از ارکان تحلیل پایداری به‌ویژه در چاه‌های نفت است. چنین معیار جامع، ساده و مستدلی می‌تواند به سهم خود به تحلیل پایداری صحیح کمک کند.

۵- مراجع

- [1] VonMises, R. (1913). "Mechanik der festen Krper in Plastisch deformablem Zustand [Mechanics of solid bodies undergoing plastic deformation]". Goett. Nachr. Math. Phys. Kl., 582-92.
- [2] Drucker, D. C., and Prager, W. (1952). "Soil mechanics and plastic analysis or limite design". Quarterly of Applied Mathematics, 10: 157-165.
- [3] Murrell, S. A. F. (1962). "A criterion for brittle fracture of rocks and concrete under triaxial stress, and the effect of pore pressure on the criterion". Fifth U.S. Symposium of Rock Mechanics, Minneapolis, Minnesota, 563 -577.
- [4] Mogi, K. (1971). "Fracture and Flow under High Triaxial Compression". Journal of Geophysical Research, 76: 1255-1269.
- [5] Haimson, B. (2012). "A Failure criterion for rocks based on true triaxial testing". Rock Mechanics and Rock Engineering, 45: 1007-1010.
- [6] Bradley, W. B. (1979). "Failure of inclined borehole". Journal of Energy Resources Technology, 101: 232-239.
- [7] Aadnoy, B. S., and Chenevert, M. E. (1987). "Stability of highly inclined boreholes". Journal of SPE Drilling Engineering, 2: 364-37.
- [8] McLean, M. R., and Addis, M. A. (1990). "Wellbore Stability Analysis: A review of current methods of analysis and their field application IADC/SPE". In proceeding of the IADC/SPE Drilling Conference, 27 February - 2 March, Houston, Texas, 261-274.
- [9] Rahimi, R. (2014). "The effect of using different rock failure criteria in wellbore Stability analysis". MSc Thesis in Petroleum Engineering, Missouri University of Science and Technology.
- [10] Colmenares, L. B., and Zoback, M. D. (2002). "A statistical evaluation of intact rock failure criteria constrained by polyaxial test data for five different rocks". International Journal of Rock Mechanics and Mining Sciences, 39(6): 695-729.

- ^{۱۱} Inada granite
- ^{۱۲} Westerly granite
- ^{۱۳} Orikabe monzonite
- ^{۱۴} KTB amphibolite
- ^{۱۵} Manazuru andesite
- ^{۱۶} Dunham Dolomite
- ^{۱۷} Solenhofen limestone
- ^{۱۸} Mizuho trachyte
- ^{۱۹} Yamaguchi marble
- ^{۲۰} Coarse grain dense marble
- ^{۲۱} Shirahama sandstone
- ^{۲۲} Yuubari shale
- ^{۲۳} Datafit
- ^{۲۴} Hoek, Wood and Shah
- ^{۲۵} Rudnicki
- for estimating the indirect uniaxial compressive strength of rock using schmidt hammer". Journal of BHM Berg- und Hüttenmännische Monatshefte (Journal of Mining, Metallurgical, Materials, Geotechnical and Plant Engineering), 156(4): 142 – 14.*
-
- ^۱ Von Mises
- ^۲ Drucker and Prager
- ^۳ Murrell
- ^۴ Mogi
- ^۵ Al-Ajmi
- ^۶ Zimmerman
- ^۷ Haimson
- ^۸ Dunham Dolomite
- ^۹ KTB Amphibolite
- ^{۱۰} TCDP Siltstone