

پیش‌بینی مقادیر طلا در برگه یکصد هزار طرق از رفتارسنجی طلا، آرسنیک و آنتیموان به روش خوشه‌بندی کا- میانگین

عادل شیرازی^۱، عارف شیرازی^۲، اردشیر هزارخانی^{۳*}

۱- دانشجوی دکتری مهندسی اکتشاف معدن، دانشگاه صنعتی شاهرود، شاهرود

۲- دانشجوی دکتری مهندسی اکتشاف معدن، دانشگاه صنعتی امیرکبیر، تهران

۳- استاد، دانشگاه صنعتی امیرکبیر، تهران

(دریافت ۱۳۹۵/۱۲/۲۱، پذیرش ۱۳۹۶/۱۲/۲۵)

چکیده

برگه یکصد هزارم ژئوشیمیایی طرق، واقع در استان اصفهان است. این ناحیه چینه شناسی سنگ‌های پرکامبرین تا کواترنر را دارد و در زون ایران مرکزی واقع شده است. با توجه به وجود نشانه‌هایی از کانی‌سازی طلا در این منطقه، شناسایی مناطق با اهمیت معدنی در این منطقه لازم است. بنا به همین امر، یافتن اطلاعاتی در مورد ارتباط و رفتارسنجی عناصر طلا، آرسنیک و آنتیموان نسبت به یکدیگر در این منطقه، برای پیدایش و تعیین وسعت هاله‌های ژئوشیمیایی، تعیین امیدبخش بودن ناحیه و تخمین عیار ضرورت می‌یابد. بنا براین در پژوهش حاضر برای رفتارسنجی عناصر نام برده، از روش مشهور و مفید کا- میانگین استفاده می‌شود که روش خوشه‌بندی است که بر کمینه کردن مجموع فواصل اقلیدسی هر یک از نمونه‌ها از مرکز دسته‌هایی که به آن تخصیص می‌یابد، استوار است. در این تحقیق از تابع کیفیت خوشه‌بندی و میزان مطلوبیت نمونه در خوشه مورد نظر (S(i)) برای تشخیص تعداد خوشه بهینه استفاده و در انتها با در نظر گرفتن مراکز خوشه‌ها و نتایج حاصل، معادلاتی برای پیش‌بینی مقدار عنصر طلا بر حسب چهار پارامتر عیار آرسنیک، عیار آنتیموان، طول و عرض نقاط نمونه‌برداری ارایه شد که ضریب همبستگی اعتبارسنجی آن برابر با ۷۲ درصد گزارش شده است. نتایج حاصل نشان دهنده برتری رفتارسنجی عناصر با روش یاد شده نسبت به ضرایب همبستگی از سایر روش‌های مرسوم است.

کلمات کلیدی

طلا، طرق، روش خوشه‌بندی کا- میانگین، تخمین عیار عناصر، K-means.

۱- مقدمه

مناسب از رفتار داده‌ها و آنالیزهای موجود نسبت به یکدیگر داشته است که می‌توان به تقسیم‌بندی عوارض زمین‌شناسی [۷]، تقسیم‌بندی تاثیر پوشش گیاه و بازبایی سلامتی آب در جنگل‌های ساحل مدیترانه [۸]، ارزیابی برنامه شناسایی الگوهای ژئوشیمیایی در مناطق معدنی [۹]، پیش‌گویی در مورد ارگانیک‌های کربن در سیستم‌های هوشمند [۱۰] و تعیین اثر پخش‌شوندگی گاز در محیط شهری اشاره کرد [۱۱].

در این مقاله با استفاده از روش k-means و نرم‌افزارهای Matlab و SPSS رفتار عناصر طلا، آرسنیک و آنتیموان بر اساس داده‌های رسوبات آبراه‌های جمع‌آوری شده، مورد ارزیابی قرار گرفته و سپس به کمک نتایج حاصل، عیار طلا تخمین زده شده است.

۲- منطقه مورد مطالعه

منطقه مورد مطالعه نقشه یکصد هزارم ژئوشیمیایی رسوبات آبراه‌های به نام طرق که توسط سازمان زمین‌شناسی و اکتشافات کشور ایران با کد ۶۳۵۶ تهیه شده و در میان طول‌های جغرافیایی ۲۴° ۵۱' تا ۵۲° و عرض‌های جغرافیایی ۵۵° ۳۲' تا ۳۳° ۳۳' واقع شده است [۱۲].

این منطقه در استان اصفهان قرار دارد و همچنین رشته کوه کهرود با روند باختری و کوه کرکس با بلندای ۳۸۹۵ متری منطقه را به دو بخش متمایز غربی و شرقی قسمت می‌کند. دشت کم ارتفاع شمال شرقی بیرون محدوده بررسی شده، بلندای میانگین ۱۰۰۰ متر دارد و دشت جنوب غربی به نام رباط سلطان، نزدیک به ۱۶۵۰ متر ارتفاع دارد و کم و بیش در آن کشاورزی می‌شود [۱۳].

کوه‌های کهرود و کرکس، آبراه‌های منطقه را به دو شبکه اصلی متمایز از یکدیگر بخش می‌کنند. شبکه شرقی به سوی شن زارها جریان دارد و آبراه‌های جنوب غربی به رودخانه زاینده‌رود در شرق اصفهان می‌پیوندد.

رودخانه طامه در دامنه شرقی کوه کرکس جریان آب دائمی دارد و بیشتر چشمه‌ها در دامنه‌های این کوه پراکنده‌اند (شکل ۱).

برخی از چشمه‌ها تا اندازه زیادی با بی‌کربنات کلسیم همراه است که نهشته سنگ تراورتن در منطقه را پدید می‌آورد. میزان بارندگی سالانه ۵۱٫۸ میلی‌متر گزارش شده است [۱۴].

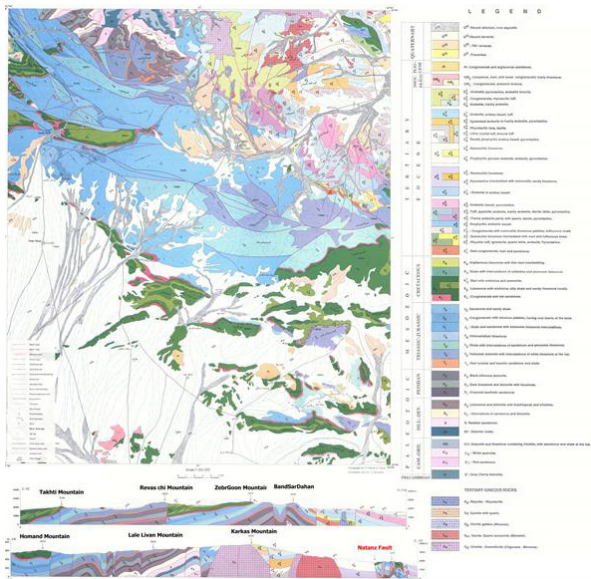
در سال‌های اخیر به دلیل وابستگی زیاد پروژه‌های معدنی به تعیین دقیق‌تر تناژ ماده معدنی، روش‌های گوناگونی برای تخمین عیار به وجود آمده‌اند که از آن جمله می‌توان به روش‌های هندسی، مبتنی بر فاصله و زمین آماری اشاره کرد.

هر یک از این روش‌ها محدودیت‌ها و معایبی دارند که بر روی دقت تخمین تاثیر می‌گذارند [۱] یکی از روش‌های نوین تخمین عیار به کمک روش خوشه‌بندی است. روش‌های تحلیل خوشه‌ای کاربرد وسیعی در علوم زمین دارند. گروه‌بندی خوشه‌ای، روشی است که برای دسته‌بندی داده‌های ژئوشیمیایی به کار می‌رود.

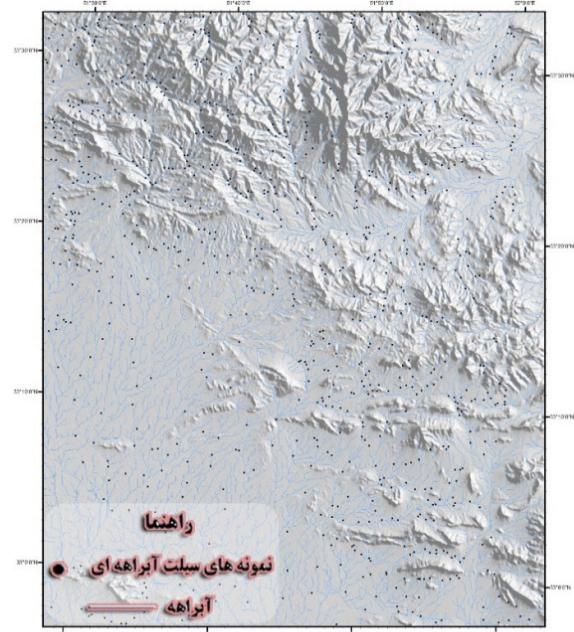
تحلیل خوشه‌ای، مشاهداتی که با هم شباهت زیاد دارند را به یکدیگر مرتبط می‌کند سپس به طور متوالی مشاهداتی را که بیش‌ترین شباهت نسبت به مشاهدات قبلی را دارند به آنها متصل می‌کند [۲]. به عبارتی در خوشه‌بندی سعی می‌شود تا داده‌ها به خوشه‌هایی تقسیم شوند که شباهت بین داده‌های درون هر خوشه حداکثر و شباهت بین داده‌های درون خوشه‌های متفاوت حداقل شود [۳] در روش خوشه‌بندی هیچ دسته‌ای از قبل وجود ندارد و در واقع متغیرها به صورت مستقل و وابسته تقسیم نمی‌شوند، بلکه در این جا جستجو برای دستیابی به گروه‌هایی از داده‌ها انجام می‌شود که به هم شباهت دارند و با کشف این شباهت‌ها می‌توان رفتارها را بهتر شناسایی کرد و بر مبنای آن‌ها، طوری عمل کرد که نتیجه بهتری حاصل شود [۴] روش خوشه بندی یک روش غیر مستقیم است، به این معنی که این روش را می‌توان حتی هنگامی که هیچ نوع اطلاعات قبلی از ساختار داخلی پایگاه داده‌ها وجود ندارد، استفاده کرد. از این روش می‌توان برای کشف الگوهای پنهان و بهبود عملکرد روش‌های مستقیم نیز استفاده کرد [۵].

روش k-means یکی از روش‌های خوشه‌بندی داده‌ها در داده‌کاوی است. این روش، روشی انحصاری و مسطح محسوب می‌شود که به طور وسیعی توسط پژوهشگران مختلف مورد بررسی قرار گرفته و در تلاش است که به خوشه‌بندی تعدادی نمونه با تعداد دسته مشخص (k) بپردازد، به نحوی که مجموع فاصله‌های اقلیدسی هر یک از نمونه‌ها از مرکز دسته‌ای که به آن تخصیص یافته است، کمینه شود [۶] مواردی چند از کاربرد روش k-means که به منظور تحلیلی

یک میان‌لایه اوولیتی و پیزولیتی است (شکل ۲).



شکل ۲: نقشه زمین‌شناسی ۱:۱۰۰,۰۰۰ طرق، اصفهان [۱۶]



شکل ۱: موقعیت نمونه‌ها و آبراهه‌های منطقه

۳- روش مورد مطالعه

از منطقه طرق تعداد ۶۳۷ نمونه رسوبات آبراهه‌ای جمع آوری و به روش ICP-MS تجزیه شده است که در این مقاله به منظور تخمین عیار طلا و بررسی رفتار عناصر آرسنیک، آنتیموان و طلا، تنها این سه عنصر، به دلیل پاراژنز بودن و همچنین با توجه به مقدار ضریب همبستگی شان، مورد بررسی و پردازش قرار گرفته‌اند.

همانطور که در جدول ۱ مشاهده می‌شود، مقادیر ضریب همبستگی این سه عنصر خوب و نشان دهنده ارتباط این سه عنصر با یکدیگر است. همچنین با توجه به اینکه اکثر داده‌های ژئوشیمیایی حالت بسته یا ترکیبی دارند، اگر تبدیل مناسب برای باز کردن داده‌ها انجام نشود، منجر به نتایج اشتباه می‌شود.

جدول ۱: ضرایب همبستگی اسپیرمن برای عناصر طلا و آرسنیک و آنتیموان

طلا	آرسنیک	آنتیموان	
۱			طلا
-۰٫۱۱۸	۱		آرسنیک
۰٫۳۰۸	۰٫۴۳۳	۱	آنتیموان

بهترین تبدیل برای باز کردن این داده‌های ژئوشیمیایی با توجه به آنالیز تک متغیره انجام شده و همچنین سطحی بودن

۲-۱- زمین‌شناسی عمومی منطقه

چینه‌شناسی منطقه، دربرگیرنده سنگ‌های پرکامبرین تا کواترن است که در ادامه به ترتیب از قدیم به جدید به طور کلی شرح داده می‌شود. واحد پرکامبرین پسین و کامبرین پیشین شامل دولومیت‌های چرت‌دار زرد رنگ است که لایه‌های شیل و آهک نیز در آن‌ها دیده می‌شود. این واحد ضخامت حدود ۳۶۰ متر دارد [۱۴، ۱۵].

بخش پایینی این نهشته سنگ‌ها که بیشتر آواری‌اند، مربوط به کامبرین و اردویسین است که در پیکر ردیفی از لایه‌های ماسه سنگی قرمز رنگ قرار گرفته‌اند. به طور کلی این واحد متشکل از سنگ‌های دولومیت زرد رنگ سیلیسی شده، شیل قرمز، آهک تریلوبیت‌دار به رنگ زرد روشن و یا خاکستری و شیل رسی ماسه‌ای قرمز و سبز رنگ است [۱۵، ۱۶].

در واحد سیلورین و دونین سنگ‌های دولریتی تشکیل شده است و بر روی این دولریت‌ها، ماسه‌سنگ‌های قرمز رنگ با سیمان رسی و هماتیتی جای دارد. در ادامه تناوب لایه‌های ماسه سنگ زرد رنگ و دولومیت تیره با میان‌لایه‌های شیل قرمز پدید آمده است. در قسمت بالایی لایه‌هایی از آهک و دولومیت با ضخامت ۱۴۰ متر ساخته شده است و فسیل‌های براکیوپود^۱، تریلوبیت^۲، کرال^۳، تنتاکولیس^۴ دارد [۱۵، ۱۶].

این واحد که به رنگ خاکستری روشن است در بخش بالا به آهک سیاه رنگ براکیوپود داری تبدیل می‌شود که دارای

فاصله‌های نمونه‌ها از مرکز دسته‌ها می‌پردازد.

$$f(C_1, C_2, \dots, C_k) = \sum_{j=1}^k \sum_{x \in C_j} |x - z_j|^2 \quad (2)$$

۵- کمینه کردن تابع هدف رابطه ۲ و یافتن دسته‌بندی مناسب روی مجموعه M با تعداد دسته k [۲۰].

۴- نتایج و بحث

۴-۱- نتایج و بحث بر روی نتایج

در مطالعات مختلفی مانند رابطه دیوریت دگرسان شده با کانی مگنتیت در کمر بند آهنی شیلی [۲۱]، رابطه بین مس و مولیبدن کانسار مس پورفیری [۲۲] و رابطه بین عناصر گروه پلاتین کانسار مس پورفیری [۲۳] رفتار عناصر به روشهای گوناگونی نسبت به یکدیگر سنجیده شده است. در مطالعه پیش رو با به کارگیری روش k-means برای خوشه‌بندی داده‌های رسوبات آبراهه‌ای منطقه طرق، با سه مقدار عیار عناصر طلا، آرسنیک و آنتیموان (با در نظر گرفتن مختصات نقاط نمونه‌برداری)، مقدار بهینه k در هر مورد محاسبه شده است زیرا که عناصر آرسنیک و آنتیموان از عناصر مهم در تعیین هاله‌های ژئوشیمیایی عنصر طلا به حساب می‌آیند.

در این پژوهش به منظور مشخص کردن مقدار مناسب k برای تعیین تعداد خوشه‌ها، از دو معیار مناسب استفاده شده است. اولین معیار به کار گرفته شده معیار $S(i)$ است که بر اساس آن، تعداد خوشه‌ها از ۳ تا ۱۰ تغییر داده می‌شوند و سپس به کمک معیار یاد شده، نتایج حاصل مورد تحلیل قرار می‌گیرند تا k بهینه انتخاب شود [۲۴].

معیار مناسب برای تعیین k بهینه مطابق با رابطه ۳ تعیین شده است که بر اساس آن، دسته‌بندی‌های انجام شده مورد سنجش قرار می‌گیرد.

(۳)

$$S(i) = \frac{\text{Min}(\text{Aveg_Between}(i, k)) - \text{Aveg_Within}(i)}{\text{Max}[\text{Aveg_Within}(i), \text{Min}(\text{Aveg_Between}(i, k))]}$$

که در آن:

$S(i)$ میزان مطلوبیت نمونه i ام در کلاس مورد نظر خودش

داده‌ها، روش تبدیل لگاریتمی ایزومتریک (ilr) است؛ بنابراین قبل از انجام هرگونه پردازش بر روی داده‌ها باید آن‌ها را باز کرد. در این پژوهش با توجه به شرایط موجود از روش یاد شده که نسبت به روش‌های دیگری همچون clr و alr برتری دارد، برای باز کردن داده‌ها استفاده شده است [۱۷].

۳-۱- الگوریتم k-means

الگوریتم k-means با مقداری مشخص برای K (تعداد دسته‌ها) شروع می‌کند و سعی در تخمین موارد زیر دارد:

به دست آوردن نقاطی به عنوان مراکز خوشه‌ها که این نقاط در واقع همان میانگین نقاط متعلق به هر خوشه‌اند.

نسبت دادن هر نمونه داده به یک خوشه که آن داده کمترین فاصله تا مرکز آن خوشه را دارا باشد [۶].

در نوع ساده‌ای از این روش ابتدا به تعداد خوشه‌های مورد نیاز، نقاطی به صورت تصادفی انتخاب می‌شود، سپس داده‌ها، با توجه به میزان نزدیکی (شباهت) به یکی از این خوشه‌ها نسبت داده می‌شوند و به این ترتیب خوشه‌های جدیدی حاصل می‌شود. با تکرار همین مراحل می‌توان در هر تکرار با میانگین‌گیری از داده‌ها مراکز جدیدی برای آن‌ها محاسبه کرد و مجدداً داده‌ها را به خوشه‌های جدید نسبت داد [۱۸]. مراحل مهمی که در این الگوریتم طی می‌شود به طور خلاصه به شرح زیر است [۱۹، ۲۰]:

۱- ابتدا k عضو (که k تعداد خوشه‌هاست) به صورت تصادفی از میان n عضو به عنوان تعداد خوشه‌ها انتخاب می‌شود.

۲- محاسبه بردار Z_j بر اساس رابطه ۱ که نشان دهنده مرکز یا نماینده هر دسته C_j است.

$$z_j = \frac{\sum_{x \in C_j} x}{\#C_j} \text{ for } j = 1, \dots, k \quad (1)$$

۳- در این رابطه، x نشان دهنده بردار یک نمونه‌ای است که در C_j عضو است و $\#C_j$ نشان دهنده تعداد نمونه‌هایی است که در کلاس C_j عضو است. رابطه ۱ برای محاسبه مرکز هر دسته در حین حل استفاده می‌شود و در شروع الگوریتم معمولاً به صورت تصادفی k نمونه انتخاب و به عنوان مرکز هر دسته در نظر گرفته می‌شود [۲۰].

۴- محاسبه تابع هدف ناشی از دسته‌بندی $\{C_1, C_2, \dots, C_k\}$ بر اساس رابطه ۲ است که به محاسبه مجموع

$$\delta_{nm} = Sim(C^n, C^m) \quad (9)$$

در این رابطه‌ها:

O مجموعه مراکز خوشه‌ها

C^n مراکز خوشه‌ها

O^n مجموعه عناصری که به عنوان مراکز خوشه انتخاب نشده‌اند

T^c مجموعه کلیه عناصری که خوشه‌بندی روی آن‌ها انجام شده است

η_n میانگین شباهت بین مرکز خوشه C^n و همه عناصر خوشه O^n

η_m میانگین شباهت بین مرکز خوشه C^m و همه عناصر خوشه O^m

δ_{nm} شباهت C^n و O^n تعریف می‌شود

۲-۴- رفتارسنجی طلا، آرسنیک و آنتیموان نسبت به یکدیگر

برای بررسی رفتار عناصر مربوطه نسبت به یکدیگر در ابتدا نیمرخ خوشه‌ها و میزان مطلوبیت هر نمونه برای دسته‌بندی‌های $k=3$ و $k=10$ برای عناصر طلا، آرسنیک و آنتیموان به صورت دو به دو انجام شده و نتایج میزان مطلوبیت دسته‌ها با هم مقایسه شده است و بهترین دسته بر اساس میزان مطلوبیت دسته‌ها مشخص شده و سپس مراکز خوشه‌های هر دسته با توجه به آن مشخص می‌شود.

همانطور که در شکل ۳ مشاهده می‌شود، مطابق با نمودارهای نیمرخ کلاس و با توجه به مقادیر مطلوبیت بهترین کلاس برای دو عنصر طلا و آنتیموان، کلاس ۹ به عنوان بهترین دسته انتخاب می‌شود زیرا هر چقدر میزان مطلوبیت به مقدار ۱ نزدیک باشد، نمونه‌ها به درستی در کلاس قرار گرفته‌اند. با توجه به نمودار، مقادیر منفی تقریباً کمی در این دسته‌بندی نیز دیده می‌شود.

مقدار متوسط مطلوبیت در این دسته‌بندی برابر با ۰٫۷۱۳۶ است که نسبت به مقدار متوسط مطلوبیت در دسته‌های دیگر این مقدار بیشتر است و به همین روال و با توجه به شکل‌های ۴ و ۵ برای دیگر عناصر، بهترین دسته بندی با توجه به نیمرخ خوشه‌ها و مقدار متوسط مطلوبیت انتخاب می‌شود که برای دو عنصر طلا و آرسنیک کلاس ۴ با مقدار متوسط مطلوبیت ۰٫۷۵۴۷ و برای دو عنصر آرسنیک و آنتیموان کلاس ۳ با مقدار متوسط مطلوبیت ۰٫۵۸۷۲ به عنوان بهترین دسته‌بندی انتخاب می‌شود. برای اطمینان بیشتر و با توجه به نوسانات موجود در

$Aveg_within(i)$ میانگین فاصله نمونه i ام از سایر

نمونه‌های دیگر در آن کلاسی که خود نمونه i ام وجود دارد

$Aveg_Between(i,k)$ میانگین فاصله نمونه i ام از سایر

نمونه‌هایی که در دسته دیگری مانند k قرار دارد [۲۴،۲۰].

با محاسبه میزان مطلوبیت، با عنوان میانگین مطلوبیت به تحلیل نتایج پرداخته می‌شود. مقدار مطلوبیت بین -1 تا $+1$ تغییر می‌کند که هرچه این مقدار به $+1$ نزدیک‌تر باشد نمونه مورد نظر در دسته‌بندی مناسب‌تر و هرچه به -1 نزدیک‌تر باشد دسته‌بندی نامناسب‌تر است و عدد صفر به این معنی است که حضور نمونه مورد نظر در دسته فعلی و یا دسته دیگر اهمیت چندانی ندارد، بنابراین برای هر نمونه مقدار رابطه ۶ محاسبه شده و سپس با محاسبه میانگین اعداد حاصل، با عنوان میانگین مطلوبیت دسته‌بندی انجام شده، به تحلیل نتایج پرداخته می‌شود.

دومین معیار استفاده شده، تابع کیفیت است. بر اساس دانسته‌ها، بهترین خوشه‌بندی به صورتی است که مجموع تشابه بین مرکز خوشه و همه اعضای خوشه را حداکثر و مجموع تشابه بین مراکز خوشه‌ها را حداقل بشود. برای انتخاب بهترین خوشه، ابتدا یک محدوده پیشنهادی برای تعداد خوشه‌ها مشخص می‌شود که در این پژوهش محدوده بین ۳ تا ۱۰ کلاس پیشنهاد شده است، سپس $p(k)$ برای هر یک از مقادیر k محاسبه می‌شود.

مقداری از k که در آن $p(k)$ حداکثر شود، به عنوان تعداد بهینه خوشه‌ها انتخاب می‌شود. به این ترتیب می‌توان تعداد خوشه‌ای را انتخاب کرد که به ازای آن فاصله بین مراکز خوشه‌ها و شباهت مراکز خوشه با اعضای درون هر خوشه حداکثر است. کیفیت نتایج خوشه‌بندی با k خوشه به صورت رابطه‌های ۴ تا ۹ تعریف می‌شود [۲۶،۲۵]:

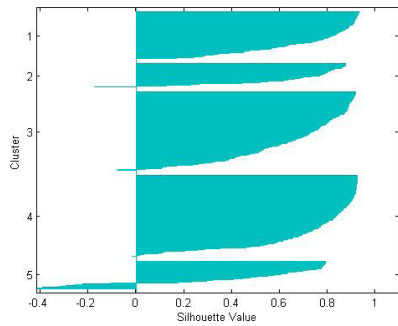
$$O = \{c^n | n = 1, \dots, k\} \quad (4)$$

$$O^n = \{c_i | i = 1, \dots, \|T^c - O\|\} \quad (5)$$

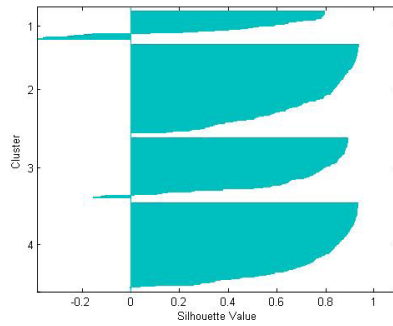
$$\rho(k) = \frac{1}{k} \sum_{n=1}^k \left(m_i n \left\{ \frac{\eta_n + \eta_m}{\delta_{nm}} \right\} \right) \quad (6)$$

$$\eta_n = \frac{1}{\|O^n\|} \sum_{c_i \in O^n} Sim(c_j, c^n) \quad (7)$$

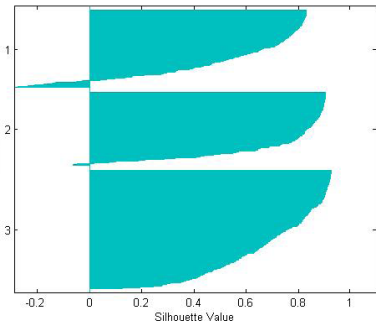
$$\eta_m = \frac{1}{\|O^m\|} \sum_{c_i \in O^m} Sim(c_j, c^m) \quad (8)$$



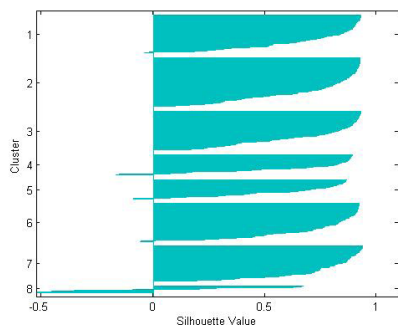
پ- دسته‌بندی با ۵ کلاس با مقدار متوسط ۰.۶۷۲۸



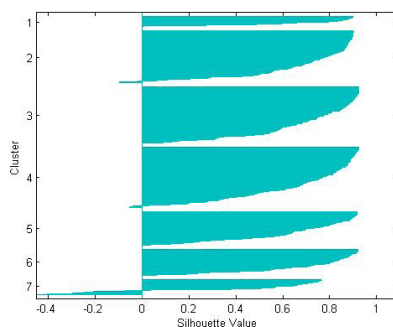
ب- دسته‌بندی با ۴ کلاس با مقدار متوسط ۰.۶۹۹۲



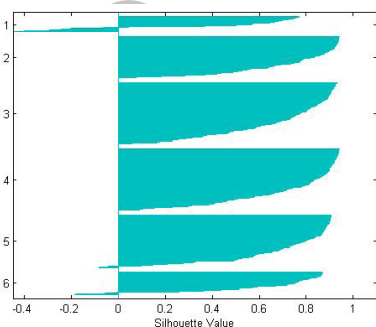
الف- دسته‌بندی با ۳ کلاس با مقدار متوسط ۰.۶۶۹۲



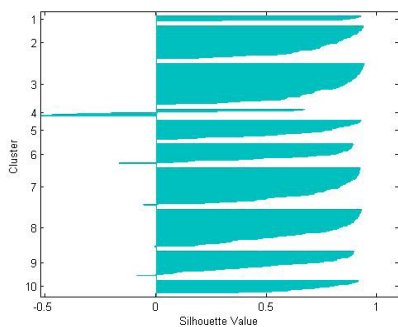
ج- دسته‌بندی با ۸ کلاس با مقدار متوسط ۰.۶۹۲۲



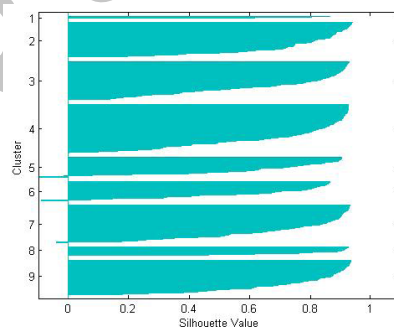
ث- دسته‌بندی با ۷ کلاس با مقدار متوسط ۰.۶۷۰۱



ت- دسته‌بندی با ۶ کلاس با مقدار متوسط ۰.۶۸۵۵



ح- دسته‌بندی با ۱۰ کلاس با مقدار متوسط ۰.۶۸۷۹



چ- دسته‌بندی با ۹ کلاس با مقدار متوسط ۰.۷۱۳۶

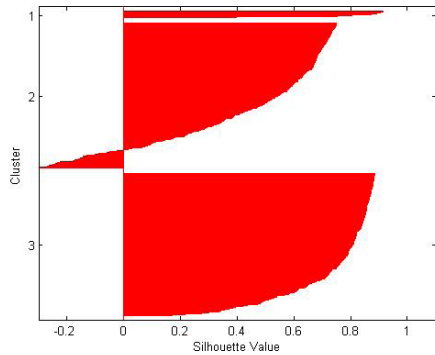
شکل ۳: نیم‌رخ خوشه‌ها و مقادیر مطلوبیت با ۳ تا ۱۰ کلاس مربوط به دو عنصر طلا و آنتیموان

(شکل ۶-ب) برای دو عنصر طلا و آنتیموان تعداد خوشه ۹ دارای بیشترین مقدار و در (شکل ۶-پ) تعداد خوشه ۳ برای دو عنصر آرسنیک و آنتیموان، $S(i)$ دارای بیشترین مقدار است.

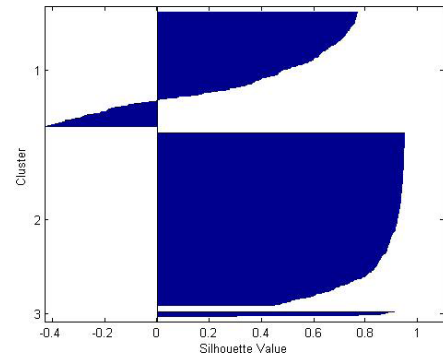
همچنین با توجه به تابع کیفیت و با استفاده از مقدار $p(k)$ تعداد خوشه مناسب تعیین می‌شود. برای تعیین تعداد خوشه‌ها، مقدار $p(k)$ با استفاده از رابطه ۶ برای مقادیر مختلف k محاسبه شده است. همانطور که بیان شد، مقدار حداکثر $p(k)$ نشان دهنده تعداد مناسب خوشه‌ها است.

مقادیر مطلوبیت، مقدار k تا عدد ۲۰ افزایش داده شده است، اما مقدار مطلوبیت از مقدار مطلوبیت بهترین دسته‌بندی هر گروه فراتر نرفته و به ازای k بعد، روند کاهشی داشته است.

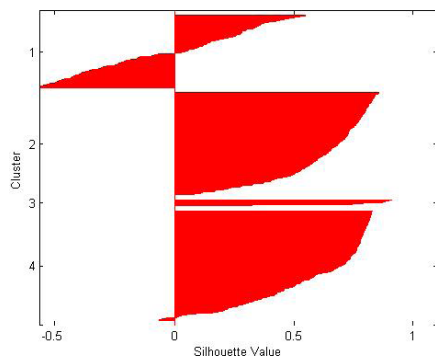
همچنین می‌توان برای انتخاب تعداد خوشه بهینه، نمودار تغییر ملاک اعتبارسنجی $S(i)$ را بر اساس تغییر تعداد خوشه‌ها به صورت شکل ۶ نشان داد که مقایسه آن راحت‌تر و ساده‌تر است. به عبارتی هر خوشه که بیشترین مقدار $S(i)$ را داشته باشد، به عنوان تعداد خوشه بهینه انتخاب می‌شود (شکل ۶-الف). مقدار $S(i)$ برای دو عنصر طلا و آرسنیک و



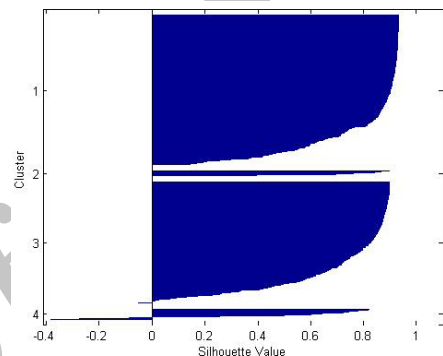
الف - دسته‌بندی با ۳ کلاس با مقدار متوسط ۰/۶۶۹۷



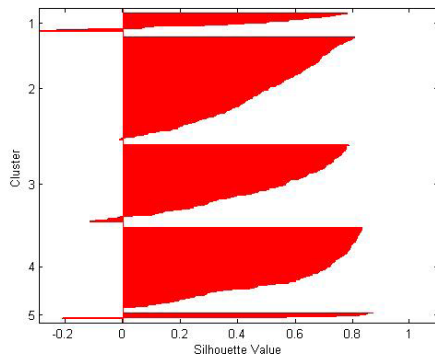
الف - دسته‌بندی بندی با ۳ کلاس با مقدار متوسط ۰/۵۸۷۲



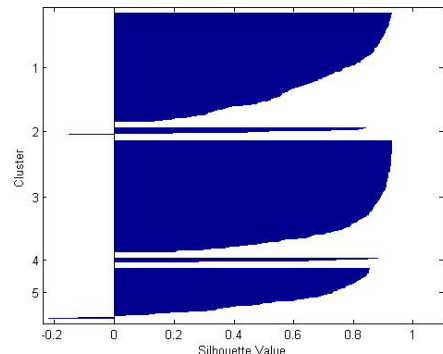
ب - دسته‌بندی با ۴ کلاس با مقدار متوسط ۰/۷۵۴۷



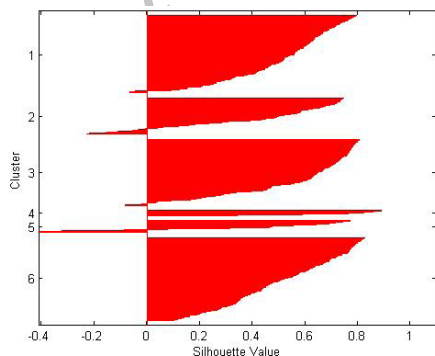
ب - دسته‌بندی با ۴ کلاس با مقدار متوسط ۰/۴۴۹۹



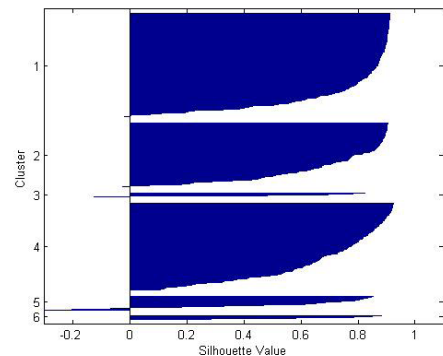
پ - دسته‌بندی با ۵ کلاس با مقدار متوسط ۰/۷۱۹۳



پ - دسته‌بندی با ۵ کلاس با مقدار متوسط ۰/۵۱۷۷



ت - دسته‌بندی با ۶ کلاس با مقدار متوسط ۰/۷۱۴۷



ت - دسته‌بندی با ۶ کلاس با مقدار متوسط ۰/۵۱۰۳

شکل ۵: نیمرخ خوشه‌ها و مقادیر مطلوبیت با کلاس‌های ۳ تا ۶ مربوط به دو عنصر آرسنیک و آنتیموان

شکل ۴: نیمرخ خوشه‌ها و مقادیر مطلوبیت با کلاس‌های ۳ تا ۶ کلاس مربوط به دو عنصر طلا و آرسنیک

جدول ۲: مقادیر $p(k)$ برای تعداد خوشه‌های مختلف

عناصر	تعداد خوشه	$p(k)$	عناصر	تعداد خوشه	$p(k)$		
دو عنصر طلا و آنتیموان	۳	۰,۵۱۶۴	دو عنصر طلا و آرسنیک	۳	۰,۴۹۳۷		
	۴	۰,۵۲۴۱		۴	۰,۶۱۹۸		
	۵	۰,۵۱۹۵		۵	۰,۵۹۹۸		
	۶	۰,۵۱۹۹		۶	۰,۵۸۴۵		
	۷	۰,۵۲۶۱		۷	۰,۵۰۴۶		
	۸	۰,۵۲۷۹		۸	۰,۵۷۷۴		
	۹	۰,۵۴۸۱		۹	۰,۵۴۹۰		
	۱۰	۰,۵۱۲۵		۱۰	۰,۵۴۵۲		
	دو عنصر آرسنیک و آنتیموان	۳		۰,۶۸۸۱	سه عنصر طلا، آرسنیک و آنتیموان	۳	۰,۷۰۵۳
		۴		۰,۵۳۹۲		۴	۰,۶۴۲۳
۵		۰,۶۱۱۴	۵	۰,۶۷۰۹			
۶		۰,۶۲۸۳	۶	۰,۶۷۲۵			
۷		۰,۶۴۰۶	۷	۰,۶۷۸۴			
۸		۰,۵۸۴۵	۸	۰,۶۸۱۴			
۹		۰,۵۷۹۰	۹	۰,۶۱۲۵			
۱۰		۰,۵۶۰۱	۱۰	۰,۶۰۳۹			

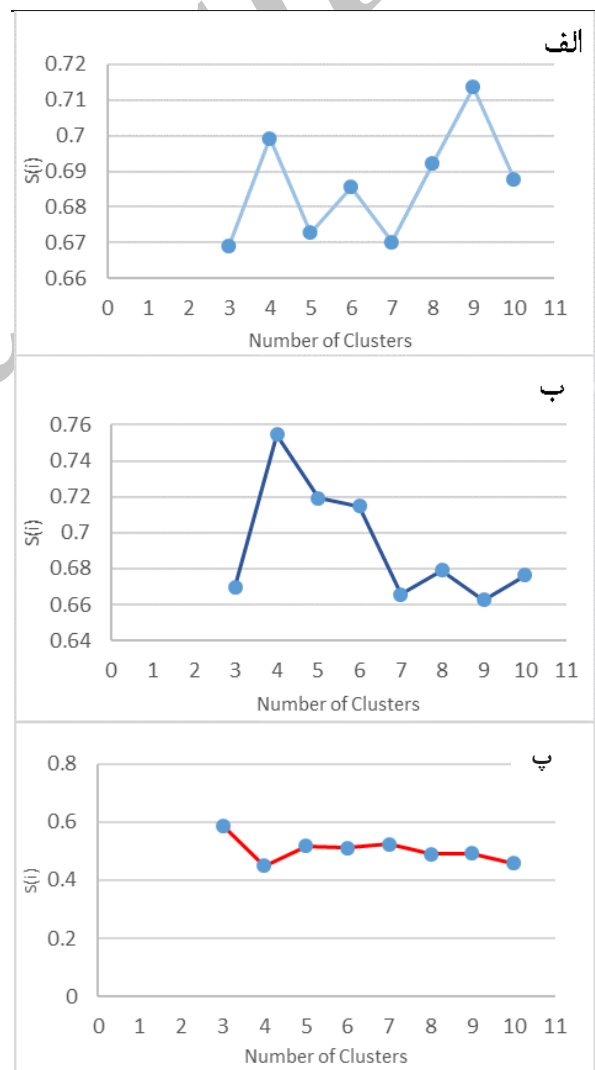
مراکز دسته‌های تعیین شده به ازای بهترین دسته‌بندی که برای دو عنصر طلا و آرسنیک به ازای ۴ کلاس در شکل ۷ و به ازای ۹ کلاس برای دو عنصر طلا و آنتیموان در شکل ۸ و به ازای ۳ کلاس برای دو عنصر آرسنیک و آنتیموان در شکل ۹ به صورت نمودار نشان داده می‌شود.

بر اساس این دسته‌بندی که در شکل ۷ مشخص است، به ازای افزایش عیار عنصر طلا، عیار عنصر آرسنیک، ابتدا کاهش و سپس افزایش می‌یابد. با توجه به این کاهش و افزایش، بهترین منحنی درجه دو با تقعر مثبت است. خط برازش شده به صورت $Y = 1E+08x^2 - 215808x + 99.355$ و ضریب همبستگی آن نیز برابر با $R^2 = 0.9927$ به دست آمده است.

برای طلا و آنتیموان (شکل ۸)، به ازای افزایش عیار عنصر طلا، عیار عنصر آرسنیک افزایش می‌یابد. بر اساس این افزایش، بهترین برازش به آن، خطی با شیب مثبت است. معادله خط یاد شده به صورت $Y = 10046x - 5.2826$ و ضریب همبستگی آن برابر با $R^2 = 0.9235$ به دست آمده است.

با توجه به رفتار طلا نسبت به آرسنیک و آنتیموان که با افزایش طلا، آرسنیک کاهش و آنتیموان افزایش پیدا می‌کند به همین دلیل رفتاری غیر قابل انتظاری پیش‌رو داریم که این دو عنصر آرسنیک و آنتیموان رابطه مشخص مطلق ندارند که بر اساس دسته‌بندی که در شکل ۹ مشاهده می‌شود، به ازای افزایش عیار عنصر آرسنیک، ابتدا عیار عنصر آنتیموان

جدول ۲ مقادیر $p(k)$ به دست آمده متناظر با تعداد خوشه‌ها را نشان می‌دهد. در رفتارسنجی دو عنصر طلا و آرسنیک، ۰,۶۱۹۸ بیشترین مقدار است، بنابراین مناسب‌ترین تعداد خوشه برابر با چهار است و به همین ترتیب برای دو عنصر طلا و آنتیموان، تعداد خوشه برابر با ۹ و برای دو عنصر آرسنیک و آنتیموان، تعداد خوشه برابر با ۳ و برای عناصر طلا، آرسنیک و آنتیموان با توجه به موقعیت نمونه‌برداری آن، تعداد خوشه برابر با ۳ مناسب‌ترین تعداد خوشه است. همان‌طور که مشهود است، تعداد خوشه مناسب به دست آمده از تابع کیفیت با نتایج معیار $S(i)$ مطابقت دارد.



شکل ۶: مقدار ملاک اعتبارسنجی $S(i)$ بر اساس تعداد خوشه‌ها (الف- طلا و آنتیموان، ب- طلا و آرسنیک، پ- آرسنیک و آنتیموان)

۳-۴- بررسی رفتار طلا با توجه به عیار عناصر آرسنیک و آنتیموان

نیمرخ خوشه‌ها و میزان مطلوبیت دسته‌بندی‌های انجام شده با توجه به مقدار $k=3$ تا $k=6$ در مورد سه عنصر طلا، آرسنیک و آنتیموان (با در نظر گرفتن طول و عرض نقاط) در شکل ۱۰ آورده شده است.

بر اساس نتایج حاصل شده به ازای مقادیر متفاوت برای k از ۳ تا ۶، همانطور که مشاهده شد، دسته‌بندی روی نمونه‌های تعریف شده با مشخصه‌های عیار عنصر طلا، آرسنیک و آنتیموان و طول و عرض نمونه‌های برداشت شده، به ازای ۵ کلاس دارای بهترین دسته‌بندی است.

همچنین با توجه به شکل ۱۱، بیشترین مقدار $S(i)$ متعلق به ۵ کلاس است. برای اطمینان بیشتر و با توجه به نوسانات موجود در مقادیر مطلوبیت، مقدار k تا عدد ۲۰ افزایش داده شده است، اما مقدار مطلوبیت از کلاس فوق فراتر نرفت و به ازای بالاتر از ۲۰ کلاس نیز روند کاهشی داشت.

بنابراین برای به دست آوردن مشخصات مربوط به مرکز دسته‌ها، با توجه به اینکه مختصات به عنوان ویژگی ورودی در کنار عیار عناصر طلا و آرسنیک و آنتیموان قرار گرفته است و اینکه بازه تغییرات مختصات و مقادیر عیار متفاوت است، برای جلوگیری از ایجاد خطا در محاسبات و به دست آوردن مقدار تخمینی صحیح، باید همه مقادیر ورودی در یک بازه استاندارد قرار بگیرند که با استفاده از رابطه ۱۰ تمام ورودی‌ها در بازه $[0, 1]$ قرار گرفتند.

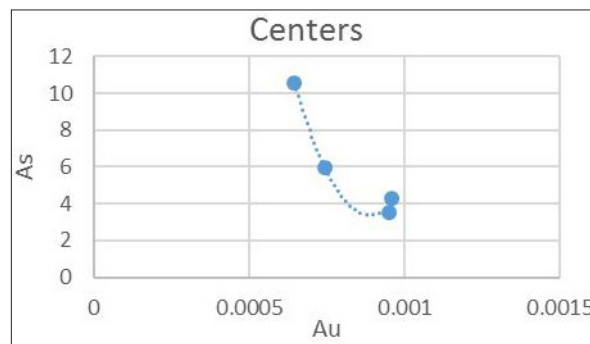
$$X_{norm} = \frac{X - X_{min}}{X_{max} - X_{min}} \quad (10)$$

مشخصات مراکز خوشه‌ها با پنج کلاس در جدول ۳ آورده شده‌اند.

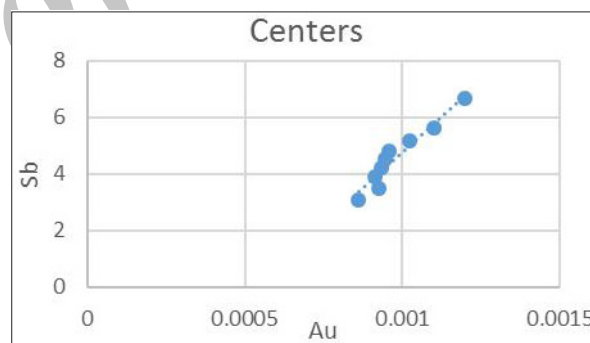
جدول ۳: مشخصات مراکز خوشه‌ها به صورت نرمال شده

دسته	آنتیموان	آرسنیک	طلا	عرض	طول
اول	۰/۴۴۱۵۲۳	۰/۱۳۹۷۴۹	۰/۵۵۵۶۲۶	۰/۷۲۴۵۸۴	۰/۲۴۲۱۱۸
دوم	۰/۳۴۴۳۴۶	۰/۱۸۰۹۵	۰/۲۹۹۵۱۳	۰/۷۴۳۱۸	۰/۷۳۶۱۷۴
سوم	۰/۲۶۰۰۳۲	۰/۱۰۰۶۱۴	۰/۵۶۱۷۰۲	۰/۲۳۴۷۵۱	۰/۶۶۹۴۱۴

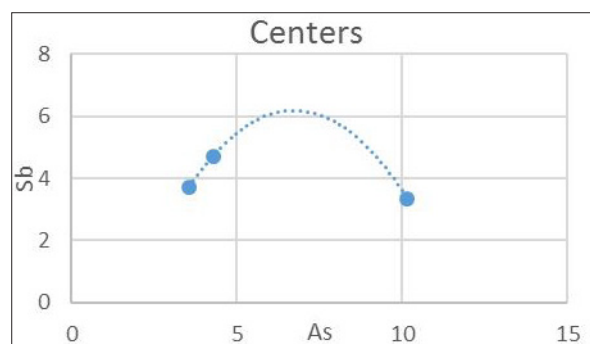
افزایش و سپس روند کاهشی دارد. معادله خط برازش شده $Y = -0.2428x^2 + 3.2713x - 4.8316$ و ضریب همبستگی معادله برازش شده به مرکز دسته‌ها نیز برابر با $R^2 = 1$ است.



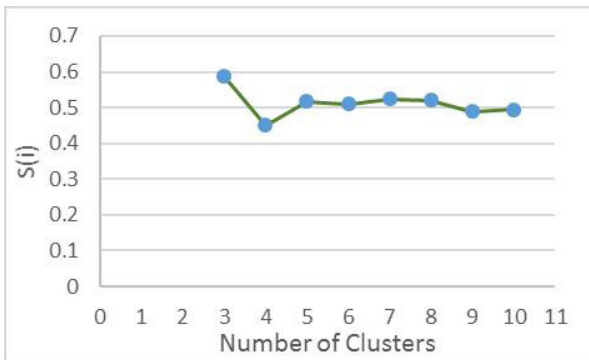
شکل ۷: بهترین خط برازش شده به مراکز دسته‌ها به ازای چهار کلاس برای عناصر طلا و آرسنیک



شکل ۸: بهترین خط برازش شده به مراکز دسته‌ها به ازای نه کلاس برای عناصر طلا و آنتیموان



شکل ۹: بهترین خط برازش شده به مراکز دسته‌ها به ازای سه کلاس برای عناصر آرسنیک و آنتیموان



شکل ۱۱: تغییر مقدار ملاک اعتبارسنجی ($S(i)$) بر اساس تعداد خوشه‌ها (برای سه عنصر طلا، آرسنیک و آنتیموان)

۵- پیش‌بینی عیار طلا

در این قسمت با استفاده از رگرسیون چند متغیره در نرم‌افزار SPSS به تعیین رابطه در مورد طلا و آرسنیک و آنتیموان با توجه به طول و عرض نمونه‌های برداشت شده با استفاده از کل نمونه‌ها و یا مراکز خوشه‌ها پرداخته می‌شود تا بتوان به کمک رابطه به دست آمده عیار عناصر را تخمین زد.

مقادیر عنصر طلا به عنوان متغیر وابسته و مقادیر عنصر آرسنیک و آنتیموان، طول و عرض نقاط به عنوان متغیرهای مستقل به نرم‌افزار معرفی می‌شوند.

سپس نتایج موجود در جدول‌های ۴ و ۵ به عنوان مشخصات و ضرایب رگرسیون چند متغیره رابطه ۱۱ محاسبه و گزارش شده‌اند.

$$y = a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 + a_4x_4 + b \quad (11)$$

۵-۱- تخمین با تمامی نمونه‌ها

با توجه به ضرایب موجود در جدول ۴، فرمول خط رگرسیون چندگانه تعیین می‌شود (رابطه ۱۲).

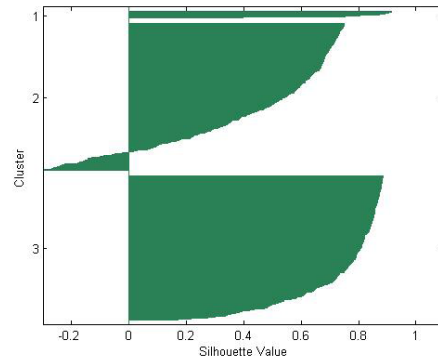
$$(12)$$

$$Au = -0.071X - 0.274Y - 1.24As + 0.788Sb + 0.587$$

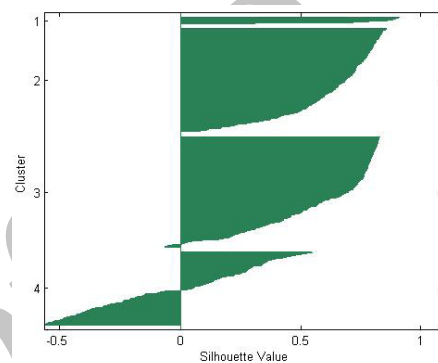
جدول ۴: ضرایب رگرسیون

a_1	a_2	a_3	a_4	b
-۰٫۰۷۱	-۰٫۲۷۴	-۱٫۲۴۰	۰٫۷۸۸	۰٫۵۸۷

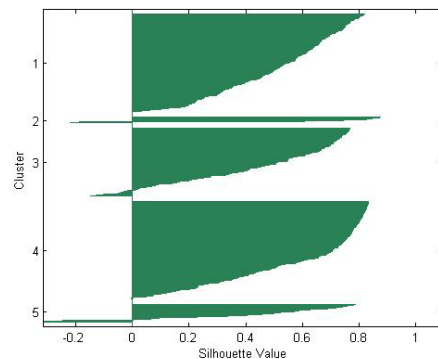
میزان R حاصل شده نشان دهنده رابطه یک سهمی است که مدل رگرسیون توانسته تغییرات را نسبت به y (طلا) مربوط به طلا و آرسنیک و آنتیموان (همراه مختصات)



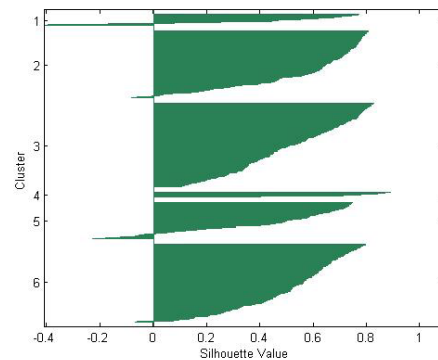
الف- دسته‌بندی با ۳ کلاس با مقدار متوسط ۰٫۵۸۷۲



ب- دسته‌بندی با ۴ کلاس با مقدار متوسط ۰٫۴۴۹۹



پ- دسته‌بندی با ۵ کلاس با مقدار متوسط ۰٫۵۱۷۷

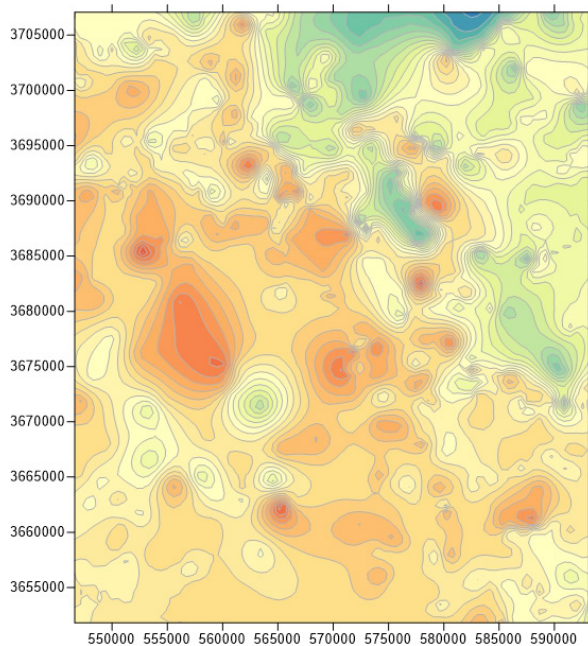


ت- دسته‌بندی با ۶ کلاس با مقدار متوسط ۰٫۵۱۰۳

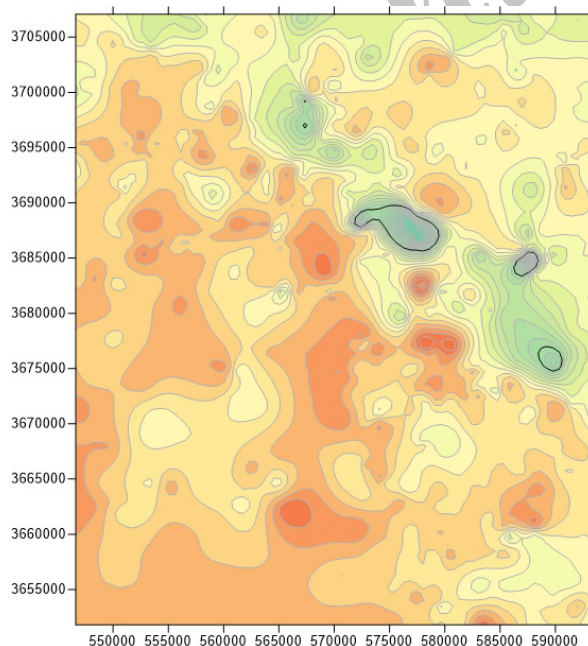
شکل ۱۰: نیم‌رخ خوشه‌ها و مقادیر مطلوبیت با کلاس‌های ۳ تا ۶ مربوط به طلا و آرسنیک و آنتیموان (همراه مختصات)

درصد قطعی است و با نتایج جدول ۵، رابطه ۱۳ پدیدار شد.

$$Au = -4.173 \cdot As + 0.866Sb + 0.756 \quad (13)$$

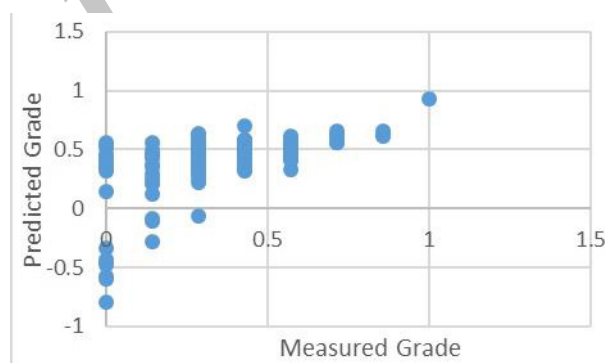


شکل ۱۳: نمایش شماتیک نقشه عیارهای واقعی طلا بر روی نقشه از بیشترین عیار (قرمز) به کمترین (سبز)



شکل ۱۴: نمایش شماتیک نقشه عیارهای پیش‌بینی شده طلا بر روی نقشه از بیشترین عیار (قرمز) به کمترین (سبز)

توضیح دهد که در اینجا عدد به دست آمده ۷۰ است و بنابراین ۷۰ درصد تغییرات میزان طلا به واسطه X یعنی (آرسنیک، آنتیموان، طول و عرض نقاط نمونه‌برداری) است. برای اعتبارسنجی تخمین عیار طلا بر اساس معادله به دست آمده (رابطه ۱۲) باید تعدادی از داده‌های واقعی با مقادیر به دست آمده از معادله مقایسه شود تا دقت و صحت تخمین‌گر سنجیده شود. بنابراین ۳۰ درصد از نمونه‌ها که به طور تصادفی قبل از عملیات رگرسیون چند متغیره جدا شده بودند بر اساس مقادیر عناصر آنتیموان و آرسنیک و طول و عرض نقاط نمونه‌برداری و قرار دادن آن در معادله ۱۲، مقدار عنصر طلا تخمین زده شده و با مقدار واقعی آن مقایسه می‌شود. نتایج به صورت یک نمودار پراکندگی در شکل ۱۲ نشان داده شده است. شکل ۱۲ با ضریب همبستگی ۵۲ درصد، به خوبی تطابق میان واقعیت و عیارهای تخمین زده شده را نشان می‌دهد که این نشان دهنده صحت نسبی روش به کار گرفته شده است.



شکل ۱۲: مقادیر طلا تخمینی در ارزی واقعی

با در نظر گرفتن میزان طلای واقعی با روش کریجینگ نقشه منطقه (شکل ۱۳) برای مقایسه با نقشه پدید آمده با عیارهای پدید آمده از رابطه ۱۲، شکل ۱۴ ترسیم شد. نکته این نقشه‌ها نرمال شدن تمامی پارامترهای آن است که به همین دلیل فقط به صورت دیداری برای صحت تخمین به صورت کلی قابل استفاده است.

۵-۲- تخمین با مراکز خوشه‌بندی K-Means

در این روش دقیقاً روش یاد شده در بالا، این بار بدون داده‌ها و تنها با مراکز دسته‌ها انجام شد؛ پیشنهاد رگرسیونی بر حذف مختصات از سیستم پیش‌بینی به علت عدم توجه عیار است، بنابراین تنها برای دو مقدار آرسنیک و آنتیموان در این شیوه ضریب در نظر گرفته شده و این برازش برای مراکز ۱۰۰

۷- سپاس‌گزاری

از آقای سید سعید قنادپور و خانم ندا ماهوش محمدی برای کمک‌های خود درباره موضوع فوق و همچنین ارایه کمک‌های تخصصی و ایجاد این روش کمال تشکر را داریم [۲۸،۲۷].

۸- مراجع

[۱] مجیدی‌فر، س.، ۱۳۹۲؛ "تخمین عیار آهن در آنومالی تپه قرمز معدن سنگ آهن سنگان با استفاده از سه الگوریتم فازی عصبی تطبیقی". مجله علمی-پژوهشی روشهای تحلیلی و عددی در مهندسی معدن، دوره ۳، شماره ۵، ص ۱۷-۱۰.

[۲] عباس‌زاده، س.؛ رحیمی‌پور، ق.؛ نجم‌الدینی، م.؛ ۱۳۹۳؛ "شناسایی مناطق کانی زایی مس پورفیری با استفاده از تلفیق روش‌های تک متغیره و چند متغیره بر روی داده‌های ژئوشیمیایی آبراهه ای در منطقه قلعه عسکر". استان کرمان، دوره ۳، شماره ۳، ص ۸۲-۶۹.

[۳] شایسته‌فر، م.ر.؛ رسا، ا.؛ ۱۳۸۴؛ "تحلیل داده‌های چند متغیره کانسار سرب و روی قنات مروان کرمان". مجله علوم زمین، دوره ۱۵، شماره ۵۷، ص ۱۴۵-۱۳۴.

[4] Malyszko, D., and Wierzchon, S. T. (2007). "Standard and Genetic K-means Clustering Techniques in Image Segmentation". In 6th International Conference on Computer Information Systems and Industrial Management Applicatins, 1-9.

[5] Abolhassani, B., and Salt, J. E. (2005). "A Simplex Kmeans Algorithm for Radio-Port Placement in Cellular Networks". In Canadaian Conference on Electrical and Computer Engineering, 25-34.

[6] Chen, T. W., and Chien, S. Y. (2010). "Bandwidth adaptive hardware architecture of K-means clustering for video analysis". IEEE Transactions on Very Large Scale Integration (VLSI) Systems, 18(6): 957-966.

[7] Yang, J., Zhuang, Y., and Wu, F. (2012). "ESVCbased extraction and segmentation of texture features". Computers & Geosciences, Elsevier, 49: 238-247.

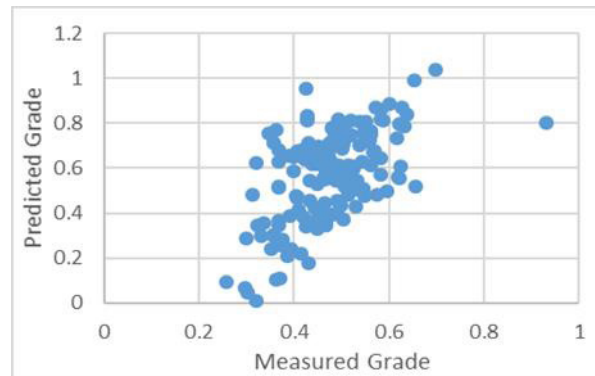
[8] Mora, J. L., Armas-Herrera, C. M., Guerra, J. A., Rodríguez-Rodríguez, A., and Arbelo, C. D. (2012). "Factors affecting vegetation and soil recovery in the Mediterranean woodland of the Canary Islands (Spain)". Journal of Arid Environments, Elsevier, 87: 58-66.

[9] Meshkani, S. A., Mehrabi, B., Yaghubpur, A., and Alghalandis, Y. F., (2011). "The application of geochemical pattern recognition to regional prospecting: A case study of the Sanandaj-Sirjan metallogenic zone, Iran". Journal of Geochemical Exploration, Elsevier,

جدول ۵: ضرایب رگرسیون با مراکز دسته‌ها

a ₁	a ₂	a ₃	a ₄	b
.	.	-۴,۱۷۳	۰,۸۶۶	۰,۷۵۶

این تخمین با توجه به کلی بودن بر روی ۱۰۰ داده به صورت تصادفی آزمایش شد (شکل ۱۵).



شکل ۱۵: مقادیر طلا تخمینی در ازای واقعی

این روش نسبت به روش قبلی دقت بیشتری دارد و درصد به دست آمده حدود ۷۲ است و می‌توان گفت روش کا- میانگین روشی کارآمدتر است.

۶- نتیجه‌گیری

با توجه به وجود شواهد کانی‌سازی طلا در منطقه طرق، بررسی وسعت هاله‌های ژئوشیمیایی و رفتار عناصر پارائز طلا در منطقه اهمیت می‌یابد، بدین منظور با استفاده از روش کا- میانگین به بررسی رفتار عناصر طلا و آرسنیک و آنتیموان در محدوده طرق نسبت به یکدیگر پرداخته شد و بین هر دو عنصر مورد بررسی، رابطه و معادله‌ای همراه با ضریب همبستگی ارایه شد، سپس با استفاده از روش یاد شده، رابطه عناصر با در نظر گرفتن طول و عرض جغرافیایی نمونه‌ها به منظور تخمین عیار و برآورد دقیق‌تر از پیدایش و وسعت هاله‌های ژئوشیمیایی در محدوده مورد مطالعه تعیین شد. با توجه به نتایج حاصل از پردازش عناصر نامبرده، معادله به دست آمده برای تخمین عیار عنصر طلا بر حسب چهار پارامتر عیار آرسنیک، عیار آنتیموان و طول و عرض نقاط نمونه‌برداری، به صورت رابطه ۱۳ است و ضریب همبستگی اعتبارسنجی آن برابر با ۷۲ درصد گزارش شده است. این نتایج نشان دهنده برتری رفتارسنجی عناصر نسبت به ضرایب همبستگی از سایر روش‌های مرسوم است.

- Chilean Iron Belt, with emphasis on the El Algarrobo iron deposits (Atacama region, Chile)*". Mineral Deposita, Springer-Verlag, 30: 268-274.
- [22] Leiluo, X., Xianwu, B., Ruizhong, H., and Xingchun, Z. (2012). "Relationships between porphyry Cu-Mo mineralization in the Jinshajiang-Red River metallogenic belt and tectonic activity: Constraints from zircon U-Pb and molybdenite Re-Os geochronology". Ore Geology Reviews, Elsevier, 48: 460-473.
- [23] Tarkian, M., and Stribrny, B. (1999). "Platinum group elements in porphyry copper deposits: a reconnaissance study". Mineralogy & Petrology, Springer-Verlag, 65: 161-183.
- [24] Yaghini, M., Ghannad pour, F., and Khadmatlu, S. (2008). "Offering an clustering innovative method in data mining by using genetic algorithms to solve a real case study in the rail transportation industry". Iran Data Mining Conference. Amirkabir university, Tehran, 44-55. (in Persian).
- [25] Shina, H. W., and Sohn, S. Y. (2004). "Segmentation of Stock Trading Customers According to Potential Value". Expert Systems with Applications, 27: 27-33.
- [26] Shirazy, A. (2017). "Modeling and delineation of copper anomalies using modern methods in Mesgaran copper deposit, East Iran". Msc Thesis. Birjand University of Technology, South Khorasan, 110-250. (in Persian).
- [27] Mahvash Mohammadi, N., and Hezarkhani, A. (2015). "Estimation of grade gold in khooni deposit using the behavior of gold arsenic and antimony by clustering k-mean method". Journal of Analytic and Numerical Methods in Mining Engineering, 5(10): 77-92.
- [28] Ghanadpour, S. S. (2013). "Geochemical Investigations on parkam Porphyry Copper Deposit-Kerman". Msc Thesis, AmirKabir University of Technology, Tehran, 70-101. (in Persian).
- 108: 183-195.
- [10] Sfidari, E., Kadkhodaie-Ilkchi, A., and Najjari, S. (2012). "Comparison of intelligent and statistical clustering approaches to predicting total organic carbon using intelligent systems". Journal of Petroleum Science and Engineering, Elsevier, 63: 190-205.
- [11] Wegner, T., Hussein, T., Hämeri, K., Vesala, T., Kulmala, M., and Weber, S., (2012). "Properties of aerosol signature size distributions in the urban environment as derived by cluster analysis". Atmospheric Environment, Elsevier, 61: 350-360.
- [12] Geological Survey and Mineral Exploration of Iran (GSI), Geochemical 1:100000 Sheet. Tarq, Isfahan, Code 6356.
- [13] Kargar, R., Eshgh Abad, (1992). "Studies Tracking Report Tarq 1:100000 Sheet". GSI. (in Persian).
- [14] Babregani, and Molaei, (1990). "Tracking Report of Pahne-Mayme-Tarq Zone". GSI. (in Persian).
- [15] Hasani Pak, A. A., (1995). "Systematic Geochemical Exploration Report in 1:100000 Tarq Sheet". Geological Survey and Mineral Exploration of Iran (GSI).
- [16] Rahmati, and Zahedi, (1995). "Geology 1:100000 Map of Tarq Isfahan". Geological Survey and Mineral Exploration of Iran (GSI). (in Persian).
- [17] Egozcue, J. J., Pawlowsky-Glahn, V., and Mateu-Figueras, G. (2003). "Isometric Logratio Transformations for Compositional Data Analysis". Mathematical Geology, 35: 279-300.
- [18] Jain, A. K. (2012). "Data clustering: 50 years beyond K-Means". Pattern Recognition Letters, Elsevier, 31: 651-666.
- [19] Saha, S., and Bandy opadhyay, S. (2013). "A generalized automatic clustering algorithm in a multi objective framework". Applied Soft Computing, Elsevier, 13: 89-108.
- [20] Ghannadpour, S. S., Hezarkhani, A., and Farahbakhsh, E. (2013). "An investigation of Pb geochemical behavior respect to those of Fe and Zn based on k-Means clustering method". Journal of Tethys, 1(4): 291-302.
- [21] Menard, J. J. (1995). "Relationship between altered pyroxene diorite and the magnetite mineralization in the

¹ Brachiopode

² Trilobite

³ Coral

⁴ Tentaculite