



توسعه شبیه‌ساز وضعیت آزادشدگی کانی‌ها در آسیاهای گلوله‌ای

مهدی حسینی جیردهی^۱، سید محمد رضویان^{۲*}

۱- کارشناسی ارشد فرآوری مواد معدنی، گروه مهندسی معدن، دانشکده مهندسی، دانشگاه کاشان

۲- استادیار، گروه مهندسی معدن، دانشکده مهندسی، دانشگاه کاشان

(دریافت ۱۳۹۷/۰۸/۰۹، پذیرش ۱۳۹۷/۱۰/۱۵)

چکیده

به طور معمول برای طراحی مدار آسیاکنی از مدل‌هایی استفاده می‌شود که قادر به پیش‌بینی توزیع اندازه محصول خرد شده آسیا باشند. با توجه به فرآیندهای پایین‌دستی خردایش که شامل جدایش مواد معدنی بر اساس ترکیب کانی‌شناسی آن‌ها است، شناخت نحوه توزیع کانی‌ها در بخش‌های مختلف ابعادی نیز مهم است، بنابراین ضروری است که توسعه مدل ریاضی و شبیه‌سازی مفهوم طیف آزادشدگی کانی‌ها در آسیاها مورد توجه قرار گیرد. بر این اساس نرم‌افزار بومی شبیه‌سازی با نام CMCS توسعه یافته است. مدل درجه آزادی مورد استفاده در این نرم‌افزار نیازمند حداقل داده‌های آزمایشگاهی است اما توانایی محاسبه جزییات درجه آزادی کانی‌ها را دارد. این مدل برای ذرات آزاد و درگیر دوتایی کانی‌ها توسعه داده شده است. از ویژگی‌های این شبیه‌ساز کاربری آسان، تغییر سریع و آسان داده‌های ورودی، کنترل داده‌های اشتباه و نمایش نموداری نتایج شبیه‌سازی است. مقایسه نتایج نرم‌افزار CMCS با داده‌های صنعتی و همچنین نرم‌افزارهای مشابه مانند MODSIM نشان از دقت و صحت قابل قبول آن دارد.

کلمات کلیدی

شبیه‌سازی، آسیای گلوله‌ای، CMCS، طیف آزادشدگی کانی‌ها.

۱- مقدمه

است ابتدا مفهوم مدلسازی ریاضی طیف آزادشدگی کانی‌ها به روشنی بیان شود و سپس از روی آن نرم‌افزاری که به صورت بومی تهیه شده است، معرفی شود.

۲- روش تحقیق

۱-۱- مدلسازی طیف آزادشدگی کانی‌ها

روش موازنه جمعیتی به عنوان راهی برای محاسبه توزیع اندازه ذراتی که در مدار آسیاکنی پیوسته تولید می‌شوند، به طور جهانی پذیرفته شده است. این تکنیک بر مدلی که به تابع شکست- انتخاب برای آسیا موسوم است و همچنین بر مدلی که طبقه‌بندی توده‌ای از ذرات را در تمام واحدهای طبقه‌بندی موجود در یک چرخه بسته آسیاکنی توصیف می‌کند، تکیه دارد. این مدل‌ها توسط محققان به خوبی بررسی شده‌اند و مشخصات عمومی تابع انتخاب و تابع شکست برای بیشتر انواع آسیاهای مهم صنعتی شناخته شده است. رویکرد تجزیه و تحلیل مدار آسیا در کتابی توسط آستین، کیمپل و لوکی در سال ۱۹۸۴ به طور جامع شرح داده شده است [۸]. ضمیمه‌هایی برای تطبیق اثرات خود به خودی خردایش، در سال ۱۹۸۹ توسط گروه آستین به طور کامل بررسی و به مدل اصلی الحاق شده است که به طور گسترده‌ای مورد استفاده قرار گرفته است [۹].

در عمل فقط توزیع اندازه ذرات محصول مدار آسیا نیست که اهمیت دارد بلکه وقتی خردایش پیش از فرآیندهای پرعیارسازی مواد معدنی قرار می‌گیرد، طیف درجه آزادی اگر از درجه اهمیت بالاتری برخوردار نباشد، به همین میزان اهمیت دارد اما محاسبه طیف درجه آزادی در یک مدار آسیای بسته پیوسته کاری بسیار دشوارتر است. هیچ روش رضایت‌بخش و قابل اطمینانی تا به حال گسترش داده نشده است. این موضوع، کمبودی مهم در مدلسازی موازنه جمعیتی تجزیه و تحلیل مدار فرآیند مواد معدنی است در حالی که در سایر جنبه‌های مدلسازی خیلی موفق عمل کرده است.

توضیح ریاضی پدیده آزادشدگی مواد معدنی دشوار است اما با وجود دشواری‌ها پیشرفت زیادی در رابطه با این مساله حاصل شده است. اگرچه بیشتر مولفان توجه خود را معطوف به پیش‌بینی طیف درجه آزادی هنگامی که کانی در یک توزیع اندازه مشخص در یک آسیای ناپیوسته خرد شده، کرده‌اند، در این تحقیق این موضوع مد نظر نیست. هدف در این تحقیق پیش‌بینی طیف آزادشدگی کانی‌ها در شرایطی است که ذرات

هدف اصلی فرآوری مواد معدنی جدایش بخش‌های ذرات با ارزش کانسنگ از گانگ و پرعیارسازی آن‌ها برای تولید محصولی قابل فروش است. در فرآوری مواد معدنی مرحله پرعیارسازی معمولاً پس از مرحله خردایش مواد معدنی انجام می‌شود. در فرآیند خردایش، کانسنگ به ذرات کوچکی تبدیل می‌شود تا امکان آزادسازی اجزا با ارزش از گانگ فراهم شود. یکی از معیارهای بسیار مهم در صنعت فرآوری مواد معدنی ابعاد ذراتی است که سیستم خردایش باید فراهم سازد تا علاوه بر مسایل فنی، از لحاظ اقتصادی نیز مقرون به صرفه باشد. کاهش اندازه ذرات و آزادسازی به طور پیچیده‌ای با هم ارتباط دارند. اگر ابعاد کانسنگ به اندازه کافی کاهش نیابد، بخش نسبتاً زیادی از اجزای با ارزش سنگ استحصال نمی‌شود و باعث زیان خواهد بود. از سوی دیگر اگر ابعاد محصول خردایش خیلی ریز در نظر گرفته شود، نیاز به تجهیزات فراوان و مصرف انرژی زیاد ضروری خواهد بود، بنابراین برای اطمینان از فرآیند موثر خردایش، ویژگی‌های آزادسازی کانی و کاهش اندازه ذرات باید به خوبی بررسی و مطالعه شود [۱].

شناخت مفهوم آزادسازی و تلفیق آن با پیش‌بینی کاهش ابعاد، همگام با مدلسازی سایر فرآیندهای فرآوری معدنی نبوده است. بر این اساس سه دلیل قابل بیان به شرح زیر است:

۱- نبود مکانیزم دقیق و قابل اطمینان اندازه‌گیری آزادشدگی کانی‌ها بر مبنای کاهش اندازه، ۲- نبود توصیف معتبر و قابل اجرای مفهوم آزادسازی در خلال خردایش و ۳- پیچیدگی توصیف ریاضی آزادشدگی و به عبارتی مدلسازی آن. پیشرفت‌های اخیر در زمینه اندازه‌گیری و مدلسازی آزادسازی مواد معدنی شروع مثبتی را در این زمینه فراهم آورده است هرچند کارهای زیادی باقی مانده که باید انجام شود [۱]. با این تفاسیر اغلب نرم‌افزارهای شبیه‌سازی مدارهای خردایش که توسعه و منتشر شده‌اند بر مدل‌های کاهش اندازه تاکید دارند و کمتر موضوع طیف آزادشدگی کانی‌ها را مورد توجه قرار داده‌اند. از جمله این نرم‌افزارها می‌توان به USIM PAC [۲]، JKSImMet [۳]، BMCS [۴]، COMSIM [۵] و GrindSim [۶] اشاره کرد. تنها نرم‌افزار تجاری که موضوع طیف آزادشدگی کانی‌ها در آن اشاره شده است، MODSIM [۷] است. البته نسخه کامل این نرم‌افزار در کشور در اختیار نیست و تنها از نسخه نمایشی آن می‌توان استفاده کرد که دارای محدودیت‌های بسیاری است. در این مقاله سعی شده

از هر فراکسیون و توزیع اندازه عیار ذرات شکسته شده را اندازه‌گیری کرد. هرچند چنین اندازه‌گیری به شدت دشوار و خسته‌کننده است و در واقع هیچ اندازه‌گیری جامعی در این رابطه تاکنون انجام نشده است. یک ویژگی مهم رابطه ۱ ناحیه محدود R' در فضای $g-d_p$ است که انتگرال در آن عمل می‌کند. ناحیه R' هر ترکیب متناظر را با شکست ذره اولیه‌ای با عیار و اندازه g' و d_p' و تولید ذره‌ای با عیار g و اندازه d_p ارائه می‌کند. تجزیه و تحلیل شکل ناحیه R' در شناخت و تعبیر ریاضی تابع $b(g, d_p; g', d_p')$ نقش بسیار مهمی دارد. پیچیدگی این تعبیر با تجزیه تابع شکست به صورت رابطه ۲ به طور چشم‌گیری قابل کاهش است.

$$b(g, d_p; g', d_p') = b(g | d_p; g', d_p) b(d_p; g', d_p') \quad (2)$$

این رابطه به طور مؤثر سبب جداسازی فرآیندهای آزادشدگی و شکست کانی‌ها می‌شود که تقریب آن با رابطه ۳ نشان داده شده است:

$$b(d_p; g', d_p') = b(d_p, d_p') \quad (3)$$

رابطه ۳ وقتی درست است که توزیع اندازه محصول ناشی از یک شکست ساده و مستقل از ترکیب خوراک باشد. این مساله احتمالاً فرض خوبی برای خیلی از کانی‌هاست. در رابطه ۲ $b(g | d_p; g', d_p')$ چگالی توزیع مشروط است که به متغیر g در طبقه مربوط به d_p وابسته است که در نتیجه شکست ذره‌ای با اندیس g' و d_p' ایجاد شده است. برای کاربرد کامپیوتری رابطه ۱ یک تفاضل محدود مشابه برای محاسبات عملی مورد نیاز است. تفاضلهای محدود مناسب به خوبی شناخته شده‌اند و الگوریتم‌های محاسباتی با ثبات و قابل اعتمادی را در اختیار قرار داده‌اند. بر این اساس با انطباق رابطه آستین و لوکی متناسب با اهداف مورد نظر رابطه ۴ ارائه شده است [۱۰].

$$P_{ij} = \frac{f_{ij} + \tau \sum_{l=1}^{j-1} b_{jl} \sum_{k=K'_{ij}}^{K''_{ij}} S_{kl} b_{ijkl} p_{kl}}{1 + S_{ij} \tau} \quad (4)$$

در رابطه ۴، اندیس‌های i, j, k, l معرف متغیرهای g, d_p و g', d_p' اند؛ بنابراین رابطه ۵ به شرح زیر است.

در یک توزیع اندازه مشخص در یک فرآیند آسیابگری پیوسته به اندازه کوچک‌تری می‌رسند. آستین و لوکی در سال ۱۹۸۴ مقاله‌ای در مورد وضعیت مدل‌سازی آزادشدگی کانی‌ها ارائه داده‌اند و در صورت ناآشنایی با پیشرفت‌های حاصل در این زمینه، توصیه می‌شود که این مقاله مفید برای کسب اطلاعات مورد نیاز مطالعه شود [۸].

توضیح موازنه جمعیتی بنیادی خردایش مواد جامد در یک بخش مخلوط‌کننده کامل آسیای گلوله‌ای در رابطه ۱ آورده شده است. [۱۰]

$$P(g, d_p) + S(g, d_p)P(g, d_p)\tau - \tau \int_{R'} b(g, d_p; g', d_p') S(g', d_p') dg' dd_p' = f(g, d_p) \quad (1)$$

که در آن:

g : یک مقدار اسکالر در فاصله بین صفر و ۱
 $P(g, d_p)$: تابع چگالی توزیع دو جزئی وابسته به دو متغیر d_p و g مربوط به محتویات آسیا
 $S(g, d_p)$: نرخ مخصوص شکست ذرات در عیار g و اندازه d_p
 $f(g, d_p)$: تابع چگالی توزیعی دو جزئی
 τ : زمان ماند میانگین در مخلوط‌کننده کامل است.

در رابطه ۱ متغیرها به ترتیب اهمیت شامل متغیرهای مستقل اولیه، عیار (جرم ماده معدنی شکسته شده) و اندازه ذرات است. این متغیرها به ترتیب با g و d_p نمایش داده شده‌اند. در این تحقیق توجه محدود به کانی‌های دوتایی است. عیار ذره بر نرخ شکست تاثیر می‌گذارد زیرا دو ماده که از نظر نوع معدنی با هم تفاوت دارند معمولاً به یک اندازه شکننده نیستند. $f(g, d_p)$ تابع چگالی توزیعی دو جزئی است که توزیع ترکیب ذرات و اندازه آن‌ها را در خوراک مخلوط‌کننده کامل شرح می‌دهد [۱۰].

مساله اصلی و مهم در این رابطه درک تابع $b(g, d_p; g', d_p')$ است. این تابع، یک تابع چگالی دو جزئی وابسته به دو متغیر g و d_p است که توزیع این دو متغیر در ذرات حاصل شده از شکست یک ذره با عیار g' و اندازه d_p' را توضیح می‌دهد. این تابع را نمی‌توان از مدل‌های آزادشدگی معمولی ذرات بزرگ (تابع شکست معمولی) به دست آورد زیرا شکست ذرات را باید با هر ترکیب احتمالی از g' و d_p' در نظر گرفت. در اصل می‌توان $b(g, d_p; g', d_p')$ را با مشاهده تجربی مستقیم اندازه گرفت. بر این اساس ذرات را می‌توان به طور فیزیکی در فراکسیون‌های g' و d_p' دسته‌بندی کرد و ذرات تولیدشده

می‌شود. به طور معمول تعیین درجه آزادی با سری سرندهای استاندارد ذرات نمونه به بخش‌های مختلفی تقسیم می‌شود. برای هر یک از این بخش‌ها مقاطع میکروسکوپی تهیه و سپس این مقاطع در زیر میکروسکوپ مطالعه می‌شود. تهیه نمونه معرف، برش صحیح ذرات و مطالعه دقیق هر یک، پارامترهای بسیار مهمی‌اند که باید با تخصص و صبر انجام شود. با توجه به این موضوعات نحوه محاسبه درجه آزادی نیز مهم است. در اکثر موارد مشاهده می‌شود که درجه آزادی بر اساس شمارش ذرات آزاد و درگیر کانی با ارزش و گانگ تبیین می‌شود. در این روش سهم کانی با ارزش موجود در کانی درگیر به طور دقیق در نظر گرفته نمی‌شود. این کار باعث خطای زیادی می‌شود. طبق تعریف درجه آزادی نسبت جرمی کانی با ارزش آزاد به جرم کل کانی با ارزش است. امروزه نرم‌افزارهای پردازش تصویر می‌توانند با دقت بالایی سهم کانی با ارزش در ذرات درگیر را محاسبه کنند اما این نرم‌افزارها نیز هزینه‌برند. برای محاسبه دقیق‌تر درجه آزادی می‌توان سهم کانی با ارزش موجود در ذرات را به نسبت‌های مختلفی تقسیم کرد. هر چه این تقسیم‌بندی کمتر باشد، دقت بیشتر و البته هزینه و زمان نیز بیشتر می‌شود. این مفهوم ابتدا توسط اندروز و میکا ارایه شده است [۱۱]. بر این اساس به عنوان یک اقدام مناسب، تقسیم‌بندی ۱۲ تایی ذرات درگیر می‌تواند بسیار مناسب باشد. به این ترتیب که از صفر تا ۱۰۰ درصد به بازه‌های ۱۰ درصدی تقسیم‌بندی می‌شود. دو مقدار نقطه‌ای صفر و ۱۰۰ درصد به معنای کانی گانگ و کانی خالص با ارزش در نظر گرفته می‌شود. به عبارتی سهم کانی با ارزش در ذره به صورت درصد بیان می‌شود. ده بازه ۱۰ درصدی مقدار کانی با ارزش درگیر را در ذره نشان می‌دهد. به این ترتیب f_{ij} نشانگر مقدار کانی با ارزش موجود در طبقه اندازه i ام و سهم j درصدی است. به عنوان مثال $f_{34}=5$ به این معنا است که از کل کانی با ارزش موجود در طبقه اندازه چهارم سرندهی مقدار ۵ درصد آن در بخش ۱۰ تا ۲۰ درصد محتوای کانی قرار دارد. به این ترتیب برای توصیف بار ورودی آسیا به جای یک بردار ستونی که فقط به اندازه ذرات مرتبط بود، یک ماتریس مستطیلی وجود دارد که تعداد سطر ۱۲ و ستون آن برابر طبقات سرندهی است. مقادیر هر آرایه این ماتریس درصدی از کل کانی با ارزش آن طبقه اندازه است و بنابراین مجموع مقادیر هر ستون این ماتریس برابر ۱۰۰ خواهد شد. برای توصیف مدلسازی عیاری (درجه آزادی)، شناخت ماهیت شکست و سرعت شکست در هر یک از واحدهای این ماتریس ضروری است. به این ترتیب

$$\begin{aligned} b_{jl} &= b(d_p; d'_p) \\ b_{ijkl} &= b(g | d'_p; g', d'_p) \\ s_{kl} &= s(g', d'_p) \\ p_{ij} &= p(g, d_p) \\ f_{ij} &= f(g, d_p) \end{aligned} \quad (5)$$

که در آن:

f_{ij} : مقدار خوراک در بازه عیاری i ام و طبقه سرندهی j ام و b_{ij} : مقدار تابع شکست معمولی در طبقه سرندهی j ام و ستون i ام S_{kl} مقدار تابع انتخاب برای بازه عیاری k ام و طبقه سرندهی l ام b_{ijkl} : مقدار تابع شکست مربوط به بازه عیاری i ام و طبقه سرندهی j ام در بازه عیاری k و طبقه سرندهی l p_{kl} : مقدار محصول به دست آمده از طریق این رابطه در بازه‌های عیاری و طبقات سرندهی پیشین τ : مجموع زمان‌های ماند مخلوط‌کننده‌های کامل مدل توزیع زمان ماند است.

محاسبه مقادیر b_{ij} و S_{kl} به طور معمول در یک آسیای آزمایشگاهی و با استفاده از ذرات تک اندازه در بخش‌های مختلف سرندهی استاندارد انجام می‌شود. مقادیر تابع شکست چون مستقل از شرایط محیطی‌اند، به طور مستقیم در مدلسازی آسیای صنعتی قابل استفاده‌اند. در مقابل مقادیر تابع انتخاب به شدت وابسته به شرایط محیطی‌اند و به همین دلیل یا باید با ضرایبی افزایش مقیاس شوند و یا با محاسبه معکوس از روی داده‌های صنعتی تعیین شوند. مشکل اصلی مربوط به تعیین مقادیر b_{ijkl} است. این تابع معرف نحوه توزیع ذرات شکسته شده هم بر اساس اندازه و هم بر اساس توزیع کانی‌های تشکیل‌دهنده است. برای روشن شدن مطلب نیاز به شناخت مفهوم درجه آزادی کانی‌ها و مدلسازی آن است.

۲-۲- مفهوم مدلسازی درجه آزادی کانی‌ها

درجه آزادی کانی‌ها یک مفهوم بسیار مهم در تخصص مهندسی فرآوری مواد معدنی است. در بسیاری از گزارش‌ها بخشی به مطالعات درجه آزادی پرداخته می‌شود که در اکثر موارد هم روش تعیین درجه آزادی دقیق نیست و هم ارتباط منطقی میان نتایج آن و سایر بخش‌های گزارش وجود ندارد. واقعیت این است که بحث درجه آزادی پیچیدگی‌های بسیاری دارد و عدم توجه به این پیچیدگی‌ها باعث انحراف موضوع

۳- معرفی شبیه‌ساز CMCS

۳-۱- مقدمه

شبیه‌ساز CMCS با هدف شبیه‌سازی خریدار یک آسیای گلوله‌ای در مدار باز با کاربری آسان و اطلاعات خروجی مفید تهیه و کد نویسی شده است. در این شبیه‌ساز متناسب با اطلاعات موجود دو نوع مدل برای پیش‌بینی خروجی آسیا در نظر گرفته شده است. یک مدل موازنه جمعیتی معمول که با ورود اطلاعات تابع شکست معمولی و تابع انتخاب و زمان ماند قادر به پیش‌بینی خروجی آسیا فقط بر مبنای اندازه ذرات است (همانند اکثر شبیه‌سازهای موجود مانند USIM PAC, JKSimMet, BMCS). مدل دیگر که در واقع نکته متمایزکننده این شبیه‌ساز است، مدل مبتنی بر مفهوم طیف آزادشدگی کانی‌هاست که مبنای علمی آن در بخش روش تحقیق ارائه شده است. همان‌طور که در شکل ۱ مشاهده می‌شود، بخش‌های مختلف ورود اطلاعات متناسب با داده‌های موجود به راحتی قابل دسترس و تغییر است. همانند سایر شبیه‌سازهای مرتبط، این شبیه‌ساز نیز دارای قابلیت‌های کنترل داده‌های اشتباه ورودی و همچنین ارائه داده‌های خروجی به فرمت‌های مختلف جدول و یا شکل در دو یا سه بعد است.

ملاحظه می‌شود به عنوان نمونه برای تعیین داده‌های لازم برای یک نمونه با ۱۰ طبقه سرندي، ۱۲۰ آزمون شکست و مطالعه درجه آزادی لازم است. هرچند این تعداد آزمایش زیاد به نظر برسد اما در مورد یک نمونه خاص یک بار انجام آن‌ها کفایت می‌کند. با داشتن این اطلاعات مفید، در آینده می‌توان انواع مدارهای خریدار و پرمیاسازی را طراحی و یا شبیه‌سازی کرد. به طور کلی افزایش کیفیت مدل متناسب با افزایش داده‌های آن است. پر واضح است که افزایش داده‌ها نیز مستلزم صرف زمان و هزینه است. نرم‌افزار شبیه‌ساز CMCS برای مدلسازی آسیا بر مبنای توزیع درجه آزادی کانی‌ها، طراحی و تهیه شده است. کلمه CMCS مخفف عبارت "Continuous Milling Circuits Simulation" است. این نرم‌افزار بر پایه زبان‌های برنامه‌نویسی php و JavaScript نوشته شده است. زبان php یک زبان برنامه‌نویسی است که برای طراحی وب توسعه یافته است اما می‌توان از آن به عنوان یک زبان عمومی نیز استفاده کرد. JavaScript زبان برنامه‌نویسی سطح بالا، پویا، مبتنی بر شی، وابستگی کم به نوع، چند رویه و تفسیری است. در کنار HTML و CSS، JavaScript یکی از سه هسته صفحات دنیای وب است. هدف این نرم‌افزار پیش‌بینی ابعادی و عیاری محصول خروجی آسیا است که کاربرد گسترده‌ای در کارخانه‌های فرآوری دارد [۱۲].

شکل ۱: تصویر جدول طراحی شده برای وارد کردن اطلاعات اولیه CMCS

The screenshot shows the CMCS software interface. At the top, there is a title bar "Continuous Milling Circuits Simulation" and a menu bar with "CMCS" and "ذخیره اطلاعات و ادامه". Below the menu bar, there is a text area with the title "اطلاعات خوراک ورودی" and the instruction "مقادیر باقیمانده بر روی سرندي در هر طبقه سرندي بر اساس طيف آزادسازي کاني اندازه گيري شده را وارد کنید." Below this is a table with the following structure:

مقادير باقیمانده بر روی سرندي					بازه های عیاری	%
۳۵۴	۵۰۰	۷۰۷	۱۰۰۰	۱۴۱۴	۲۰۰۰	۰
						۱۰ - ۰
						۴۰ - ۱۰
						۳۰ - ۴۰
						۴۰ - ۳۰
						۵۰ - ۴۰
						۶۰ - ۵۰
						۷۰ - ۶۰
						۸۰ - ۷۰
						۹۰ - ۸۰
						۱۰۰ - ۹۰
						۱۰۰

On the right side of the interface, there is a sidebar with a "test" button and several menu items: "بار ورودی", "بار ورودی با طبقه بندی عیاری", "تابع انتخاب", "تابع انتخاب با طبقه بندی عیاری", "تابع شکست", "تابع شکست با طبقه بندی عیاری", and "مشاهده نتایج شبیه سازی".

۳-۲- الگوریتم شبیه‌سازی CMCS

```

 $p_{ij} := f_{ij}$  for all  $i$  and  $j$ 
For  $l = 1$  to  $ND-1$ 
  For  $k = 1$  to  $NG$ 
    Procedure  $S_{kl}$ 
       $p_{kl} := p_{kl} / (1 + S_{kl})$ 
      For  $j = l+1$  to  $ND$ 
        Procedure  $b_{jl}$ 
          Find  $I'_{jkl}$  to  $I''_{jkl}$ 
          For  $i = I'_{jkl}$  to  $I''_{jkl}$ 
            Procedure  $b_{ijkl}$ 
               $p_{ij} := p_{ij} + b_{ijkl} b_{jl} S_{kl} p_{kl}$ 
            End  $i$  loop
          End  $j$  loop
        End  $k$  loop
      End  $l$  loop

```

شکل ۲: الگوریتم محاسباتی برای پیش‌بینی خروجی آسیای گلوله‌ای با لحاظ طیف آزادشدگی کانی‌ها

داده شده است. این مدار بخشی از مدار خریداریش ثانویه و پری‌عاریساز سنگ آهن تاکنونیت کارخانه فارلین^۱ واقع در منطقه معدنی اولس^۲ در ایالت مینه‌سوتا ایالات متحده است. برای شبیه‌سازی این مدار در منبع اصلی از تمامی جریان‌های آن نمونه‌برداری شده و مطالعات طیف آزادشدگی کانی مگنتیت (به عنوان کانی با ارزش آهن‌دار) انجام شده و نتایج آن با شبیه‌سازی مقایسه شده است اما در اینجا متناسب با توانایی شبیه‌ساز CMCS فقط مشخصات بار ورودی و محصول آسیا مورد توجه و بررسی قرار گرفته است. همان‌طور که در فلوشیت شکل ۳ مشخص است بار ورودی به آسیای گلوله‌ای از اختلاط سه جریان کنسانتره کوبر، تهریز هیدروسیکلون و کنسانتره مغناطیس آبیگر تولید می‌شود.

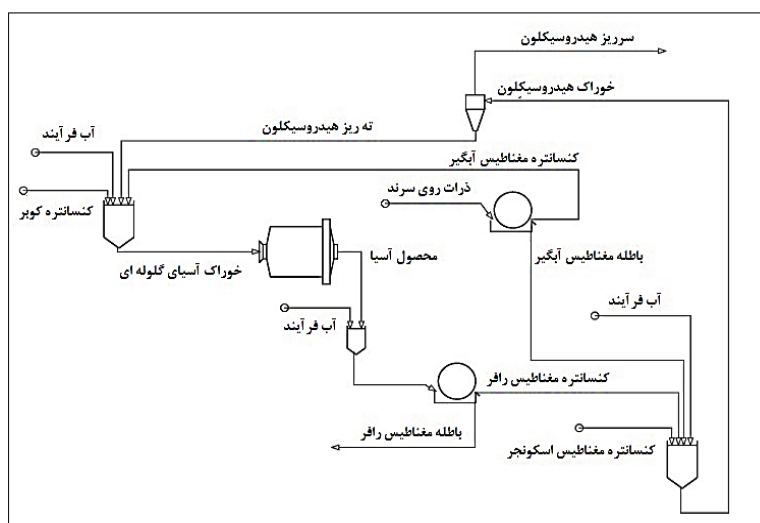
در منبع اصلی به طور مستقیم به توزیع عیار کانی در جریان ورودی به آسیای گلوله‌ای اشاره نشده است و این کار بر اساس موازنه جرم توسط خود MODSIM انجام شده است به همین علت با توجه به نیاز اطلاعاتی خود جریان ورودی آسیا، به صورت جداگانه اطلاعات عیاری بر اساس موازنه جرم و سهم هر جریان محاسبه و در CMCS استفاده شده است. جدول ۱ مقادیر توزیع عیاری کانی مگنتیت در جریان ورودی به آسیای گلوله‌ای نشان می‌دهد.

برای تعیین مقادیر تابع شکست از برازش مدل معروف

با توجه به اینکه در شبیه‌ساز CMCS، دو نوع مدل برای شبیه‌سازی خریداری آسیای گلوله‌ای در نظر گرفته شده است، بنابراین الگوریتم محاسباتی مورد استفاده نیز به دو صورت کدنویسی شده است. یک الگوریتم که برای محاسبه اندازه ذرات خروجی آسیا بدون ملاحظه طیف آزادشدگی کانی‌ها است. این الگوریتم به صورت بازگشتی در منابع مدل‌سازی خریداری مواد معدنی به خوبی ارایه و توضیح داده شده است [۷]. الگوریتم دوم مربوط به خریداری مواد معدنی درون آسیا با لحاظ طیف آزادشدگی کانی‌ها است. رابطه ۱، رابطه اصلی خریداری مواد معدنی درون یک آسیای گلوله‌ای با در نظر گرفتن طیف آزادشدگی است. برای استفاده این رابطه در محیط نرم افزار نیاز به تبدیل رابطه به تفاضل‌های محدود است. همان‌طور که در بخش روش تحقیق اشاره شد رابطه ۴ به خوبی این ارتباط را برقرار کرده است. در محیط شبیه‌ساز CMCS برای کاربرد رابطه ۴ از الگوریتم نشان داده شده در شکل ۲ استفاده شده است. همان‌گونه که در شکل ۲ مشاهده می‌شود برای محاسبه تغییرات در هر بخش اندازه- عیار از حلقه‌های برگشتی استفاده شده است. در این الگوریتم ND تعداد طبقات سرندی نمونه و NG تعداد بازه‌های عیاری برای مطالعه طیف آزادشدگی کانی‌ها است. لازم به توضیح است که بر اساس توضیحات بیان شده در بخش روش تحقیق، مقدار NG در CMCS برابر با ۱۲ در نظر گرفته شده است.

۴- اعتبارسنجی شبیه‌ساز CMCS

برای ارزیابی دقت و صحت داده‌ها و نتایج نرم‌افزار CMCS مقایسه خروجی آن با داده‌های واقعی و شبیه‌ساز MODSIM بررسی و مشاهده شد. عملکرد هر نرم‌افزار از دو جنبه باید بررسی شود. یک جنبه مربوط به صحت کدنویسی آن است که در آن باگی وجود نداشته باشد و جنبه مهم‌تر صحت عملیاتی و اعتبار خروجی آن است. با توجه به اینکه تولید داده‌های دقیق مورد نیاز این شبیه‌ساز بسیار سخت و البته هزینه‌بر بود بنابراین تصمیم بر این شد تا از داده‌های دقیق موجود در پایان‌نامه آقای اشنایدر استفاده شود. [۱] بر این اساس داده‌های مربوط به یک آسیای پیوسته صنعتی که در آن فرآیند خریداری کانسنگ تاکنونیتی انجام شده بود، مورد استفاده قرار گرفت. فلوشیت این مدار در شکل ۳ نشان



شکل ۳: فلوشیت مدار خردایش تاکنونیت در کارخانه فارلین

جدول ۱: توزیع طیف آزادشدگی کانی مگنتیت در بار ورودی آسیای گلوله‌ای مدار خردایش تاکنونیت کارخانه فارلین

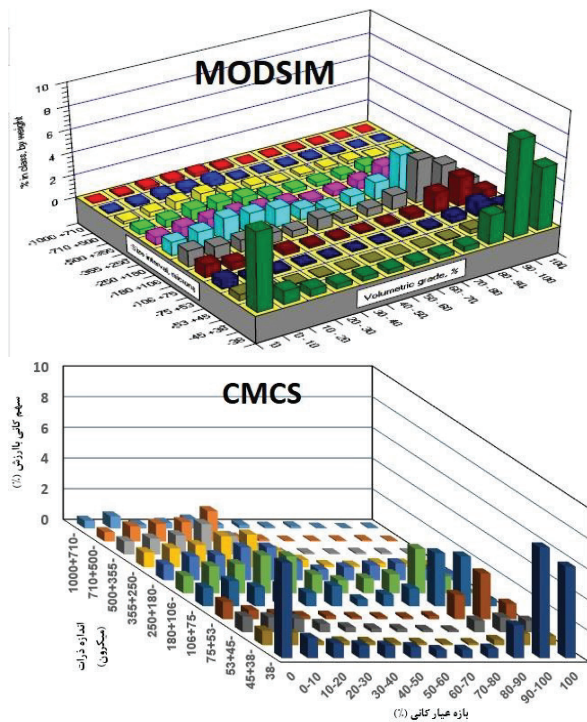
g _v	Size Rang (microns)										
	(%)	-1000+710	-710+500	-500+355	-355+250	-250+180	-180+106	-106+75	-75+53	-53+45	-45+38
0	0.00	0.00	0.08	0.00	0.08	0.18	2.54	3.23	2.81	1.35	9.37
0-10	0.09	0.09	0.01	2.00	9.66	5.87	3.96	2.10	3.79	3.55	2.33
10-20	3.31	0.75	1.53	3.72	3.12	5.12	3.41	3.71	4.65	2.02	2.48
20-30	38.56	24.76	42.25	27.35	14.90	9.62	4.49	2.73	2.60	0.25	0.19
30-40	46.33	64.93	34.64	26.67	23.83	11.37	3.61	0.89	0.56	0.33	0.56
40-50	10.70	4.65	11.50	20.92	9.76	11.96	2.07	0.77	0.39	0.58	0.05
50-60	0.56	4.43	7.85	9.16	10.46	6.40	1.38	0.11	0.94	0.22	0.06
60-70	0.13	0.18	2.00	5.34	9.63	11.04	1.60	0.07	0.54	0.40	0.11
70-80	0.09	0.12	0.11	2.90	7.97	4.05	6.55	0.46	1.54	1.76	1.38
80-90	0.11	0.05	0.02	1.89	10.17	22.28	29.15	13.71	12.04	13.22	13.41
90-100	0.11	0.01	0.00	0.04	0.42	12.06	41.24	67.66	64.61	51.86	54.49
100	0.00	0.03	0.01	0.00	0.00	0.06	0.00	4.55	5.53	24.45	15.57

جدول ۲: پارامترهای مدل سینتیکی آسیای گلوله‌ای [۱]

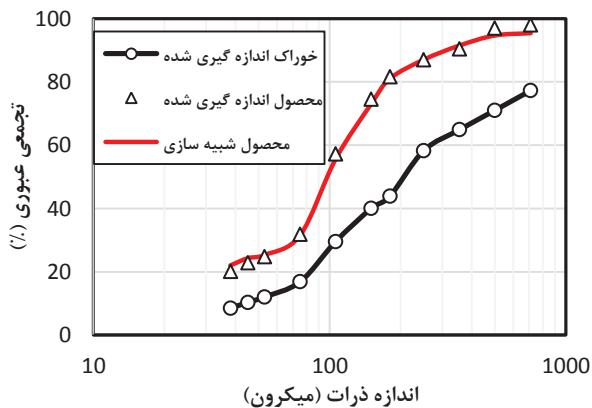
پارامترهای تابع انتخاب	$\alpha = 1.28855$ $S_1 = 1.28076 \text{ min}^{-1}$
پارامترهای تابع شکست	$\phi = 0.46085$ $\beta = 0.44601$ $\gamma = 0.98684$
زمان ماند میانگین در سه سلول سری مخلوط کامل	$\tau_1 = 0.0548$ $\tau_2 = 0.8492$ $\tau_3 = 3.0960$
زمان ماند میانگین کل (دقیقه)	$\tau_1 = 4.0$

برادبنت و کلکات بر داده‌های آزمایشگاهی استفاده شده است [۳]. مقادیر پارامترهای این مدل در جدول ۲ نشان داده شده است. همچنین برای تابع انتخاب از مدل ساده شده آستین به صورت رابطه ۶ استفاده شده است. مقادیر پارامترهای این مدل نیز در جدول ۲ ارایه شده است [۱].

$$S_i = S_1 \left(\frac{d_p}{1000} \right)^\alpha \quad (6)$$



شکل ۵: نتایج شبیه‌سازی عیاری خروجی آسیای گلوله‌ای مدار فارلین با MODSIM و CMCS



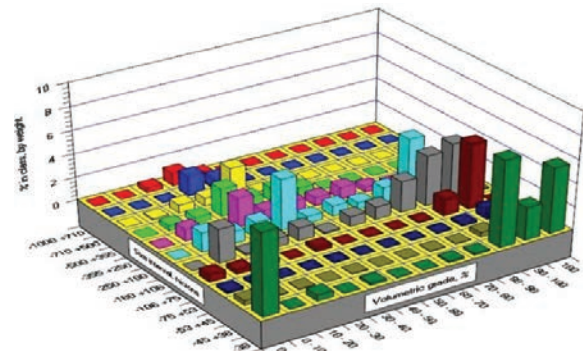
شکل ۶: مقایسه نتایج شبیه‌سازی CMCS با داده‌های صنعتی

است. همان‌طور که در شکل مشخص است، صحت و دقت شبیه‌ساز در این حالت بسیار قابل توجه است. دقت شبیه‌ساز به اعتبار مدل سینتیکی شبیه‌سازی آسیا مربوط می‌شود که قابل توجه است.

۵- نتیجه‌گیری

با توجه به اهمیت موضوع طیف آزادشدگی کانی‌ها در

زمان ماند آسیا نیز بر سلول سری مخلوط‌کننده کامل مدل شده است که زمان ماند هر یک از این سلول‌ها و در نتیجه زمان ماند میانگین کل آسیا در جدول ۲ نشان داده شده است. شکل ۴ توزیع عیاری کانی مگنتیت اندازه‌گیری شده را در خروجی آسیای مدار خردایش کارخانه فارلین نشان می‌دهد. در شکل ۵ توزیع عیاری خروجی آسیا را که با دو شبیه‌ساز MODSIM و CMCS انجام شده است نشان می‌دهد. همان‌طور که در شکل ۵ مشخص است نتایج هر دو شبیه‌ساز MODSIM و CMCS با داده‌های واقعی اندازه‌گیری شده برای خروجی آسیای گلوله‌ای مقادری اختلاف دارد اما نتایج دو شبیه‌ساز انطباق قابل توجهی دارد.



شکل ۴: توزیع عیاری کانی مگنتیت اندازه‌گیری شده در خروجی آسیای گلوله‌ای مدار فارلین [۱]

اختلاف نتایج شبیه‌ساز در دو نرم‌افزار MODSIM و CMCS، به قابلیت مدل‌های مورد استفاده در شبیه‌سازی مربوط می‌شود. همان‌طور که در بخش روش تحقیق اشاره شد مدل‌سازی عیاری کانی‌ها پیچیدگی‌های خود را دارد و مدل‌های ارایه شده تاکنون نتوانسته است که همه این پیچیدگی‌ها و خطاها را برطرف کند. هرچند تلاش‌ها در این زمینه در میان محققان برجسته ادامه دارد اما مشابهت نتایج مدل‌سازی شبیه‌ساز MODSIM و CMCS، نشان‌دهنده صحت و دقت مدل استفاده شده در محیط CMCS است. علاوه بر این محصول خروجی آسیا به صورت غیرعیاری نیز با CMCS شبیه‌سازی شد که نتیجه آن به صورت مقایسه‌ای با داده‌های واقعی در شکل ۶ نشان داده شده است. در شکل ۶ نقاط مربوط به داده‌های اندازه‌گیری شده و خط‌ها مربوط به شبیه‌ساز CMCS برای هر دو جریان ورودی و خروجی آسیا

Their Operation and Optimisation". JKMRM Monograph Series in Mining and Mineral Processing, University of Queensland, Australia, 387-391.

- [4] Farzanegan, A. (1998). "Knowledge-based optimization of mineral grinding circuits". Ph.D. Thesis, McGill University, Montreal, Canada, 3-15.
- [5] Razavian, S. M. (2005). "Steady-state simulation of grinding circuits in spreadsheets". MSc. Thesis, Mining and Metallurgical Eng. Dept. of Amirkabir University of Technology, Tehran, Iran, pp. 125.

[6] گل‌نژاد س.، بنیسی ص.؛ ۱۳۹۲؛ "شبیه‌سازی مدار آسیاهای گلوله‌ای با نرم‌افزار GrindSim". نهمین کنفرانس دانشجویی مهندسی معدن، دانشگاه بیرجند، ۶-۸ آذرماه، ص ۱۱.

- [7] King, R. P. (2002). "Modeling and Control of Mineral Processing Systems". Butterworth-Heinemann, 45-80.
- [8] Austin, L. G., Klimpel, R. R., and Luckie, P. T. (1984). "Process engineering of size reduction, Chapter 9, Methods for Direct Experimental Determination of the Breakage Functions". SME-AIME, New York, USA, pp. 561.
- [9] Austin, L. G., Julianelli, K., and Schneider, C. L. (2006). "Simulation of wet ball milling of iron ore at Carajas, Brazil". International Journal of Mineral Processing, 84: 157-171.
- [10] King, R. P. (1990). "Calculation of the liberation spectrum in products produced in continuous milling circuits". In Proceedings 7th European Symposium, 2: 429-444.
- [11] Andrews, J. R. G., and Mika, T. S. (1975). "Comminution of a Heterogeneous Material: Development of a Model for Liberation Phenomena". 11th International Mineral Processing Congress, Cagliari, pp. 59.

[۱۲] حسینی جیردهی، م.؛ ۱۳۹۶؛ "مدل‌سازی آسیای گلوله‌ای با استفاده از تابع توزیع عیار ماده معدنی". پایان‌نامه کارشناسی ارشد، دانشگاه کاشان، ص ۹۳-۷۱.

فرآوری مواد معدنی و ارتباط آن با عیار ماده با ارزش موجود در ماده معدنی، نرم‌افزار شبیه‌ساز CMCS بر مبنای پیش‌بینی توزیع کانی‌ها در خروجی آسیای گلوله‌ای، طراحی و تولید شد. مدلسازی مفهوم طیف آزادشدگی کانی‌ها پیچیدگی‌های زیادی دارد. از جمله این مشکلات، فرض تصادفی بودن این فرآیند در مدلسازی مبتنی بر موازنه جمعیتی است. هرچند تلاش‌های بسیاری برای درک بهتر مفهوم طیف آزادشدگی کانی‌ها انجام شده و همچنان ادامه دارد. بر این اساس در شبیه‌ساز CMCS با توجه به مدل ارایه شده توسط آقای کینگ و همکاران که در محیط MODSIM استفاده شده است، سعی شد تا این مدل در محیط نرم‌افزاری جدید و بومی تهیه و در اختیار محققان قرار گیرد. مدل مورد استفاده با فرض ترکیب دوتایی ماده معدنی (کانی-گانگ) در نظر گرفته شده است. مقایسه نتایج این شبیه‌ساز با داده‌های واقعی و شبیه‌ساز MODSIM نشان‌دهنده دقت و صحت مدل مورد استفاده بود. هرچند نتایج هر دو شبیه‌ساز با مقدار واقعی اندکی اختلاف داشت که این عدم انطباق ناشی از ضعف در دقت مدلسازی بود. در مقایسه با سایر نرم‌افزارهای شبیه‌سازی آسیا، شبیه‌ساز CMCS دارای مزایایی از جمله کاربری آسان، منوهای فارسی و ارایه نتایج به صورت جدول و نمودارهای دو و سه بعدی است. همچنین CMCS بر خلاف MODSIM بدون هیچ‌گونه محدودیتی به راحتی در کشور قابل استفاده است. در نهایت این شبیه‌ساز به عنوان ابزاری بسیار مناسب برای طراحی، بهینه‌سازی و کنترل مدارهای آسیاکنی می‌تواند استفاده شود.

۶- مراجع

- [1] Schneider, C. L. (1995). "Measurement and Calculation of Liberation". PhD Thesis, The University of Utah, Utah, 255-327.
- [2] BRGM, Caspeo, (2004-2011). USIM PAC 3.2 user manual of steady mineral processing simulator (Starting Guide). Orleans Cedex2france, 1-25.
- [3] Napier-Munn, T., J., Morrel, S., Morrison, R. D., and Kojovic, T. (2006). "Mineral Comminution Circuits:

¹ Fairlane

² Eveleth



DOI: 10.30479/jmre.2019.9557.1191

Development of Minerals Liberation Spectrum Simulator in Ball Mills

Hoseini Jirdehi M.¹, Razavian S.M.^{2*}

1- M.Sc, Dept. of Mining Engineering, University of Kashan, Kashan, Iran
mehdi.hoseini24@gmail.com

2- Assistant Professor, Dept. of Mining Engineering, University of Kashan, Kashan, Iran
razavian@kashanu.ac.ir

(Received: 31 Oct. 2018, Accepted: 05 Jan. 2019)

Abstract: When comminution precedes mineral beneficiation processes, the liberation spectrum of the particles in a comminution process is of great importance. The calculation of the liberation spectrum in a continuous closed milling circuit is a vastly more difficult task. Here, a method has been incorporated into the CMCS simulation software to calculate the product size distribution and liberation spectrum in ball mills. The model requires a minimum amount of experimental data and is capable of calculating the detailed liberation spectrum. While, other existing methods account only for the completely liberated particles and a broad group of unliberated particles are not represented. An easy-to-use ball mill simulation environment has been developed and the results are compared with measured grinding data and previously existing simulators, particularly MODSIM, demonstrating firmly tested performance both in terms of accuracy and precision of obtained results.

Keywords: Simulation, Ball mill, CMCS, Minerals Liberation Spectrum.

INTRODUCTION

The purpose of a mineral processing plant is to separate the valuable component of the ore from the gangue, and to concentrate them to make a saleable product. The concentration steps are usually preceded by a comminution stage to break the ore to a size small enough to free or “liberate” the valuable components from the gangue. In mineral processing jargon, the term “liberation” is used as synonymous to the study of mineral particle composition. In the same way, “liberation spectrum” is used in a broad manner to refer to the distribution of particle grades in a particle population [1]. One of the most critical design criteria for mineral processing plants is the choice of size to which the comminution step must reduce the host (grind size) to ensure an economic level of liberation. The size reduction and liberation processes are inextricably linked. To ensure an efficient process, therefore, mineral liberation and its association with size reduction should be well characterized. However, the understanding of liberation, and its coupling to the prediction of size reduction, has not kept pace with the modelling of other operations in mineral processing, for three main reasons: first; the lack, until recently, of accurate and convenient means to measure the degree of liberation in process streams on a size-by-size basis, second: the lack of a validated and manageable

description of the process of liberation during comminution, and the last reason is: the complexity of the problem of describing of liberation [2]. With this interpretation, most of the grinding softwares are based on the size reduction phenomena regardless of the mineral liberation spectrum (USIM PAC [3], JKSimMet [2], BMCS [4], COMSIM [5], GrindSim [6]). Although the liberation models have not yet been widely applied, some of them have been included in computer simulation packages. Principally this includes King and Schneider’s model which is incorporated in MODSIM [7]. In this paper an easy-to-use software (CMCS) has been developed based on minerals liberation spectrum.

METHODS

The population balance model is now universally accepted as the appropriate method for the calculation of the particle size distribution that will be produced in a continuously operating milling circuit. This method relies on the so-called breakage-selection function model for the mill and on a model that will describe the classification of a particle population in any classification unit in the closed milling circuit. These models have been well researched and the general characteristics of the selection function and breakage function are known for most industrially important mill types. This approach to milling circuit analysis is comprehensively described by Austin, Klimpel and Luckie [8]. Extensions to the original models to accommodate autogenous comminution effects have been thoroughly researched particularly by Austin’s group and appropriate models are now available and widely used [9].

The fundamental population balance description of the comminution of composite solid materials in a perfectly mixed segment of a ball mill is given by Equation 1.

$$P(g, d_p) + S(g, d_p)P(g, d_p)\tau - \tau \int_{R'} b(g, d_p; g', d'_p) S(g', d'_p) dg' dd'_p = f(g, d_p) \tag{1}$$

In Equation (1) the variables have the following significance: the primary independent variables are the grade (mass fraction of mineral) and size of the particle. These are represented by *g* and *dp* respectively. Here, we restrict attention to binary ores so that *g* is a scalar quantity in the range [0,1]; *p(g,dp)* is the bivariate distribution density function with respect to the two variables *g* and *dp* in the mill contents. *S(g,dp)* is the specific rate of breakage of particles of grade *g* and size *dp*. The grade of the particle affects the rate of breakage because the two different mineralogical components will usually not be equally brittle; *f(g,dp)* is the bivariate distribution density function that describes the distribution of particle composition and size in the material that is fed to the perfectly mixed zone; τ is the mean residence time in the perfectly mixed region. The function *b(g,dp;g',d'p)* is the main concern here. It is a bivariate density function in the two variables *g* and *dp* and it describes the distribution of these two variables in the progeny particles that results from the fracture of a particle of grade exactly equal to *g'* and size equal to *d'p*. A finite difference analogue to Equation (1) is required for practical calculations. Suitable finite difference representations are well known and provide convenient stable computational algorithms. We adopt the notation of Austin and Luckie (1986) and represent Equation (1) by [10]:

$$p_{ij} = \frac{f_{ij} + \tau \sum_{l=1}^{j-1} b_{jl} \sum_{k=K'_{ij}}^{K''_{ij}} S_{kl} b_{ijkl} p_{kl}}{1 + S_{ij} \tau} \tag{2}$$

In Equation (2) the subscripts *i, j, k* and *l* index the variables *g, dp, g'* and *d'p* respectively.

The model for liberation by comminution of two-phase particles based on Equation 2 developed in CMCS (Continuous Milling Circuits Simulation) for the calculation of the liberation spectrum of products produced in a continuous ball mill. CMCS has been coded based on php and javascript [11].

FINDINGS AND ARGUMENT

From a software engineering point of view, verification and validation (V&V) is a required step in the development of any computer program. A considerable effort was spent to check consistency and finding

semantic and syntactic errors of CMCS. To verify the performance of CMCS, many tests were run to detect various errors and bugs. To demonstrate the validity of CMCS simulation results, a number of real grinding circuits were simulated. Here, the results simulations using CMCS and MODSIM software and their comparison with measured particle size distribution are presented. The grinding circuit of the Fairlane Plant, located at mile 4 on county road 17, south of Eveleth (USA), was chosen to be the subject of CMCS validation. It was assumed that the transport in the mill can be described by three perfectly mixed regions in series. The breakage function model chosen for the Taconite ore was Broadbent and Calcot's three parameter normalizable function. The selection function for the Taconite ore was modeled by:

$$S_i = S_1 \left(\frac{d_p}{1000} \right)^\alpha \quad (3)$$

It is interesting that the best model for the selection function did not require a description for an abnormal breakage region, perhaps due to the comparatively small particle sizes in the mill's feed. The final parameters for the comminution model of the ball mill are shown in Table 1, including breakage function and selection function parameters, and the residence times in the mill.

Table 1. The comminution model parameters for the ball mill used in CMCS simulation [1]

Selection function parameters	$\alpha = 1.28855$ $S_1 = 1.28076 \text{ min}^{-1}$
Breakage function parameters	$\phi = 0.46085$ $\beta = 0.44601$ $\gamma = 0.98684$
Average residence time in perfectly mixed region n (min)	$\tau_1 = 0.0548$ $\tau_2 = 0.8492$ $\tau_2 = 3.0960$
Total residence time (min)	$\tau_1 = 4.0$

The measured and simulated size/grade spectrum in the Ball Mill Discharge is shown in Figure 1. The calculated spectrum is considerably smoother than the measured spectrum, and the main reason for this is the smooth nature of the liberation model, which is continuous in both size and grade domains, and consequently dampens the noise from stereological correction that is imputed through the measured spectrum of the feed streams. Clearly, the simulation results obtained from CMCS are highly in agreement with the results obtained from the MODSIM simulator.

CONCLUSIONS

The method has been incorporated into the CMCS simulation software and thus the product size distribution and liberation spectrum can be calculated in ball mills. The model requires a minimum amount of experimental data but is capable of calculating the detailed liberation spectrum. While, other existing methods account only for the completely liberated material and a broad group of particles that contains all incompletely liberated particles. The authors developed an easy-to-use ball mill simulation environment. By comparing the outputs of CMCS with measured grinding data and previously existing simulators, particularly MODSIM, its performance was firmly tested both in terms of accuracy and precision of obtained results.

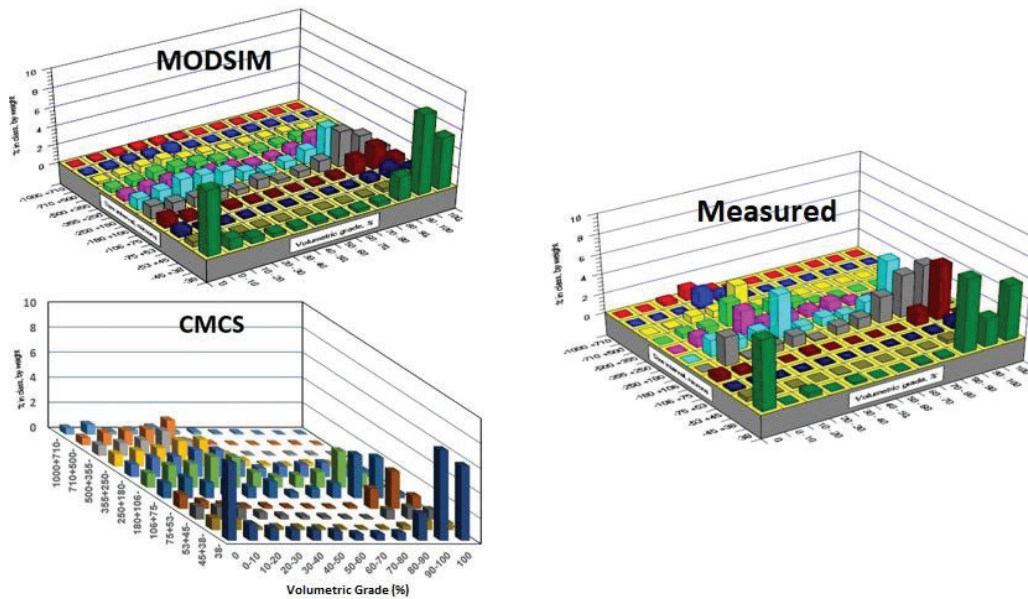


Figure 1. The measured and simulated (MODSIM-CMCS) particle size/grade spectrum in the Ball Mill Discharge

REFERENCES

- [1] Schneider, C. L. (1995). "Measurement and Calculation of Liberation". PhD Thesis, The University of Utah, Utah, 255-327.
- [2] Napier-Munn, T. J., Morrel, S., Morrison, R. D., and Kojovic, T. (2006). "Mineral Comminution Circuits: Their Operation and Optimisation". JKMR Monograph Series in Mining and Mineral Processing, University of Queensland, Australia, 387-391.
- [3] BRGM, Caspeo, (2004-2011). USIM PAC 3.2 user manual of steady mineral processing simulator (Starting Guide). ORLEANS CEDEX2FRANCE, 1-25.
- [4] Farzanegan, A. (1998). "Knowledge-based optimization of mineral grinding circuits". Ph.D. Thesis, McGill University, Montreal, Canada, 3-15.
- [5] Razavian, S. M. (2005). "Steady-state simulation of grinding circuits in spreadsheets". MSc. Thesis, Mining and Metallurgical Engineering. Department of Amirkabir University of Technology, Tehran, Iran, pp. 125.
- [6] Golnejad, S., Banisi, S., (2013), "Simulation of open circuit Ball Mills using GrinSim Software". 9th Student Mining Engineering Conference, Birjand- Iran, p. 11.
- [7] King, R. P. (2002). "Modeling and Control of Mineral Processing Systems". Butterworth-Heinemann, 45-80.
- [8] Austin, L. G., Klimpel, R. R., and Luckie, P. T. (1984). "Process engineering of size reduction, Chapter 9, Methods for Direct Experimental Determination of the Breakage Functions". SME-AIME, New York, USA, pp. 561.
- [9] Austin, L. G., Julianelli, K., and Schneider, C. L. (1989). "Simulation of wet ball milling of iron ore at Carajas, Brazil". International Journal of Mineral Processing, 84: 157-171.
- [10] King, R. P. (1990). "Calculation of the liberation spectrum in products produced in continuous milling circuits". In Proceedings 7th European Symposium, 2: 429-444.
- [11] Hoseini Jirdehi, M. (2017). "Ball Mill Modelling using Minerals Grade Spectrum". MSc. Thesis, University of Kashan, Iran, 71-93.