



DOI: 10.30479/jmre.2019.9879.1209

کاربرد طبقه‌بندی تصاویر کف فلوتاسیون بر اساس مشخصه‌های تصویری در ارزیابی عملکرد سلول فلوتاسیون

علی جاهد سراوانی^۱، محمد مسینایی^۲، جعفر خلیل‌پور^۳

۱- استادیار، گروه مهندسی کنترل، دانشگاه پدافند هوایی خاتم الانبیاء تهران

۲- دانشیار فرآوری مواد معدنی، گروه مهندسی معدن، دانشگاه بیرجند

۳- دانشیار، گروه مهندسی مخابرات، دانشگاه پدافند هوایی خاتم الانبیاء تهران

(دریافت ۱۳۹۷/۱۰/۱۱، پذیرش ۱۳۹۷/۱۱/۱۳)

چکیده

فلوتاسیون از جمله مرسوم‌ترین روش‌های پرعبارسازی کانی‌های فلزی در کارخانه‌های فرآوری مواد معدنی است. کنترل پیوسته مدارهای فلوتاسیون برای رسیدن به کارایی متالورژیکی مطلوب اهمیت بسزایی دارد. تحقیقات نشان داده است که همبستگی معناداری بین مشخصات تصویری کف سطح سلول‌های فلوتاسیون با شرایط عملیاتی و شاخص‌های کارایی متالورژیکی فرآیند وجود دارد. هدف از انجام پژوهش حاضر توسعه الگوریتم‌ها برای استخراج مشخصه‌های بصری (ابعاد حباب‌های هوا، سرعت و رنگ کف) و بافتی (انرژی، آنتروپی و همبستگی) از تصاویر کف فرآیند فلوتاسیون ناپیوسته و سپس طبقه‌بندی و خوشه‌بندی تصاویر بر اساس متغیرهای تصویری است. برای این منظور آزمایش‌های فلوتاسیون در یک سلول ناپیوسته آزمایشگاهی در شرایط مختلف (دبی هوادهی، درصد جامد، غلظت کفساز، غلظت کلکتور و pH پالپ) انجام شد و پارامترهای متالورژیکی (بازیابی مس و عیار مس کنسانتره) و ویژگی‌های تصویری کف برای هر آزمایش اندازه‌گیری شد. از الگوریتم‌های سلسله‌مراتبی (درخت تصمیم‌گیری) و فازی FCM به ترتیب برای طبقه‌بندی و خوشه‌بندی تصاویر کف استفاده شدند. مقایسه نتایج طبقه‌بندی تصاویر کف ارایه شده به وسیله سیستم بینایی ماشین با سیستم اپراتوری نشان داد که دقت این سیستم در طبقه‌بندی تصاویر از سیستم اپراتوری بالاتر است. نتایج این تحقیق نشان داد که الگوریتم‌های توسعه داده شده به خوبی قادر به طبقه‌بندی تصاویر کف بر اساس مشخصه‌های تصویری و پارامترهای متالورژیکی بوده است که این امر در طراحی یک سیستم کنترل مبتنی بر بینایی ماشین بسیار ضروری است.

کلمات کلیدی

فلوتاسیون، تصاویر کف، پردازش تصویر، بینایی ماشین، مشخصه‌های تصویری.

۱- مقدمه

آماده‌سازی کلکتور ۲ دقیقه و برای کف‌ساز ۰.۵ دقیقه در نظر گرفته شد. سرعت همزن سلول روی ۱۲۰۰ rpm تنظیم شده و مقدار هوای ورودی سلول با یک فلومتر اندازه‌گیری و کنترل شد. عمق کف در خلال انجام آزمایش‌ها در مقدار ۲ سانتی‌متر تنظیم و کف‌گیری از کنسانتره فرآیند در زمان‌های ۰.۵، ۲ و ۵ دقیقه انجام شد. نمونه‌های کنسانتره و باطله هر آزمایش برای عیارسنجی مس به آزمایشگاه ارسال شد. در خلال انجام هر آزمایش تصویربرداری از سطح کف سلول فلوتاسیون با یک دوربین سونی با قابلیت فیلم‌برداری ۲۵ فریم بر ثانیه و رزولیشن ۱۹۲۰×۱۰۸۰ نصب شده در ارتفاع ۲۰ سانتی‌متری سطح سلول به صورت پیوسته انجام گرفت (شکل ۱). از یک لامپ هالوژن ۵۰ وات برای تامین روشنایی تصویر استفاده شد. جدول ۱ متغیرهای متالورژیکی ورودی و خروجی فرآیند فلوتاسیون به همراه محدوده تغییرات آن‌ها را نشان می‌دهد.

جدول ۱: متغیرهای ورودی و خروجی آزمایش‌های فلوتاسیون

متغیرهای ورودی	محدوده تغییرات	متغیرهای خروجی
دبی هوادهی (L/min)	۵، ۱۰، ۱۵	بازیابی مس (R _{Cu} %)
درصد جامد	۲۴، ۲۸، ۳۲	
غلظت کف‌ساز (ppm)	۵، ۱۰، ۱۵	عیار مس کنسانتره (G _{Cu} %)
غلظت کلکتور (g/t)	۱۰، ۲۰، ۳۰	
pH پالپ	۸، ۱۰، ۱۱، ۱۲	

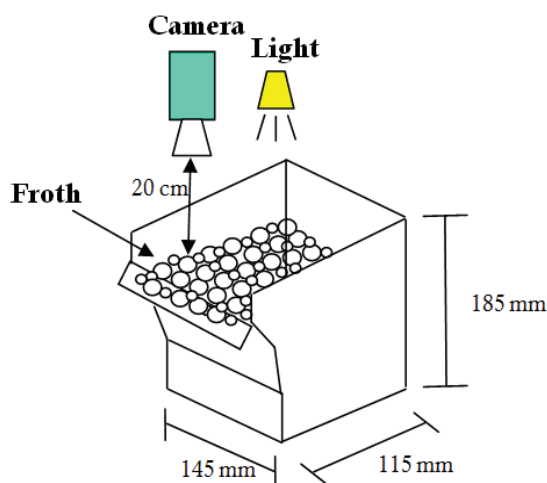
در صنعت فرآوری مواد معدنی، جداسازی مواد با ارزش از باطله به طور عمده با فرآیند فلوتاسیون انجام می‌شود. در این فرآیند، عیار و بازیابی کنسانتره دو شاخص تعیین‌کننده فنی است که منعکس‌کننده کیفیت و بازدهی محصول است [۱]. اندازه‌گیری برخط شاخص‌های کارایی فرآیند، نیازمند نصب و پیاده‌سازی تجهیزات کنترلی پیچیده و پرهزینه در کارخانه فرآوری است [۲]. تحقیقات اخیر نشان داده است که همبستگی معناداری بین مشخصات تصویری کف سطح سلول‌های فلوتاسیون (از قبیل ابعاد حباب‌ها، سرعت حباب‌ها و رنگ کف) با شرایط عملیاتی و شاخص‌های کارایی فرآیند وجود دارد. نتیجه این تحقیقات، توسعه و پیاده‌سازی سیستم‌های بینایی ماشین مختلف در مقیاس صنعتی برای مانیتورینگ و کنترل مدارهای فلوتاسیون بوده است [۳-۷]. این در حالی است که هنوز در بسیاری از کارخانه‌های فرآوری مواد معدنی به ویژه در کشور ما، فرآیند فلوتاسیون توسط اپراتورهای انسانی مانیتورینگ و کنترل می‌شود. اپراتورهای مجرب با توجه به ویژگی‌ها و تغییرات رخ داده در ساختار کف کنترل فرآیند را انجام می‌دهند. در نتیجه متداول‌ترین و ساده‌ترین روش کنترل استفاده از تجارب اپراتورها و شبیه‌سازی عملکرد آن‌ها، برای رسیدن به کفی بهینه است. سیستم‌های کنترل مبتنی بر بینایی ماشین قادر به استخراج و اندازه‌گیری پیوسته و دقیق ویژگی‌های بصری و بافتی از تصاویر کف فلوتاسیون و در نهایت پیش‌بینی پارامترهای متالورژیکی فرآیند (عیار و بازیابی کنسانتره) است.

هدف از انجام پژوهش حاضر توسعه الگوریتم‌ها برای استخراج مشخصه‌های بصری و بافتی از تصاویر کف فرآیند فلوتاسیون ناپیوسته و سپس طبقه‌بندی و خوشه‌بندی تصاویر بر اساس متغیرهای تصویری است.

۲- روش تحقیق

۲-۱- آزمایش‌های فلوتاسیون ناپیوسته

تست‌های آزمایشگاهی فلوتاسیون بر روی یک نمونه سولفیدی مس انجام شد. نمونه مورد نظر پس از خردایش و رسیدن ابعاد ذرات به $d_{80}=75\mu\text{m}$ به داخل یک سلول فلوتاسیون ۲.۵ لیتری منتقل شد. از پتاسیم آمیل گزنتات (PAX) به عنوان کلکتور و از Aerofroth65 (از خانواده پلی‌گلیکول‌اترها) به عنوان کف‌ساز استفاده شد. زمان



شکل ۱: نمایشی از سلول فلوتاسیون و سیستم بینایی ماشین

۲-۲- اندازه‌گیری ویژگی‌های بصری تصاویر کف

برای تعیین مشخصه‌های بصری تصاویر کف شامل ابعاد حباب‌های هوا (d_p)، سرعت (V_p) و رنگ کف (C_p) الگوریتم‌های پردازش تصویر در محیط متلب نوشته شد [۸]. برای محاسبه ابعاد حباب‌ها از الگوریتم تبدیل حوضچه مبتنی بر نشانه^۱ استفاده شد. بدین منظور ابتدا سه دسته نشانه از تصاویر کف برای ناحیه‌بندی هرچه صحیح‌تر حباب‌هایی با اندازه درشت و متوسط استخراج شده و سپس الگوریتم ناحیه‌بندی با استفاده از نشانه‌های استخراج شده، اجرا می‌شود. برای افزایش هر چه بیشتر دقت ناحیه‌بندی تصاویر کف، الگوریتم تبدیل حوضچه مبتنی بر نشانه به صورت تطبیقی^۲ عمل می‌کند. در این روش، پارامترهای الگوریتم ناحیه‌بندی به صورت خودکار بر اساس درشت یا ریز بودن تصاویر کف تنظیم می‌شوند [۹-۱۱].

سرعت کف با ردیابی حباب‌ها در فریم‌های مختلف با استفاده از الگوریتم تطبیق بلوکی^۳ محاسبه شد. برای اندازه‌گیری سرعت کف به یک جفت عکس متوالی نیاز است. در این الگوریتم، یک بلوک فرضی در فریم اول در نظر گرفته می‌شود و سپس این بلوک فرضی در فریم دوم جستجو می‌شود. جابه‌جایی کف با اندازه‌گیری اختلاف بین موقعیت بلوک فرضی و بلوک جستجو شده به دست می‌آید. فاصله زمانی بین دو فریم نیز باید در نظر گرفته شود زیرا ساختار کف در فریم دوم نباید به طور کلی تغییر کند. در این تحقیق، ویدئوها با دوربینی با نرخ ۲۵ فریم بر ثانیه ضبط شده است، در نتیجه فاصله زمانی بین دو فریم چهار میلی‌ثانیه است. این فاصله زمانی بسیار کم است و ساختار کف با توجه به طبیعت کند فلوتاسیون در این فاصله زمانی تغییر نمی‌کند. کارایی این الگوریتم از سایر الگوریتم‌های موجود از قبیل ردیابی پیکسل^۴ و ردیابی حباب^۵ (به دلایل تغییر شکل پیوسته حباب‌ها در سطح کف) بیشتر است [۸].

تصاویر رنگی RGB^۶ شامل سه کانال مختلف رنگ قرمز، سبز و آبی است. برای آنالیز رنگ تصاویر کف، مقدار میانگین رنگ خاکستری هر کانال تصویر محاسبه شد. از دو دقیقه اول هر ویدئو، ۳۰۰۰ تصویر رنگی استخراج و سپس برای محاسبه مقدار رنگ هر کانال پردازش شد. بازتاب نور روی هر حباب و از طرف دیگر سایه‌های حباب‌های بزرگ روی قسمت‌های مختلف تصویر کف بر روی رنگ کف به شدت اثرگذار است. برای حذف این اثر، بازتاب نور و سایه‌ها در قسمت‌های مختلف تصویر در اندازه‌گیری رنگ کف نادیده گرفته می‌شود. به همین

دلیل یک مقدار آستانه پایین برای حذف نقاط تاریک تصویر کف و یک مقدار آستانه بالا برای حذف نقاط روشن کف برای همه تصاویر کف در نظر گرفته شد [۸].

۲-۳- اندازه‌گیری ویژگی‌های بافتی تصاویر کف

ماتریس‌های هم‌رخداد^۷ از جمله مهم‌ترین ابزارها برای استخراج ویژگی‌های بافتی از نوع دوم‌اند. این ماتریس‌ها که بر اساس احتمال اتصال هر جفت پیکسل با اندازه و زاویه مشخص عمل می‌کنند، قادر به استخراج ویژگی‌های بافت در جهات و زوایای مختلف‌اند. اندازه این ماتریس‌ها بر اساس تعداد سطوح خاکستری در هر تصویر مشخص می‌شود. هر المان ماتریس بر اساس احتمال قرار گرفتن دو پیکسل با مقادیر i و j که به فاصله d و جهت (زاویه) θ از یکدیگر قرار گرفته‌اند، محاسبه می‌شود. در واقع بعد از تعیین d و θ ، جستجویی در پیکسل‌های تصویر برای یافتن تعداد رخداد‌های دو پیکسل i و j که به فاصله d و زاویه θ از یکدیگر قرار دارند، آغاز می‌شود. مقدار d با توجه به اینکه پیکسل‌های تصویر به شدت به پیکسل‌های همسایه خود وابسته‌اند، برابر یک در نظر گرفته می‌شود. از طرف دیگر، برای اینکه عملیات جستجو در همه جهات (هشت جهت) انجام شود، مقدار θ برابر ۰، ۴۵، ۹۰ و ۱۳۵ درجه قرار داد می‌شود (به این نکته دقت شود که نتایج برای دو پیکسلی که با فاصله یک و زاویه صفر از یکدیگر قرار گرفته‌اند با دو پیکسلی که با فاصله یک و زاویه ۱۸۰ از یکدیگر قرار گرفته‌اند، یکسان است). با توجه به d و θ تعیین شده، برای هر تصویر کف چهار ماتریس GLCM محاسبه می‌شود. مهم‌ترین ویژگی‌های ماتریس GLCM شامل انرژی، آنتروپی و همبستگی است.

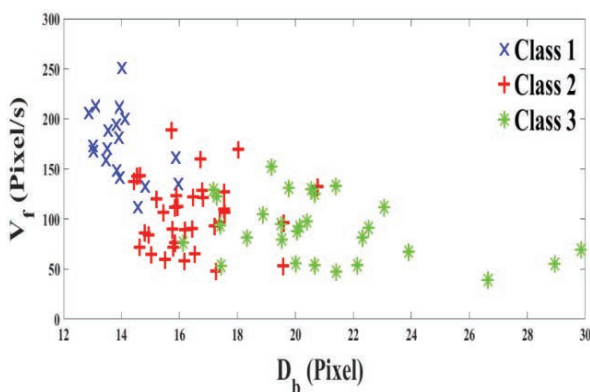
ویژگی انرژی ماتریس GLCM شاخصی از یکنواختی تصویر کف ارائه می‌کند و از رابطه ۱ محاسبه می‌شود.

$$f_1 = \text{Energy} = \sum_{i,j} p(i,j)^2 \quad (1)$$

مقدار انرژی بین [0,1] است. اگر تصویر یکنواخت باشد این شاخص به سمت یک میل می‌کند و بالعکس. ویژگی آنتروپی شاخصی برای تعیین پیچیدگی بافت تصویر کف است که از رابطه ۲ محاسبه می‌شود.

$$f_2 = \text{Entropy} = -\sum_{i,j} p(i,j) \log p(i,j) \quad (2)$$

بینایی ماشین انجام شد. بدین منظور با کمک کارشناسان باتجربه فرآیند، ویدئوهای ضبط شده در سه کلاس مختلف برچسب گذاری (طبقه بندی) شد، سپس سیستم بینایی ماشین بر اساس برچسب‌های به دست آمده آموزش داده شد و مقدار شباهت خروجی سیستم با تصمیم کارشناس بررسی شد. در واقع، سیستم بینایی ماشین بر اساس مقادیر اندازه گیری شده برای تمامی متغیرهای تصویری کف، کلاس خروجی کف را تعیین می‌کند. داده‌های طبقه بندی شده توسط کارشناس در شکل ۲ نشان داده شده است (این داده‌ها بر اساس اندازه حباب و سرعت کف اندازه گیری شده با سیستم بینایی ماشین مشخص است). بر اساس طبقه بندی اپراتوری، از ۸۱ کف مختلف، تعداد ۱۸ نوع کف در کلاس یک (x) (حدود ۲۲ درصد)، ۳۵ نوع کف در کلاس دو (+) (حدود ۴۳ درصد) و ۲۸ نوع کف در کلاس سه (*) (حدود ۳۵ درصد) قرار می‌گیرد (شکل ۲).



شکل ۲: طبقه بندی تصاویر کف توسط یک کارشناس باتجربه فرآیند در سه کلاس مختلف

همانگونه که در شکل ۲ مشاهده می‌شود، نتیجه بررسی بصری کارشناس با مقادیر اندازه گیری شده با سیستم بینایی ماشین طراحی شده (اندازه حباب و سرعت کف) مطابقت دارد. در واقع سه کلاس کف تعیین شده توسط کارشناس قابلیت تفکیک پذیری با دو ویژگی نشان داده شده در شکل ۲ را دارد. حال باید نقش دیگر متغیرهای تصویری اندازه گیری شده در تفکیک کلاس‌ها از یکدیگر و همچنین عملکرد سیستم بینایی ماشین در مقایسه با اپراتورهای انسانی را سنجید. بدین منظور، از کلیه متغیرهای تصویری اندازه گیری شده برای طبقه بندی تصاویر کف مطابق تصمیمات اپراتوری استفاده شد. به عبارت دیگر، هدف این بود که آیا می‌توان با استفاده از سیستم بینایی

اگر تصویر کف حاوی بافتی ناهموار باشد، مقدار آنتروپی زیاد می‌شود. در واقع مقدار آنتروپی برای تصاویر کف دارای طیف گسترده‌ای از اندازه، شکل و رنگ حباب‌ها، زیاد است. همبستگی شاخصی نشان دهنده میزان همبستگی خطی بین دو پیکسل همسایه ارایه می‌کند که از رابطه ۳ محاسبه می‌شود.

(۳)

$$f_3 = Correlation = \sum_{i,j} \left(\frac{p(i,j)(i - \mu_i)(j - \mu_j)}{\sigma_i \sigma_j} \right)$$

که در آن:

(μ_i, σ_i) : مقادیر میانگین و انحراف معیار جمع سطرها
 (μ_j, σ_j) : مقادیر میانگین و انحراف معیار جمع ستون‌های ماتریس است.

برای هر تصویر مقدار این سه ویژگی محاسبه شده و سپس مقدار میانگین آن‌ها برای هر آزمایش گزارش شد. مقادیر ضریب همبستگی بین متغیرهای تصویری و پارامترهای متالورژیکی فرآیند در جدول ۲ لیست شده است.

جدول ۲: ضرایب همبستگی بین متغیرهای تصویری کف و پارامترهای متالورژیکی فلوتاسیون

پارامترهای متالورژیکی		متغیرهای تصویری
بازیابی مس (R_{Cu})	عیار مس (G_{Cu})	
-۰٫۷۱	۰٫۷۰	اندازه حباب‌ها (D_b)
۰٫۵۱	-۰٫۷۷	سرعت کف (V_f)
۰٫۴۷	-۰٫۶۰	رنگ قرمز کف (C_f) f_r
۰٫۴۴	-۰٫۵۳	رنگ سبز کف (C_{f-g})
۰٫۴۰	-۰٫۴۱	رنگ آبی کف (C_{f-b})
۰٫۴۴	-۰٫۷۰	انرژی (f_1)
-۰٫۳۸	۰٫۷۱	آنتروپی (f_2)
-۰٫۶۲	۰٫۴۵	همبستگی (f_3)

۳- نتایج و بحث

۳-۱- ارزیابی کارایی سیستم بینایی ماشین

برای اعتبارسنجی الگوریتم‌های پردازش تصویر طراحی شده، مقایسه‌ای بین عملکرد اپراتورهای انسانی و سیستم

طبقه‌بندی تصاویر کف، از روش جنگل‌های تصادفی استفاده شد. در این روش چندین درخت مختلف آموزش داده شده و سپس از ترکیب نتایج آن‌ها با یکدیگر، برچسب خروجی تعیین می‌شود. اگر تعداد زیادی از درخت‌های تصمیم‌گیری به صورتی آموزش داده شود که هر درخت با استفاده از زیرمجموعه تصادفی از داده‌های آموزشی یا زیرمجموعه تصادفی از ویژگی‌های ورودی آموزش داده شود و در انتها خروجی تخمین زده شده با هر درخت با دیگر خروجی‌های تخمین زده شده ترکیب شود، دقت کلی به صورت چشمگیری افزایش پیدا می‌کند. با توجه به ناپایداری الگوریتم، ساختار هر درخت این مجموعه با دیگر درخت‌ها متفاوت بوده است و در نتیجه هر درخت خروجی مخصوص به خود را تولید می‌کند.

با توجه به تعداد محدود داده‌ها، از روش K-fold cross validation برای تعیین قابلیت تعمیم‌پذیری کلاسیفایر به دست آمده استفاده می‌شود. در این روش داده‌ها به K قسمت تقسیم شده و از K-1 مجموعه داده برای آموزش و از یک مجموعه باقی‌مانده برای تست کلاسیفایر آموزش دیده استفاده می‌شود. حال این روند را K بار تکرار کرده و K کلاسیفایر شناسایی می‌شود. نتیجه داده‌های تست در ماتریس درهم‌ریختگی شکل ۳ ارائه شده است.

ماشین طراحی شده همانند اپراتورهای انسانی تصمیم‌سازی کرد یا خیر؟

برای طبقه‌بندی تصاویر کف از یکی از ساده‌ترین الگوریتم‌های سلسله مراتبی با نام درخت تصمیم‌گیری^۸ استفاده شد. در این نوع الگوریتم، نواحی محلی بر اساس دنباله‌ای از انشعابات بازگشتی شناسایی می‌شوند. درخت تصمیم‌گیری دارای گره، شاخه و برگ است. با استفاده از یک تابع تست آماری در گره ریشه، داده‌ها وارد شاخه‌های مختلف می‌شوند. این روند آموزش داده‌ها از گره ریشه شروع شده و به برگ‌ها ختم می‌شود. در نهایت با استفاده از انشعابات مختلف، داده‌هایی که دارای ویژگی‌های یکسان‌اند در هر برگ قرار می‌گیرد. داده‌های آموزشی متعلق به هر برگ در ناحیه محلی از فضای ورودی با ویژگی‌های یکسان قرار دارد. مرز این نواحی با دنباله‌ای از جداکننده‌ها (توابع تست) که از ریشه تا برگ پشت سر هم ردیف شده‌اند، مشخص می‌شود. آزمون آماری که Information Gain نامیده می‌شود، تعیین می‌کند که ویژگی‌ها با چه کیفیتی داده‌های آموزش را با توجه به برچسب خروجی آن‌ها طبقه‌بندی می‌کنند. به صورت معمول از معیار آنتروپی برای شناسایی داده‌های یک دست استفاده می‌شود. مقدار آنتروپی برای داده‌ها از رابطه ۴ محاسبه می‌شود.

$$Entropy(s) = -\sum_{i,j} p_i \log_2 p_i \quad (4)$$

که در آن:

p_i : احتمال داده‌ها با برچسب خروجی i در میان تمامی داده‌ها

k : تعداد کل کلاس‌ها (برچسب خروجی‌ها) است.

آنتروپی مقداری بین صفر و یک دارد. اگر داده‌های قرار گرفته در شاخه یک دست باشند، مقدار آنتروپی نزدیک به صفر و در صورتی که داده‌ها شبیه هم نباشند مقدار آنتروپی به یک میل می‌کند. هدف در درخت تصمیم‌گیری صفر کردن مقدار آنتروپی است. در نتیجه روند آموزش در درخت (طبقه‌بندی هر چه بیشتر داده‌ها) به مقدار آنتروپی داده‌ها در هر گره بستگی دارد. در نتیجه اگر داده‌ها کمی تغییر کنند، آنگاه ساختار درخت کاملاً متفاوت خواهد بود. با توجه به این ویژگی (ناپایداری الگوریتم درخت تصمیم‌گیری) از ترکیب درخت‌های تصمیم‌گیری برای افزایش هر چه بیشتر دقت استفاده می‌شود.

با توجه به هشت ویژگی تصویری استخراج شده برای

ماتریس درهم‌ریختگی

کلاس خروجی	Class 1	14.8%	3.7%	0.0%	80.0% 20.0%
	Class 2	7.4%	34.6%	3.7%	75.7% 24.3%
	Class 3	0.0%	4.9%	30.9%	86.2% 13.8%
		66.7% 33.3%	80.0% 20.0%	89.3% 10.7%	80.2% 19.8%
	Class 1	Class 2	Class 3	کلاس هدف	

شکل ۳: ماتریس درهم‌ریختگی کلاسیفایر شناسایی شده

قطر اصلی ماتریس نشان‌دهنده درصد تصاویر کفی است که به درستی در هر کلاس طبقه‌بندی شده است. به عنوان مثال، در کلاس یک، ۱۴/۸ از ۲۲/۲ درصد به درستی طبقه‌بندی شده و ۷/۴ درصد از تصاویر کلاس یک به عنوان کلاس دو طبقه‌بندی شده‌اند. از طرف دیگر ۳/۷ درصد کلاس

طبقه‌بندی بر اساس تصمیم کارشناس منجر به تفکیک تصاویر کف بر اساس پارامترهای متالورژیکی آنها نشده است و در نتیجه تصاویر کف قابلیت تفکیک پذیری زیادی ندارند.

۲-۲- خوشه‌بندی تصاویر کف

برای طبقه‌بندی تصاویر کف از تکنیک خوشه‌بندی استفاده شد. در خوشه‌بندی هشت ویژگی تصویری کف استفاده شده و سپس خوشه‌بندی بر اساس مقادیر اندازه‌گیری شده برای هر متغیر تصویری انجام می‌شود. بنابراین، داده‌ها با ویژگی‌های مشابه در یک خوشه قرار گرفته و باقی‌مانده داده‌ها نیز با همین روند در دیگر خوشه‌ها قرار می‌گیرد. معیارهای تشابه مختلفی برای قراردادن هر داده در یک خوشه وجود دارد. با استفاده از این معیارها می‌توان چگونگی شکل گرفتن خوشه‌ها را تعیین کرد. در روش‌های خوشه‌بندی سخت هر داده فقط و فقط در یک خوشه قرار می‌گیرد اما در روش‌های خوشه‌بندی نرم، هر داده بر اساس مقدار تابع عضویتش می‌تواند در یک یا چند خوشه قرار گیرد. یکی از مشهورترین روش‌های خوشه‌بندی نرم، روش خوشه‌بندی فازی است. با توجه به اینکه الگوریتم‌های پردازش تصویر استفاده شده دقت خیلی بالایی ندارند در نتیجه این روش خوشه‌بندی می‌تواند کاملاً خود را با داده‌های اندازه‌گیری شده تطبیق دهد. در الگوریتم خوشه‌بندی فازی FCM^۱ تابع هزینه رابطه ۵ باید بهینه شود.

$$J_m = \sum_{k=1}^N \sum_{i=1}^c (u_{ik})^m \|x_k - v_i\|^2 \quad 1 \leq m \leq \infty \quad (5)$$

که در آن:

x_k : آمین داده اندازه‌گیری شده

u_{ik} : مقدار تابع عضویت x_k در خوشه i ام

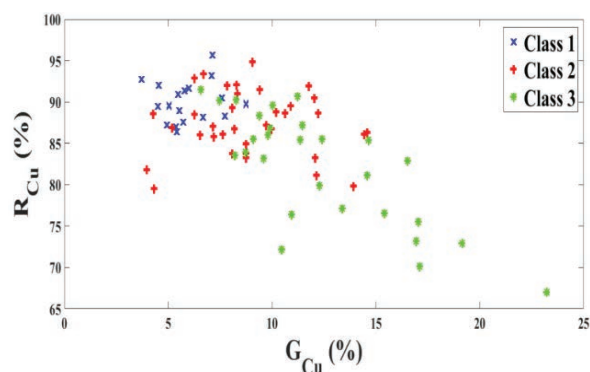
v_i : مقدار مرکز خوشه i ام

m : یک عدد حقیقی بزرگتر از یک و $\| \cdot \|$ نماینده هر نوع

نرمی برای تعیین میزان شباهت بین x_k و v_i است.

در این روش الگوریتم FCM برای هر داده x_k یک تابع عضویت u_{ik} در نظر گرفته می‌شود و سپس مقدار تعلق هر داده به هر خوشه را بر اساس مقدار تابع عضویت به دست آمده تعیین می‌کند. شکل ۵ تصویری از نتایج خوشه‌بندی تصاویر کف بر اساس مهم‌ترین ویژگی‌های تصویری (اندازه حباب و سرعت کف) را نشان می‌دهد. مطابق نتایج ارایه شده، سه خوشه شکل گرفته بر اساس این دو ویژگی کاملاً

دو به اشتباه در کلاس یک قرار گرفته‌اند. در واقع سلول‌هایی که روی قطر اصلی نیست، درصد تصاویری را نشان می‌دهد که به اشتباه طبقه‌بندی شده‌اند. ستون و سطر آخر ماتریس به ترتیب نشان‌دهنده دقت و صحت هر کلاس و سلول سمت چپ پایین نشان‌دهنده دقت کلی کلاسیفایر است. در واقع می‌توان گفت که ۸۰ درصد تصاویر کف مطابق آنچه اپراتورها تعیین کرده‌اند، طبقه‌بندی می‌شود. در نتیجه سیستم بینایی ماشین توسعه داده شده می‌تواند همانند اپراتورها عمل کند و مانیتورینگ را به جای اپراتورها انجام دهد. درباره ۲۰ درصد اختلاف سیستم بینایی ماشین با بررسی بصری اپراتورها نمی‌توان چیزی را بیان کرد زیرا طبقه‌بندی بر اساس واقعیت موجود در فرآیند انجام نشده است، بنابراین در این زمینه دقت سیستم بینایی ماشین را با دقت اپراتورها نمی‌توان مقایسه کرد اما در این مورد می‌توان بررسی بصری و طبقه‌بندی تصاویر کفی که توسط اپراتور انجام شده است را با مقدار پارامترهای متالورژیکی حاصل از هر تصویر کف را مقایسه کرد. در شکل ۴، طبقه‌بندی تصاویر کف بر اساس بررسی بصری تصاویر کف انجام شده با مقدار پارامترهای متالورژیکی هر آزمایش مقایسه شده است.

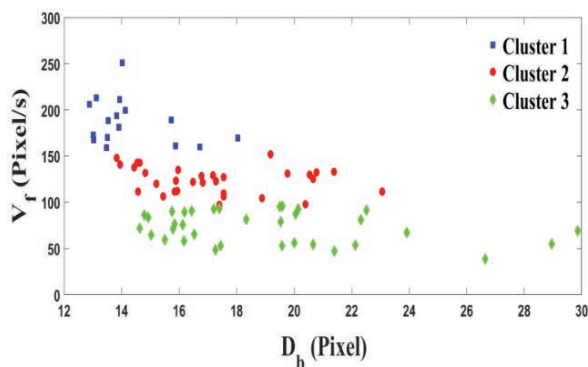


شکل ۴: طبقه‌بندی تصاویر کف توسط کارشناس در مقایسه با مقدار پارامترهای متالورژیکی هر تصویر کف

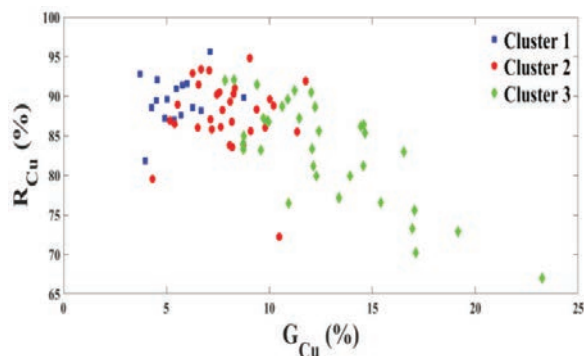
همانگونه که در شکل ۲ مشاهده می‌شود، طبقه‌بندی اپراتوری بر اساس دو ویژگی اندازه حباب و سرعت کف منطقی است و کلاس‌ها بر اساس این دو ویژگی قابل تفکیک‌اند. اگر این نوع طبقه‌بندی به عنوان معیار در نظر شود، سیستم بینایی ماشین این قابلیت را دارد که این نوع طبقه‌بندی را دنبال و بر اساس آن عمل کند اما با توجه به شکل ۴، مشاهده می‌شود که

جدول ۳: میانگین خوشه‌های تصاویر بر اساس متغیرهای تصویری

متغیرهای تصویری	D_b	V_f	C_{f-r}	C_{f-g}	C_{f-b}	f_1	f_2	f_3
میانگین خوشه ۱	۱۴٫۲	۱۸۷	۱۱۳٫۹	۱۱۲٫۴	۱۰۱٫۷	۰٫۸۲	۰٫۱۷	۲٫۲
میانگین خوشه ۲	۱۷٫۲	۱۲۴٫۱	۱۰۶٫۸	۱۰۶٫۶	۹۶٫۶	۰٫۸۵	۰٫۱۶	۲٫۳
میانگین خوشه ۳	۱۹	۷۲٫۶	۱۰۲٫۵	۱۰۱	۸۹٫۶	۰٫۸۶	۰٫۱۳	۲٫۴



شکل ۵: خوشه‌های شناسایی شده با ویژگی‌های تصویری کف



شکل ۶: خوشه‌های شناسایی شده با ویژگی‌های تصویری کف بر اساس پارامترهای متالورژیکی

جدول ۴: میانگین و انحراف معیار عیار و بازیابی خوشه‌ها و کلاس‌های تعیین شده توسط اپراتورها

پارامترهای متالورژیکی	خوشه اول	کلاس اول	خوشه دوم	کلاس دوم	خوشه سوم	کلاس سوم
G_{Cu}	۵٫۵	۵٫۹	۷٫۹	۸٫۹	۱۲٫۶	۱۲٫۳
R_{Cu}	۸۹٫۵	۹۰	۸۷٫۶	۸۷٫۴	۸۳٫۱	۸۲

تفکیک‌پذیرند. مقادیر میانگین خوشه‌های محاسبه شده برای هر متغیر تصویری در جدول ۳ ارائه شده است.

نتایج خوشه‌بندی تصاویر کف بر اساس مقدار پارامترهای متالورژیکی در شکل ۶ نشان داده شده است. بر طبق نتایج، خوشه‌های تولید شده قابلیت تفکیک‌پذیری به مراتب بالاتری نسبت به کلاس‌های طبقه‌بندی شده توسط اپراتورها دارند (شکل ۴). برای تعیین قابلیت تفکیک‌پذیری خوشه‌ها نسبت به کلاس‌های تعیین شده توسط اپراتورها، برای هر خوشه و کلاس یک توزیع نرمال در نظر گرفته شده و سپس مقدار میانگین و انحراف معیار هر توزیع تخمین زده می‌شود. این مقادیر در جدول ۴ لیست شده‌اند. مقدار میانگین و انحراف معیار هر خوشه و کلاس نظیرش بر اساس مقادیر عیار و بازیابی مس محاسبه شده است. خوشه‌های شکل گرفته دو و سه بر اساس متغیرهای تصویری کف نسبت به کلاس‌های تعیین شده توسط اپراتورها در پارامتر عیار مس، دارای انحراف معیار کمتری است. در واقع می‌توان گفت خوشه‌ها دارای تورفتگی کمتری در یکدیگرند و در نتیجه تفکیک‌پذیری بیشتری دارند اما در پارامتر بازیابی مس، تفاوت آنچنانی بین خوشه‌ها و کلاس‌ها در تفکیک‌پذیری مشاهده نمی‌شود. توزیع نرمال برای خوشه‌ها و کلاس‌های نظیرشان در شکل‌های ۷ و ۸ برای عیار و بازیابی مس نشان داده شده‌اند.

مطابق نتایج ارائه شده در شکل ۷، تابع توزیع نرمال خوشه‌ها نسبت به کلاس‌ها از یکدیگر قابل تشخیص‌تر است اما در شکل ۸، تابع توزیع نرمال برای خوشه‌ها و کلاس‌ها تقریباً یکسان است.

علاوه بر بررسی معیارهای بیان شده، میانگین فاصله اقلیدسی بین داده‌های درون خوشه و میانگین خوشه محاسبه شده و با مقدار میانگین فاصله اقلیدسی بین داده‌های درون کلاس و میانگین کلاس مقایسه و در جدول ۵ نشان داده شده است.

- ۱- الگوریتم‌های پردازش تصویری برای استخراج مشخصه‌های بصری (ابعاد حباب‌های هوا، سرعت و رنگ کف) و بافتی (انرژی، آنتروپی و همبستگی) از تصاویر کف یک فرآیند فلوتاسیون ناپیوسته توسعه داده شدند.
- ۲- تجزیه و تحلیل نتایج نشان داد که ارتباط معناداری بین مشخصه‌های تصویری و پارامترهای متالورژیکی فرآیند فلوتاسیون وجود دارد.
- ۳- از الگوریتم‌های سلسله مراتبی (درخت تصمیم‌گیری) و فازی FCM به ترتیب برای طبقه‌بندی و خوشه‌بندی تصاویر کف فلوتاسیون استفاده شد.
- ۴- مقایسه کارایی سیستم بینایی ماشین ارایه شده با سیستم اپراتوری نشان داد که این سیستم قادر است تصاویر کف را با دقت بالاتری طبقه‌بندی کند.

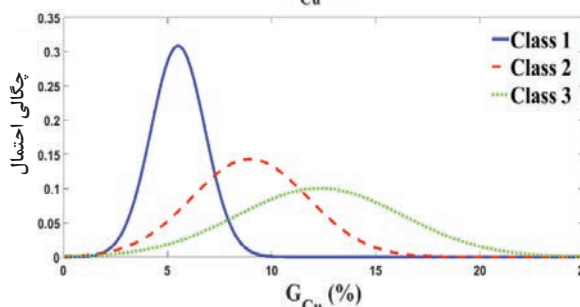
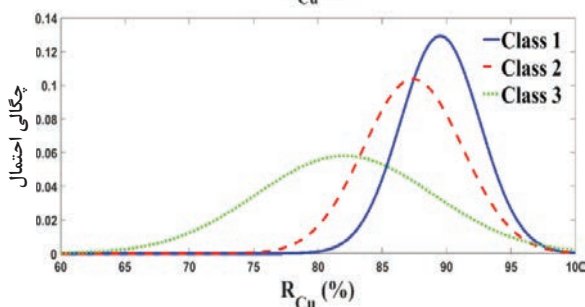
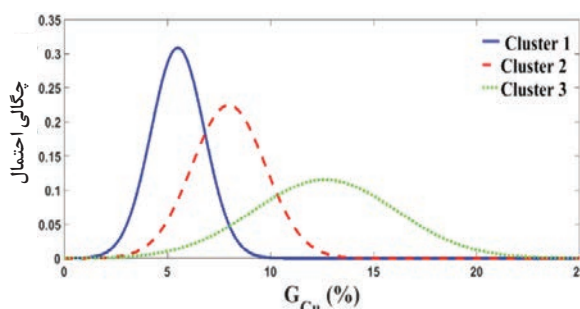
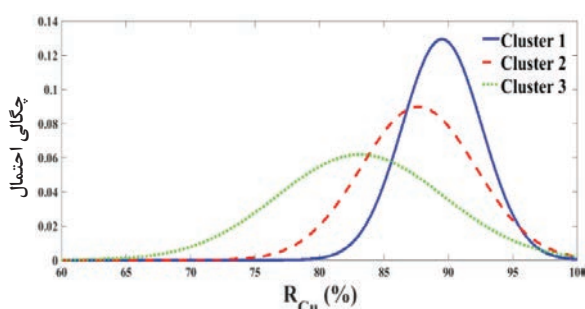
با توجه به جدول ۵، مقدار فاصله در داده‌های درون هر خوشه نسبت به هر کلاس در پارامتر عیار مس کمتر از مقدار فاصله داده‌های درون کلاس است. در نتیجه مقدار پراکندگی داده‌ها در هر خوشه نسبت به هر کلاس کمتر است. این مقدار برای بازیابی مس تفاوت آنچنانی نسبت به یکدیگر نداشته است. در نهایت این نکته مهم است که گرچه در مانیتورینگ و کنترل فرآیند فلوتاسیون از تصمیمات اپراتورهای بسیار مجرب استفاده می‌شود اما استفاده از سیستم بینایی ماشین و سپس خوشه‌بندی بر اساس مقادیر اندازه‌گیری شده متغیرهای تصویری کف منجر به بهبود کیفیت طبقه‌بندی کف می‌شود.

۴- نتیجه‌گیری

مهم‌ترین یافته‌های این تحقیق به شرح زیر است:

جدول ۵: مقایسه مقدار میانگین فاصله داده‌های درون هر خوشه و کلاس با مقدار میانگین هر خوشه و کلاس

پارامترهای متالورژیکی	خوشه اول	خوشه دوم	کلاس اول	خوشه اول	خوشه دوم	کلاس سوم
G_{Cu}	۱٫۶۱	۲٫۲	۳٫۰۷	۱٫۷۷	۳٫۰۷	۱٫۸۶
R_{Cu}	۵٫۰۶	۳٫۰۷	۵٫۰۷	۳٫۵۳	۵٫۱۱	۳٫۰۴



شکل ۸: تابع توزیع نرمال تخمین زده شده با خوشه‌ها (تصویر بالا) و کلاس‌ها (تصویر پایین) بر اساس بازیابی مس

شکل ۷: تابع توزیع نرمال تخمین زده شده با خوشه‌ها (تصویر بالا) و کلاس‌ها (تصویر پایین) بر اساس عیار مس

flotation cell in an iron flotation plant". International Journal of Mineral Processing, 133: 60-66.

- [8] Jahedsaravani, A., Marhaban, M., and Massinaei, M. (2014). "Prediction of the metallurgical performances of a batch flotation system by image analysis and neural networks". Minerals Engineering, 69: 137-145.
- [9] Mehrshad, N., and Massinaei, M. (2011). "New image-processing algorithm for measurement of bubble size distribution from flotation froth images". Minerals and Metallurgical Processing Journal, 28(3): 146-150.
- [10] Jahedsaravani, A., Marhaban, M., Massinaei, M., Saripan, M., Mehrshad, N., and Noor, S. (2014). "Development of a new algorithm for segmentation of flotation froth images". Minerals & Metallurgical Processing Journal, 31: 66-72.
- [11] Jahedsaravani, A., Massinaei, M., and Marhaban, M. H. (2017). "An image segmentation algorithm for measurement of flotation froth bubble size distributions". Measurement, 111: 29-37.

۵- نتایج نشان داد که الگوریتم‌های توسعه داده شده به خوبی قادر به طبقه‌بندی تصاویر کف بر اساس مشخصه‌های تصویری و پارامترهای متالورژیکی است که این امر در طراحی یک سیستم کنترل مبتنی بر بینایی ماشین بسیار ضروری است.

۵- مراجع

- [1] Wills, B. A., and Napier-Munn, T. J. (2011). "Mineral Processing Technology: An Introduction to the Practical Aspects of Ore Treatment and Mineral Recovery". Butterworth-Heinemann, 267-352.
- [2] Bergh, L. G., and Yianatos, J. (2003). "Flotation column automation: State of the art". Control Engineering Practice, 11: 67-72.
- [3] Aldrich, C., Marais, C., Shean, B., and Cilliers, J. (2010). "Online monitoring and control of froth flotation systems with machine vision: A review". International Journal of Mineral Processing, 96: 1-13.
- [4] Sadr-Kazemi, N., and Cilliers, J. (1997). "An image processing algorithm for measurement of flotation froth bubble size and shape distributions". Minerals Engineering, 10: 1075-1083.
- [5] Holtham, P., and Nguyen, K. (2002). "On-line analysis of froth surface in coal and mineral flotation using JK FrothCam". International Journal of Mineral Processing, 64: 163-180.
- [6] Kaartinen, J., Hätönen, J., Hyötyniemi, H., and Miettunen, J. (2006). "Machine-vision-based control of zinc flotation-a case study". Control Engineering Practice, 14: 1455-1466.
- [7] Mehrabi, A., Mehrshad, N., and Massinaei, M. (2014). "Machine vision based monitoring of an industrial

¹ Marker-based watershed algorithm

² Adaptive

³ Block matching algorithm

⁴ Pixel tracing

⁵ Bubble tracing

⁶ Red, Green, Blue (RGB)

⁷ Gray level co-occurrence matrix (GLCM)

⁸ Decision Tree

⁹ Fuzzy c-means (FCM)



DOI: 10.30479/jmre.2019.9879.1209

Application Of Froth Images Classification And Clustering Based On Visual Features In Flotation Cell Performance

Jahedsaravani A.¹, Massinaei M.^{2*}, Khalilpour J.³

1- Assistant Professor, Dept. of Electrical Engineering, Khatam al-Anbiya University, Tehran, Iran
alijahedsaravani@gmail.com

2- Associate Professor, Dept. of Mining Engineering, University of Birjand, P.O. Box: 97175-376, Birjand, Iran
mmassinaei@birjand.ac.ir

3- Associate Professor, Dept. of Electrical Engineering, Khatam al-Anbiya University, Tehran, Iran
j_khalilpour@yahoo.com

(Received: 01 Jan. 2019, Accepted: 02 Feb. 2019)

Abstract: Flotation is the most frequently approach for beneficiation of metallic ores in mineral processing plants. Continuous control of flotation circuits is necessary to achieve optimum metallurgical performance. Previous research has established that there is a meaningful correlation between the froth visual features and process conditions and performance. The main objective of the current study is to develop algorithms for extraction of visual (bubble size, froth velocity and froth colour) and textural (energy, entropy and correlation) features from the froth images as well as classification of the images based on the captured properties. For this purpose, flotation tests were conducted in a batch cell under various process conditions and the metallurgical parameters (copper recovery and concentrate grade) along with the image variables were measured. Decision tree and fuzzy C-means algorithms were used for classification and clustering of the froth images. It was found that the developed machine vision system is capable of more accurately classifying the froth images than a manual operatory system. The results indicate that the developed algorithms are capable of accurately classifying the froth images with respect to the visual as well as the metallurgical parameters, which is of central importance for development of a machine vision based control system.

Keywords: Flotation, Froth Images, Image Analysis, Machine Vision, Visual Features.

INTRODUCTION

In the mineral processing industries, froth flotation is a common process for separation of the valuable from gangue minerals [1]. The primary control objectives of flotation circuits are the metallurgical factors (i.e. recovery and concentrate grade) [2]. The on-line measurement and estimation of these variables usually require sophisticated instruments which are expensive to purchase and maintain. Previous studies have shown that the froth visual characteristics reflect changes in the process conditions and can be used to predict the metallurgical factors [3-7].

The main objective of this study is to develop algorithms for extraction of visual (bubble size, froth velocity and froth colour) and textural (energy, entropy and correlation) features from the froth images as well as classification of the images based on the captured properties.

METHODS

The flotation tests were conducted on a sulphide copper sample with $d_{80}=75\mu\text{m}$ in a 2.5 L laboratory flotation cell. The slurry was conditioned with a certain amount of collector (Potassium Amyl Xanthate) and frother (Aerofroth 65) for 2 and 0.5 min, respectively, just prior to flotation. The gas flowrate was measured by a gas flowmeter and manually regulated by a needle valve. The impeller speed was set at 1200 rpm. The froth depth in the cell was kept at a height of 2 cm during the experiment. After turning on the air, the froth layer was formed and the concentrates were collected at time intervals of 0.5, 2 and 5 min. The froth was allowed to freely overflow and the concentrates were analysed for their water, mass recovery and copper content. The tailings were filtered and dried and their copper content was determined. A video camera was mounted on a metal structure with an adjustable arm allowing lateral and vertical adjustment (as shown in Fig. 1). The distance from the top of the cell to the video camera lens was 20 cm. Lighting was provided by a single 50 W halogen lamp next to the camera. The flotation experiments were conducted at different operating conditions and concentrate copper grade and copper recovery as well as the froth features were measured and reported for each test. The operating conditions and the range of variables utilized in the flotation experiments are listed in Table 1.

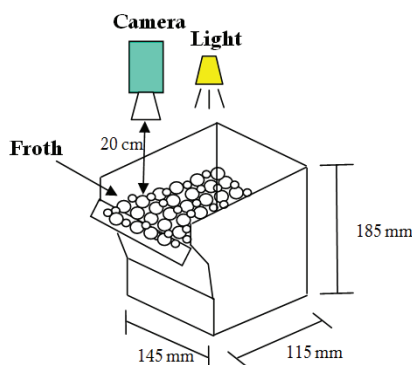


Figure 1. Laboratory-scale batch flotation cell and video camera set-up

Table 1. Input and output variables of flotation experiments

Input variables	Range	Output variables
Gas flow rate (L/min)	5-10-15	Cu recovery (R_{Cu}) Concentrate grade (G_{Cu})
Slurry solids %	24-28-32	
Frother dosage (ppm)	5-10-15	
Collector dosage (g/t)	20-30-40	
pH	10.8-11.5-12.2	

Image processing algorithms were developed in Matlab environment for measuring the visual (bubble size, froth velocity and froth colour) and textural (energy, entropy and correlation) features from the froth images [8]. A marker-based watershed algorithm was developed to quantify the bubble size distribution. The froth velocity was measured by tracking the bubbles movement in consecutive frames through the block matching algorithm. The froth colour was determined through extraction of the red, green and blue (RGB) values from colour images. The mean value of the R, G and B values were calculated for quantifying the froth colour. The energy textural feature which is a measure of homogeneity of an image was calculated from the following expression:

$$f_1 = Energy = \sum_{i,j} p(i, j)^2 \tag{1}$$

For an inhomogeneous image, the matrix has a large number of small entries with small energy values and vice versa. Energy values are in the range [0, 1].

The complexity or disordering of an image is quantified by entropy feature as:

$$f_2 = Entropy = -\sum_{i,j} p(i, j) \log p(i, j) \tag{2}$$

The entropy value is high when the image includes uneven textural units (complex texture). The froth images with a wide range of bubble size, shape and colour have high entropy values.

Correlation is a measure of linear correlation between two neighbouring pixels which is expressed as

$$f_3 = Correlation = \sum_{i,j} \left(\frac{p(i, j)(i - \mu_i)(j - \mu_j)}{\sigma_i \sigma_j} \right) \tag{3}$$

where (μ_i, σ_i) are the mean and standard deviation of the row sums of the matrix and (μ_j, σ_j) are the mean and standard deviation of the column sums of the matrix.

FINDINGS AND ARGUMENT

The correlation matrix between the froth features with the metallurgical parameters is given in Table 2. The results show that there is a meaningful correlation between the froth features and the process performance parameters.

Table 2. Correlation matrix between froth features with metallurgical parameters

Froth Features	R _{cu}	G _{cu}
Bubble size	-0.71	0.70
Froth velocity	0.51	-0.77
Froth colour (R)	0.47	-0.60
Froth colour (G)	0.44	-0.53
Froth colour (B)	0.40	-0.41
Energy	0.44	-0.70
Entropy	-0.38	0.71
Correlation	-0.62	0.45

Clustering technique was employed for classification of the froth images taken at different process conditions. The eight visual and textural features were used for clustering the images. The froth images were classified using the fuzzy c-mean algorithm. In the fuzzy c-mean algorithm, each data point is located in two or several clusters by means of a membership function. The following objective function is minimized:

$$J_m = \sum_{k=1}^N \sum_{i=1}^c (u_{ik})^m \|x_k - v_i\|^2 \quad 1 \leq m \leq \infty \tag{4}$$

Where x_k is the k^{th} of d -dimensional measured data; u_{ik} is the degree of x_k membership in cluster i ; v_i is the d -dimension centre of the cluster; m is any real number greater than 1; and $\|\cdot\|$ is any norm representing the similarity between the centre and measured data.

Figures 2 and 3 show typical samples of the froth classification based on the visual as well as the metallurgical parameters, respectively. The results indicated that the proposed machine vision system is able to accurately classify the froth images based on the extracted features as well as the metallurgical

parameters. The importance of such investigations is that a significant contribution towards the development of a machine vision based control system for industrial applications is made.

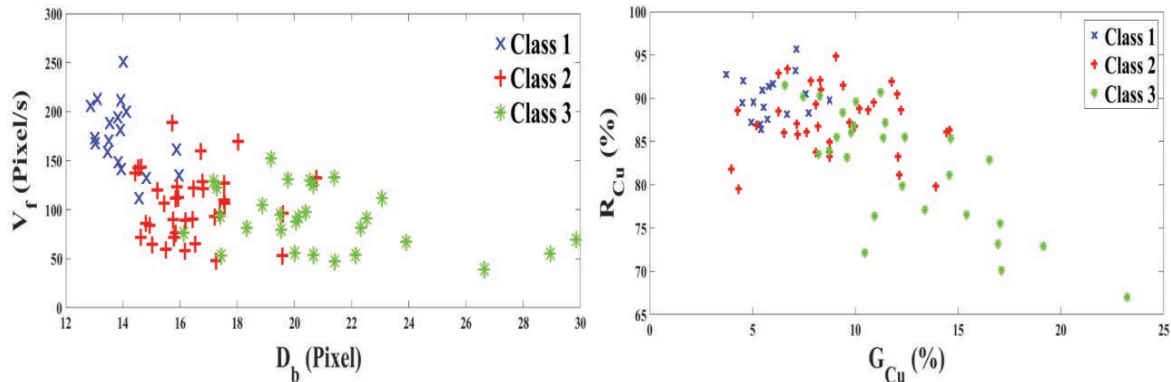


Figure 2. Classification of froth images based on visual features and metallurgical parameters

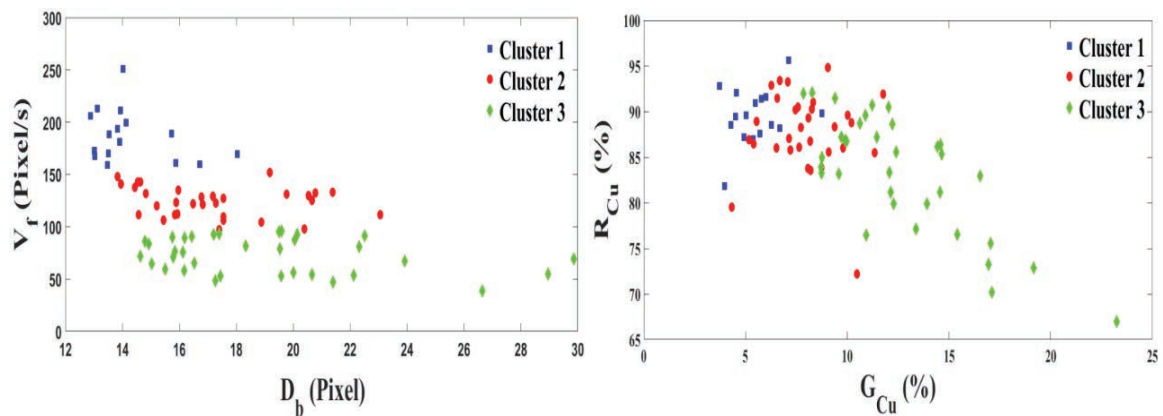


Figure 3. Clustering of froth images based on metallurgical parameters

CONCLUSIONS

1. Accurate and reliable algorithms were developed for measuring the visual (bubble size, froth velocity and froth colour) and textural (energy, entropy and correlation) features from the froth images taken from a batch flotation cell.

2. A meaningful correlation between the froth features and the process performance factors were detected.

3. Decision tree and fuzzy C-means algorithms were successfully developed for classification and clustering of the froth images, respectively.

4. The results indicated that the proposed machine vision system is able to accurately classify the froth images based on the extracted features as well as the metallurgical parameters. This is of great importance for development of a machine vision based control system.

REFERENCES

- [1] Wills, B. A., and Napier-Munn, T. J. (2011). "Mineral Processing Technology: An Introduction to the Practical Aspects of Ore Treatment and Mineral Recovery". Butterworth-Heinemann, 267-352.
- [2] Bergh, L. G., and Yianatos, J. (2003). "Flotation column automation: State of the art". Control Engineering Practice, 11: 67-72.
- [3] Aldrich, C., Marais, C., Shean, B., and Cilliers, J. (2010). "Online monitoring and control of froth flotation systems with

- machine vision: A review*". International Journal of Mineral Processing, 96: 1-13.
- [4] Sadr-Kazemi, N., and Cilliers, J. (1997). "An image processing algorithm for measurement of flotation froth bubble size and shape distributions". Minerals Engineering, 10: 1075-1083.
- [5] Holtham, P., and Nguyen, K. (2002). "On-line analysis of froth surface in coal and mineral flotation using JK FrothCam". International Journal of Mineral Processing, 64: 163-180.
- [6] Kaartinen, J., Hätönen, J., Hyötyniemi, H., and Miettunen, J. (2006). "Machine-vision-based control of zinc flotation-a case study". Control Engineering Practice, 14: 1455-1466.
- [7] Mehrabi, A., Mehrshad, N., and Massinaei, M. (2014). "Machine vision based monitoring of an industrial flotation cell in an iron flotation plant". International Journal of Mineral Processing, 133: 60-66.
- [8] Jahedsaravani, A., Marhaban, M., and Massinaei, M. (2014). "Prediction of the metallurgical performances of a batch flotation system by image analysis and neural networks". Minerals Engineering, 69: 137-145.
- [9] Mehrshad, N., and Massinaei, M. (2011). "New image-processing algorithm for measurement of bubble size distribution from flotation froth images". Minerals and Metallurgical Processing Journal, 28(3): 146-150.
- [10] Jahedsaravani, A., Marhaban, M., Massinaei, M., Saripan, M., Mehrshad, N., and Noor, S. (2014). "Development of a new algorithm for segmentation of flotation froth images". Minerals & Metallurgical Processing Journal, 31: 66-72.
- [11] Jahedsaravani, A., Massinaei, M., and Marhaban, M. H. (2017). "An image segmentation algorithm for measurement of flotation froth bubble size distributions". Measurement, 111: 29-37.