

چکیده

در این مقاله روش بهینه‌یابی جدیدی با بهره‌گیری از تقریب در تابع هدف و قیدها جهت استفاده در معادلات لاگرانژ ارائه شده است. همچنین برای این مدل، الگوریتمی در قالب فرایند حل عددی به منظور نزدیک کردن جواب تقریبی به جواب دقیق بهینه برای مسائل واقعی مهندسی و به‌طور خاص مسائل سازه‌ای ارائه شده است. تقریب ارائه شده در این مدل عددی به فرم کره در فضای n بعدی بوده که با بیان جدیدی از تعریف عمومی انحنا و شعاع انحنا ارائه شده است. این تقریب باعث جدا شدن متغیرهای طراحی از هم شده به طوری که تنها مجهول در دستگاه معادلات بهینه، ضرایب لاگرانژ می‌باشند. متغیرهای طراحی به کمک روابط استخراج شده بر حسب ضرایب لاگرانژ مستقیماً بدون تحلیل هیچ‌گونه معادله‌ای حاصل می‌شوند. هر گام محاسباتی شامل دو بخش، یکی به دست آوردن جواب تقریبی بهینه و دیگری برگرداندن جواب تقریبی بر روی قیدهای فعال به منظور انجام تقریب مجدد می‌باشد. با جداسازی متغیرهای طراحی از معادلات لاگرانژ، زمان محاسبات به خصوص برای تحلیل‌های تاریخچه-زمانی مورد نظر در طرح‌های بهینه‌ی لرنه‌ای می‌تواند ذخیره شود. با استفاده از این روش دو مثال سازه‌ای به‌عنوان بخش اصلی سیستم مهار جانبی قاب خمشی بتنی و مهاربندی مورد بررسی قرار گرفته که نتایج آن کاملاً منطبق با نتایج حاصل از روش پنالتی خارجی می‌باشند. در این روش به دلیل کاهش تعداد متغیرها و طول گام بلند در محاسبات، سرعت همگرایی بالا می‌باشد.

کلمات کلیدی: کره n بعدی، شعاع انحنا، نقطه مرجع، ضرایب لاگرانژ،

مسائل مقید

جداسازی متغیرها در بهینه‌یابی طرح لرنه‌ای به کمک درون‌یابی کروی

حسین مشکی

دانشجوی دکتری، دانشکده مهندسی عمران، واحد علوم و تحقیقات،
دانشگاه آزاد اسلامی، تهران، ایران

عبدالرضا جغتائی (نویسنده مسئول)

دانشیار دانشکده مهندسی عمران، دانشگاه صنعتی شریف، تهران،
joghatae@sharif.edu

۱- مقدمه

متغیرهای طراحی، ضرایب لاگرانژ^۵ نیز به مجهولات اضافه می‌شود. حتی در روش‌های غیرمستقیم مانند روش پنالتی^۶ [۱۰] نیز تعداد معادلات مسئله‌ی بهینه‌یابی به تعداد متغیرهای طراحی مسئله می‌باشد. به‌رحال در روش پیشنهادی به دلیل به‌کارگیری توابع کروی^۷ که در عملیات مشتق‌گیری برای معادلات لاگرانژ^۸ به کار گرفته شده، متغیرهای طراحی از دستگاه معادلات جدا شده و به‌طور مستقل به دست می‌آیند. از این جهت حجم محاسبات می‌تواند به تعداد متغیرهای طراحی کاهش یابد.

در روش‌هایی مانند روش خطی‌سازی پیاپی [۵] یا برنامه‌ریزی درجه دوم [۷-۹] از بسط تیلور به منظور تقریب خود مقدار تابع

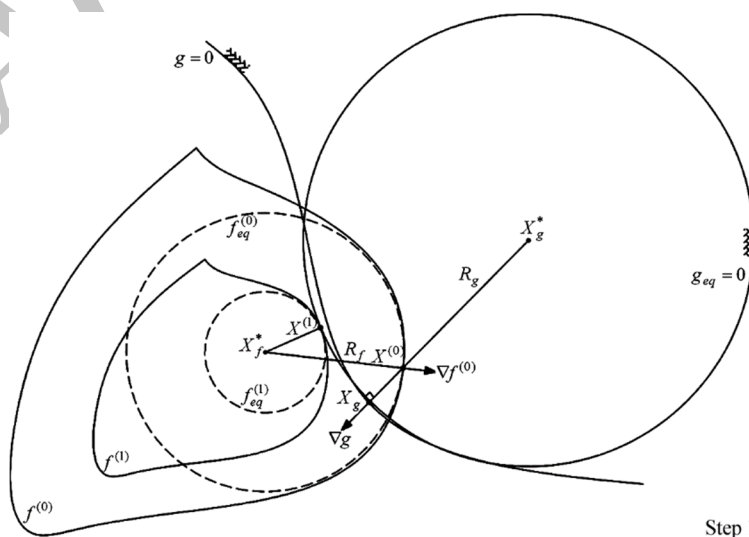
مشکل اکثر روش‌های بهینه‌یابی درگیر شدن متغیرهای طراحی در دستگاه معادلات حل بوده که حجم محاسبات پرتکرار بهینه‌یابی را به شدت برای مسائل واقعی مهندسی و غیره افزایش می‌دهد. در این مقاله از روش لاگرانژ استفاده شده که زیرمجموعه روش‌های بهینه‌یابی مستقیم^۱ می‌باشد. از جمله روش‌های مستقیم [۱-۴]، روش خطی‌سازی پیاپی^۲ [۵] می‌باشد. در این روش که با تکنیک سیمپلکس^۳ قابل حل بوده، تعداد معادلات درگیر مسئله به تعداد قیدهای اصلی به‌علاوه دو برابر تعداد متغیرهای طراحی ناشی از حد بالا و پایین هر متغیر می‌باشد [۶] و یا در روش برنامه‌ریزی درجه دوم [۷-۹] علاوه بر

حداقل کردن مانده‌ی خطا ندارند. البته استفاده از مفهوم کمترین فاصله یا کمترین انحراف در دیگر روش‌های بهینه‌یابی از جمله روش تصویرگرادیان نیز استفاده شده که در این روش بردار راستای مماسی باید در کمترین انحراف از بردار منفی گرادیان تابع هدف که یک بردار مرجع بهینه بوده، قرار گیرد [۱۵-۱۶].

به‌طور کلی هر گام محاسباتی شامل دو بخش، یکی به دست آوردن جواب تقریبی بهینه و دیگری برگرداندن جواب تقریبی بر روی تک‌تک قیدها به منظور انجام تقریب مجدد می‌باشد. در شکل (۱) نحوه‌ی به‌هنگام کردن نقطه‌ی مرجع از $X^{(0)}$ به $X^{(1)}$ به صورت گرافیکی نشان داده شده است. به‌طوری‌که در شکل (۱) دیده می‌شود نقطه X_0 حدس اولیه می‌باشد. نقطه X_g را می‌توان به گونه‌ای به دست آورد که هم بر روی قید $g=0$ قرار داشته و هم نزدیک‌ترین فاصله از نقطه X_0 را دارا باشد. منظور از نقطه با نزدیک‌ترین فاصله این است که بردار حاصل از وصل کردن نقاط X_0 و X_g ، بر قید $g=0$ عمود باشد. یعنی در امتداد گرادیان قید، ∇_g در نقطه‌ی X_g باشد. حال در نقطه X_g مقدار شعاع انحناء، R_g برای قید $g=0$ را می‌توان به دست آورد. با به‌کارگیری R_g ، و نیز داشتن راستای گرادیان قید $g=0$ در نقطه X_g می‌توان مختصات مرکز کره، X_g^* را به دست آورد. در اینجا با به‌کارگیری R_g و X_g^* کره‌ای معادل با قید $g=0$ به صورت $g_{eq}=0$ حاصل می‌شود. به‌همین ترتیب برای تابع هدف

استفاده شده درحالی‌که در روش پیشنهادی، انحناء تابع با کره‌ای Π بعدی تقریب زده می‌شود. با تعریف انحناء بر اساس تغییرات گرادیان تابع، شعاع انحناء^۹ به‌عنوان یک شاخص تعیین می‌شود. بنابراین با به دست آوردن شعاع انحناء در هر نقطه مورد محاسبه و به‌کارگیری آن در مدل تقریبی به‌صورت کره‌ای مماس بر تابع، هم گرادیان و هم تغییرات گرادیان تابع در طول هر گام محاسباتی با مقدار ثابت تقریب زده می‌شود.

در مورد استفاده از تقریب کروی باید به این نکته توجه داشت که پس از هر گام محاسباتی از آنجا که جواب به‌دست آمده دقیق نیست، معادلات مربوط به قیود فعال را ارضاء نکرده و از سوی دیگر برخلاف روش‌های مبتنی بر بسط تیلور خطی [۱، ۱۱] و یا سهمی درجه دوم [۶، ۱۲، ۱۳، ۱۴]، خود تابع تقریب زده نمی‌شود؛ بنابراین لازم است در گام‌های بعدی محاسبات، جواب تقریبی بر روی معادلات مربوط به قیدهای فعال برگردانده شود. در این روش، چنانچه نقطه جواب تقریبی حاصل از معادلات لاگرانژ نقطه مرجع^{۱۰} نامیده شود، معیار برگشتن این نقطه بر روی هر یک از معادلات قید، بر اساس نزدیک‌ترین فاصله قید اصلی (کمترین مانده خطا) از جواب تقریبی (نقطه مرجع) انتخاب شده است. این در حالی است که روش‌هایی مانند روش‌های متکی به بسط تیلور، در هر گام محاسباتی برای تقریب زدن از روی هر قید، ذاتاً تأکیدی بر



شکل (۱): نحوه‌ی به‌هنگام کردن نقطه‌ی مرجع $X^{(0)}$ به $X^{(1)}$

$$g_j(X) = \sum_{i=1}^n (x_i - x_{ij}^*)^2 - R_j^2 \leq 0 \quad j = 1, 2, \dots, m \quad (5)$$

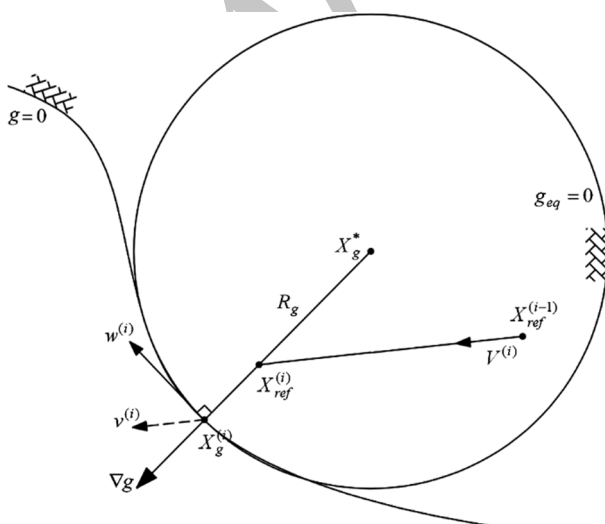
$$g_j(X) = \sum_{i=1}^n (x_i - x_{ij}^*)^2 - R_j^2 = 0 \quad j = m+1, \dots, p \quad (6)$$

که در آن تعداد تکرار محاسبات، n تعداد متغیر، m تعداد قید نامساوی، از $m+1$ تا p تعداد قید مساوی، x_i متغیر طراحی نام، x_{ij}^* مؤلفه‌ی i ام مختصات مرکز کره تابع هدف، x_{ij}^* مؤلفه‌ی i ام مختصات مرکز کره قید نام، R_j شعاع انحنای تابع هدف، R_j شعاع انحنای قید نام و $f(X^{(k)})$ مقدار تابع هدف در تکرار k ام می‌باشد. در معادلات لاگرانژ مقدار ثابت $f(X^{(k)})$ حذف می‌شود.

۳- تعیین پارامترها و مشخصات توابع تقریبی

۳-۱- شعاع انحنای کره n بعدی

در مدل کره مماسی، گرادیان و نیز تغییرات گرادیان تابع به کمک تعریف انحنای تقریب زده شده و از این طریق شعاع انحنای به‌عنوان شاخص اصلی، به‌صورت یک مقدار ثابت در هر گام محاسباتی، معادل‌سازی می‌شود. با توجه به اینکه شعاع انحنای عمود بر سطح رویه و در راستای گرادیان است، بنابراین شعاع انحنای در داخل یک صفحه متعلق به دو بردار گرادیان، ∇_g ، و بردار حد فاصل دو نقطه بهینه حاصل از دو گام آخر محاسبات می‌باشد. بردار اخیر مطابق شکل (۲) مسیر بهینه را نشان می‌دهد که با حرف V مشخص شده است. حال با داشتن دو بردار ∇_g و



شکل (۲): شعاع انحنای در فضای n بعدی در راستای بهینه $w^{(i)}$

نیز می‌توان تابع کروی معادل $F_{eq}^{(0)}$ را به دست آورد. با توجه به اینکه تابع هدف یک رویه ثابت و مشخصی نیست و دارای منحنی‌های هم‌تراز است، بنابراین تابع معادل را می‌توان در نقطه حدس اولیه $X^{(0)}$ به‌دست آورد. با تعیین شعاع انحنای تابع هدف، R_f و گرادیان آن، ∇_f در نقطه‌ی $X^{(0)}$ می‌توان مختصات نقطه‌ی مرکز کره، X_f^* را به دست آورد. حال با داشتن کره‌ی معادل قید $g_{eq} = 0$ و مرکز کره‌ی تابع هدف، X_f^* در فضای کروی می‌توان نقطه‌ی بهینه $X^{(1)}$ را به دست آورد بر این اساس از مرکز کره تابع هدف، X_f^* کوچک‌ترین کره‌ی که قید معادل $g_{eq} = 0$ را برآورده کند کره $F_{eq}^{(1)}$ است که مماس بر قید معادل $g_{eq} = 0$ در نقطه‌ی $X^{(1)}$ می‌باشد. مطابق شکل (۱) نقطه‌ی $X^{(1)}$ در نزدیکی قید اصلی فعال $g = 0$ می‌باشد. با جایگزینی نقطه‌ی $X^{(1)}$ به‌جای $X^{(0)}$ مراحل فوق را جهت به‌دست آوردن نقطه‌ی بهینه‌ی بعدی، $X^{(2)}$ می‌توان تکرار کرد تا نقطه‌ی حاصله نزدیک‌تر به قید فعال $g = 0$ شود.

۲- بیان مدل تعمیم‌یافته کروی به روش لاگرانژ

در این قسمت ابتدا صورت عمومی مسائل بهینه‌یابی بیان شده و در ادامه فرم تقریب کروی آن ارائه می‌شود و نهایتاً پارامترهای مورد نیاز در مسئله‌ی بهینه‌یابی کروی مشخص می‌شوند. یک مسئله‌ی بهینه‌یابی در فرم عمومی آن به شکل زیر می‌باشد:

$$\min f = f(X) \quad (1)$$

تحت شرایط:

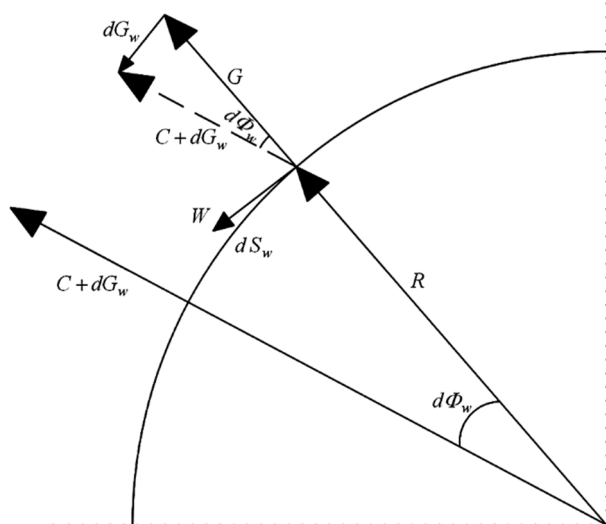
$$g_j(X) \leq 0 \quad j = 1, 2, \dots, m \quad (2)$$

$$g_j(X) = 0 \quad j = m+1, \dots, p \quad (3)$$

چنانچه در فضای نرم به‌جای ۲ یا ۳ متغیر، از n متغیر در یک معادله‌ی کره استفاده شود، مسئله‌ی بهینه‌یابی فوق می‌تواند با مدل تقریبی کروی به شکل زیر بیان شود.

$$\min f = \sum_{i=1}^n (x_i - x_{if}^*)^2 - R_f^2 + f(X^{(k)}) \quad (4)$$

تحت شرایط:



شکل (۳): شعاع انحناء، طول قوس، بردار یکه گرادیان

با محاسبه مشتقات بردار G نسبت به متغیرها می‌توان برای ماتریس ∇G رابطه‌ی زیر را نوشت:

$$DG = \|\nabla g\|^{-2} H \left(\|\nabla g\| I - (\nabla g \cdot \nabla g^T) \|\nabla g\|^{-1} \right) \quad (14\text{-الف})$$

که در آن:

$$D_{G_{ij}} = \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{\partial g / \partial x_i}{\|\nabla g\|} \right) \quad (14\text{-ب})$$

و H ماتریس هسین^{۱۱} تابع I و ماتریس واحد می‌باشد. از آنجا که بردار w بر بردار ∇g عمود است، ترم دوم رابطه (۱۴-الف) برابر صفر شده؛ بنابراین شعاع انحناء بر اساس روابط (۱۲) و (۱۴-الف) برابر است با:

$$R = \frac{\|\nabla g\|}{\|H \cdot w\|} \quad (15)$$

۳-۲- مرکز کره در فضای n بعدی

از هر نقطه معلوم مانند X واقع بر روی تابع می‌توان شعاع انحناء را در یک راستای مشخص از فضای n بعدی، به ترتیب بالا به‌دست آورد. چنانچه برای نقطه‌ی معلومی از یک تابع، شعاع کره و بردار یکه گرادیان نرمال شده، موجود باشند می‌توان به‌صورت زیر مرکز کره را تعیین نمود.

با مساوی قرار دادن بردار گرادیان یکه تابع با تابع کروی معادل آن داریم:

V می‌توان بردار w که مماس بر رویه و در مسیر بهینه می‌باشد را تعیین نموده تا به کمک آن شعاع انحناء برای یک مسیر مشخص از سطح رویه تعیین شود. به‌منظور دستیابی به چنین تعریفی ابتدا راستای بهینه بر اساس دو نقطه بهینه متوالی، مطابق شکل (۲)، به‌صورت زیر به دست آورده می‌شود.

بردار مسیر بهینه برابر است با

$$V^{(i)} = \frac{X_{ref}^{(i)} - X_{ref}^{(i-1)}}{\|X_{ref}^{(i)} - X_{ref}^{(i-1)}\|} \quad (7)$$

با توجه به مشخص بودن دو بردار V و ∇g ، بردار عمود بر ∇g و مقید به بردار V برابر خواهد بود با [۱۷]:

$$w_0 = V - \frac{\langle V, \nabla g \rangle}{\langle \nabla g, \nabla g \rangle} \nabla g \quad (8)$$

لازم به ذکر است که مطابق تعریف باید بردار جهت در مشتق سویی، w به‌صورت یکه به کار برده شود بنابراین:

$$w = \frac{w_0}{\|w_0\|} \quad (9)$$

از سوی دیگر با تعریف بردار یکه گرادیان که عمود بر سطح بوده داریم:

$$G = \frac{\nabla g}{\|\nabla g\|} \quad (10)$$

حال مطابق تعریف، شعاع انحناء برابر با نسبت تغییرات طول انحناء به تغییرات زاویه‌ی انحناء می‌باشد [۱۸]. بنابراین مطابق شکل (۳) و بر اساس یک تناسب ساده داریم:

$$d\phi_w = \frac{dS_w}{R} = \frac{\|dG_w\|}{\|G\|} \quad (11)$$

که در آن ϕ_w بردار زاویه‌ی انحناء در امتداد w و S_w طول قوس در امتداد w می‌باشد.

با توجه به اینکه بردار گرادیان به‌صورت یک بردار یکه تعریف شده، برای رابطه (۱۱) می‌توان نوشت:

$$\frac{1}{R} = \frac{\|dG_w\|}{dS_w} = \|\nabla G \cdot w\| \quad (12)$$

که در آن:

$$\nabla G = \nabla \{G_1, G_2, \dots, G_n\} \quad (13)$$

$$X = (X_f^* + X_{n \times m}^* \times \mu) / (1 + 1^T \mu) \quad (19)$$

به طوری که طبق تعاریف قبلی مؤلفه‌های ماتریس X^* و بردار X_f^* به ترتیب برابر X_{ij}^* و X_{if}^* خواهند بود. بنابراین متغیر طراحی به صورت غیر درگیر بر حسب ضرایب لاگرانژ حاصل شد.

۵- تعیین ضرایب لاگرانژ

با استفاده از معادله‌ی لاگرانژ به صورت $\frac{\partial L}{\partial \mu_j} = 0$ ، قید Z را برابر صفر می‌شود که فرم برداری قید معادل کروی آن برابر خواهد بود با:

$$(X - X_j^*)^T (X - X_j^*) = R_j^2 \quad (20)$$

با جایگذاری مقدار بردار X از رابطه (۱۹) در رابطه (۲۰) معادله زیر حاصل می‌شود:

$$g_j = \mu^T A_j \mu + B_j^T \mu + C_j = 0 \quad j = 1, 2, \dots, m \quad (21)$$

به طوری که:

$$A_j = X^{*T} X^* - 2(X_j^{*T} 1_{m \times 1}^T)^T X^* + (X_j^{*T} X_j^* - R_j^2) 1_{m \times m} \quad (22)$$

$$B_j^T = 2(X_f^* - X_j^*)^T (X^* - X_j^{*T} 1_{m \times 1}^T) - 2R_j^2 1_{m \times 1}^T \quad (23)$$

$$C_j = (X_f^* - X_j^*)^T (X_f^* - X_j^*) - R_j^2 \quad (24)$$

بدین ترتیب معادلات لاگرانژ مستقل از متغیرهای طراحی و تنها وابسته به ضرایب لاگرانژ حاصل می‌شود:

۶- برگرداندن نقطه‌ی مرجع بر روی سطح قیدها

بر اساس معادلات و روابط فوق می‌توان به طور تقریبی در هر گام محاسباتی شعاع انحناء و مرکز کره را برای هر یک از قیدها و تابع هدف به دست آورد. در تابع هدف، محاسبه‌ی پارامترهای توابع تقریبی برای نقطه‌ی بهینه (نقطه مرجع) حاصل از گام قبلی انجام می‌شود اما برای قیدهای مسئله ابتدا نقطه‌ی مرجع حاصل از گام قبلی بر روی تک‌تک قیدها با کوتاه‌ترین فاصله (کمترین مانده خطا) از آن برده شده سپس پارامترهای توابع تقریبی برای نقاط واقع بر روی قیدها به دست می‌آید. بردن یک نقطه بر روی قید با کوتاه‌ترین فاصله‌ی آن نقطه از سطح قید، خود یک مسئله‌ی بهینه‌یابی می‌باشد به طوری که تابع هدف و قید آن

$$G_{ij} = \frac{\|X_{ij} - X_j^*\|}{R_j} \quad (16)$$

بنابراین به کمک فرم برداری رابطه (۱۶) مرکز کره برابر است با:

$$X_j^* = X_j - R_j G_j \quad (17)$$

حال با به دست آوردن شعاع انحناء و مرکز کره می‌توان تابع هدف تقریبی و قیدهای مسئله را مطابق روابط (۱) تا (۳) ایجاد نمود.

۴- به هنگام کردن نقطه‌ی بهینه‌ی تقریبی (نقطه مرجع)

بعد از اینکه پارامترهای توابع تقریبی برای معادلات و یا نامعادلات قیدها و نیز تابع هدف حاصل شد، تابع لاگرانژ برای توابع تقریبی را می‌توان تشکیل داد. معادلات لاگرانژ به منظور حداقل کردن تابع هدف با ملاحظه‌ی قیود اصلی می‌تواند مد نظر قرار گیرد. اگر مسئله‌ی بهینه‌یابی مطرح شده در روابط (۱) تا (۳) را در نظر بگیریم تابع لاگرانژ آن را می‌توان به صورت زیر نوشت:

$$\min_x l = f + \sum_{j=1}^m \mu_j g_j \quad (18)$$

در این رابطه f تابع هدف، g_j قید Z را و μ_j ضریب لاگرانژ قید Z می‌باشند.

در اینجا باید توجه داشت تکنیک حل برای قیدهای نامساوی $g_j \leq 0$ به روش قیدهای فعال است بدین معنی که در ابتدای هر گام محاسباتی فرض بر این است که همه‌ی قیدها فعال بوده و به صورت مساوی در نظر گرفته می‌شوند. با به دست آوردن ضرایب لاگرانژ چنانچه ضریب قیدی منفی باشد قید مربوط به منفی‌ترین ضریب لاگرانژ از مسئله حذف شده و مجدداً محاسبات تکرار می‌شود. این کار آن قدر تکرار می‌شود تا هیچ قید با ضریب منفی مطابق شرایط کان-تاگر وجود نداشته باشد.

با قرار دادن مشتق رابطه (۱۸) برابر صفر به عنوان معادله لاگرانژ و جایگزینی توابع تقریبی f و g_j تعریف شده در روابط (۴) تا (۶) در این معادله، بردار متغیرهای طراحی برابر خواهد شد با:

به صورت زیر می تواند تعریف شود:

$$\min_x I_j(x)^2 \quad (25)$$

تحت شرایط:

$$g_j(x) = 0 \quad (26)$$

به طوری که:

$$I_j(x)^2 = I_j(x)^T I_j(x) = (X_j - X_{ref}^{(k)})^T (X_j - X_{ref}^{(k)}) \quad (27)$$

که در آن $X_{ref}^{(k)}$ مختصات نقطه مرجع در k امین تکرار محاسبات و X_j نقطه‌ی واقع بر روی قید z ام با کوتاه‌ترین فاصله از آن، $I_j(x)$ بزرگی فاصله بین X_j و $X_{ref}^{(k)}$ می‌باشد.

با نوشتن تابع و معادله‌ی لاگرانژ برای این مسئله و به دست آوردن ضریب لاگرانژ نهایتاً برای نقطه بر روی قید با نزدیک‌ترین فاصله تا نقطه‌ی بهینه‌ی تقریبی خواهیم داشت:

$$X_j^{(i+1)} = -\frac{\|I_j\|}{\|\nabla g_j\|} \nabla g_j \Big|_{X_j^{(i)}} + X_{ref}^{(k)} \quad (28)$$

همچنین برای اینکه نقطه بر روی قید باشد داریم:

$$g_j(x) = 0 \quad (29)$$

بنابراین با یک حدس اولیه و به دست آوردن نقطه‌ی $X_j^{(i+1)}$ از رابطه (28) می‌توان $n-1$ متغیر X_{ij} آن را در رابطه (29) گذاشت و متغیر m را از آن به عنوان یک نقطه‌ی جدید به دست آورد و با تکرار این دو مرحله و رسیدن به همگرایی لازم، نقطه واقع بر روی قید با کوتاه‌ترین فاصله از نقطه‌ی بهینه‌ی تقریبی را به دست آورد.

۲- الگوریتم بهینه‌یابی

بر مبنای روابط و مطالب ارائه شده‌ی قبلی، الگوریتمی جهت حل مسائل واقعی مهندسی ارائه شده که توسط آن دو سازه در بخش‌های بعدی بهینه خواهند شد. اساس الگوریتم چنین است:

الف- انتخاب یک نقطه‌ی موجه به عنوان نقطه‌ی مرجع؛

ب- بردن نقطه‌ی مرجع بر روی هر یک از قیدها در «نزدیک‌ترین فاصله» از این نقطه؛

ج- معادل‌سازی هر یک از قیدها به صورت قید کروی در نقاط حاصل از بند «ب» و جایگزینی تقریب کروی معادل برای

تابع هدف در نقطه‌ی مرجع

ه- تشکیل و حل دستگاه معادلات درجه دوم مربوط به ضرایب

لاگرانژ بر اساس قیده‌های معادل موجود

و- حذف ضرایب و معادلات لاگرانژی که مقدار آنها منفی

هستند (به ترتیب از منفی‌ترین آنها) و حل مجدد دستگاه

معادلات تا رسیدن به جواب مثبت یا صفر برای تمام ضرایب

لاگرانژ

ی- تعیین مختصات نقطه‌ی مرجع به کمک روابط وابسته به

ضرایب لاگرانژ. چنانچه قیدی در این نقطه غیر موجه شود،

این قید فعال محسوب شده و برگشت به بند «ه»

ز- در صورتی که نقطه‌ی حاصل برای قیده‌های فعال کروی

(نقطه‌ی مرجع) بر روی قیده‌های اصلی مسئله نیز باشد پایان

بهینه‌یابی بوده در غیر این صورت برگشت به بند «ب» با

جایگزینی نقطه‌ی مرجع جدید به جای نقطه‌ی مرجع قبلی و

تکرار گام‌های قبلی

لازم به ذکر است در این الگوریتم چنانچه هیچ قیدی فعال

نباشد و مسئله نامقید شود طبق رابطه (۱۹) ضرایب لاگرانژ برابر

صفر شده و مقدار X برابر X_f^* خواهد شد. حال برای تعیین

مقدار X چنانچه به رابطه (۱۷) توجه شود، دیده می‌شود که مسئله

به روش تندترین کاهش^{۱۲} در مسائل نامقید تبدیل شده است.

کافیست به شیوه‌ی تندترین کاهش شعاع انحاء به عنوان یک

عدد اسکالر به منظور تعیین طول گام و رساندن تابع هدف به

مقدار حداقل، بهینه شود. به هر حال در این مقاله با توجه به

معروفیت روش تندترین کاهش، مسائل نامقید مورد بحث قرار

نمی‌گیرند.

۸- مثال‌ها

در مثال‌های ساده‌ی زیر از تحلیل استاتیکی استفاده شده

است؛ چون در تبیین روش پیشنهادی، عمده تفاوت اساسی روش

تاریخچه‌ی زمانی نسبت به استاتیکی از منظر بهینه‌یابی تکرار

محاسبات بهینه در گام‌های زمانی مختلف می‌باشد. در حالی که

هدف این مقاله نمایش ساده‌ای از جزئیات روش پیشنهادی است.

۸-۱- مثال خرپا

به منظور حل مسئله، حدس اولیه برای نقطه‌ی مرجع برابر $X^{(0)} = (0.5, 0.5)$ انتخاب شده است. این نقطه مطابق جدول (۱) در هر گام محاسباتی بر روی قید برده شده است.

جدول (۱): نقطه روی قید با کوتاه‌ترین فاصله از نقطه مرجع

X_1		X (نقطه روی قید)
X_{12}	X_{11}	
۰/۲۸۷۸	۰/۲۱۷۱	گام ۱
۰/۳۰۵۲	۰/۲۰۴۱	گام ۲
۰/۲۶۵۹	۰/۲۳۳۶	گام ۳
۰/۲۸۶۵	۰/۲۱۸۲	گام ۴
۰/۲۷۹۴	۰/۲۲۳۵	گام ۱۶

در نقاط واقع بر روی تابع هدف و قید باید شعاع انحنا تعیین شود. با توجه به اینکه مسئله دوبعدی است هر انتخاب برای بردار جهت تنها به یک شعاع انحنا منجر می‌شود بنابراین در گام نخست بردار جهت برای شعاع انحنا به صورت اختیاری مطابق جدول (۲) انتخاب شده است.

جدول (۲): بردار مماسی مربوط به ۲ نقطه متوالی مرجع برای تابع هدف و قید

W_f		W_1		W (بردار مماسی)
w_{f2}	w_{f1}	w_{12}	w_{11}	
-۰/۷۵۹۳	۰/۶۵۰۸	-۰/۸	۰/۶	گام ۱
۰/۴۴۹۰	۰/۴۴۹۰	۰/۸	-۰/۶	گام ۲
-۰/۸۰۶۵	۰/۵۹۱۳	-۰/۸	۰/۶	گام ۳
۰/۸۵۵۱	-۰/۵۱۱۸	۰/۸	-۰/۶	گام ۴
۰/۸۳۹۰	-۰/۵۴۴۲	۰/۸	-۰/۶	گام ۱۶

با تعیین بردار گرادیان و ماتریس هسین تابع هدف و قیدها به ترتیب در نقطه‌ی مرجع و نقطه‌ی روی قید، شعاع انحنا و متعاقباً مرکز کروی معادل آنها، مطابق جدول (۳) محاسبه شده است. با داشتن مرکز کره و شعاع انحنا تابع هدف و قید، ضرایب ماتریسی معادلات لاگرانژ مطابق روابط (۲۲) تا (۲۴) قابل محاسبه بوده و به کمک معادلات لاگرانژ ضریب لاگرانژ مطابق جدول (۴) در هر گام به کمک حل عددی محاسبه شده است. با استفاده از ضریب لاگرانژ و با به کارگیری رابطه (۱۹) نقطه

مطابق شکل (۴) این خرپا به عنوان بخشی از سیستم مهاربندی با دو عضو تحت بار جانبی F قرار گرفته است چنانچه هدف حداقل کردن وزن خرپا با محدودیت تنش در اعضا و تغییر مکان قائم نقطه رأس آن باشد خواهیم داشت:

$$\min f(A_1, A_2) = \rho L \left(\frac{2}{\sqrt{3}} A_1 + A_2 \right) \quad (30)$$

$$|\sigma_i| \leq \sigma_0, \quad i = 1, 2, 3 \quad (31)$$

$$\delta \leq \delta_0, \quad \delta_0 = \frac{\sigma_0 L}{E} \quad (32)$$

با حل خرپا با زاویه $\alpha = 30^\circ$ تحت نیروی F نتایج زیر برای قیدهای تغییر مکان و تنش حاصل می‌شود:

$$\frac{8}{\sqrt{3} A_1} + \frac{3}{A_2} \leq \frac{E \delta_0}{FL} = \frac{\sigma_0}{F} \quad (33)$$

$$A_1 \geq \frac{2F}{\sigma_0}, \quad A_2 \geq \frac{\sqrt{3}F}{\sigma_0} \quad (34)$$

با تغییر متغیر به صورت زیر:

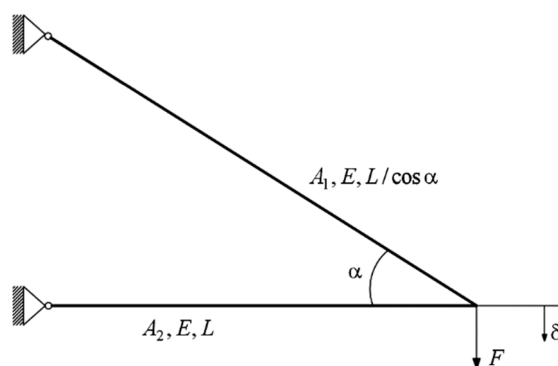
$$x_1 = \frac{2F}{\sigma_0 A_1} \geq 0, \quad x_2 = \frac{\sqrt{3}F}{\sigma_0 A_2} \geq 0 \quad (35)$$

نهایتاً مسئله به شکل زیر تبدیل می‌شود. برای اطلاعات بیشتر به مرجع [۱۹] مراجعه شود.

$$\min_{x_1, x_2} f(x_1, x_2) = \frac{4}{3x_1} + \frac{1}{x_2} \quad (36\text{-الف})$$

تحت شرایط:

$$\frac{4}{\sqrt{3}} x_1 + \sqrt{3} x_2 \leq 1 \quad (36\text{-ب})$$


شکل (۴): خرپای دو عضوی تحت قیدهای تنش و تغییر مکان

جدول (۳): شعاع انحناء و مرکز کره برای تابع هدف و قید

X^* (مختصات مرکز کره)				R (شعاع انحناء)		
X_f^*		X_1^*		R_f	R_1	
X_{f2}^*	X_{f1}^*	X_{12}^*	X_{11}^*			
۰/۷۱۶۸	۰/۷۵۳۰	-۵۹۹/۷۱۲۲	-۷۹۹/۷۸۲۹	۰/۳۳۳۲	۱۰۰۰	گام ۱
۰/۵۶۹۶	۰/۶۳۸۶	-۵۹۹/۶۹۴۸	-۷۹۹/۷۹۵۹	۰/۱۵۵۱	۱۰۰۰	گام ۲
۰/۵۹۳۹	۰/۶۲۸۱	-۵۹۹/۷۳۴۱	-۷۹۹/۷۶۶۴	۰/۱۵۸۹	۱۰۰۰	گام ۳
۰/۵۸۰۳	۰/۶۳۲۵	-۵۹۹/۷۱۳۵	-۷۹۹/۷۸۱۸	۰/۱۵۴۹	۱۰۰۰	گام ۴
۰/۵۸۴۸	۰/۶۳۰۷	-۵۹۹/۷۲۰۶	-۷۹۹/۷۷۶۵	۰/۱۵۵۸	۱۰۰۰	گام ۱۶

جدول (۴): نتایج عددی تا گام محاسباتی ۴ و گام نهایی

گامها					$\ I\ $	فاصله نقطه مرجع از قید
گام ۱	گام ۲	گام ۳	گام ۴	گام ۱۶		
۰/۰۲۱۷	۰/۰۴۹۱	۰/۰۲۵۷	۰/۰۱۳۵	-۶۶۵/۵۴۶	μ_1	ضریب لاگرائز
۰/۲۳۳۶	۰/۲۱۸۲	۰/۲۲۶۳	۰/۲۲۳۵	۰/۲۲۳۵	x_1	نقطه‌ی مرجع
۰/۳۰۵۲	۰/۲۵۵۹	۰/۲۸۶۵	۰/۲۷۹۴	۰/۲۷۹۴	x_2	
۹/۸۰۸۶	۹/۴۶۹۰	۹/۶۰۲۴	۹/۵۲۰۶	۹/۵۴۵۶	f	تابع هدف
۰/۳۵۴۳	۰/۰۹۱۸	۰/۰۲۵۷	۰/۰۱۳۵	-۶۶۵/۵۴	$\ X^{(i-1)} - X^{(i)}\ $	اندازه تغییرات نقطه مرجع

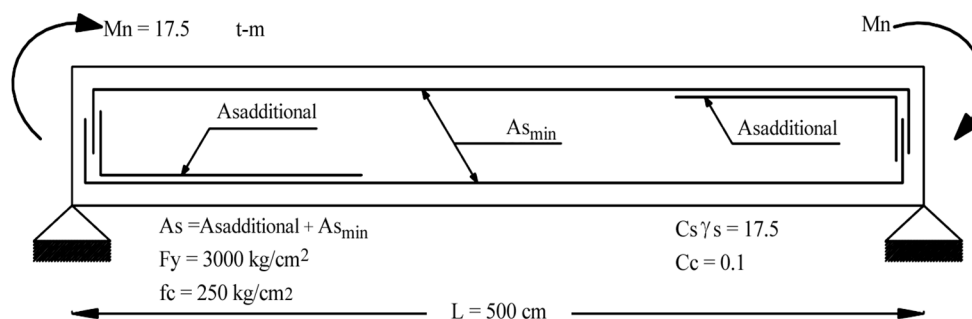
مرجع جدید تعیین شده است که در گام شانزدهم مقدار خطا به عدد ناچیزی رسیده است. مطابق جدول (۴) تابع هدف به‌مرور کم شده است. با توجه به اینکه این مسئله فقط یک قید داشته فاصله متوالی نقاط مرجع از هم برابر فاصله‌ی نقاط مرجع از قید نیز شده است. حل این مسئله با روش پنیالیتی خارجی [۱۳] نیز انجام شده که نتایج کاملاً بر هم منطبق هستند.

$$\min_{\substack{x_1=As \\ x_2=b_w \\ x_3=d}} f = C_c L b_w (d + d') + \quad (37)$$

$$\gamma_s C_s (2/3 L (As - As_{\min}) + L As_{\min})$$

۸-۲- مثال تیر بتنی

مطابق شکل (۵) تیر بتنی تحت تأثیر لنگر خمشی هم‌جهت تحت شرایط:



شکل (۵): تیر بتنی تحت قید لنگر خمشی و عرض مقطع

اختیاری مطابق جدول (۶) انتخاب شده اما در گام‌های بعدی این بردار مطابق رابطه (۸) از دو نقطه‌ی مرجع متوالی محاسبه شده است. مقدار شعاع انحناء مطابق رابطه (۱۵) محاسبه و در جدول (۷) ارائه شده است.

همان‌طور که در جدول (۸) دیده می‌شود در گام بیست‌ونهم اندازه‌ی تغییرات نقطه‌ی مرجع به عدد ناچیزی رسیده است. همین‌طور فاصله‌ی نقطه‌ی مرجع از نقطه‌ی واقع بر روی هر دو قید نیز به مرور کم شده اما مقدار تابع هدف رفتاری زیگزاگی داشته و کاملاً کاهشی نیست بنابراین می‌توان گفت این وضعیت نشان از نزدیک شدن تدریجی نقطه‌ی بهینه در ناحیه‌ی موجه واقعی دارد که ممکن است نهایتاً مقدار تابع هدفی بزرگ‌تر از مقدار

$$M_n \leq A_s F_y (d - 0.59 \frac{A_s F_y}{b_w f_c}) \quad (38-الف)$$

یا

$$g_1 = 1 - x_1 F_y (x_3 - 0.59 \frac{x_1 F_y}{x_2 f_c}) / M_n \leq 0 \quad (38-ب)$$

$$b_w \geq 25 \text{ cm} \quad \text{یا} \quad g_2 = 1 - \frac{x_2}{25} \leq 0 \quad (39)$$

به‌منظور حل مسئله، حدس اولیه برای نقطه‌ی مرجع برابر $X^{(0)} = (15, 30, 30)$ انتخاب شده است. مطابق الگوریتم بهینه‌یابی، برای این تیر بتنی که دارای دو قید و سه متغیر می‌باشد نیز جداول نظیر مثال قبل تهیه شده است. در نقاط بر روی تابع هدف و قیدها که در جدول (۵) ارائه گردیده باید شعاع انحناء تعیین شود. بردار جهت شعاع انحناء برای گام اول به‌صورت

جدول (۵): نقطه‌ی روی قید با کوتاه‌ترین فاصله از نقطه‌ی مرجع

X_2			X_1			X (نقطه روی دو قید)
X_{23}	X_{22}	X_{21}	X_{13}	X_{12}	X_{11}	
۳۰/۰۰۰۰	۲۵/۰۰۰۰	۱۵/۰۰۰۰	۳۲/۱۵۵۱	۳۰/۲۷۱	۱۷/۸۷۰۵	گام ۱
۳۳/۲۳۱۴	۲۵/۰۰۰۰	۱۸/۱۱۳۹	۳۳/۰۴۳۱	۲۵/۹۷۱۹	۱۷/۸۷۲۵	گام ۲
۳۳/۴۵۷۹	۲۵/۰۰۰۰	۱۷/۵۴۶۸	۳۳/۴۶۰۲	۲۵/۰۰۰۷	۱۷/۵۴۹۹	گام ۳
۳۳/۳۶۰۰	۲۵/۰۰۰۰	۱۷/۶۲۵۳	۳۳/۳۶۰۰	۲۵/۰۰۰۰	۱۷/۶۲۵۳	گام ۴
۳۳/۴۲۹۵	۲۵/۰۰۰۰	۱۷/۵۹۲۲	۳۳/۴۲۹۵	۲۵/۰۰۰۰	۱۷/۵۹۴۱	گام ۲۹

جدول (۶): بردار مماسی تابع هدف و قیدها حاصل از ۲ نقطه‌ی متوالی مرجع

W_f			W_2			W_1			W (بردار مماسی)
W_{f3}	W_{f2}	W_{f1}	W_{23}	W_{22}	W_{21}	W_{13}	W_{12}	W_{11}	
-۰/۵۱۴۴	-۰/۵۱۴۳	۰/۶۸۶۲	-۰/۸۷۰۶	۰/۰	-۰/۴۹۲۱	-۰/۳۱۶۹	-۰/۸۸۹۲	۰/۳۲۹۹	گام ۱
۰/۴۲۲۵	-۰/۸۲۳۵	۰/۳۷۸۶	۰/۷۲۰۱	۰/۰	۰/۶۹۳۹	۰/۱۶۵۷	-۰/۹۸۵۸	۰/۰۲۶۸	گام ۲
۰/۶۷۲۹	۰/۲۷۶۸	-۰/۶۸۶۰	۰/۳۷۱۰	۰/۰	-۰/۹۲۸۶	۰/۷۹۶۶	۰/۰۵۳۰	-۰/۶۰۲۲	گام ۳
-۰/۸۰۹۱	-۰/۰۳۳۶	۰/۵۸۶۷	-۰/۷۸۰۲	۰/۰	۰/۶۲۵۵	-۰/۷۹۸۱	-۰/۰۰۴۹	۰/۶۰۲۵	گام ۴
-۰/۸۱۶۱	-۰/۰۱۸۲	۰/۵۷۷۷	-۰/۸۰۰۱	۰/۰	۰/۵۹۹۹	-۰/۸۰۰۱	-۰/۰۰۰۰	۰/۵۹۹۹	گام ۲۹

جدول (۷): شعاع انحناء و مرکز کره برای تابع هدف و قید

X^* (مختصات مرکز کره)									R (شعاع انحناء)			
X^*_f			X^*_2			X^*_1			R_f	R_2	R_1	
X^*_{f3}	X^*_{f2}	X^*_{f1}	X^*_{23}	X^*_{22}	X^*_{21}	X^*_{13}	X^*_{12}	X^*_{11}				
۱۷/۴۲۹۷	۱۷/۴۲۹۱	-۳/۸۴۶۳	۳۰/۰	۱۰۲۵/۰	۱۵/۰	۵۳/۹	۳۳/۳	۴۶/۸	۲۵/۹۰۷۹	۱۰۰۰	۳۶/۳	گام ۱
۱۳/۱۲۴۸	۱۰/۳۵۰۴	-۸/۹۰۷۷	۳۳/۲	۱۰۲۵/۰	۱۸/۱	۷۹/۰	۳۴/۳	۷۶/۸	۳۵/۲۴۸۵	۱۰۰۰	۷۵/۳	گام ۲
۱۵/۷۹۹۳	۱۳/۳۹۶۵	-۵/۶۳۰۷	۳۳/۵	۱۰۲۵/۰	۱۷/۵	۴۶/۷	۳۴/۳	۳۵/۲	۳۰/۰۴۹۳	۱۰۰۰	۲۲/۲	گام ۳
۱۳/۱۱۶۲	۱۰/۲۹۲۴	-۹/۴۱۰۳	۳۳/۴	۱۰۲۵/۰	۱۷/۶	۴۶/۸	۲۷/۷	۳۵/۴	۳۵/۶۲۷۴	۱۰۰۰	۲۲/۵	گام ۴
۱۲/۹۳۵۹	۱۰/۰۵۸۲	-۹/۷۳۳۳	۳۳/۴	۱۰۲۵/۰	۱۷/۶	۴۶/۹	۲۷/۷	۳۵/۵	۳۶/۰۶۳۷	۱۰۰۰	۲۲/۵	گام ۲۹

جدول (۸): نتایج عددی تا گام محاسباتی ۴ و گام نهایی

گام ۲۹	گام ۴	گام ۳	گام ۲	گام ۱	گام‌ها	
۸/۹۹۷۸-۴e	۰/۰۴۴۲	۰/۱۲۵۴	۰/۵۲۸۲	۵/۴۰۰۹	$\ I_1\ $	فاصله نقطه مرجع از قید
۸/۹۹۷۸-۴e	۰/۰۴۴۲	۰/۱۲۵۴	۰/۶۱۰۷	۴/۴۸۷۶	$\ I_2\ $	
۱/۵۲۵۹	۱/۵۲۴۸	۱/۳۲۱۱	۰/۴۴۶۶	۰/۷۶۵۸	μ_1	ضریب لاگرانژ
۰/۰۱۰۹	۰/۰۱۰۶	۰/۰۰۸۱	۰/۰۱۰۵	۰/۰۰۱۲	μ_2	
۱۷/۵۹۴۶	۱۷/۵۹۸۷	۱۷/۶۲۵۳	۱۷/۵۴۶۸	۱۸/۱۱۳۹	x_1	نقطه‌ی مرجع
۲۵/۰۰۰۰	۲۵/۰۰۰۰	۲۵/۰۰۰۰	۲۵/۰۰۰۲	۲۵/۰۱۰۱	x_2	
۳۳/۴۲۸۸	۳۳/۳۹۵۴	۳۳/۳۶۰۰	۳۳/۴۵۷۹	۳۳/۲۳۱۴	x_3	
۸/۵۸۳۴e۶	۸/۵۷۶۸e۶	۸/۵۸۰۶e۶	۸/۵۶۷۶e۶	۸/۷۸۷۹e۶	f	تابع هدف
۸/۹۹۷۸-۴e	۰/۰۴۴۲	۰/۱۲۵۴	۰/۶۱۰۸	۶/۷۱۱۰	$\ X^{(i-1)} - X^{(i)}\ $	اندازه تغییرات نقطه مرجع

- محاسبه شده در گام‌های قبلی خود داشته باشد.
- در بسیاری از مسائل مهندسی و به خصوص در مسائل سازه‌ای، حد بالا و پایین برای متغیرهای طراحی وجود دارد که معمولاً ناشی از ضوابط آیین‌نامه و یا محدودیت‌های اجرایی می‌باشد. قید دوم در مثال تیر بتنی از این دسته از محدودیت‌ها است. از آنجاکه هر قید یک ضریب لاگرانژ به معادلات لاگرانژ اضافه می‌کند، برای حذف این نوع ضرایب می‌توان ابتدا تک متغیر طرح را از تساوی نامعادله‌ی مربوط به این گونه قیدها به‌طور مستقیم تعیین نمود و سپس با داشتن این متغیر طرح و با به‌کارگیری رابطه (۱۹)، ضرایب لاگرانژ نظیر این قیدها از بقیه‌ی ضرایب جدا شده و نهایتاً در رابطه (۲۱)، با بازنویسی این نوع ضرایب برحسب بقیه‌ی ضرایب لاگرانژ، دستگاه معادلات لاگرانژ اصلاح می‌شود. به‌طور خاص در مقاله‌ای دیگر، روابط مربوط به جدا شدن این ضرایب از دستگاه معادلات لاگرانژ ارائه خواهد شد.
- ۹- نتیجه‌گیری**
- در این مقاله یک درون‌یابی به‌صورت کرووی با تعریف جدیدی از شعاع انحناء در فضایی بزرگ‌تر از فضای هندسی برای تابع هدف و قیدها جهت استفاده در روش لاگرانژ ارائه شد. همچنین الگوریتمی برای نزدیک کردن جواب تقریبی به جواب دقیق ارائه شد. برخی نتایج به‌صورت زیر ارائه می‌گردد:
- یکی از مهم‌ترین دستاوردهای این روش مطابق رابطه (۱۹) جداسازی متغیرهای طراحی از دستگاه معادلات بهینه‌یابی می‌باشد. درحالی‌که در روش‌های مشابه مانند روش‌های متکی به بسط تیلور، تعداد مجهولات درگیر در حل مسئله برابر تعداد متغیرهای طراحی به‌علاوه‌ی تعداد قیدهای اصلی و اضافی مسئله می‌باشد.
 - در این روش از برگرداندن نقطه‌ی مرجع بر روی قیدها با حداقل فاصله (مانده خطا) استفاده می‌شود. این در حالی است که روش‌هایی مانند روش‌های متکی به بسط تیلور، در هر گام محاسباتی برای تقریب زدن از روی هر قید، ذاتاً تأکیدی بر حداقل کردن مانده خطا ندارند.
 - مثال‌های سازه‌ای خرپا و تیر نشان داد که جواب‌های حاصل از این روش با روش جریمه خارجی کاملاً یکسان می‌باشد.
 - در مسائلی مانند مثال دوم (تیر) که تعداد متغیرهای طراحی از تعداد قیدها بیشتر است این روش می‌تواند کمک‌کننده باشد چراکه حجم اصلی محاسبات بر روی حل معادلات لاگرانژ بوده به‌طوری‌که تعداد مجهولات مستقل آن یعنی ضرایب لاگرانژ به تعداد قیدهای مسئله خواهد بود.
 - با جداسازی متغیرها از معادلات لاگرانژ و کاهش محاسبات بهینه‌یابی امکان بهتری از طرح‌های بهینه لرزه‌ای مبتنی بر تحلیل‌های تاریخیچه-زمانی فراهم خواهد شد.
 - در مسائل واقعی مهندسی که امکان قیدهای مربوط به حد بالا

9. Groenwold, A.A. and Etman, L.F.P. (2010) A quadratic approximation for structural topology optimization. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, **82**(4), 505-524.
10. Zangwill, W.I. (1967) Nonlinear programming via penalty functions. *Management Science*, **13**(5), 344-358.
11. Mahini, M.R., Moharrami, H., and Cocchetti, G. (2014) Elastoplastic analysis of frames composed of softening materials by restricted basis linear programming. *Computers & Structures*, **131**, 98-108.
12. Groenwold, A.A., Wood, D.W., Etman, L.F.P., and Tosserams, S. (2009) Globally convergent optimization algorithm using conservative convex separable diagonal quadratic approximations. *AIAA Journal*, **47**(11), 2649-2657.
13. Groenwold, A.A. (2012) Positive definite separable quadratic programs for non-convex problems. *Structural and Multidisciplinary Optimization*, **46**(6), 795-802.
14. Burke, J.V., Curtis, F.E., and Wang, H. (2014) A sequential quadratic optimization algorithm with rapid infeasibility detection. *SIAM J. Optim.*, **24**(3), 1041-1074.
15. Rosen, J.B. (1960) The gradient projection method of nonlinear programming, Part I: linear constraints. *SIAM Journal*, **8**, 181-217.
16. Rosen, J.B. (1961) The gradient projection method for nonlinear programming, Part II: nonlinear constraints. *SIAM Journal*, **9**, 414-432.
17. Edwards Jr., C.H. (1973) *Advanced Calculus of Several Variables*. 15-16, Academic Press, New York and London.
18. Simon, L. (2008) *An Introduction to Multivariable Mathematics (Synthesis Lectures on Mathematics and Statistics)*. Morgan, and Claypool, Florida.
19. Christensen, P.W. and Klarbring, A. (2009) An introduction to structural optimization. *Solid Mechanics and Its Applications*, **153**, Springer.
- یا پایین متغیرها وجود داشته، به طوری که توضیح داده شد، ضرایب لاگرانژ این قیدها از دستگاه معادلات قابل حذف بوده و بار اضافی به معادلات تحمیل نمی‌کنند.
- این مقاله به بیان روش پیشنهادی و چگونگی روند حل مسائل بهینه‌یابی در قالب مثال‌های ساده پرداخت. لذا بررسی تفصیلی میزان دقت و سرعت همگرایی این روش در مقایسه با دیگر روش‌های کلاسیک و نوین به مقاله‌ی دیگری موکول می‌شود.

مراجع

1. Cheney, E.W. and Goldstein, A.A. (1959) Newton's method of convex programming and Tchebycheff approximation. *Numerische Mathematik*, **1**, 253-268.
2. Kolda, T.G., Lewis, R.M., and Torczon, V. (2003) Optimization by direct search: new perspectives on some classical and modern methods. *Journal of SIAM*, **45**(3), 385-482
3. Izmailov, A.F. and Kurennoy, A.S. (2013) Abstract newtonian frameworks and their applications. *SIAM J. Optim.*, **23**(4), 2369-2396.
4. Li, C. and Ng, K.F. (2013) Approximate solutions for abstract inequality systems. *SIAM J. Optim.*, **23**(2), 1237-1256.
5. Etman, L.F.P., Groenwold, A.A., and Rooda, J.E. (2012) First-order sequential convex programming using approximate diagonal QP subproblems. *Structural and Multidisciplinary Optimization*, **45**, 479-488.
6. Wolf, P. (1959) The Simplex method for quadratic programming. *Econometrica*, **27**(3), 382-398.
7. Curtis, F.E., Johnson, T.C., Robinson, D.P., and Wächter, A. (2014) An inexact sequential quadratic optimization algorithm for nonlinear optimization. *SIAM J. Optim.*, **24**(3), 1041-1074.
8. Park, S., Jeong, S. H., Yoon, G.H., Groenwold, A.A., and Choi, D. (2014) A globally convergent sequential convex programming using an enhanced two-point diagonal quadratic approximation for structural optimization. *Structural and Multidisciplinary Optimization*, **50**, 739-753.

اصطلاحات فنى

Direct Method	۱- بهينه يابى مستقيم
Sequential Linear Programming	۲- خطى سازى پيايى
Simplex Technique	۳- تكنيك سيمپلكس
Sequential Quadratic Programming	۴- برنامه ريزى درجه دوم
Lagrange Multipliers	۵- ضرايب لاگرانژ
Penalty Method	۶- روش پنالى
Spherical Functions	۷- توابع كروى
Lagrange Equations	۸- معادلات لاگرانژ
Radius of Curvature	۹- شعاع انحناء
Reference Point	۱۰- نقطه مرجع
Hessin Matrix	۱۱- ماتريس هسين
Steepest Descent Method	۱۲- روش تندترين كاهش

Archive of SID