

### چکیده

روش‌های عددی بسیاری برای معادلات محیط کشسان متخلخل ارائه شده است که برای آبرفت‌های اشباع قابل استفاده است؛ اما تا کنون جواب تحلیلی دقیق برای چنین آبرفت‌هایی در حوزه زمان تحت اثر شرایط لرزه‌ای حتی برای حالت یک‌بعدی ارائه نشده است. در این مقاله یک روش تحلیلی برای پاسخ لرزه‌ای آبرفت‌های اشباع تحت اثر مؤلفه قائم زلزله ارائه می‌شود. اگر لایه‌های سطحی آبرفت و مرزهای آنها افقی باشند می‌توان آبرفت را به صورت یک ستون محصور شده مدل‌سازی نمود. آبرفت اشباع به صورت یک محیط کشسان متخلخل در نظر گرفته می‌شود. به همین دلیل از معادلات کشسان متخلخل تحت بارهای لرزه‌ای استفاده می‌شود. در محیط کشسان متخلخل تحت اثر امواج لرزه‌ای، تغییر مکان فاز جامد و فشار آب حفره‌ای توأمان تغییر می‌یابند و اثر متقابلی بر یکدیگر دارند. معادله دیفرانسیل حاکم که یک معادله هاپربولیک از مرتبه دوم است با استفاده از روش جداسازی متغیرها به دو معادله ارتعاش آزاد در زمان و معادله بسل در مکان تفکیک می‌شود. معادله بسل در مکان با استفاده از توابع بسل و معادله ارتعاش آزاد در زمان با استفاده از روش انتگرال‌گیری مستقیم نیومارک حل می‌شود. در جواب تحلیلی ارائه شده مودهای ارتعاش، شکل‌های مودی و فرکانس متناظر آنها به دست می‌آید. نتایج این تحقیق در مسائل انتشار امواج لرزه‌ای در آبرفت‌های اشباع کاربرد خواهد داشت. به منظور بررسی صحت جواب تحلیلی ارائه شده در تحقیق حاضر، با در نظر گرفتن یک مورد واقعی مقادیر شتاب ثبت شده در آبرفت کاملاً اشباع در هنگام زلزله با مقادیر محاسبه شده با روش تحلیلی مقایسه می‌شود. یک مثال عددی به منظور بررسی بیشتر جواب تحلیلی ارائه می‌شود. با حل مثال عددی با روش حاضر مشاهده می‌شود که فشار آب حفره‌ای محاسبه شده همان‌طور که انتظار می‌رود در آبرفت‌های با نفوذپذیری پایین مقدار بیشتری خواهد داشت. همچنین مشاهده می‌شود که عکس ضریب نفوذپذیری اثر میرایی مشابه ضریب میرایی در محاسبه شتاب دارد.

**واژگان کلیدی:** پاسخ لرزه‌ای<sup>۱</sup>، آبرفت اشباع<sup>۲</sup>، کشسان متخلخل<sup>۳</sup>، مؤلفه قائم زلزله<sup>۴</sup>، جواب تحلیلی<sup>۵</sup>.

## جواب تحلیلی برای آبرفت اشباع یک‌بعدی تحت اثر مؤلفه قائم زلزله

مرتضی جیریایی شراهی (نویسنده مسئول)

استادیار، گروه مهندسی عمران، دانشگاه صنعتی قم، ایران،  
 jiryaei@qut.ac.ir

مریم السادات موسوی

دانشجوی کارشناسی ارشد، گروه مهندسی عمران،  
 دانشگاه صنعتی قم، ایران

### ۱- مقدمه

اگر لایه‌های سطحی آبرفت و مرزهای آنها افقی باشند می‌توان آبرفت را به صورت یک ستون محصور شده<sup>۶</sup> مدل‌سازی نمود. همچنین آبرفت اشباع را می‌توان یک محیط کشسان متخلخل در نظر گرفت. در محیط کشسان متخلخل تحت اثر امواج لرزه‌ای، تغییر مکان فاز جامد و فشار آب حفره‌ای توأمان

حرکات زلزله در نزدیکی سطح زمین در اثر رسیدن امواج تنش لرزه‌ای از گسل‌ها در هنگام زلزله ایجاد می‌شوند. این حرکات بیشتر در سه جهت عمود بر هم قابل تجزیه و تحلیل هستند. یکی از امواج تنش لرزه‌ای موج فشاری لرزه‌ای است که هم در قسمت جامد لایه خاکی و هم در آب حفره‌ای منتشر می‌شود.

تغییر می‌یابند و اثر متقابلی بر یکدیگر دارند.

بیو [۱] اولین کسی بود که معادلات حاکم بر محیط‌های کشسان متخلخل را ارائه نمود. سپس محققین دیگری مانند زینکوویچ [۲] بر اساس اصول مکانیک محیط‌های پیوسته مجدداً معادلات را بازنویسی نمودند. سپس زینکوویچ و همکاران [۳] و زینکوویچ و شیومی [۴] برای پدیده‌های با سرعت متوسط با صرف نظر کردن از شتاب سیال معادلات ساده‌تری را ارائه نموده‌اند که در این تحقیق از این معادلات ساده شده استفاده می‌شود.

روش‌های عددی بسیاری برای معادلات حاکم بر محیط‌های کشسان متخلخل ارائه شده است که برای آبرفت‌های اشباع قابل استفاده است اما تا کنون جواب تحلیلی دقیق برای آبرفت‌های اشباع در حوزه زمان تحت اثر شرایط لرزه‌ای حتی برای حالت یک‌بعدی ارائه نشده است. گارگ و همکاران [۵] یک جواب دقیق در حوزه لاپلاس برای محیط کشسان متخلخل تحت پالس‌های هارمونیک ارائه داده‌اند. سیمون و همکاران [۶] جواب تحلیلی یک‌بعدی برای محیط کشسان متخلخل تحت شرایط مرزی ترکشن<sup>۷</sup> گام، ترکشن متناوب و ترکشن کوتاه ارائه نموده‌اند. هنگ و همکاران [۷] پاسخ گارگ را برای شرایط مرزی سرعت شامل گام واحد، سینوسی و شیب‌دار توسعه داده‌اند. همچنین یک پاسخ در محیط فرکانس برای محیط کشسان متخلخل یک‌بعدی که از بالا تحت تنش و فشار آب حفره‌ای قرار می‌گیرد توسط چنگ و همکاران ارائه شده است [۸]. دی بوئر و همکاران [۹] پاسخ یک‌بعدی ستون کشسان متخلخل با طول بی‌نهایت با فرض تراکم‌ناپذیری ذرات را به دست آورده است.

شانس و چنگ [۱۰] پاسخ حوزه لاپلاس برای یک ستون کشسان متخلخل یک‌بعدی با طول محدود را به دست آورده است. کونتو و همکاران [۱۱] پاسخ محیط اشباع که تحت موج فشاری هارمونیک قرار گرفته است را بر اساس نظریه بیو مورد بررسی قرار داد. یانگ و ساتو [۱۲] بر اساس نظریه بیو تابع انتقال<sup>۸</sup> که شامل درجه اشباع خاک است را به دست آوردند و نشان دادند که بزرگنمایی محیط نیمه‌اشباع بزرگ‌تر از محیط کاملاً اشباع است. نکته قابل توجه این است که هیچ‌یک از پاسخ‌های ارائه شده در

حوزه زمان یا حتی برای شرایط لرزه‌ای نیستند. مزیت پاسخ با فرم بسته و تحلیلی برای حالت یک‌بعدی در شرایط لرزه‌ای این است که می‌تواند برای بررسی و صحت‌سنجی روش‌های عددی مورد استفاده قرار گیرد.

در تحقیق حاضر پاسخ یک‌بعدی لرزه‌ای به صورت جواب فرم بسته برای ستون یک‌بعدی آبرفت اشباع تحت اثر مؤلفه قائم زلزله ارائه می‌شود. آبرفت اشباع به صورت محیط کشسان متخلخل اشباع در نظر گرفته می‌شود و معادلات مربوط به کشسان متخلخل برای شرایط لرزه‌ای بازنویسی می‌شود. نتایج این تحقیق در مسائل انتشار موج فشاری لرزه‌ای در آبرفت‌های اشباع کاربرد خواهد داشت. به منظور بررسی صحت جواب تحلیلی ارائه شده در تحقیق حاضر پاسخ آبرفت کاملاً اشباع سایت لتونگ واقع در شرق تایوان به زلزله نوامبر ۱۹۸۶ با بزرگای  $M_w=7$  محاسبه می‌شود و با مقادیر شتاب ثبت شده مقایسه می‌شود.

برای بررسی بیشتر پاسخ تحلیلی ارائه شده یک مثال عددی در نظر گرفته می‌شود که در این مثال، فشار آب حفره‌ای در آبرفت با فرض دو مقدار نفوذپذیری مختلف با استفاده از فرمولاسیون حاضر جداگانه محاسبه شد. محاسبات نشان می‌دهد که در اثر کاهش نفوذپذیری، فشار آب حفره‌ای بیشتر و شتاب کمتری به دست می‌آید. همچنین مشاهده می‌شود که عکس ضریب نفوذپذیری اثر میرایی مشابه ضریب میرایی در معادله ارتعاش دارد.

## ۲- معادله دیفرانسیل حاکم

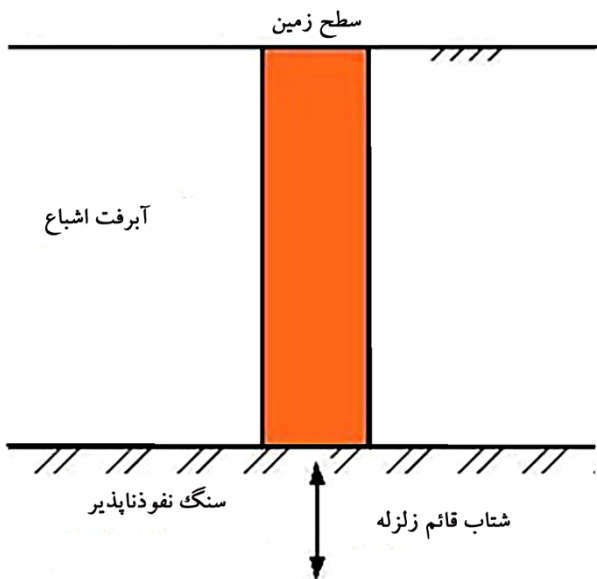
معادلات دیفرانسیل ساده شده  $u-p$  برای محیط کشسان متخلخل با فرض تراکم‌ناپذیری ذرات جامد و سیال تحت شرایط لرزه‌ای به صورت زیر است [۳]:

$$\sigma_{ij,j} = \rho(\ddot{u}_i + \ddot{u}_{g,i}) + c\dot{u}_i \quad (1)$$

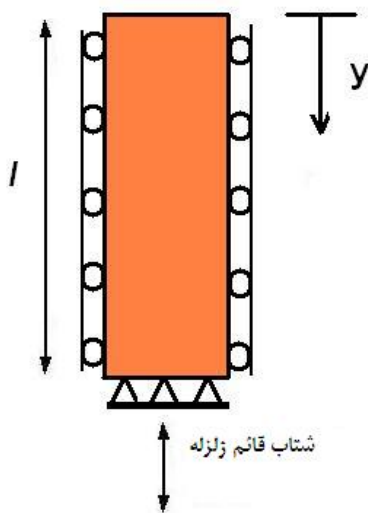
$$\dot{w}_{i,i} + \dot{u}_{i,i} = 0 \quad (2)$$

$$\sigma_{ij} = \lambda u_{k,k} \delta_{ij} + \mu(u_{i,j} + u_{j,i}) - p\delta_{ij} \quad (3)$$

$$p_{,i} = -\frac{1}{k} \dot{w}_i \quad (4)$$



شکل (۱): آبرفت اشباع تحت اثر مؤلفه قائم زلزله به صورت یک ستون محصور.



شکل (۲): ستون محصور آبرفت اشباع تحت اثر مؤلفه قائم زلزله.

### ۳- جواب تحلیلی معادله

در یک خاک غیر چسبنده سرعت انتشار موج فشاری نسبت به عمق به صورت رابطه زیر تغییر می کند:

$$C_p^2 = \frac{A}{\rho} y^B \quad (10)$$

که A و B ثابت‌هایی هستند که به خاک بستگی دارند. اگر معادلات (۱۰) و (۶) را در معادله (۵) قرار دهیم معادله زیر به دست می آید:

که در آن:

u: تغییر مکان اسکلت جامد

ig: شتاب زمین

p: فشار آب حفره‌ای اضافی

w: تغییر مکان سیال نسبت به بخش جامد

σ: تنش

c: ضریب میرایی

λ و μ: ضرایب الاستیک زهکشی شده لامه

k: ضریب نفوذپذیری

p: دانسیته آبرفت اشباع

n: تخلخل آبرفت

همان‌طور که در شکل (۱) نشان داده شده است در صورتی که آبرفت مورد نظر و لایه‌های تشکیل دهنده آن شامل سنگ‌بستر افقی باشند می‌تواند به صورت یک ستون محصور شده (شکل ۲) مدل‌سازی شود. شرایط مرزی ستون مورد نظر به این صورت است که در انتها تغییر مکان افقی و قائم و جریان آب صفر است. در محیط جانبی تغییر مکان افقی و جریان افقی آب صفر است و در بالای نمونه ترکشن و فشار آب حفره‌ای صفر است. با این شرایط متغیرهای p و u<sub>y</sub> تنها متغیرهای مستقل ستون آبرفت در اثر انتشار موج فشاری می‌باشد. معادلات (۱) تا (۴) برای ستون یک بعدی به سادگی به صورت معادله اسکالر زیر ساده می‌شوند:

$$\frac{\partial}{\partial y} \rho C_p^2 u_{y,y} - p_{,y} - c \dot{u}_y - \rho (\ddot{u}_y + \ddot{u}_g) = 0 \quad (5)$$

$$k p_{,yy} - \dot{u}_{y,y} = 0 \text{ or } k p_{,y} - \dot{u}_y = 0 \quad (6)$$

که C<sub>p</sub> سرعت موج فشاری محصور شده می‌باشد و از رابطه زیر به دست می‌آید:

$$C_p = \sqrt{\frac{\lambda + 6\mu}{\rho}} \quad (7)$$

شرایط مرزی مسئله را می‌توان با روابط زیر اعمال نمود:

$$u_y(y=l) = p_{,y}(y=l) = 0 \quad (8)$$

$$u_{y,y}(y=0) = p(y=0) = 0 \quad (9)$$

$$\alpha = \frac{2}{2-B} \quad (18)$$

$$\beta = \frac{1-B}{2-B} \quad (19)$$

سپس معادله (۱۵) به صورت زیر در می آید:

$$x^2 \frac{\partial^2 G(X)}{\partial x^2} + x \frac{\partial G(X)}{\partial x} + [x^2 - \beta^2] \cdot G(X) = 0 \quad (20)$$

معادله فوق یک معادله بسل از مرتبه غیر صحیح  $\beta$  است؛ بنابراین با حل معادله (۲۰)،  $H(y)$  به صورت زیر به دست می آید:

$$H(y) = y^\beta \left[ C_1 J_\beta(x) + C_2 J_{-\beta}(x) \right] \quad (21)$$

که در آن،  $C_1$  و  $C_2$  ثابت‌هایی هستند که با اعمال شرایط مرزی به دست می آیند و  $J_\beta$  تابع بسل از نوع اول از مرتبه  $\beta$  است. از شرایط مرزی معادله (۹) خواهیم داشت:

$$\frac{\partial H}{\partial y}(y=0) = 0 \quad (22)$$

شرایط مرزی فوق در صورتی ارضا می شود که  $C_1$  صفر باشد و  $0 \leq B \leq 0.5$ .

اگرچه هر مقداری برای  $C_2$  می توان در نظر گرفت اما اگر فرض کنیم:

$$\max[H(y)] = 1 \quad (23)$$

در این صورت:

$$\max[H(y)] = \quad (24)$$

$$\lim \left\{ C_2 \left( \alpha \omega_n \sqrt{\frac{\rho}{A}} \right)^{-\beta} x^\beta \frac{x^{-\beta}}{2^{-\beta} \Gamma(-\beta+1)} \times \left\{ 1 - \frac{x^2}{2(-2\beta+2)} + \dots \right\} \right\}_{x \rightarrow 0}$$

در نتیجه:

$$C_2 = 2^{-\beta} \Gamma(-\beta+1) \left( \alpha \omega_n \sqrt{\frac{\rho}{A}} \right)^\beta \quad (25)$$

که  $\Gamma$  تابع گاما است. از معادله شرایط مرزی ۸:

$$u_y(y=1) = 0 \quad (26)$$

$$\rho \ddot{u}_y + \left( c + \frac{1}{k} \right) \dot{u}_y - \frac{\partial}{\partial y} (A y^B u_{y,y}) = -\rho \ddot{u}_g \quad (11)$$

معادله (۱۱) یک معادله هایپربولیک از مرتبه دوم است که با جداسازی متغیرها قابل حل است. به طور کلی یکی از راه‌های مرسوم حل معادلات انتشار امواج در ژئوتکنیک و سایر مسائل تحقیقاتی، جداسازی متغیرهاست چنانکه معادله مشابه برای انتشار موج برشی در هنگام زلزله و برای حالت ساده‌تر محیط خشک توسط ادريس و سيد [۱۳] حل شده است؛ بنابراین در مقاله حاضر با استفاده از بسط روش ادريس و سيد [۱۳] برای حالت اشباع معادله (۱۱) حل می شود. برای به دست آوردن فرکانس های طبیعی و شکل مودها ابتدا ارتعاش آزاد یا  $\ddot{u}_g=0$  را در نظر می گیریم. با جایگزینی  $\ddot{u}_g=0$  و  $u_y(y,t) = T(t) \cdot H(y)$  در معادله (۱۱) خواهیم داشت:

$$\ddot{T} + \left( \frac{c}{\rho} + \frac{1}{\rho k} \right) \dot{T} - \frac{1}{\rho H} \frac{\partial}{\partial y} (A y^B H_{,y}) T = 0 \quad (12)$$

در صورتی که:

$$\omega^2 = - \frac{1}{\rho H} \frac{\partial}{\partial y} A y^B H_{,y} \quad (13)$$

از معادله (۱۲) معادله (۱۴) و از معادله (۱۳) معادله (۱۵) نتیجه می شود:

$$\ddot{T} + \left( \frac{c}{\rho} + \frac{1}{\rho k} \right) \dot{T} + \omega^2 T = 0 \quad (14)$$

$$\rho H \omega^2 + \frac{\partial}{\partial y} A y^B H_{,y} = 0 \quad (15)$$

معادله (۱۴) یک معادله ارتعاش آزاد جرم  $\rho$  با نسبت میرایی  $(c+1/k)$  با فرکانس زاویه‌ای  $\omega$  است. معادله (۱۵) برای مقدار مشخص  $B$  یک معادله از نوع بسل است که می تواند به معادله بسل استاندارد تبدیل شود. به این صورت که اگر فرض کنیم:

$$x = \alpha \omega \sqrt{\frac{\rho}{A}} y^\alpha \quad (16)$$

$$H(y) = y^\beta G(x) \quad (17)$$

که:

که در آن:

$$E_n = \frac{R_n}{M_n} \quad (37)$$

$$\xi_n = \frac{c}{2\rho\omega_n} + \frac{1}{2\rho k\omega_n} \quad (38)$$

مقادیر  $R_n$  و  $M_n$  و نسبت آنها را از معادلات (34) و (35) و با انتگرال گیری مستقیم می توان به دست آورد.

$$R_n = \left(\frac{\delta_n}{2}\right)^\beta \frac{I\rho\alpha}{\delta_n} \Gamma(1-\beta) J_{1-\beta}(\delta_n) \quad (39)$$

$$M_n = \left(\frac{\delta_n}{2}\right)^{2\beta+1} \frac{I\rho\alpha}{\delta_n} [\Gamma(1-\beta)]^2 [J_{1-\beta}(\delta_n)]^2 \quad (40)$$

$$E_n = \frac{1}{\left(\frac{\delta_n}{2}\right)^{\beta+1} \Gamma(1-\beta) J_{1-\beta}(\delta_n)} \quad (41)$$

معادله (29) شکل مودی  $H_n$  را در فرکانس زاویه ای طبیعی  $\omega_n$  متناظر با  $n$  امین مود می دهد. مقادیر  $T_n(t)$  و مشتقاتش  $\dot{T}_n(t)$  و  $\ddot{T}_n(t)$  با استفاده از معادله (36) و به کارگیری روش نیومارک [14] به دست می آیند. مقادیر سرعت نسبی و شتاب نسبی از روابط زیر به دست می آید.

$$\dot{u}_y(y,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \dot{T}_n(t) \cdot H_n(y) \quad (42)$$

$$\ddot{u}_y(y,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \ddot{T}_n(t) \cdot H_n(y) \quad (43)$$

کرنش در هر عمقی به سادگی با مشتق گیری از معادله (31) محاسبه می شود.

$$\varepsilon_y(y,t) = u_{y,y}(y,t) = \sum_{n=1}^{\infty} T_n(t) \cdot H_{n,y}(y) \quad (44)$$

$$H_{n,y}(y) = -\frac{\delta_n}{I\alpha} \left(\frac{\delta_n}{2}\right)^\beta \left(\frac{y}{I}\right)^{\frac{\beta-\alpha+1}{\alpha}} \times \Gamma(1-\beta) J_{1-\beta} \left[ \delta_n \left(\frac{y}{I}\right)^{\frac{1}{\alpha}} \right] \quad (45)$$

فشار آب حفره ای در اثر امواج فشاری در آبرفت اشباع از معادله (6) قابل محاسبه است.

بنابراین:

$$J_{-\beta} \left( \alpha\omega \sqrt{\frac{\rho}{A}} I^{\frac{1}{\alpha}} \right) = 0 \quad (27)$$

معادله (27) یک معادله مشخصه با ریشه  $\delta_n$  است؛ بنابراین:

$$\omega_n = \frac{\delta_n}{\alpha I^{\frac{1}{\alpha}} \sqrt{\frac{\rho}{A}}} \quad (28)$$

$$H_n(y) = \left(\frac{y}{I}\right)^{\frac{\beta}{\alpha}} \Gamma(-\beta+1) \left(\frac{\delta_n}{2}\right)^\beta J_{-\beta} \left[ \delta_n \left(\frac{y}{I}\right)^{\frac{1}{\alpha}} \right] \quad (29)$$

که  $\omega_n$  و  $H_n(y)$  به ترتیب شکل مودی و فرکانس طبیعی سیستم (آبرفت اشباع) است. خاصیت متعامد بودن شکل های مودی به صورت زیر قابل اثبات است:

$$\int_0^1 \rho \cdot H_n(y) H_m(y) dy = 0 \quad (30)$$

با داشتن شکل های مودی جواب معادله (11) را می توان به صورت زیر نوشت:

$$u_y(y,t) = \sum_{n=1}^{\infty} T_n(t) \cdot H_n(y) \quad (31)$$

با قرار دادن معادله (31) در معادله (11):

$$\rho \sum_{n=1}^{\infty} \ddot{T}_n \cdot H_n + \left(c + \frac{1}{k}\right) \sum_{n=1}^{\infty} \dot{T}_n \cdot H_n - A \sum_{n=1}^{\infty} T_n \cdot \frac{\partial}{\partial y} \left( y^B \frac{\partial H_n}{\partial y} \right) = -\rho \ddot{u}_g \quad (32)$$

با ضرب هریک از جملات معادله فوق در  $H_m(y)$  انتگرال گیری نسبت به  $y$  و با در نظر گرفتن معادلات (30) و (15):

$$\left[ \ddot{T}_n + \left(\frac{c}{\rho} + \frac{1}{\rho k}\right) \dot{T}_n + \omega_n^2 T_n \right] M_n = -\ddot{u}_g R_n \quad (33)$$

که  $M_n$  جرم مؤثر و  $R_n \ddot{u}_g$  شتاب زلزله مؤثر برای مود  $n$  ام ارتعاش است.

$$M_n = \int_0^1 \rho H_n^2 dy \quad (34)$$

$$R_n = \int_0^1 \rho H_n dy \quad (35)$$

از معادله (33) نتیجه می شود:

$$\ddot{T}_n + 2\xi_n \omega_n \dot{T}_n + \omega_n^2 T_n = -\ddot{u}_g E_n \quad (36)$$

$$\gamma = 19.7 \text{ kN/m}^3$$

$$C_p = 900 \times y^{0.167}$$

$$\text{ضخامت لایه آبرفت} = 17 \text{ m}$$

$$k = 0.027 \text{ mm/s}$$

شتاب ورودی زلزله در عمق ۱۷ متری در شکل (۳) ترسیم شده است. مقدار بیشینه شتاب ورودی ۰/۶ متر بر مجذور ثانیه است. در شکل (۴) تاریخچه زمانی شتاب ثبت شده با مقدار حداکثر ۰/۸ متر بر مجذور ثانیه در مقایسه با شتاب محاسبه شده با روش تحلیلی با شتاب حداکثر ۰/۷۱ متر بر مجذور ثانیه در عمق ۶ متری، ترسیم شده است. مقایسه شکل (۴) نشان می‌دهد که روش تحلیل توانسته است با دقت قابل قبولی پاسخ را در عمق ۶ متری محاسبه نماید.

جهت بررسی بیشتر پاسخ تحلیلی ارائه شده، زلزله منجیل سال ۱۹۹۰ با بزرگای ۷/۶ در نظر گرفته می‌شود. شکل (۵) رکورد شتاب زلزله که در ایستگاه آبرفت ثبت شده است را نشان می‌دهد. خصوصیات لایه آبرفت مورد نظر عبارت است از:

$$\gamma = 18 \text{ kN/m}^3$$

$$C_p = 242 \times y^{0.167}$$

$$\text{ضخامت لایه آبرفت} = 30 \text{ m}$$

$$k = 0.01 \text{ mm/s}$$

برای انجام محاسبات پاسخ لایه اشباع بر اساس فرمولاسیون ارائه شده برنامه رایانه‌ای مورد استفاده قرار می‌گیرد. برای بررسی فرمولاسیون ارائه شده، شکل‌های (۶) و (۷) که فشار آب حفره‌ای محاسبه شده در حوزه زمان را نشان می‌دهند، در نظر گرفته می‌شود. همان‌طور که انتظار می‌رفت با افزایش ضریب نفوذپذیری از  $k=0.01 \text{ mm/s}$  به  $k=0.5 \text{ m/s}$  فشار آب حفره‌ای حداکثر از ۱۱۱ به ۷۹ کیلو پاسکال کاهش یافته است. مقادیر شتاب در شکل (۸) برای لایه آبرفتی با ضریب نفوذپذیری بسیار کم محاسبه شده است که بسیار نزدیک به مقادیر حرکت ورودی در شکل (۳) است به همین دلیل برای مقایسه دقیق‌تر، مقادیر عددی شتاب در نقاطی از زمان در جدول (۱) نشان داده

$$p(y,t) = \left\{ \frac{1}{k} \int \ddot{u}_y(y,t) dy = \alpha \Gamma(-\beta+1) \left( \frac{1}{2} \right)^\beta \times \sum_{n=1}^{\infty} \dot{T}_n(t) \cdot \delta_n^{\beta-1} \left( \frac{y}{l} \right)^{\frac{1-\beta}{\alpha}} J_{1-\beta} \left( \delta_n \left( \frac{y}{l} \right)^{\frac{1}{\alpha}} \right) \right\} \quad (46)$$

در آبرفت‌های چسبنده سرعت موج فشاری را می‌توان نسبت به عمق ثابت در نظر گرفت؛ بنابراین جواب‌های متناظر با آبرفت چسبنده را می‌توان با جایگزینی  $\alpha=1$ ،  $\beta=0$ ،  $A = \rho C_p^2$  و  $\beta=0.5$  در معادلات (۱۵) تا (۱۷) و با عملیاتی مشابه به سادگی استخراج نمود.

$$H_n(y) = \cos \left[ \frac{(2n-1)\pi y}{2l} \right] \quad (47)$$

$$\ddot{T}_n + 2\xi_n \omega_n \dot{T}_n + \omega_n^2 T_n = (-1)^n \frac{4}{(2n-1)\pi} \ddot{u}_g \quad (48)$$

$$\omega_n = \frac{(2n-1)\pi}{2l} C_p \quad (49)$$

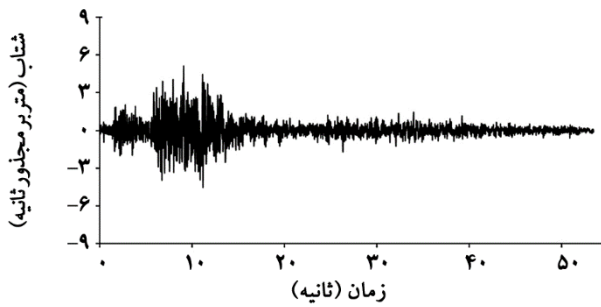
که  $H_n$  شکل مودی ارتعاش در مود  $n$ ام با فرکانس زاویه‌ای  $\omega_n$  است.

لازم به ذکر است که برای سطح زمین ( $y=0$ ) در خاک‌های دانه‌ای با توجه به اینکه مقدار مشخصی برای سرعت موج در نظر گرفته می‌شود بنابراین به جای معادلات (۲۸)، (۲۹) و (۳۶) از معادلات (۴۷) تا (۴۹) استفاده می‌شود. در نتیجه برای سطح زمین ( $y=0$ ) در هر حال:

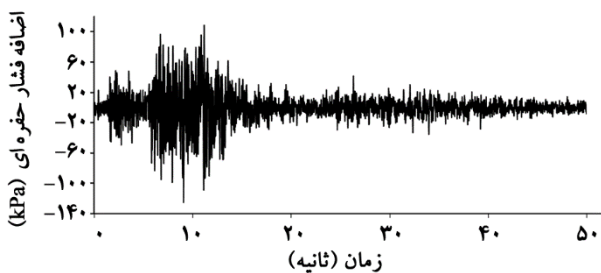
$$H_n(y=0) = \cos \left[ \frac{(2n-1)\pi y}{2l} \right] = 1.0 \quad (50)$$

#### ۴- بررسی پاسخ ارائه شده

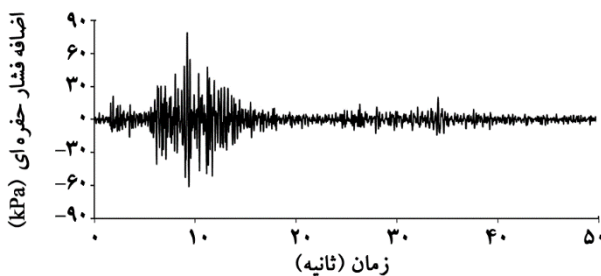
به منظور بررسی صحت جواب تحلیلی ارائه شده در تحقیق حاضر، پاسخ آبرفت کاملاً اشباع سایت لتونگ واقع در شرق تایوان به زلزله نوامبر ۱۹۸۶ با بزرگای  $M_w=7$  محاسبه می‌شود و با مقادیر شتاب ثبت شده [۱۵] مقایسه می‌شود. مشخصات لایه آبرفت اشباع به صورت زیر است:



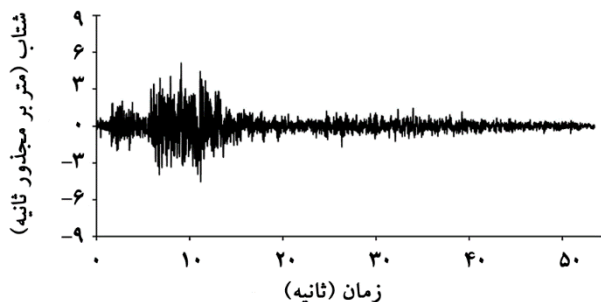
شکل (۵): رکورد شتاب زلزله منجیل ثبت شده در ایستگاه آبر در سال ۱۳۶۹.



شکل (۶): فشار آب حفره‌ای محاسبه شده در وسط لایه آبرفت با نفوذپذیری  $k = 0.01 \text{ mm/s}$ .



شکل (۷): فشار آب حفره‌ای محاسبه شده در وسط لایه آبرفت با نفوذپذیری  $k = 0.5 \text{ m/s}$ .



شکل (۸): شتاب محاسبه شده در عمق ۱ متری از سطح لایه آبرفت با نفوذپذیری  $k = 0.01 \text{ mm/s}$ .

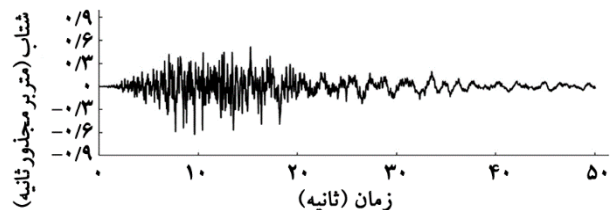
شده است. همان‌طور که در جدول (۱) نشان داده شده است اختلاف بسیار ناچیز است. شکل (۹) مقادیر شتاب محاسباتی را در عمق یک متری با حداکثر مقدار  $8/51$  متر بر مجذور ثانیه نشان می‌دهد. نکته قابل توجه این است که با افزایش ضریب نفوذپذیری شتاب محاسباتی روی سطح زمین افزایش یافته است. دلیل این امر، این واقعیت است که عکس ضریب نفوذپذیری اثر میراکننده دارد. همان‌طور که از معادله دیفرانسیل (۱۱) نیز می‌توان استنتاج نمود:

$$\xi_n = \frac{c + c_w}{2\rho\omega_n} \quad (51)$$

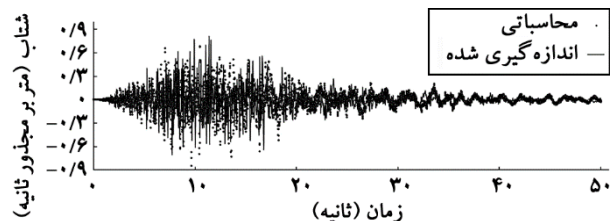
$$c_w = \frac{1}{k} \quad (52)$$

که  $c_w$  را می‌توان ضریب میرایی فشار آب حفره‌ای نامید. رابطه (۵۱) در مسائل انتشار امواج فشاری یک رابطه ارزشمند است به خصوص هنگامی که محیط متخلخل، اشباع از آب است. نکته قابل توجه این است که چنین نتیجه‌ای مهم از معادلات و هم از مثال عددی استنباط شد.

با توجه به اینکه فرمولاسیون ارائه شده در مورد این مثال عددی نتایج بدیهی را حاصل کرده است می‌توان گفت در این بررسی موردی موفق بوده است و میزان اطمینان به روش حاضر را افزایش می‌دهد.

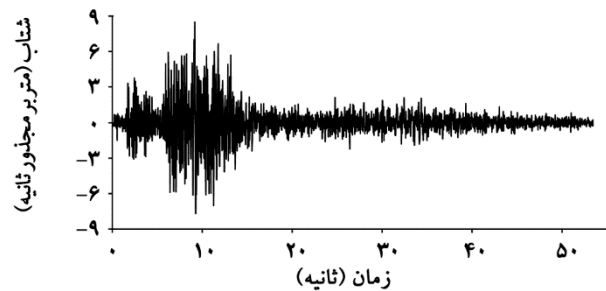


شکل (۳): تاریخچه زمانی شتاب ثبت شده در عمق ۱۷ متری زلزله نوامبر ۱۹۸۶ تایوان با بزرگای گشتاوری [۱۵].



شکل (۴): مقایسه مقادیر شتاب محاسبه شده و شتاب زلزله ثبت شده در عمق ۶ متری زلزله تایوان [۱۵].

است. در جواب تحلیلی ارائه شده مودهای ارتعاش، شکل های مودی و فرکانس متناظر آنها به دست آمده است. نتایج این تحقیق در مسائل انتشار امواج لرزه ای در آبرفت های اشباع کاربرد خواهد داشت. به منظور بررسی صحت جواب تحلیلی ارائه شده در تحقیق حاضر، مقادیر شتاب ثبت شده در آبرفت کاملاً اشباع در هنگام زلزله با مقادیر محاسبه شده با روش تحلیلی در یک مورد واقعی مقایسه شد که تطابق قابل قبولی حاصل شد. یک مثال عددی به منظور بررسی بیشتر جواب تحلیلی ارائه شد. با حل مثال عددی با روش حاضر مشاهده می شود که فشار آب حفره ای محاسبه شده همان طور که انتظار می رفت در آبرفت های با نفوذپذیری پایین، مقدار بیشتری خواهد داشت. همچنین مشاهده می شود که عکس ضریب نفوذپذیری اثر میرایی مشابه ضریب میرایی در محاسبه شتاب دارد. نتایج تحقیق حاضر در تحلیل دینامیکی انتشار امواج لرزه ای در محیط های اشباع کاربرد دارد.



شکل (۹): شتاب محاسبه شده در عمق ۱ متری از سطح لایه آبرفت با نفوذپذیری  $k=0.5 \text{ m/s}$ .

جدول (۱): مقایسه مقادیر شتاب ورودی و محاسبه شده در نقاط حداکثر و حداقل در شکل (۹).

زمان (s)	شتاب محاسبه شده ( $\text{m/s}^2$ )	شتاب حرکت ورودی ( $\text{m/s}^2$ )	اختلاف ( $\text{mm/s}^2$ )
۷/۷۸	۰/۳۵۷۹	۰/۳۵۸۳	۰/۴
۹/۰۷۵	۵/۱۳۱۱	۵/۱۳۱۱	۰/۰۲
۱۱/۱۴۵	۰/۴۷۲۱	۰/۴۷۱۵	۰/۶
۱۱/۱۷	-۴/۵۳۲۴	-۴/۵۳۲۴	۰/۰۱

## مراجع

1. Biot, M.A. (1956) Theory of propagation of elastic waves in a fluid-saturated porous solid: I. Low-frequency range, II. Higher frequency range. *J. Acoust. Soc. Am.* **28**, 168-191.
2. Zienkiewicz, O.C. (1982) Basic formulation of static and dynamic behaviours of soil and other porous media. *Applied Mathematics and Mechanics*, **3**(4), 457-468.
3. Zienkiewicz, O.C., Chang, C.T., Bettess, P. (1980) Drained, undrained, consolidating and dynamic behaviour assumptions in soils. *Géotechnique*, **30**(4), 385-395.
4. Zienkiewicz, O.C. and Shiomi, T. (1984) Dynamic behavior of saturated porous media, the generalized Biot formulation and its numerical solution. *Int. J. Numer. Anal. Methods Geomech.*, **8**, 71-96.
5. Garg, S.K., Nayfeh, A.H., Good, A.J. (1974) Comperessional waves in fluid-saturated elastic porous media. *J. Appl. Phys.*, **45**, 1968-1974.

## ۵- جمع بندی

در این مقاله یک روش تحلیلی برای پاسخ لرزه ای آبرفت های اشباع تحت اثر مؤلفه قائم زلزله ارائه شده است. آبرفت اشباع و مرزها افقی در نظر گرفته شده اند به همین دلیل آبرفت به صورت یک ستون محصور شده مدل سازی شده است. علاوه بر این آبرفت اشباع به صورت یک محیط کشسان متخلخل در نظر گرفته شد، به همین دلیل از معادلات کشسان متخلخل تحت بارهای لرزه ای استفاده شده است. در محیط کشسان متخلخل تحت اثر امواج لرزه ای، تغییر مکان فاز جامد و فشار آب حفره ای توأمان تغییر می یابند و اثر متقابلی بر یکدیگر دارند. معادله دیفرانسیل حاکم که یک معادله هایپربولیک از مرتبه دوم است با استفاده از روش جداسازی متغیرها به دو معادله ارتعاش آزاد در زمان و معادله بسل در مکان تفکیک شد. معادله بسل در مکان با استفاده از توابع بسل و معادله ارتعاش آزاد در زمان با استفاده از روش انتگرال گیری مستقیم نیومارک حل شده



Saturated Alluvium  
 Poroelastic  
 Earthquake Vertical Component  
 Analytical Solution  
 Confined Column  
 Traction  
 Transfer Function

۲- آبرفت اشباع  
 ۳- کشسان متخلخل  
 ۴- مؤلفه قائم زلزله  
 ۵- جواب تحلیلی  
 ۶- ستون محصور شده  
 ۷- ترکشن  
 ۸- تابع انتقال

6. Simon, B.R., Zienkiewicz, O.C., Paul, D.K. (1984) An analytical solution for the transient response of saturated porous elastic solids. *Int. J. Numer. Anal. Methods Geomech.* **8**, 381-398.
7. Hong, S.J., Sandhu, R.S., Wolfe, W.E. (1988) On Garg's solution of Biot's equations for wave propagation in a one-dimensional fluid-saturated elastic porous solid. *Int. J. Numer. Anal. Methods Geomech.*, **12**, 627-637.
8. Cheng, A., Badmus, T., and Beskos, D. (1991) Integral Equation for Dynamic Poroelasticity in Frequency Domain with BEM Solution. *J. Eng. Mech.*, **117**, 1136-1157.
9. De Boer, R., Ehlers, W., and Liu, Z. (1993) One-dimensional transient wave propagation in a fluid-saturated incompressible porous media. *Arch. Appl. Mech.*, **63** 59-72.
10. Schanz, M. and Cheng, A.H.D. (2000) Transient wave propagation in a one-dimensional poroelastic column. *Acta Mech.*, **145**, 1-18.
11. Kontoe, S., Christopoulos, A., and May, R. (2013) Site response analysis for vertical ground motion. *Proc. of 4<sup>th</sup> ECCOMAS Thematic Conference on Computational Methods in Structural Dynamics and Earthquake Engineering*, Greece.
12. Yang, J. and Sato, T. (2001) Analytical study of saturation effects on seismic vertical amplification of a soil layer. *Geotechnique*, **51**(2), 161-165.
13. Idriss, I.M. and Seed, H.B. (1968) Seismic Response of Horizontal Soil Layers. *J. Soil Mech. Found. Div. ASCE* 94 No. SM4, 1003-1031.
14. Newmark, N.M. (1962) A method of computations for structural dynamics. *Transactions ASCE* **127**, Part I, 1406-1435.
15. Li, X.S., Shen, C.K. and Wang Z.L. (1998) Fully coupled inelastic site response analysis for 1986 Lotung. *Journal of Geotechnical and Geoenvironmental Engineering*, **124**(7), 560-573.

## واژه نامه

Seismic Response

۱- پاسخ لرزه ای

## An Analytical Solution for Seismic Response of Saturated Soil Layer to Vertical Earthquake Excitation

Morteza Jiryaei Sharahi<sup>1\*</sup> and Maryam Mousavi<sup>2</sup>

1. Assistant Professor, Department of Civil Engineering, Qom University of Technology (QUT), Qom, Iran,  
\*Corresponding Author, email: jiryaei@qut.ac.ir
2. M.Sc. Student, Department of Civil Engineering, Qom University of Technology (QUT), Qom, Iran

Several analytical and numerical techniques have been developed for solving poroelastic governing equations; however, no closed-form solution in time domain for the general material case, even in simple one-dimensional geometry, has been yet introduced. Analytical solution for wave propagation in saturated porous media is limited and cannot be easily obtained for earthquake loading. The existence of such analytical solutions to simplified problems of seismic wave propagation is essential. In the present paper, a closed-form solution in time domain is obtained for saturated soil layer subjected to vertical component of earthquake acceleration. Saturated soil is assumed as a saturated poroelastic media and corresponding governing differential equations for earthquake loading are derived. In a poroelastic medium under the effect of seismic waves, solid phase displacement and pore pressure are coupled and interact with each other. If the ground surface and the boundaries between soil layers are horizontal, the lateral extent of the deposit has no influence on the response, and hence, the deposit can be considered as a one-dimensional confined column. The vibration modes, the modal shapes and their corresponding frequencies are obtained from the free vibration condition of the governing equation. By applying the method of separation of variables, the governing equation, which is a second order hyperbolic partial differential equation, is separated into a Bessel equation in space and a single-degree-of-freedom vibration equation in time. The Bessel equation and the single-degree-of-freedom vibration equation are solved using the Bessel functions and Newmark's direct integration method, respectively. In order to examine the accuracy of the analytical response presented in this paper, acceleration values recorded in a saturated alluvial during one of the previous earthquakes are compared with the calculated values by the analytical method. A numerical example is presented to further analyze the analytical solution. The numerical example shows that a decrease in permeability has a damping effect on acceleration, whereas, amplifies the excessive pore pressure. The suggested solution can be used for dynamic analysis of wave propagation in saturated soils during earthquakes.

**Keywords:** Seismic Response, Saturated Alluvium, Poroelastic, Earthquake Vertical Component, Analytical Solution.