

## چکیده

در مسائل الاستودینامیک که پدیده انتشار امواج بخش عمده‌ای از آن را تشکیل می‌دهد، مدل‌سازی و محاسبات مربوط به محیط نامحدود، مستلزم استفاده از مرز مصنوعی برای لحاظ نمودن میرایی تشعشعی است. در پژوهش حاضر، برای تحلیل پاسخ دینامیکی یا لرزه‌ای ساختمان با استفاده از روش اجزای محدود در حوزه زمان، برنامه‌ای به کمک نرم‌افزار MATLAB تهیه شد. در مدل‌سازی پدیده انتشار موج، لایه کاملاً تطبیق یافته (PML) که توانایی جذب و میرا نمودن امواج تحت هر زاویه برخورد و فرکانس را به لحاظ تئوریک دارد در روش اجزای محدود پیاده‌سازی و برای در نظر گرفتن میرایی تشعشعی استفاده شده است. آنچه در مقاله حاضر ارائه می‌شود، اعتبارسنجی و بررسی عملکرد لایه تطبیق یافته می‌باشد که این امر از طریق حل سه مسئله مورد ارزیابی قرار گرفته است. در مسئله اول، ارتعاش شالوده صلب بدون جرم واقع بر سه حالت نیم‌فضای بینهایت، لایه بر روی بستر صلب و لایه بر روی نیم‌فضای بینهایت با استفاده از PML تحلیل و نتایج با مدل گسترده<sup>۲</sup> مقایسه شده است. در مسئله دوم، کارایی PML در مدل‌سازی انتشار امواج سطحی مورد ارزیابی قرار گرفته است. در مسئله سوم نیز، به بررسی بزرگنمایی امواج در دره نیم‌دایره‌ای به کمک PML پرداخته شده است. نتایج حاصل، نشان‌دهنده قابلیت مناسب PML در شبیه‌سازی میرایی تشعشعی برای محیط نامحدود می‌باشد که در واقع بیان‌کننده جذب امواج برگشتی غیرواقعی و سازگار بودن PML با محیط اصلی است.

**واژگان کلیدی:** میرایی تشعشعی، لایه کاملاً تطبیق یافته، انتشار موج، اجزای محدود.

# شبیه‌سازی میرایی تشعشعی با استفاده از لایه کاملاً تطبیق یافته در مدل‌سازی عددی به روش اجزای محدود

محمد داودی

استادیار، پژوهشکده مهندسی ژئوتکنیک، پژوهشگاه بین‌المللی زلزله‌شناسی و مهندسی زلزله، تهران، ایران

عباس پوردیلیمی (نویسنده مسئول)

دانشجوی دکتری، پژوهشکده مهندسی ژئوتکنیک، پژوهشگاه بین‌المللی زلزله‌شناسی و مهندسی زلزله، تهران، ایران،  
 a.pourdeilami@iiees.ac.ir

محمد کاظم جعفری

استاد، پژوهشکده مهندسی ژئوتکنیک، پژوهشگاه بین‌المللی زلزله‌شناسی و مهندسی زلزله، تهران، ایران

## ۱- مقدمه

می‌تواند به‌طور مشخصی متفاوت از جنبش سطحی میدان آزاد باشد. حتی برای این مورد خاص، واضح است که غالب اثرات اندرکنشی در نزدیکی سازه بوده و در فاصله مشخصی از آن، تغییر مکان‌ها به سمت جنبش زلزله میدان آزاد همگرا خواهد شد [۱].

طی یک زمین‌لرزه، امواج مهاجم در سطح آزاد دره‌ای که سد در آن بنا شده است منعکس و منجر به حرکت غیریکنواخت شالوده سد می‌شوند. این مورد، تفرق<sup>۳</sup> نامیده می‌شود. علاوه بر این، حرکت شالوده به‌عنوان تحریک سد عمل می‌کند، اما آن همچنین از ارتعاش سد تأثیر می‌پذیرد که این مورد، اندرکنش<sup>۴</sup> نامیده می‌شود [۲].

برای بسیاری از مسائل خاک-سازه، معادلات حاکم به‌صورت معادلات دیفرانسیلی هستند و حل اینها به کمک روش‌های

تحلیل دینامیکی سازه‌ها عموماً با فرض بستر صلب و تحت اثر تحریک میدان آزاد (تحریک در عدم حضور سازه و پیش از خاک‌برداری) انجام می‌گیرد. در سیستم‌های خاک-سازه، انعطاف‌پذیری بستر سازه و قابلیت تشعشع انرژی به سمت محیط نیمه بی‌نهایت خاک منجر به تفاوت پاسخ نسبت به پاسخ سازه مشابه بر بستر صلب خواهد شد.

در صورتی که یک سازه انعطاف‌پذیر و سبک بر روی یک پی سنگی بسیار سخت احداث شود، فرض اینکه جنبش ورودی در پی سازه شبیه جنبش زلزله میدان آزاد است، فرض قابل قبولی خواهد بود. از طرفی، اگر سازه خیلی حجیم و سخت (مانند سدهای بتنی وزنی) و پی نیز نسبتاً نرم باشد، جنبش در پی سازه

برخورد صفر می‌شد). بنابراین لایه احاطه کننده محدوده محاسباتی به لحاظ تئوریک، هر نوع موج برخورد کننده به مرزها را بدون انعکاس جذب نموده و می‌توان آن را به عنوان «لایه کاملاً تطبیق یافته» (PML) در نظر گرفت. همچنین این محقق تکنیک PML را برای معادلات ماکسول برای امواج با هر فرکانس و هر زاویه برخورد ارائه داد. این روش تحت عنوان «کاملاً تطبیق یافته» شناخته می‌شود، زیرا فصل مشترک بین محدوده فیزیکی و لایه جاذب، تولید انعکاس غیرواقعی داخل محدوده مورد نظر نمی‌کند، در صورتی که این مشکل در مورد سایر شرایط مرزی جاذب<sup>۵</sup> وجود دارد.

تحقیقات بر روی مرز PML در دو دهه گذشته به سرعت توسعه یافت. به علت مزایای PML، این ایده برای حل مسائل فیزیکی زیادی از جمله معادله ماکسول [۵]، انتشار امواج در محیط غیر همگن [۶]، دستگاه اویلر خطی [۷] و معادله موج لرزه‌ای در محیط پروالاستیک [۸] به کار گرفته شده است. ژنگ و همکاران [۹] با استفاده از روش تفاضل محدود و مختصات مختلط، روش PML را برای محیط پروالاستیک نامحدود گسترش دادند و روش PML غیر همسان را برای موج الاستیک در مختصات کارتیزین، استوانه‌ای و کروی توسعه دادند. چو و لیو [۱۰] یک فضای مختصاتی مختلط برای تعریف PML در نظر گرفتند و نشان دادند که محیط حاصله توانایی جذب امواج منتشر شده را دارد. همچنین کاربرد مرز PML برای شبیه‌سازی معادله سه‌بعدی ماکسول توسعه داده شد [۱۱]. چو و ویدان [۱۲] مفهوم مرز PML را از طریق تبدیل مختصات فضای مختلط و گسسته‌سازی عملگر دیفرانسیلی گسترش داده و مبنای تئوریک برای توسعه بیشتر مرز PML به سیستم‌های دیگر حرکت موج بنا نهادند. کولینو و تسوگکا [۱۳] یک مدل PML با رویکرد فضای مجزاسازی شده برای یک سیستم هایپربولیک کلی تولید نمودند و در مسائل الاستودینامیک خطی برای محیط غیر همسان پیاده‌سازی نمودند. بیکچ و همکاران [۱۴] به صورت تئوری

عددی اجزای محدود (FEM)، تفاضلات محدود (FDM)، اجزای مرزی (BEM) و غیره تسهیل می‌شود. هر یک از این روش‌ها برای نوع خاصی از مسائل مناسب بوده و مزایا و معایب خود را دارند. روش اجزای محدود، شناخته‌شده‌ترین ابزار محاسباتی بوده و در موارد مهندسی بسیار کاربرد دارد.

برخلاف تحلیل‌های معمول که سازه مورد نظر با المان‌های محدود مدل شده و پس از اعمال بارگذاری و تعیین شرایط تکیه‌گاهی (عموماً تکیه‌گاه ساده در مرزها) معادلات تعادل برای المان‌های سازه حل می‌شود، در یک تحلیل دینامیکی انتشار امواج، ناگزیر از احتساب خواص زمین مانند یک محیط نیمه بینهایت هستیم. مدل کردن محیط نیمه بینهایت یا به عبارت دیگر دخیل نمودن تأثیر سختی و یا جرم آن با روش‌های معمول تحلیل اجزای محدود امکان‌پذیر نبوده و نیازمند فرمول‌بندی و روش حل خاصی می‌باشد. در این فرمول‌بندی، اعمال شرایط مرزی مناسب در مرزها اهمیت دارد به طوری که شرایط مرزی به کار رفته می‌بایست قابلیت انتشار امواج به سمت بی‌نهایت را داشته باشند و بتوانند خاصیت میرایی تشعشعی محیط نیمه بی‌نهایت را به خوبی ایفا نمایند. لازم به ذکر است، شرط از بین رفتن جابه‌جایی در بینهایت، کافی نیست [۳]. شرط مرزی در بینهایت می‌بایست قادر باشد انرژی را به طور غیر قابل برگشتی، از محیط محدود به دامنه نامحدود منتقل و انعکاس امواج برخورد کننده به مرز را حذف کند که این شرط مرزی، همان شرط تشعشعی نام دارد.

برنگر [۴] تکنیک جدیدی برای شبیه‌سازی فضای آزاد ارائه داد. این تکنیک بر پایه‌ی کاربرد یک لایه جاذب قرار دارد، با این تفاوت که محیط تطبیق یافته ارائه شده در تحقیقات قبلی با یک محیط تطبیق یافته جدید که برای جذب بدون انعکاس امواج الکترومغناطیس طراحی شده، جایگزین شده است. با این لایه جدید ضریب انعکاس تئوریک امواج برخورد کننده به لایه با هر فرکانس و هر زاویه‌ای صفر خواهد بود (برخلاف روش‌های قبلی که این ضریب تنها در صورت قائم بودن زاویه

پنجی و همکاران [۲۴] با استفاده از روش اجزای مرزی نیم‌فضا در حوزه زمان به حل مسئله انتشار موج دو بعدی در محیط الاستیک همسان و همگن پرداختند.

خزائی و لطفی [۲۵] با به‌کارگیری PML در تحلیل دینامیک سیستم‌های مخزن سد نشان دادند که این نوع شرایط مرزی کارآمدترین روش در تحلیل هارمونیک زمان و گذراست. فرزانیان و همکاران [۲۶] یک مدل اجزای محدود بر پایه تغییر مکان با استفاده از PML برای محیط ناهمگن نامحدود ارائه نمودند.

روش اجزای مرزی که یک ابزار عددی مؤثر در تحلیل دینامیکی محیط‌های نامحدود خطی است، به‌طور گسترده در مدل‌سازی انتشار امواج به کار می‌رود زیرا گسسته‌سازی فقط بر روی مرز انجام می‌پذیرد که منتهی به سیستم معادلات کمتر و المان‌بندی کوچک‌تر می‌شود؛ اما به‌هر حال روش اجزای مرزی مختص رفتار خطی است و نمی‌توان حوزه نزدیک را که رفتار غیرخطی دارد شبیه‌سازی نماید. همچنین، این روش نیاز به حل نیمه‌تحلیلی دارد که در بعضی نقاط منجر به پاسخ غیر همگرا می‌شود. لذا، در این موارد می‌توان از روش لایه کاملاً تطبیق یافته به‌عنوان جایگزین مناسب بهره برد.

همان‌طور که از مطالعه متون فنی برمی‌آید، کاربرد لایه کاملاً تطبیق یافته در حل مسائل دینامیکی و لرزه‌ای به‌خصوص پدیده انتشار امواج همچنان قابل بررسی است و فضا برای ارائه پاسخ‌های دقیق‌تر در حوزه الاستودینامیک وجود دارد که این موضوع به کمک PML میسر خواهد بود.

## ۲- هدف و رویکرد مطالعه

همان‌گونه که بیان شد، مدل‌سازی انتشار موج در روش اجزای محدود، به علت احتمال بازگشت امواج پس از برخورد به مرز، به‌سادگی امکان‌پذیر نیست؛ علاوه بر این، در روش اجزای محدود انتشار موج به گسسته‌سازی دامنه و روش انتگرال‌گیری زمان وابسته است.

PML را برای موج‌های الاستیک غیرهمسان بررسی نمودند. فستا و نیلسن [۱۵] انعکاس موج‌های رایلی و حجمی را در زوایای مختلف برخورد و طول موج‌های مختلف به‌صورت عددی و تحلیلی با به‌کارگیری PML ارزیابی نمودند. آنها نشان دادند که ضخامت PML حتی در مطالعات با فرکانس پایین می‌تواند کم در نظر گرفته شود و همچنین نشان داده شده که PML توانایی جذب موج‌های رایلی را دارد. باسو و چوپرا [۱۶] به توسعه مفهوم PML برای الاستودینامیک در حوزه فرکانس پرداختند. در این تحقیق، روش اجزای محدود متقارن بر پایه جابه‌جایی<sup>۶</sup> برای حرکت کرنش مسطح یا سه‌بعدی در مختصات کارتزین ارائه شده است. جزئیات مفهوم PML از طریق نتایج تحلیلی و عددی مدل PML در یک میله نیمه بی‌نهایت واقع بر پی الاستیک ارزیابی و نتایج عددی برای حرکت خارج از صفحه لایه نیمه بی‌نهایت واقع بر بستر صلب مورد بررسی قرار گرفته است. آپلو و کرایس [۱۷] به معادلات الاستیک خطی، PML را وارد نمودند که منجر به بهبود پایداری گردید. هاراری و آلبوچر [۱۸] برای یک محیط الاستیک با PML که توابع شکل معمول را به کار بردند یک روش اجزای محدود ساده پیشنهاد نمودند. ما و لیو [۱۹] با روش اجزای محدود سریع و با استفاده از روش انتگرال‌گیری تک‌نقطه‌ای، به‌سادگی PML را پیاده‌سازی نمودند. باسو [۲۰] با وارد کردن مدل PML در روش اجزای محدود صریح بر پایه جابه‌جایی، آن را برای تحلیل‌های دینامیکی سه‌بعدی بزرگ‌مقیاس قابل استفاده نمود. لیو و همکاران [۲۱] روش کرنک نیکلسون<sup>۷</sup> را با هم با چندین الگوریتم برای محاسبه معادله موج SH استفاده نمودند. کیم و پاسیاک [۲۲] لایه‌های کاملاً تطبیق یافته کارتزین را برای حل معادله هلمهولتز<sup>۸</sup> در محیط نامحدود دو بعدی استفاده نمودند. لانچیونی [۲۳] عملکرد PML و شرایط مرزی درجه بالای بدون انعکاس را در معادله موج یک‌بعدی مقایسه نمودند و نقاط قوت و ضعف دو روش را بیان نمودند.

مورد نظر زمانی مشخص می شود که توسعه قابلیت و اضافه نمودن جنبه های محاسباتی گوناگون از اهداف تحقیق باشد. بدین ترتیب، تغییرپذیری و تسلط بر بخش های مختلف ساختار یاد شده می تواند راهگشای حل مسائلی باشد که پیش از این، نرم افزارهای موجود قادر به تحلیل آن نبوده اند.

برای تحلیل پاسخ دینامیکی یا لرزه ای ساختگاه با استفاده از روش اجزای محدود برنامه ای تهیه شد. برنامه تولید شده به کمک نرم افزار MATLAB که یک زبان جدید برای انجام محاسبات ریاضی است، نوشته شده است. در این زبان، استفاده از قابلیت بردار سازی<sup>۹</sup> سبب افزایش سرعت برنامه نویسی و خلاصه بودن آن (برخلاف زبان های برنامه نویسی کلاسیک مانند C, FORTRAN) می شود. از دیگر توانایی های این زبان، استفاده از ماتریس اسپارس<sup>۱۰</sup> برای کاهش حجم مورد نیاز از حافظه سیستم است که با ذخیره درایه های غیر صفر این امر میسر گشته است.

برنامه حاضر قادر است انواع شکل های هندسی با تعداد لایه بندی را تحت بار گذاری دینامیکی و یا تحریک لرزه ای، در حوزه زمان تحلیل نماید. ویژگی خاص این تحقیق، پیاده سازی لایه کاملاً تطبیق یافته (PML) است که مدل سازی میرایی هندسی را انجام می دهد.

### ۳- فرمولاسیون لایه های کاملاً تطبیق یافته

در این بخش، فرمولاسیون مدل اجزای محدود لایه های کاملاً تطبیق یافته در حالت دو بعدی در حوزه زمان آورده شده است. اساس فرمولاسیون از تحقیقات باسو و چوپرا [۲۷] برگرفته شده است. در یک محیط الاستیک دو بعدی، روابط حاکم بر لایه های کاملاً تطبیق یافته به صورت زیر ارائه شده است.

$$(\sigma \tilde{\Lambda}) \nabla = -\omega^2 \rho [\lambda_1(x_1) \lambda_2(x_2)] u \quad (1)$$

$$\bar{\sigma} = (1 + 2ia_0 \xi) C \bar{\varepsilon} \quad (2)$$

$$\varepsilon = \frac{1}{2} [(u \nabla^T) \Lambda + \Lambda^T (u \nabla^T)^T] \quad (3)$$

برای یک زمان محدود، پاسخ محیط نامحدود می تواند از روی یک محیط محدود و به اندازه کافی بزرگ تعیین شود. بدین ترتیب، محیط نامحدود توسط المان بندی امتداد داده شده مدل سازی می شود به طوری که مرز خارجی در بیرون از ناحیه تحت تأثیر قرار می گیرد. پاسخ سازه در مدل امتداد داده شده در زمان های ابتدایی تحلیل و قبل از رسیدن امواج انعکاس یافته از مرزهای قطع شده به نقطه مورد نظر، همانند سازه در محیط نامحدود است. اگرچه، المان بندی امتداد داده شده به دامنه محاسباتی بزرگ برای تحلیل لرزه ای پاسخ یک سیستم خاک-سازه نیاز دارد. مدل سازی این دامنه عظیم محاسباتی توسط روش اجزای محدود، به مقدار زیادی حافظه رایانه و تلاش محاسباتی نیاز دارد که برای کاربردهای مهندسی عملی نیست.

کلید حل مسئله در روش اجزای محدود، اعمال شرط میرایی تشعشی است. این نوع میرایی که سبب کاهش دامنه حرکت می گردد، ناشی از پخش انرژی بر روی حجم بزرگ تر ماده است. هنگامی که انرژی زلزله از گسل زیر سطح زمین رها می شود، امواج حجمی از منبع به تمامی جهات منتشر می شود. چنانچه ناحیه گسیختگی به صورت یک منبع نقطه ای نمایش داده شود، جبهه موج به شکل کروی بوده و تحلیل های انجام گرفته قبلی نشان می دهد که میرایی تشعشی سبب کاهش دامنه حرکت موج حجمی با نرخ  $1/r$  و موج سطحی با نرخ  $1/\sqrt{r}$  می گردد. به عبارت دیگر، امواج سطحی آهسته تر از امواج حجمی میرا می شوند.

در مطالعه حاضر روش عددی اجزای محدود به عنوان ابزار محاسباتی انتخاب شده است که این امر، به یک ساختار توانمند برای اجرای تحلیل دینامیکی در حوزه زمان نیازمند است. از این رو، مفاهیم اولیه روش اجزای محدود به همراه مطالب پیشرفته آن در تولید یک چارچوب ساخت یافته به کار گرفته شد و در نهایت در قالب برنامه تحلیل دینامیکی در حوزه زمان مورد استفاده قرار گرفت. اهمیت تولید ساختار

$$\sigma = C \left( \varepsilon + \frac{2\xi b}{c_s} \varepsilon \right) \quad (11)$$

$$F^{eT} \varepsilon F^e + (F^{eT} \varepsilon F^p + F^{pT} \varepsilon F^e) + F^{pT} E F^p = \quad (12)$$

$$\frac{1}{2} [F^{eT} (\text{grad} u) + (\text{grad} u)^T F^e] +$$

$$\frac{1}{2} [F^{pT} (\text{grad} u) + (\text{grad} u)^T F^p]$$

در معادلات (۱۰) الی (۱۲) داریم:

$$f_m = (1 + f_1^e(x_1))(1 + f_2^e(x_2)) \quad (13)$$

$$f_c = (1 + f_1^e(x_1))f_2^p(x_2) + \quad (14)$$

$$(1 + f_2^e(x_2))f_1^p(x_1)$$

$$f_k = f_1^p(x_1)f_2^p(x_2) \quad (15)$$

$$\Sigma = \int_0^t \sigma d\tau, E = \int_0^t \varepsilon d\tau \quad (16)$$

با ضرب طرفین رابطه (۱۰) در تابع وزنی  $w$  و انتگرال‌گیری

جزء به جزء و استفاده از قضیه گرین بر سطح داریم:

$$\int_{\Omega} \rho f_m w. \ddot{u} d\Omega + \int_{\Omega} \rho c_s f_c w. \dot{u} d\Omega + \quad (17)$$

$$\int_{\Omega} \mu f_k w. u d\Omega + \int_{\Omega} \tilde{\varepsilon}^e : \sigma d\Omega + \int_{\Omega} \tilde{\varepsilon}^p : \Sigma d\Omega =$$

$$\int_{\Gamma} w. (\sigma \tilde{F}^e + \Sigma \tilde{F}^p) n d\Gamma$$

که در آن  $\Gamma = d\Omega$  مرز محیط و  $n$  بردار واحد قائم‌مرز است و  $\tilde{\varepsilon}^e$  و  $\tilde{\varepsilon}^p$  به صورت زیر است:

$$\tilde{\varepsilon}^e = \frac{1}{2} [(\text{grad} w) \tilde{F}^e + \tilde{F}^{eT} (\text{grad} w)^T] \quad (18)$$

$$\tilde{\varepsilon}^p = \frac{1}{2} [(\text{grad} w) \tilde{F}^p + \tilde{F}^{pT} (\text{grad} w)^T] \quad (19)$$

و با تبدیل  $u$  و  $w$  به مقادیر گره‌ای و با وارد نمودن توابع شکل به معادلات و با محدود کردن سطح انتگرال‌گیری به سطح یک المان ماتریس جرم  $(M^e)$  و سختی  $(K^e)$  و میرایی  $(C^e)$  تولید می‌گردد.

$$M^e \ddot{U}_{n+1} + C^e \dot{U}_{n+1} + K^e U_{n+1} + P_{\text{int}(n+1)}^e = \quad (20)$$

$$P_{\text{ext}(n+1)}^e$$

که در آن  $\omega$  سرعت زاویه‌ای،  $\rho$  چگالی مصالح،  $\xi$  میرایی مصالح،  $\lambda_1$  و  $\lambda_2$  توابع توسعه‌دهنده،  $u$  تغییر مکان،  $\varepsilon$  کرنش،  $\sigma$  تنش،  $C$  ماتریس رفتاری و  $a_0 = ks b$  فرکانس بدون بعد (که  $b=B/2$  نصف عرض مشخصه سازه است) می‌باشد. روابط تنش، تغییر مکان و کرنش به صورت زیر است:

$$\sigma = \begin{bmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} \end{bmatrix}, \varepsilon = \begin{bmatrix} \varepsilon_{11} & \varepsilon_{12} \\ \varepsilon_{21} & \varepsilon_{22} \end{bmatrix}, u = \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{Bmatrix}, \quad (4)$$

$$\nabla = \begin{Bmatrix} \frac{\partial}{\partial x_1} \\ \frac{\partial}{\partial x_2} \end{Bmatrix},$$

$$\tilde{\Lambda} = \begin{bmatrix} \lambda_2 & 0 \\ 0 & \lambda_1 \end{bmatrix} \Lambda = \begin{bmatrix} \frac{1}{\lambda_1} & 0 \\ 0 & \frac{1}{\lambda_2} \end{bmatrix} \quad (5)$$

توابع توسعه‌دهنده‌ی ارائه شده در روابط بالا به صورت زیر است.

$$\lambda_i(x_i) = (1 + f_i^e(x_i)) - i \frac{f_i^p(x_i)}{a_0} \quad (6)$$

با توجه به رابطه‌ی فوق معادله (۵) به صورت زیر بازنویسی می‌گردد.

$$\tilde{\Lambda} = \left( \tilde{F}^e + \frac{1}{i\omega} \tilde{F}^p \right) \quad \Lambda = \left( F^e + \frac{1}{i\omega} F^p \right)^{-1} \quad (7)$$

$$\tilde{F}^e = \begin{bmatrix} 1 + f_2^e(x_2) & 0 \\ 0 & 1 + f_1^e(x_1) \end{bmatrix}, \quad (8)$$

$$\tilde{F}^p = \begin{bmatrix} c_s f_2^p(x_2)/b & 0 \\ 0 & c_s f_1^p(x_1)/b \end{bmatrix}$$

$$F^e = \begin{bmatrix} 1 + f_1^e(x_1) & 0 \\ 0 & 1 + f_2^e(x_2) \end{bmatrix}, \quad (9)$$

$$F^p = \begin{bmatrix} c_s f_1^p(x_1)/b & 0 \\ 0 & c_s f_2^p(x_2)/b \end{bmatrix}$$

با ضرب طرفین معادله (۱) در  $i\omega \Lambda^{-T}$  و با جایگذاری روابط فوق در معادلات (۱) تا (۳) و تبدیل معکوس فوریه، معادلات حاکم بر لایه‌های کاملاً تطبیق یافته در حوزه زمان به صورت زیر بازنویسی می‌گردد.

$$\text{div}(\tilde{F}^e \sigma + \tilde{F}^p \Sigma) = \rho f_m \ddot{u} + \rho \frac{c_s}{b} f_c \dot{u} + \frac{\mu}{b^2} f_k u \quad (10)$$

تحلیل استاتیکی برای وزن را داراست، از روش انتگرال گیری ضمنی نیومارک برای حل معادله تعادل دینامیکی در حوزه زمان استفاده می شود.

برای پیاده سازی PML در برنامه اجزای محدود، فرمول بندی مربوط به آن بازنویسی و نهایتاً فرم ضعیف معادله حاکم استخراج شد؛ سپس با تفکیک ماتریس های سختی، جرم و میرایی و همچنین بردار نیروی داخلی، المان PML با کمک توابع شکل مربوط به المان چهار گره ای تولید شده است. با ورود المان PML به برنامه، روش حل همانند آنچه پیش تر توضیح داده شد برای کل سیستم به کار گرفته شده است.

هدف اصلی از پیاده سازی لایه کاملاً تطبیق یافته (PML) در روش عددی اجزای محدود، مدل سازی میرایی هندسی و جلوگیری از بازگشت امواج منعکس شده از مرزهای مدل به دامنه محاسباتی می باشد. به منظور صحت سنجی و اطمینان از کارایی برنامه نوشته شده، تعداد سه مسئله مد نظر قرار گرفته که به بررسی عملکرد PML می پردازد.

#### ۴-۱- مسئله اول: کنترل عملکرد PML در شالوده های صلب مرتعش

در این قسمت، عملکرد PML در جذب امواج ناشی از نیروی نقطه ای ریکر<sup>۱۱</sup> اعمال شده بر شالوده صلب بدون جرم مورد بررسی قرار گرفته است. در ادامه سه حالت نیم فضای بینهایت، لایه بر روی بستر صلب و لایه بر روی نیم فضای بینهایت با استفاده از PML تحلیل و نتایج با مدل گسترده مقایسه شده است.

##### شالوده صلب بدون جرم واقع بر نیم فضای بینهایت

در مدل سازی، شالوده صلب بدون جرم به عرض ۲ متر واقع بر نیم فضای بینهایت، از پارامترهای هندسی معرفی شده در تحقیق باسو و چوپرا [۱۶] الهام گرفته شده است. بدین ترتیب، ضخامت لایه PML به اندازه نصف عرض بارگذاری و لایه

$$M^e = \int_{\Omega} \rho f_m N^T N d\Omega \quad (21)$$

$$C^e = \int_{\Omega} \frac{\rho C_s}{b} f_c N^T N d\Omega \quad (22)$$

$$K^e = \int_{\Omega} \frac{\mu}{b^2} f_k N^T N d\Omega \quad (23)$$

نیروی داخلی و خارجی از معادلات زیر به دست می آید:

$$P_{int(n+1)}^e = \int_{\Omega^e} \tilde{B}^T \sigma_{n+1} d\Omega + \int_{\Omega^e} \tilde{B}^P \Sigma_n d\Omega \quad (24)$$

$$P_{ext(n+1)}^e = \int_{\Gamma^e} N_s (\tilde{F}^e \sigma + \tilde{F}^P \Sigma) n d\Gamma$$

در این رابطه  $\sigma_{n+1}$  و  $\Sigma_{n+1}$  به صورت برداری بیان شده است و

ماتریس های  $\tilde{B}^e$  و  $\tilde{B}^P$  به صورت زیر به دست می آید.

$$\tilde{B}^e = \left[ \dots \begin{pmatrix} \tilde{F}_{(1,1)}^e N_1^i & 0 \\ 0 & \tilde{F}_{(2,2)}^e N_2^i \\ \tilde{F}_{(2,2)}^e N_2^i & \tilde{F}_{(1,1)}^e N_1^i \end{pmatrix} \dots \right] \quad (25)$$

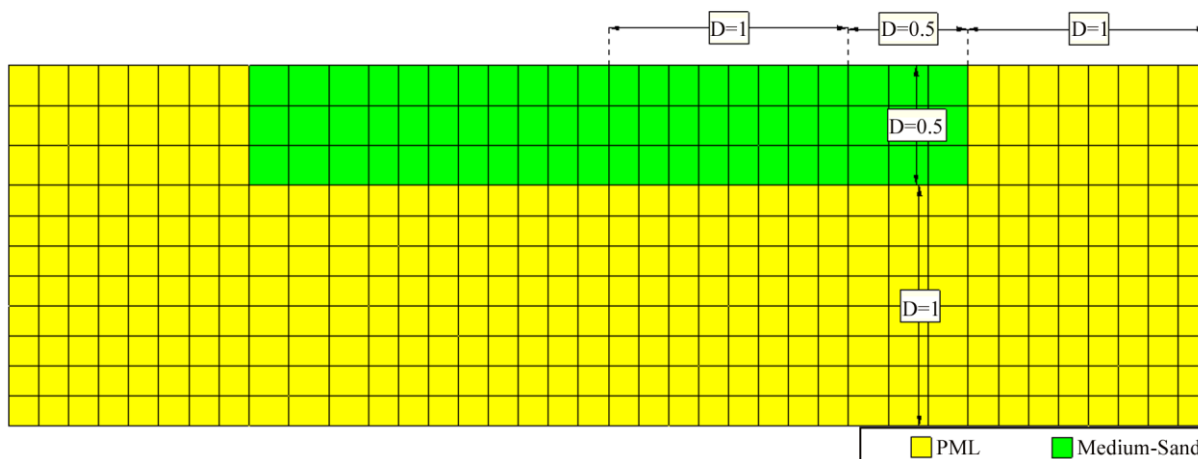
$$\tilde{B}^P = \left[ \dots \begin{pmatrix} \tilde{F}_{(1,1)}^P N_1^i & 0 \\ 0 & \tilde{F}_{(2,2)}^P N_2^i \\ \tilde{F}_{(2,2)}^P N_2^i & \tilde{F}_{(1,1)}^P N_1^i \end{pmatrix} \dots \right] \quad (26)$$

با توجه به آنچه در تشکیل ساختار لایه کاملاً تطبیق یافته

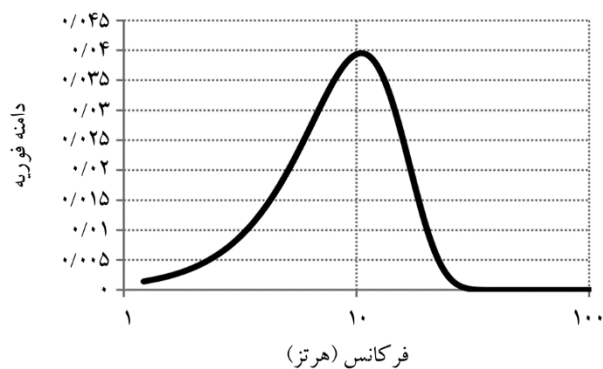
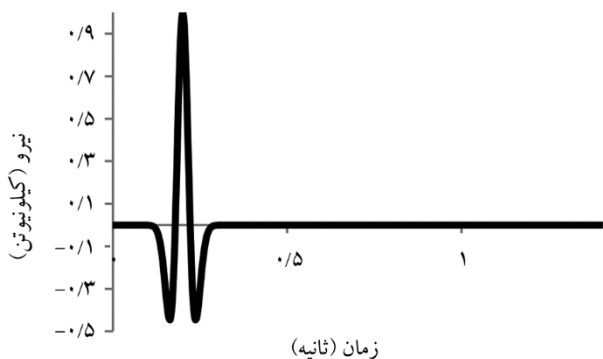
آمده است مشاهده می شود که تفاوت عمده این نوع از المان ها با المان های مرسوم در روش اجزای محدود مربوط به ماتریس های سختی، میرایی و جرم می شود. علاوه بر این، وجود یک بردار نیروی داخلی که برای میرا سازی حرکت فعال می شود و می بایست در هر گام زمانی مورد محاسبه قرار گیرد از دیگر تفاوت های روش یاد شده با روش مرسوم است.

#### ۴- صحت سنجی و بررسی توانایی برنامه

به منظور انجام تحلیل دینامیکی خطی در حوزه زمان برای محیط پیوسته، برنامه اجزای محدود با استفاده از المان چهار گره ای نوشته شده است. در این برنامه که همه مراحل روش اجزای محدود از قبیل تشکیل المان ها، سرهم کردن المان ها، اختصاص رفتار الاستیک خطی، اعمال شرایط مرزی و انجام



شکل (۱): هندسه و المان‌بندی مدل نیم‌فضا به کمک PML.



شکل (۲): نمایش موجک ریکر به عنوان بارگذاری نقطه‌ای.

پایش وضعیت تغییر مکان قائم در نقطه A با زمان را می‌توان به‌عنوان معیاری برای کنترل بازگشت موج از مرز در نظر گرفت. نتایج حاصل از تحلیل، برای حالات مجزای بارگذاری افقی و قائم با فرض وجود و عدم وجود میرایی مصالح، در شکل‌های (۳ الی ۶) نشان داده شده است. همان‌طور که مشخص است، تغییر مکان در دو مدل گسترده

اصلی به اندازه ۱/۵ برابر نصف عرض بارگذاری قرار داده شده است (شکل ۱).

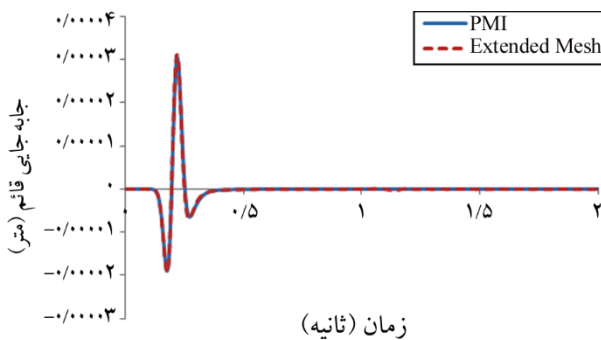
یادآور می‌شود برای انتقال دقیق موج در محیط، حداکثر اندازه شبکه‌بندی می‌بایست از یک‌دهم تا یک‌هشتم طول موج مربوط به بزرگ‌ترین مؤلفه فرکانس موج ورودی کوچک‌تر باشد که در این مسئله، اندازه المان‌ها کمتر از ۱۷ سانتی‌متر است.

نیروی اعمال شده در نقطه A، به‌صورت موجک ریکر با فرکانس غالب ۲ هرتز و زمان انتقال (متناظر با حداکثر مقدار) برابر با ۰/۲ ثانیه می‌باشد که در شکل (۲) تاریخچه زمان و محتوای فرکانسی آن نمایش داده شده است.

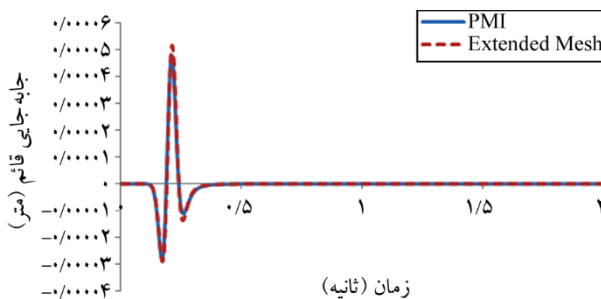
همچنین، خصوصیات محیط اصلی در جدول (۱) آورده شده است. لایه کاملاً تطبیق یافته نیز به کمک تابع میراکننده‌ی خطی با شیب ۱۰ و میرایی داخلی ۵ درصد مدل شده است.

جدول (۱): خصوصیات به‌کار گرفته شده برای محیط اصلی در مدل‌سازی عددی.

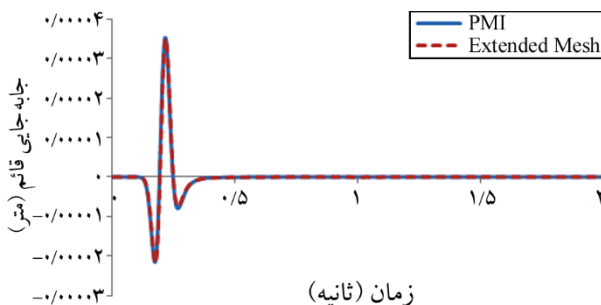
| میرایی مصالح (%) | سرعت موج برشی (m/s) | نسبت پواسون | دانسیته (kg/m <sup>3</sup> ) | مدول الاستیسیته (kN/m <sup>2</sup> ) |
|------------------|---------------------|-------------|------------------------------|--------------------------------------|
| ۰                | ۵۵/۹۷               | ۰/۳۳        | ۱۸۰۰                         | ۱۵۰۰۰                                |
| ۵                | ۵۴/۵۵               | ۰/۴         | ۱۸۰۰                         | ۱۵۰۰۰                                |



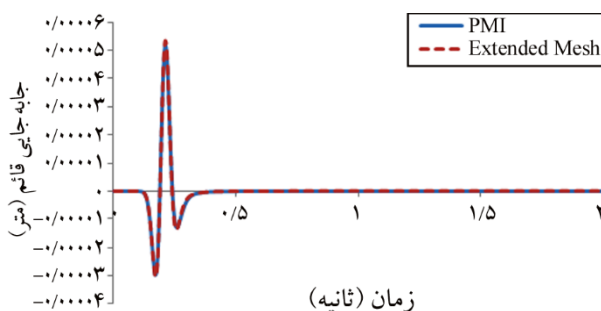
شکل (۳): تغییر مکان قائم شالوده، حالت نیمه بینهایت برای نسبت پواسون ۰/۴ و میرایی مصالح برابر با ۵ درصد.



شکل (۴): تغییر مکان افقی شالوده، حالت نیمه بینهایت برای نسبت پواسون ۰/۴ و میرایی مصالح برابر با ۵ درصد.



شکل (۵): تغییر مکان قائم شالوده، حالت نیمه بینهایت برای نسبت پواسون ۰/۳۳ و میرایی مصالح برابر با صفر.



شکل (۶): تغییر مکان افقی شالوده، حالت نیمه بینهایت برای نسبت پواسون ۰/۳۳ و میرایی مصالح برابر با صفر.

و PML با هم انطباق داشته و به غیر از پاسخ ناشی از بارگذاری، نوسان اضافی قابل مشاهده‌ای در طول زمان وجود ندارد.

چنانچه از نظر مدت زمان اجرای برنامه، مقایسه‌ای بین دو مدل گسترده و PML انجام پذیرد مشاهده می‌شود که اگر قدرت پردازش سیستم برای هر دو حالت یکسان باشد، زمان حل یک مسئله با ابعاد گسترده می‌تواند تقریباً تا چهار برابر بیشتر از زمان حل مسئله با ابعاد کوچک شده باشد.

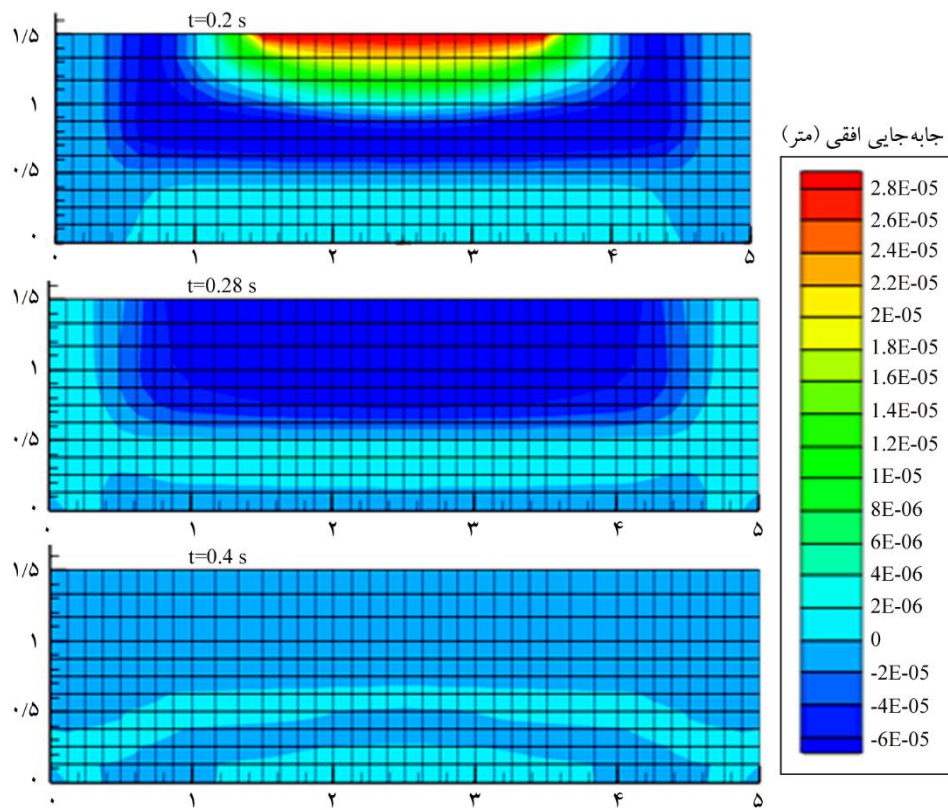
در این قسمت، به منظور ارائه نمایشی کامل از عملکرد PML، خروجی مربوط به کانتور تغییر مکان افقی و قائم در کل محیط در شکل‌های (۷ و ۸) به ترتیب برای لحظات ۰/۲، ۰/۲۸ و ۰/۴ ثانیه نشان داده شده است. همان‌طور که از روند انتشار موج در محیط مشاهده می‌شود، برای هر دو نوع بارگذاری قائم و افقی در شالوده صلب بدون جرم، پس از ایجاد ارتعاش اجباری در محیط و انتشار امواج به سمت مرزها که PML در آنجا قرار گرفته است، جذب و میرا شدن ارتعاشات قابل رؤیت است. به عبارت دیگر، پس از گذشت ۰/۴ ثانیه از شروع ارتعاش شالوده، تمامی امواج منتشره در محیط توسط لایه کاملاً تطبیق یافته جذب شده و بدون برگشت به محیط اصلی میرا می‌شود که این موضوع همان نقش میرایی هندسی در مدل‌سازی به روش اجزای محدود می‌باشد.

#### شالوده صلب بدون جرم واقع بر لایه روی بستر صلب

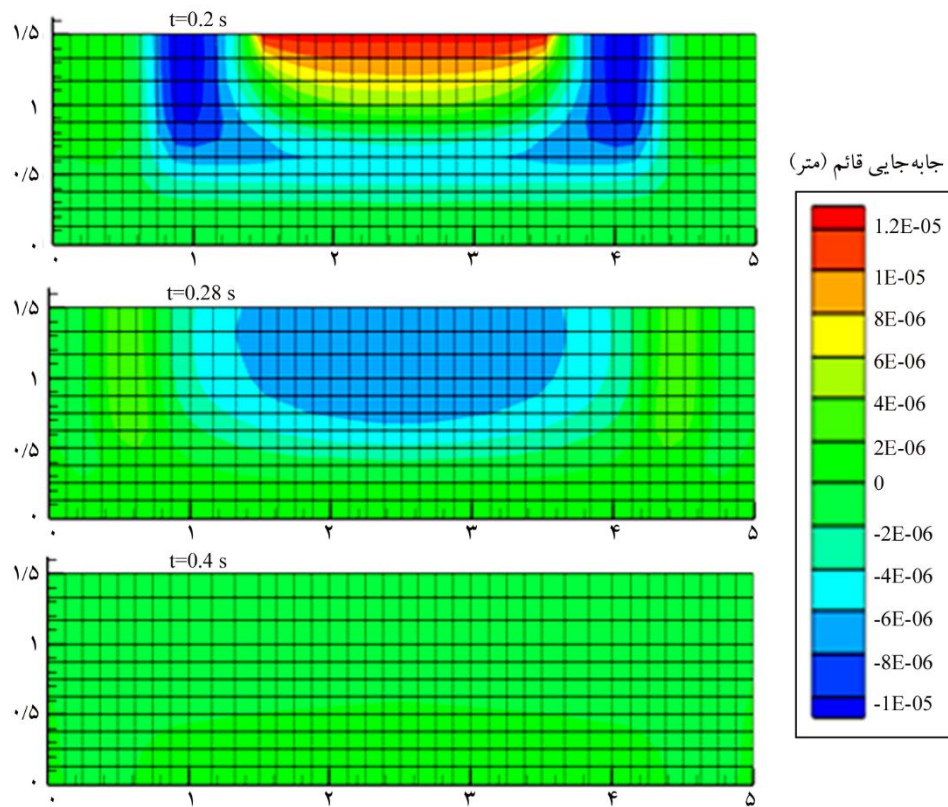
در حالت دوم، به منظور مدل‌سازی شالوده صلب بدون جرم به عرض ۲ متر واقع بر لایه روی بستر صلب، عرض لایه PML به اندازه نصف عرض بارگذاری و لایه اصلی به اندازه هشت برابر نصف عرض بارگذاری قرار داده شده است. ضخامت لایه محدود نیز برابر با ۲ متر و خصوصیات مصالح استفاده شده در مدل مطابق جدول (۲) در نظر گرفته شده است. هندسه و المان‌بندی مدل با PML در شکل (۹) نمایش داده شده است.

موجک ریکر و خصوصیات محیط اصلی همانند بخش قبل می‌باشد به‌جز اینکه میرایی مصالح برابر با ۵ درصد در نظر گرفته شده است. لایه کاملاً تطبیق یافته نیز به کمک تابع میراکننده‌ی خطی با شیب ۱۰ در جهت افقی و صفر در جهت قائم و میرایی داخلی ۵ درصد عمل می‌نماید.

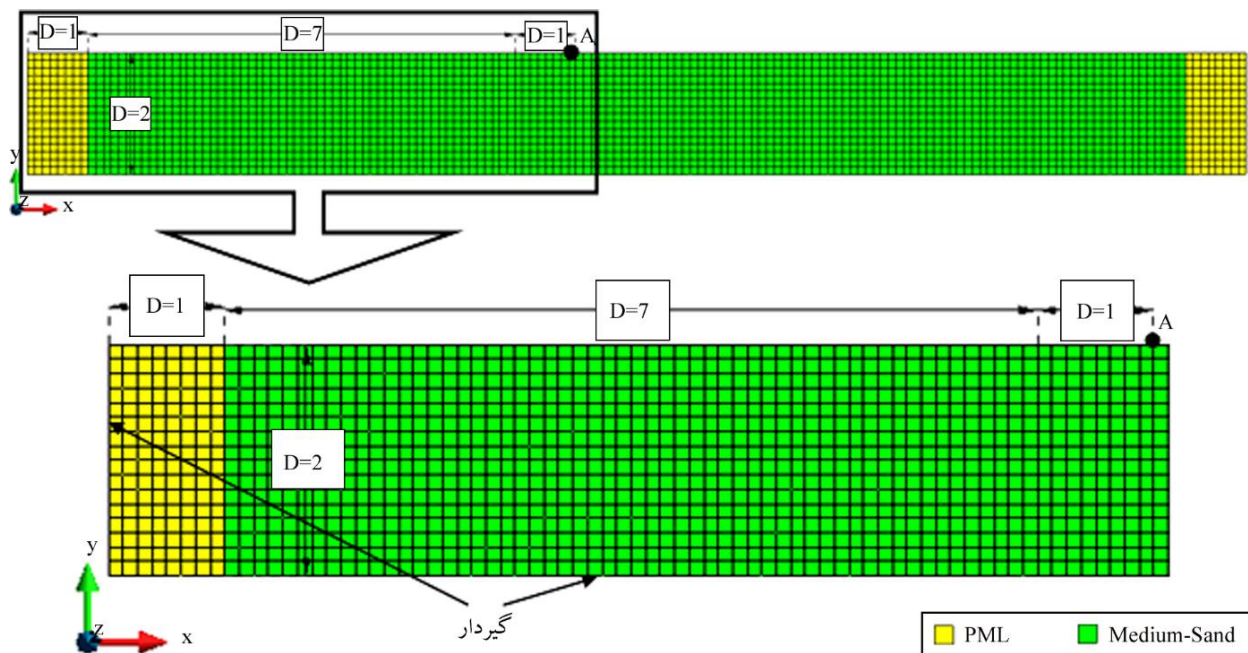




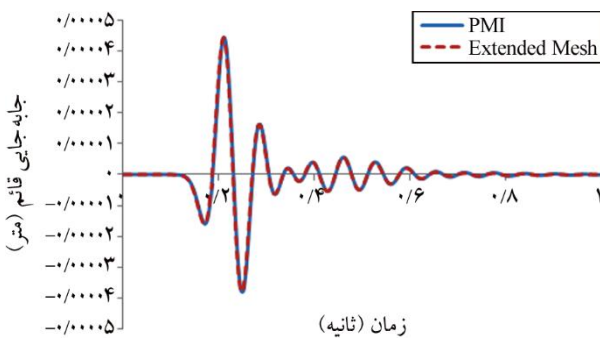
شکل (۷): نواحی هم‌تراز برای تغییر مکان افقی، حالت نیمه‌بینهایت.



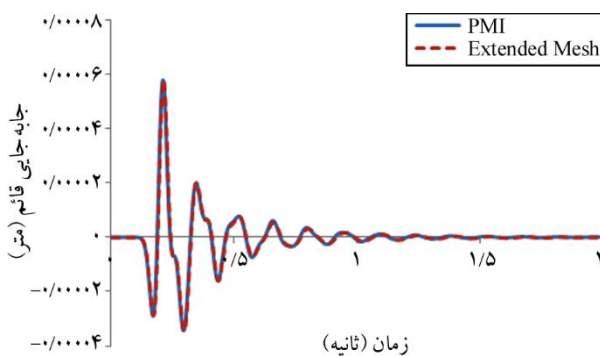
شکل (۸): نواحی هم‌تراز برای تغییر مکان قائم، حالت نیمه‌بینهایت.



شکل (۹): هندسه و المان بندی مدل لایه واقع بر بستر صلب به کمک PML.



شکل (۱۰): تغییر مکان قائم شالوده، حالت لایه واقع بر بستر صلب برای نسبت پواسون ۰/۴ و میرایی مصالح برابر ۵ درصد.



شکل (۱۱): تغییر مکان افقی شالوده، حالت لایه واقع بر بستر صلب برای نسبت پواسون ۰/۴ و میرایی مصالح برابر ۵ درصد.

جدول (۲): خصوصیات به کار گرفته شده برای محیط اصلی در مدل سازی عددی در حالت لایه واقع بر بستر صلب.

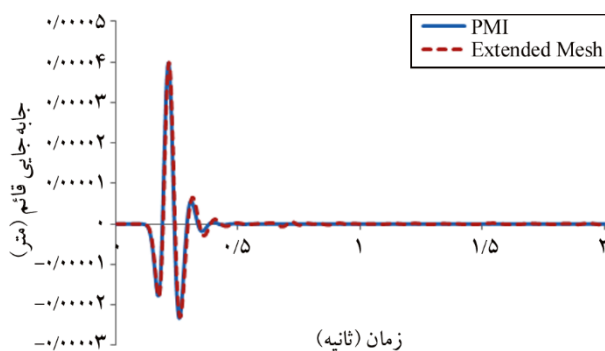
| میرایی<br>(%) | سرعت موج<br>برشی (m/s) | نسبت<br>پواسون | دانسیته<br>(kg/m <sup>3</sup> ) | مدول الاستیسیته<br>(kN/m <sup>2</sup> ) |
|---------------|------------------------|----------------|---------------------------------|---|
| ۵             | ۵۴/۵۵                  | ۰/۴            | ۱۸۰۰                            | ۱۵۰۰۰                                   |

پایش وضعیت تغییر مکان قائم در نقطه A در مرکز سطح شالوده با زمان را می توان به عنوان معیاری برای کنترل بازگشت موج از مرز در نظر گرفت. نتیجه حاصل از تحلیل در شکل های (۱۰) و (۱۱) نشان داده شده است. همان طور که مشخص است، تغییر مکان در دو مدل گسترده و PML با هم انطباق داشته و به غیر از پاسخ ناشی از بارگذاری، نوسان اضافی قابل توجهی در طول زمان وجود ندارد.

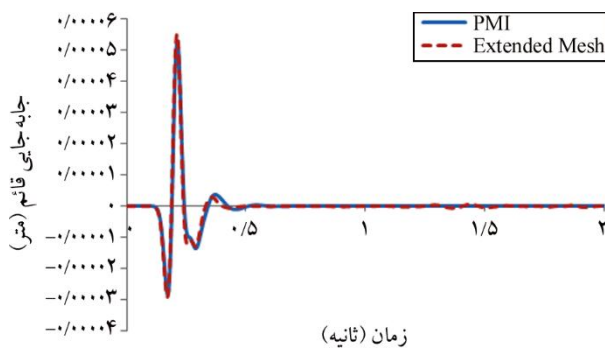
شالوده صلب بدون جرم بر روی لایه محدود واقع بر نیم فضای بینهایت در حالت سوم، به منظور مدل سازی شالوده صلب بدون جرم به عرض ۲ متر بر روی لایه محدود واقع بر نیم فضای بینهایت، پارامترهای هندسی معرفی شده در تحقیق باسو و چوپرا [۱۶] استفاده شد. بدین ترتیب، عرض لایه PML به اندازه نصف عرض

نشان داده شده است. همان‌طور که مشخص است، تغییر مکان در دو مدل گسترده و PML با هم انطباق داشته و به غیر از پاسخ ناشی از بارگذاری، نوسان اضافی قابل توجهی در طول زمان وجود ندارد.

۴-۲- مسئله دوم: کارایی PML در مدل‌سازی انتشار امواج سطحی در این بخش، امواج سطحی بر روی نیم‌فضای الاستیک در نظر گرفته شده است. در مطالعه حاضر، امواج سطحی توسط



شکل (۱۳): تغییر مکان قائم شالوده حالت لایه واقع بر محیط نیمه‌بینه‌بایت برای نسبت پواسون ۰/۴ و میرایی مصالح ۵ درصد.

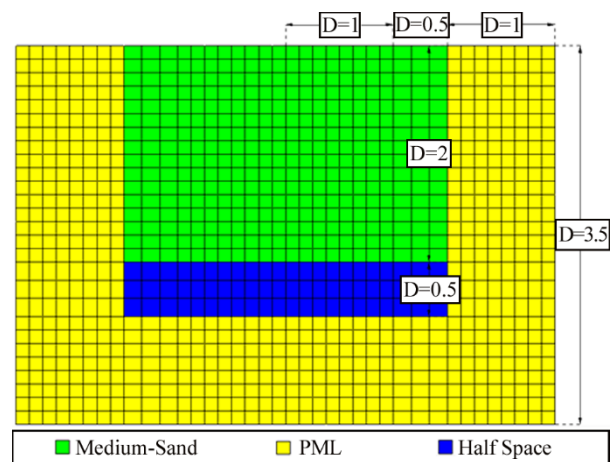


شکل (۱۴): تغییر مکان افقی شالوده حالت لایه واقع بر محیط نیمه‌بینه‌بایت برای نسبت پواسون ۰/۴ و میرایی مصالح ۵ درصد.

جدول (۳): خصوصیات به کار گرفته شده برای محیط اصلی شامل لایه محدود و نیم‌فضای بینه‌بایت در مدل‌سازی عددی.

| لایه / خصوصیات | مدول الاستیسیته (kN/m <sup>2</sup> ) | دانسیته (kg/m <sup>3</sup> ) | نسبت پواسون | سرعت موج فشاری (m/s) | میرایی مصالح (%) |
|----------------|--------------------------------------|------------------------------|-------------|----------------------|------------------|
| لایه محدود     | ۱۵۰۰۰                                | ۱۸۰۰                         | ۰/۴         | ۵۴/۵۵                | ۵                |
| نیم‌فضا        | ۶۰۰۰۰                                | ۱۸۰۰                         | ۰/۴         | ۵۴/۵۵                | ۵                |

بارگذاری و لایه اصلی به اندازه ۱/۵ برابر نصف عرض بارگذاری قرار داده شده است. ضخامت لایه محدود برابر با ۲ متر، ضخامت نیم‌فضا برابر با یک چهارم عرض بارگذاری و به دنبال آن، PML به ضخامت نصف عرض بارگذاری در نظر گرفته شده است. هندسه و المان‌بندی مدل با PML در شکل (۱۲) نمایش داده شده است.



شکل (۱۲): هندسه و المان‌بندی مدل گسترده- لایه واقع بر نیم‌فضای بینه‌بایت.

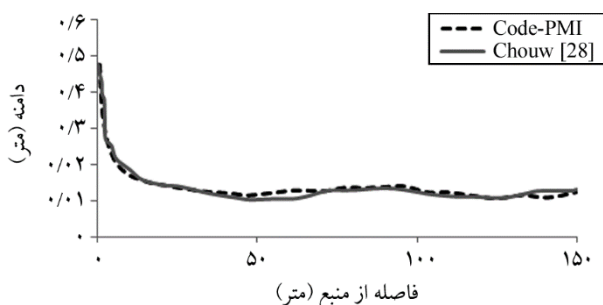
موجک ریکر اعمالی بر نقطه A، همانند بخش قبل می‌باشد. خصوصیات محیط اصلی شامل لایه محدود و نیم‌فضای بینه‌بایت در جدول (۳) ارائه شده است. لایه کاملاً تطبیق یافته نیز به کمک تابع میراکننده‌ی خطی با شیب ۱۰ و میرایی داخلی ۵ درصد، در دو جهت افقی و قائم مدل شده است.

پایش وضعیت تغییر مکان قائم در نقطه A در مرکز سطح شالوده با زمان را می‌توان به‌عنوان معیاری برای کنترل بازگشت موج از مرز در نظر گرفت. نتیجه حاصل از تحلیل در شکل‌های (۱۳ و ۱۴)

ضعف روش اجزای محدود در مدل‌سازی فضای نامحدود با کمک PML برطرف شده و در اینجا از آن برای شبیه‌سازی دامنه بینهایت استفاده شده است. لایه کاملاً تطبیق یافته در ضلع راست و کف مدل همان‌گونه که در شکل (۱۵) نشان داده شده به کار گرفته شده است. لازم به ذکر است یک تابع خطی به عنوان میراکننده در محیط PML با میرایی داخلی ۵ درصد در نظر گرفته شده است.

جابه‌جایی از پیش تعیین شده به صورت موج هارمونیک با دامنه ۰/۴۸ متر و فرکانس ۵ هرتز در عرضی برابر با ۰/۷۵ متر اعمال می‌شود.

نتایج حاصل از تحلیل شامل دامنه جابه‌جایی در فواصل مختلف از منبع بارگذاری برای دو مطالعه به روش اجزای مرزی و اجزای محدود به علاوه PML در شکل (۱۶) ارائه شده است. همان‌گونه که مشخص است نتایج تطابق خوبی داشته و برنامه نوشته شده قادر به مدل‌سازی امواج سطحی نیز می‌باشد.



شکل (۱۵): دامنه جابه‌جایی در فواصل مختلف از منبع بارگذاری.

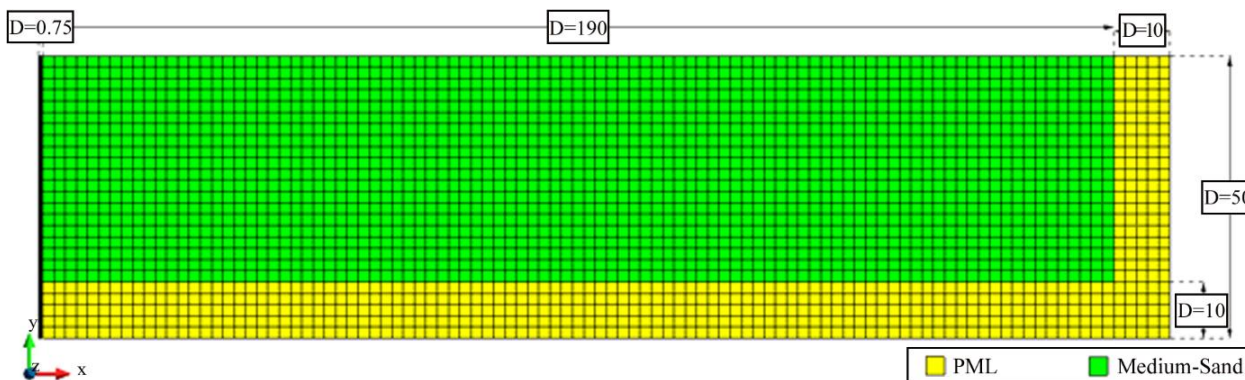
جابه‌جایی از پیش تعیین شده هارمونیک تولید می‌شود و نتایج حاصل با تحقیق چاو و اشمید [۲۸] که با استفاده از روش اجزای مرزی انجام گرفته، مقایسه شده است.

در این مسئله به علت تقارن، تنها نصف هندسه مدل‌سازی شده است که المان‌بندی آن برای شرایط کرنش مسطح در شکل (۱۵) نشان داده شده است. همچنین، خصوصیات محیط در جدول (۴) درج شده است.

جدول (۴): خصوصیات رفتاری در نظر گرفته شده برای نیم‌فضای الاستیک [۲۸].

| مدول برشی (kN/m <sup>2</sup> ) | وزن مخصوص (kN/m <sup>3</sup> ) | نسبت پواسون | میرایی مصالح (%) |
|--------------------------------|--------------------------------|-------------|------------------|
| ۵۳۲۸۰                          | ۱۷/۶۴                          | ۰/۳۳        | ۰                |

با انجام تحلیل‌های متعدد بر روی مدل‌سازی‌های موجود، تعداد المان مناسب برای لایه کاملاً تطبیق یافته به دست آمد که با آنچه در مطالعات باسو و چوپرا [۱۶] مشاهده می‌شود همخوانی دارد؛ بر این اساس تعداد ۵ تا ۸ المان به منظور بهره‌مندی بهینه از عملکرد لایه کاملاً تطبیق یافته توصیه می‌شود. همچنین، همان‌گونه که در بخش ۴-۱ مقاله اشاره شده است برای انتقال دقیق موج در محیط، حداکثر اندازه شبکه‌بندی می‌بایست از یک‌دهم تا یک‌هشتم طول موج مربوط به بزرگ‌ترین مؤلفه فرکانس موج ورودی کوچک‌تر باشد.



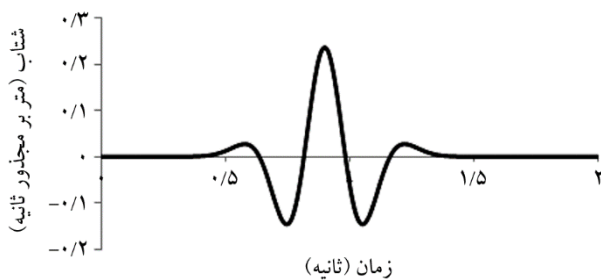
شکل (۱۶): هندسه و المان‌بندی در برنامه برای حل مسئله تشکیل امواج سطحی.

### ۳-۴- مسئله سوم: بررسی بزرگنمایی امواج در دره نیم‌دایره‌ای به

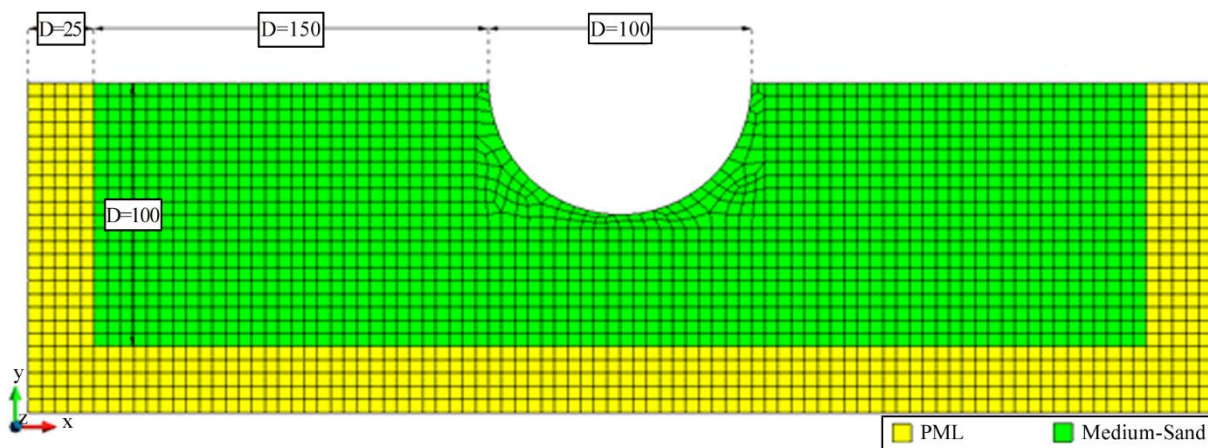
#### کمک PML

در این مسئله به صحت‌سنجی بزرگنمایی حاصل از انتشار موج مهاجم از بستر صلب پرداخته می‌شود. برای این منظور، دره نیم‌دایره واقع در محیط الاستیک که قبلاً توسط وونگ [۲۹] و موسسیان و دراوینسکی [۳۰] به ترتیب به روش تقریب مرزی و ترکیبی اجزای محدود و انتگرال‌گیری مرزی غیرمستقیم مطالعه شده، مدل‌سازی گشته و بزرگنمایی قائم و افقی ناشی از موج مهاجم P و SV از نوع شتاب‌نگاشت ریکر محاسبه خواهد شد. هندسه مدل که به کمک PML در دو طرف آن ساخته می‌شود برای دو حالت تحلیل P و SV در شکل (۱۷) نشان داده شده است. برای انتقال دقیق موج در محیط، حداکثر اندازه المان می‌بایست از یک‌دهم تا یک‌هشتم طول موج مربوط به بزرگ‌ترین مؤلفه‌ی فرکانس موج ورودی کوچک‌تر باشد. عرض PML، به اندازه نصف شعاع دره نیم‌دایره برابر با ۲۵ متر در نظر گرفته شده است.

خصوصیات محیط الاستیک در جدول (۵) ارائه شده است. لایه کاملاً تطبیق یافته نیز به کمک تابع میراکننده‌ی خطی با شیب ۱۰ در راستای افقی و صفر در راستای قائم، به همراه میرایی داخلی ۵ درصد مدل شده است. شتاب‌نگاشت اعمال شده بر کف مدل، به صورت موجک ریکر با فرکانس غالب ۲ هرتز و زمان انتقال (متناظر با حداکثر مقدار) برابر با ۰/۹ ثانیه می‌باشد که در شکل (۱۸) نمایش داده شده است.



شکل (۱۷): تاریخچه زمانی محرک ورودی موجک ریکر در مسئله بزرگنمایی امواج در دره نیم‌دایره‌ای.



شکل (۱۸): هندسه و المان‌بندی محیط شامل دره نیم‌دایره‌ای به همراه PML.

جدول (۵): خصوصیات به کار گرفته شده برای محیط اصلی شامل دره نیم‌دایره.

| مدول الاستیسیته (kN/m <sup>2</sup> ) | دانسیته (kg/m <sup>3</sup> ) | نسبت پواسون | سرعت موج فشاری (m/s) | سرعت موج برشی (m/s) | میرایی مصالح (%) |
|--------------------------------------|------------------------------|-------------|----------------------|---------------------|------------------|
| ۷۶۶۰/۸                               | ۱۸۰۰                         | ۰/۳۳        | ۷۳۲                  | ۴۰۰                 | ۰                |

حائز اهمیت است. لایه کاملاً تطبیق یافته به صورت تئوریک با جذب کامل امواج مهاجم و ممانعت از برگشت آنها به دامنه اصلی محاسبات، می تواند برای تدقیق پاسخ خاک و سازه به کار گرفته شود.

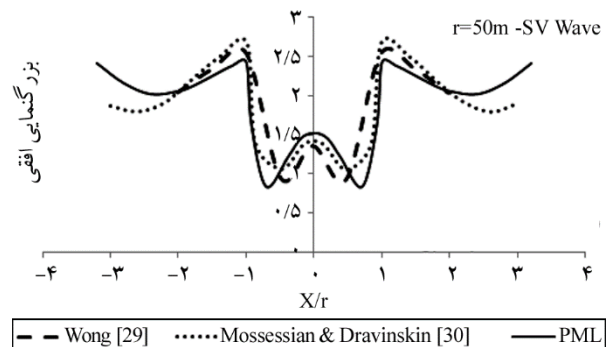
در مطالعه حاضر، روش عددی اجزای محدود به عنوان ابزار محاسباتی انتخاب شده است که برای تحلیل پاسخ دینامیکی یا لرزه ای ساختگاه با استفاده از این روش برنامه ای تهیه شد. برنامه حاضر قادر است انواع شکل های هندسی با تعدد لایه بندی را تحت بارگذاری دینامیکی و یا تحریک لرزه ای در حوزه زمان تحلیل نماید. ویژگی خاص این تحقیق، پیاده سازی لایه کاملاً تطبیق یافته (PML) است که مدل سازی میرایی هندسی را انجام می دهد.

برای پیاده سازی PML در برنامه اجزای محدود، فرمول بندی مربوط به آن بازنویسی و نهایتاً فرم ضعیف معادله حاکم استخراج شد؛ سپس با تفکیک ماتریس های سختی، جرم و میرایی و همچنین بردار نیروی داخلی، المان PML با کمک توابع شکل مربوط به المان چهار گره ای تولید شده است.

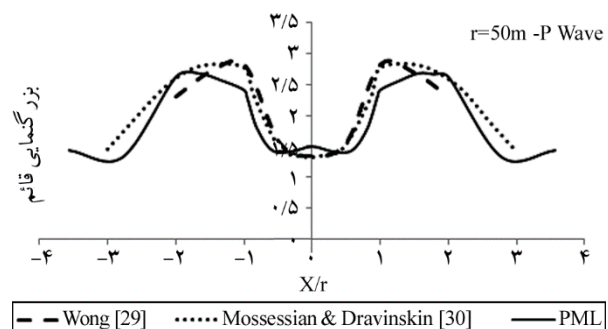
هدف اصلی از پیاده سازی لایه کاملاً تطبیق یافته (PML) در روش عددی اجزای محدود، مدل سازی میرایی هندسی و جلوگیری از بازگشت امواج منعکس شده از مرزهای مدل به دامنه محاسباتی می باشد. به منظور صحت سنجی و اطمینان از کارایی برنامه نوشته شده، تعداد سه مسئله مد نظر قرار گرفته که به بررسی عملکرد PML می پردازد.

در مسئله اول، ارتعاش شالوده صلب بدون جرم واقع بر سه حالت نیم فضای بینهایت، لایه بر روی بستر صلب و لایه بر روی نیم فضای بینهایت با استفاده از PML تحلیل و نتایج با مدل گسترده مقایسه شده است. در مسئله دوم، کارایی PML در مدل سازی انتشار امواج سطحی مورد ارزیابی قرار گرفته است. در مسئله سوم نیز، به بررسی بزرگنمایی امواج در دره نیم دایره ای به کمک PML پرداخته شده است. شایان ذکر است که انتخاب پارامترهای مناسب در مدل سازی لایه کاملاً تطبیق یافته، تأثیر بسزایی در همگرایی و تدقیق پاسخ دارد که می بایست برای هر مسئله مورد بررسی قرار گیرد.

با توجه به مطالعات پیشین، عدد بی بعد فرکانس (فرکانس نرمال شده) به صورت  $\Omega = \frac{\omega r}{\pi C_s}$  فرکانس زاویه ای،  $r$ : شعاع دره،  $C_s$ : سرعت موج برشی در محیط) تعریف می شود که در اینجا به منظور مقایسه با تحقیقات انجام شده، برای  $\Omega = 0.5$  نتایج حاصل از تحلیل در شکل های (۱۹) و (۲۰) ارائه شده است. خط تو پر، بزرگنمایی به دست آمده از مطالعه حاضر را نشان می دهد.



شکل (۱۹): تغییرات بزرگنمایی افقی ناشی از موج SV به دست آمده از تحلیل و مقایسه با پژوهش پیشینان.



شکل (۲۰): تغییرات بزرگنمایی قائم ناشی از موج P به دست آمده از تحلیل و مقایسه با پژوهش پیشینان.

وجود اندکی اختلاف بین نتایج، عمدتاً به نحوه المان بندی در مدل سازی حاضر مربوط می شود که پیش بینی می شود با منظم تر نمودن المان بندی در ناحیه نزدیک دره نیم دایره، این اختلاف رفع شود.

## ۵- نتیجه گیری

لایه کاملاً تطبیق یافته برای مدل سازی میرایی تشعشعی در تحلیل های دینامیکی مورد بررسی قرار گرفت. این موضوع، به خصوص در مسائلی که با پدیده انتشار امواج سروکار دارند

- foundation interaction. *Soil Dynamics & Earthquake Engineering*, **18**, 487-493.
3. Wolf, J.P. (1985) *Dynamic Soil Structure Interaction*. New Jersey, Prentice Hall.
  4. Berenger, J.P. (1994) A perfectly matched layer for the absorption of electromagnetic waves. *J. Comput. Phys.*, **114**, 185-200.
  5. Jiao, D., Jin, J. (2001) Time-domain finite-element modeling of dispersive media. *IEEE Microwave and Wireless Components Letters*, **11(5)**, 220-2.
  6. Kang, J.W., Kallivokas, L.F. (2010) Mixed unsplit-field perfectly matched layers for transient simulations of scalar waves in heterogeneous domains. *Computational Geosciences*, **14(4)**, 623-48.
  7. Nataf, F. (2006) A new approach to perfectly matched layers for the linearized Euler system. *Journal of Computational Physics*, **214(2)**, 757-72.
  8. Martin, R., Komatitsch, D., Ezziani, A. (2008) An unsplit convolutional perfectly matched layer improved at grazing incidence for seismic wave equation in poroelastic media. *Geophysics*, **73(4)**, T51-T61.
  9. Zheng, Y.Q., He, J.Q., and Liu, Q.H. (2001) The application of the perfectly matched layer in numerical modeling of wave propagation in poroelastic media. *Geophysics*, **66(4)**, 1258-1266.
  10. Chew, W.C. and Liu, Q. (1996) Perfectly matched layers for elastodynamics: a new absorbing boundary condition. *Journal of Computational Acoustics*, **4**, 341-359.
  11. Chew, W.C., Jin, J.M. and Michielssen, E. (1997) Complex coordinate stretching as a generalized absorbing boundary condition. *Microw. Opt. Tech. Lett.*, **15(6)**, 363-369.
  12. Chew, W.C. and Weedon, W.H. (1994) A 3-D perfectly matched medium from modified Maxwell's equations with stretched coordinates. *Microw. Opt. Technol. Lett.*, **7**, 599-604.
  13. Collino, F. and Tsogka, C. (2001) Application of the PML absorbing layer model to the linear elastodynamic problem in anisotropic heterogeneous

نتایج زیر از حل مسائل یاد شده حاصل شد:

- ۱- در خصوص ارتعاش شالوده‌های صلب بدون جرم، بررسی روند انتشار موج در محیط نشان می‌دهد برای هر دو نوع بارگذاری قائم و افقی، پس از ایجاد ارتعاش اجباری در محیط و انتشار امواج به سمت مرزها که PML در آنجا قرار گرفته است، جذب و میرا شدن ارتعاشات به صورت کامل انجام می‌گیرد.
- ۲- نتایج مربوط به دامنه جابه‌جایی در فواصل مختلف از منبع بارگذاری برای دو مطالعه به روش اجزای مرزی و اجزای محدود به علاوه PML تطابق خوبی داشته و برنامه نوشته شده قادر به مدل‌سازی امواج سطحی نیز می‌باشد.
- ۳- بزرگنمایی حاصل از انتشار موج مهاجم P و SV از بستر صلب به سمت دره نیم‌دایره واقع در محیط الاستیک، با کمک PML مورد بررسی قرار گرفت که تطابق نسبتاً مناسبی بین نتایج حاصل و مطالعات پیشین به روش تقریب مرزی و ترکیبی اجزای محدود و انتگرال‌گیری مرزی غیرمستقیم وجود دارد.
- ۴- در این پژوهش، مسائل تحت بارگذاری سطحی قائم و افقی و نیز تحریک از کف به صورت افقی و قائم بررسی شده است و نتایج حاصل برای امواج مهاجم مایل در تحقیقات آتی ارائه خواهد شد. با این وجود، بنا بر آنچه در خصوص ویژگی‌های لایه کاملاً تطبیق یافته آمده است، جذب کامل امواج تحت هر زاویه‌ی برخورد امکان‌پذیر می‌باشد که این موضوع در بارگذاری شالوده صلب سطحی نیز که امواج منتشره در محیط دارای زوایای مختلفی هستند قابل مشاهده است.

## مراجع

1. Wilson, E.L. (2002) Three-dimensional static and dynamic analysis of structures a physical approach with emphasis on earthquake engineering. *Computers and Structures*, Inc. Third Edition.
2. Szczesiak, T., Weber, B., and Bachmann, H. (1999) Non-uniform earthquake input for arch dam

perfectly matched layers in the transient analysis of dam-reservoir systems. *Soil Dyn. Earthq. Eng.*, **60**, 51-68.

26. Farzarian, M., Arbabi, F., and Pak, R. (2016) PML solution of longitudinal wave propagation in heterogeneous media. *Earthq. Eng. & Eng. Vib.*, **15**(2), 357-368.

27. Basu, U. and Chopra, A.K. (2004) Perfectly matched layers for transient elastodynamics of unbounded domains. *Int. J. Numer. Method. Eng.*, **59**, 1039-1074.

28. Chouw, N., Le, R., Schmid, G. (1991) 'Impediment of surface waves in soil'. In: *Mathematical and Numerical Aspects of Wave Propagation Phenomena*.

29. Wong, H.L. (1982) Effects of surface topography on the diffraction of P, SV and Rayleigh waves. *Bull. Seismol. Soc. Am.*, **72**, 1167-1183.

30. Mossessian, T.K. and Dravinski, M. (1987) Application of a hybrid method for scattering of P, SV, and Reyleigh waves by near-surface irregularities. *Bull. Seismol. Soc. Am.*, **77**, 1784- 1803.

### واژه‌نامه

|                               |                             |
|-------------------------------|-----------------------------|
| Perfectly Matched Layer (PML) | ۱- لایه کاملاً تطبیقی یافته |
| Extended Mesh                 | ۲- مدل گسترده               |
| Scattering                    | ۳- تفرق                     |
| Interaction                   | ۴- اندرکنش                  |
| Absorbent Boundary Condition  | ۵- شرایط مرزی جاذب          |
| Displacement-Based            | ۶- بر پایه جابه‌جایی        |
| Crank-Nicolson Method         | ۷- روش کرنک نیکلسون         |
| Helmholtz Equation            | ۸- معادله هلمهولتز          |
| Vectorization                 | ۹- بردارسازی                |
| Sparse Matrix                 | ۱۰- ماتریس اسپارس           |
| Ricker                        | ۱۱- ریکر                    |

media. *Geophysics*, **66**(1), 294-307.

14. Becache, E. Fauqueux, S., Joly, P. (2003) Stability of perfectly matched layers, group velocities and anisotropic waves. *J. Comput. Phys.*, **188**, 399-433.

15. Festa, G. and Nielsen, S. (2003) PML absorbing boundaries. *Bulletin of the Seismological Society of America*, **93**(2), 891-903.

16. Basu, U. and Chopra, A.K. (2003) Perfectly matched layers for time-harmonic elastodynamics of unbounded domains theory and finite-element implementation. *Comput. Method. Appl. Mech. Eng.*, **192**, 1337-1375.

17. Appelo, D. and Kreiss, G. (2006) A new absorbing layer for elastic waves. *J. Comput. Phys.*, **215**, 642-660.

18. Harrari, I. and Albocher, U. (2006) Studies of FE-PML for exterior problems of time-harmonic elastic waves. *Comput. Method. Appl. Mech. Eng.*, **195**, 3854-3879.

19. Ma, S. and Liu, P. (2006) Modeling of the perfectly matched layer absorbing boundaries and intrinsic attenuation in explicit finite-element method. *B. Seismol. Soc. Am.*, **96**(5), 1779-1794.

20. Basu, U. (2009) Explicit finite element perfectly matched layer for transient three-dimensional elastic waves. *Int. J. Numer. Method. Eng.*, **77**, 151-176.

21. Liu, J., Ma, J., and Yang, H. (2009) The study of perfectly matched layer absorbing boundaries for SH wave fields. *App. Geophysics*, **6**(3), 267-274.

22. Kim, S. and Pasciak, J.E. (2012) Analysis of Cartesian PML approximation to acoustic scattering problems in  $R^2$ . *Wave Motion*, **49**, 238-257.

23. Lancioni, G. (2011) Numerical comparison of high-order absorbing boundary conditions and perfectly matched layers for a dispersive one-dimensional medium. *Comput. Method. Appl. Mech. Eng.*, **209-212**, 74-86.

24. Panji, M., Kamalian, M., Asgari Marnani, J., and Jafari, M.K. (2013) Transient analysis of wave propagation problems by half-plane BEM. *Geophys. J. Int.*, **194**(3), 1849-1865.

25. Khazaei, A. and Lotfi, V. (2014) Application of



## Radiation Damping Simulation in Finite Elements Method Analysis Using Perfectly Matched Layer (PML)

Mohammad Davoodi<sup>1</sup>, Abbas Pourdeilami<sup>2\*</sup> and Mohammad Kazem Jafari<sup>3</sup>

1. Associate Professor, Geotechnical Engineering Department, International Institute of Earthquake Engineering and Seismology
2. Ph.D. Candidate, Geotechnical Engineering Department, International Institute of Earthquake Engineering and Seismology, \*Corresponding Author, email: a.pourdeilami@iiees.ac.ir
3. Professor, Geotechnical Engineering Department, International Institute of Earthquake Engineering and Seismology

In this research, perfectly matched layer has been implemented in the finite element method to simulate the radiation damping for soil-structure interaction analysis application. The perfectly matched layer (PML) has the ability to absorb and attenuate scattered waves under any angle of incidence and frequency, such that with the minimum dimensions of the modeling and the minimum amount of calculations, high-precision responses can be achieved. In order to time domain dynamic analysis by finite element method, a program is written utilizing MATLAB mathematical language, which is capable of analysis of different geometries, layering and dynamic/seismic loading in models with linear elastic behavior. The present program uses four-noded quadrilateral elements and uses the implicit Newmark method to solve the dynamic equation. The feature of the program is the implementation of PML, which can address the simulation of radiation damping in the finite element method correctly. This is done by rewriting the PML formulation, implementation in the finite element method, and step-by-step verifying the analysis of dynamic problems. First of all, to verify the dynamic analysis performance of the program, three simple examples have been solved, and the results show that they are consistent with existing theories and the literature. Next, using PML, the problem of a rigid massless foundation vibration has been studied. Computing the impedance/compliance functions and comparing them with analytical or semi-analytical approaches existing in the technical texts, the efficiency and the precision of PML for surface loading conditions has been evaluated. In the frequency domain, the results are in good agreement with the previous studies. Besides, comparing the response from the reduced model (using PML) with the expected response from the extended mesh indicates that there is a complete match in the time domain. It is worth noting that this match is achieved while the model dimensions and the volume of data storage have been drastically reduced, but the accuracy of the answers has not varied. This reduction of dimension is such that if PML is located at a distance of up to a quarter of the foundation width, similar responses to larger models can be achieved.

**Keywords:** Perfectly Matched Layer, Radiation Damping, Wave Propagation, Finite Elements Method, Soil-Structure Interaction.