



## شبیه‌سازی و مدل‌سازی نیرو و ارتعاشات فرز دندان پزشکی در لایه‌های مینا و عاج

فاطمه ریاحی<sup>1</sup>، عباس مزیدی<sup>2\*</sup>، محمد مهدی جلیلی<sup>3</sup>، علی مختاری<sup>4</sup>

1- کارشناسی ارشد، مهندسی مکانیک، دانشگاه یزد، یزد

2- استادیار، مهندسی مکانیک، دانشگاه یزد، یزد

3- دانشیار، مهندسی مکانیک، دانشگاه یزد، یزد

4- دانشجوی دکتری، مهندسی مکانیک، دانشگاه یزد، یزد

\* یزد، صندوق پستی 9741-89195، amazidi@yazd.ac.ir

### چکیده

### اطلاعات مقاله

مقاله پژوهشی کامل

دریافت: 13 اسفند 1397

پذیرش: 7 خرداد 1398

ارائه در سایت: دی 1398

### کلیدواژگان:

فرز دندان پزشکی

ضرایب مخصوص برش

ارتعاشات

تیر تیموشنکو

ضخامت براده دینامیکی

پراکندترین عملیات در دندان پزشکی، ترمیم دندان است. در طی این فرایند، دندان پزشک با یک ابزار دورانی که سرعت بسیار بالایی دارد از قسمت پوسیده دندان یا ترمیم‌شدگی‌های آسیب‌دیده براده برداری می‌کند. در حین انجام این عمل تماس ابزار با لایه‌های دندان نیروهایی ایجاد می‌کند که به آن‌ها نیروهای برشی گفته می‌شود. آگاهی از حدود یا مقدار دقیق نیروی برش در کارهای پزشکی از اهمیت بالایی برخوردار است تا آنجا که کارهای بسیاری در این حوزه به اندازه‌گیری نیرو به‌صورت آزمایشگاهی پرداخته‌اند که انجام آن به صرف وقت و هزینه بالایی نیاز دارد. نیروی برش در لایه‌های مختلف دندان متفاوت است و دندان پزشک بازخوردی از اینکه در کدام لایه در حال کار است ندارد. به‌عبارت‌دیگر تشخیص لایه حین عملیات، برای دندان پزشک کاملاً حسی و تجربی و علاوه بر آن یک مسئله چالش‌برانگیز است. موضوع اصلی این پژوهش، شبیه‌سازی نیرو و ارتعاشات فرز دندان پزشکی است. سیگنال‌های ارتعاشات منبع قوی از اطلاعات هستند که می‌توانند برای تشخیص لایه‌های دندان مورد استفاده قرار گیرند. از نقطه نظر نویسندگان، برای اولین بار در این پژوهش، ضرایب مخصوص برش برای دو لایه اصلی دندان با استفاده از نرم‌افزار المان محدود به‌دست آمده است. همچنین، برای اولین بار ارتعاشات و نیرو در دو لایه اصلی دندان با استفاده از تئوری تیر تیموشنکو، معادلات نیرویی فرزکاری و در نظر گرفتن ضخامت براده دینامیکی مورد مقایسه و تحلیل قرار گرفته است. از نتایج این پژوهش می‌توان برای بهبود کیفیت و کارایی عملیات ترمیم دندان و همچنین به‌عنوان مقدمه‌ای برای ساخت یک هندپیس هوشمند استفاده کرد.

## Simulation and modeling of dental bur force and vibration at enamel and dentin layers

Fatemeh Riyahi, Abbas Mazidi\*, Mohammad Mahdi Jalili, Ali Mokhtari

Mechanical Engineering, Yazd University, Yazd, Iran.

\* P.O.B. 89195-9741 Yazd, Iran, amazidi@yazd.ac.ir

### Article Information

Original Research Paper  
Received 3 February 2019  
Accepted 28 May 2019  
Available December 2019

### Keywords:

Dental Bur  
Cutting Force Coefficients  
Vibration  
Timoshenko Beam  
Dynamic Chip Thickness

### Abstract

Tooth restoration is the most frequent operation in dentistry. During this process, the dentist removes chip from carious or damaged restoration part of tooth by a high speed rotating tool. The forces generated due to tool and tooth layers contact are called cutting forces. In medical works, knowing the magnitude of cutting forces is very important, as many efforts has been done in this area to measure those experimentally. However, a lot of time, money, and energy would be require for experimental tests. The cutting force varies at different tooth layers and the dentist has no feedback on which layer is under milling operation (objective layer). In other words, a dentist detects objective layer based on experiments and physical sense during the operations. Consequently, online detection of objective layer is a challenging issue. The main object of current research is the simulation of force and vibration of dental bur. Vibration signals are a powerful source of information that can be used to detect dental layers. To the best author's knowledge, the specific cutting force coefficients for the two main dental layers are obtained for the first time in current study by using finite element software. In addition, for the first time, vibration and force in the two main layers of the tooth are compared and analyzed using the Timoshenko beam theory, the milling force equations and the dynamic chip thickness. The results of this effort can be used to improve the quality and efficiency of dental restoration and to give an initial view on producing an intelligent hand-piece.

## 1- مقدمه

آسیبی به دندان برسد دندان‌پزشک بافت‌های ملتهب دندان را جدا می‌کند. پس از خالی کردن دندان از آلودگی‌ها و ایجاد حفره، دندان با مواد خاصی مانند آمالگام پر می‌شود. این ماده

دندان عضوی غیرهمگن و تشکیل شده از لایه‌های مختلف مینا، عاج و ریشه است. هرگاه به‌دلیل پوسیدگی یا سایر بیماری‌ها

Please cite this article using:

F. Riyahi, A. Mazidi, M. M. Jalili, A. Mokhtari, Simulation and modeling of dental bur force and vibration at enamel and dentin layers, Iranian Journal of Manufacturing Engineering, Vol. 6, No. 8, pp. 43-53, 2019 (in Persian)

برای ارجاع به این مقاله از عبارت ذیل استفاده نمایید:

بافت در بدن انسان است. ساختار مینا اجازه‌ی مقاومت در برابر تنش برشی و نیروهای وارد بر آن را می‌دهد. اگرچه این لایه مدول الاستیسیته بالایی دارد اما طبیعت شکننده، آن را مستعد می‌سازد تا در ناحیه‌هایی که زیر آن عاج نیست دچار شکستگی شود. مینا بخشی بدون حس و حیات است. اگر یک‌بار بخشی از مینا از بین برود، این لایه قادر به جایگزینی یا تولید مجدد بافت‌های ازدست‌رفته نیست. برخلاف مینا، عاج لایه‌ی دارای حیات و قابل ترمیم است. مواد معدنی عاج کمتر از مینا و این لایه سخت‌تر از استخوان است. ترکیب عاج 20 درصد آب، 30 درصد مواد آلی و 50 درصد مواد غیرآلی است [4]. شکل 1 از مرجع [4] لایه‌های دندان را نشان می‌دهد.

### 1-2- فرزندندان پزشکی

فرزها ابزارهای چرخانی با شکل‌ها و ابعاد مختلف هستند که همراه با هندپیس توسط دندان‌پزشک استفاده می‌شوند. این ابزارها برای برش لایه‌های سخت و برداشت بافت‌های پوسیده شده دندان پیش از پرکردن به کار می‌روند و تا سرعت 500 هزار دور بر دقیقه می‌چرخند.

هر فرزندندان پزشکی از سه جزء دنباله، بدنه و سر فرزند تشکیل شده است. یک فرزند باید لبه برنده خوبی داشته باشد و بتواند در مقابل نیروهای اعمالی به بدنه در طی فرایند برش مقاومت کند. تعدادی از فرزندهای دندان‌پزشکی در شکل 2 آورده شده است. در تولید فرزند عمدتاً از فولاد ضدزنگ و تنگستن کاربرد استفاده می‌شود. تنگستن کاربرد یک ماده خیلی سخت و مناسب برای سرعت‌های بسیار بالاست.

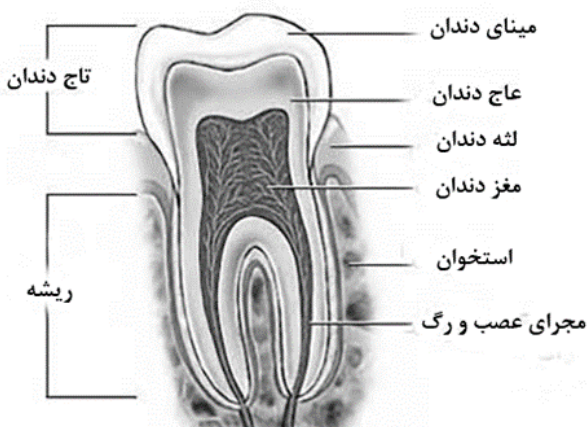


Fig. 1 Tooth layers [4]

شکل 1 لایه‌های دندان [4]

باید قبل از جامد شدن شکل داده شود. خالی کردن دندان فقط برداشت بافت‌های آلوده نیست بلکه گاهی برداشت ماده ترمیمی قبلی دندان نیز لازم است.

مقدار قابل توجهی از زمان یک دندان‌پزشک صرف پرکردن دندان و یا جایگزین کردن پرشدگی‌های قبلی می‌شود. در این فرایندها بیماران اغلب با احساس ناخوشایند درد و ارتعاش درگیر هستند. از این رو توجه به ابزار برش که برای حذف بافت‌های آسیب‌دیده و آماده‌سازی حفره ترمیم استفاده می‌شود و توجه به ارتعاشات ناشی از این ابزار مهم است [1]. ابزاری که به این منظور مورد استفاده قرار می‌گیرد فرزندندان پزشکی نام دارد. فرزندهای دندان پزشکی در شکل‌ها و اندازه‌های متفاوت برای کارهای خاصی وجود دارند.

فرزندندان پزشکی برای چرخش باید در وسیله‌ای به نام هندپیس قرار گیرد. بنابراین هندپیس دندان‌پزشکی وسیله اصلی است که توسط دندان‌پزشک استفاده می‌شود. عمومی‌ترین نوع هندپیس دندان‌پزشکی یک توربین هوا دارد که تا سرعت 500 هزار دور بر دقیقه می‌چرخد. معمولاً این وسیله بدون هیچ بازخوردی استفاده می‌شود [2].

دندان‌پزشکان برای تشخیص مواردی مانند میزان پیشروی در عمق دندان، لایه در حال براده‌برداری و میزان نیرویی که باید به فرزند اعمال کنند از حواس لمسی و بصری (تجربه) کمک می‌گیرند. اگرچه تلاش ایشان بر این است که در تفسیر این حواس به عنوان تنها ابزار مدیریت ترمیم دندان و دیگر فعالیت‌های دندان‌پزشکی روزانه خود خبره باشند با این وجود این حواس منابع بازخوردی کافی و قابل اعتمادی نیستند. سرعت بالای هندپیس و محدودیت فضای دهان از جمله عواملی هستند که روی دقت و قابلیت اطمینان حواس لمسی و بصری تاثیر می‌گذارند [3]. پیشروی زیاد یا اشتباه ابزار در عمق دندان می‌تواند منجر به صدمه جدی به دندان شود. علاوه بر این خستگی دندان‌پزشک به دلیل حرکت‌های تکراری ممکن است به کنترل ابزار آسیب‌زند و با یک حرکت چرخشی کوچک حجم بزرگی از دندان را بر دارد.

### 1-1- آناتومی دندان

دندان عضوی غیر همگن و تشکیل‌شده از لایه‌های متفاوتی است. لایه‌های اصلی که دندان را می‌سازند مینا، عاج و سمنتوم هستند. این لایه‌ها حجم دندان را شکل می‌دهند و ریشه دندان را که یک لایه درونی است در میان می‌گیرند.

مینای دندان بیرونی‌ترین لایه‌ی تاج دندان و سخت‌ترین

گرمایی ناشی از برش سرعت بالا، مکانیزم شکست ابزار و ... تحت تاثیر قرار می‌گیرد.

2. هندسه و جنس دندان: هندسه سطح دندان منحنی است و درون یک دندان لایه‌های متفاوتی وجود دارد.

3. هندسه ابزار: فرزهای دندان‌پزشکی در شکل‌های متنوعی تولید می‌شوند. پرکاربردترین این ابزارها نوع فرز فیشور مستقیم و فرز کروی هستند. شکل و هندسه فرز نیز روی نیروها تاثیر زیادی دارد.

4. حرکت پیش‌بینی نشده فرز: حرکت‌های ناگزیری از بیمار و پزشک باعث برهم‌کنش‌های نامنظم بین ابزار برشی و دندان با محدوده 1 تا 2 میلی‌متر می‌شود.



Fig. 2 Some dental burs and usage of them

شکل 2 چند نمونه فرز دندان‌پزشکی و کاربرد آن‌ها

## 2- شرح مسأله

دندان دارای ساختاری حساس است به طوری که بخش بزرگی از دندان در صورت آسیب هر چند کوچک، نمی‌تواند بافت‌های از دست‌رفته را مجدداً تولید یا جایگزین کند. بنابراین، دقت در ترمیم آن در حوزه دندان‌پزشکی از اهمیت بالایی برخوردار است. این امر مستلزم آگاهی کامل دندان‌پزشک از میزان نیروی برشی لازم برای براده‌برداری هر لایه از دندان می‌باشد. بنابراین، خلق یک هندپیس هوشمند که بتواند موقعیت فرز در دندان و همچنین تغییر لایه را حین فرایند برش تشخیص دهد بسیار سودمند است. هندپیس هوشمند وسیله‌ای است که اطلاعاتی مانند سرعت چرخش، نیرو یا پاسخ ارتعاشی را از نوک ابزار دریافت می‌کند و با توجه به آن‌ها مشخص می‌کند ابزار در کدام لایه دندان قرار دارد تا پزشک متناسب با آن لایه نیروی دست خود را تنظیم کند.

اگرچه در سال‌های اخیر با توجه به ورود میکروفرزکاری به پزشکی و دندان‌پزشکی، کارهایی در حوزه مدل‌سازی تحلیلی نیروی برش در جراحی استخوان و دندان ارائه شده است ولی کمتر کاری را می‌توان یافت که به بررسی تحلیلی ارتعاشات پرداخته باشد و اغلب بررسی ارتعاشات مته دندان‌پزشکی به صورت آزمایشگاهی [1] انجام گرفته است. محاسبات اولیه پیرامون ارتعاشات ناشی از برش در دندان‌پزشکی توسط هنری و پیتون [6] منتشر شد. آن‌ها با به کار بردن دستگاه ضبط برای آشکار کردن ارتعاشات صوتی ناشی از وسایل برش در یک بلوک عاج، مشخصات موج‌های فرکانسی را ضبط کردند. کوچر و همکاران [7] با ترکیب سیگنال ارتعاشی یک دستگاه آلتراسونیک<sup>1</sup> و مجموعه فازی<sup>1</sup>، میزان کاربردی بودن روش

فرز کاربردی قوی‌تر، نرم‌تر و شکننده‌تر از فرز فولادی است. گلوبی کاربردی فرز در معرض شوک ممکن است بشکند در حالی که گلوبی فولادی بیشتر دچار خمش می‌شود. فرزی که به نرمی خم می‌شود، باعث ارتعاشات و بیرون‌پریدگی برش و در نتیجه آسیب‌های ناخواسته به ساختمان دندان می‌شود [5].

## 1-3- برش در دندان‌پزشکی

برش در دندان‌پزشکی با کمک وسیله‌ای با سرعت دورانی بالا معروف به هندپیس و ابزارهایی به نام فرز دندان‌پزشکی انجام می‌شود. برای برداشت بافت از دندان به وسیله ابزار چرخان، دو مکانیزم تغییر شکل پلاستیک و شکستگی وجود دارد. در تغییر شکل پلاستیک، یک تراشه از مینای دندان در لبه برنده ابزار برداشته و یک لایه آغشته از براده تولید می‌شود.

نزدیک‌ترین نوع برش صنعتی به عمل برش دندان فرزکاری است. اگرچه روش‌های دیگری نیز برای برش دندان وجود دارد اما آن روش‌ها به دلیل ساختار ترکیبی دندان، نگه‌داشتن دستی ابزار پیچیده برش‌کاری توسط اپراتورهای مختلف و سختی کنترل پارامترهای متعدد محیطی قابلیت پیش‌بینی بسیار کمتری دارند.

بر طبق اصول فرزکاری، نیروی فرزکاری از برهم‌کنش بین نوک ابزار و سطح قطعه کار می‌آید. بنابراین در مدل نیرویی ما هندسه و دینامیک لبه برنده به جای هندسه و دینامیک کل ابزار مورد توجه است. با توجه به مشخصات دینامیکی فرایند فرزکاری چالش‌های پیش رو به صورت زیر خلاصه می‌شود:

1. دینامیک پیچیده برهم‌کنش: نیروهای برهم‌کنش در طی برش با متغیرهای زیادی مانند سرعت چرخشی ابزار، اثرات

<sup>1</sup>. Ultrasonic

مقایسه کردند که نتایج نزدیک به هم داشت. هامرسم [12] در نرم‌افزار شبیه‌سازی، از یک مته استوانه به‌عنوان ابزار استفاده و نیروی ابزار را در حالت شبیه‌سازی با حالت واقعی مقایسه کرد. او پس از تعریف مدلی ریاضی برای نیروها که مشابه مدل نیرویی فرزکاری معمولی است نیرو را محاسبه و با نیروی به‌دست‌آمده از آزمایش‌های خود مقایسه کرد. به‌این‌ترتیب نیرو در لایه‌های مختلف دندان مشخص شد. وو و همکاران [13] یک مدل بهبود یافته برای محاسبه نیرو بر پایه تئوری سنگ زنی را برای شبیه سازی تعمیر دندان به کار بردند. نزدیک‌ترین نوع برش صنعتی به عمل برش دورانی استخوان فک، سوراخکاری و به عمل برش دندان فرزکاری است.

موضوع اصلی این پژوهش، شبیه‌سازی نیرو و ارتعاشات فرزندندان پزشکی است. سیگنال‌های ارتعاشات منبع قوی از اطلاعات هستند که می‌توانند برای تشخیص لایه‌های دندان مورد استفاده قرار گیرند. از نقطه نظر نویسندگان، برای اولین بار در این پژوهش ضرایب مخصوص برش برای دو لایه اصلی دندان با استفاده از نرم‌افزار المان محدود به‌دست آمده است. هم‌چنین، برای اولین بار ارتعاشات و نیرو در دو لایه اصلی دندان با استفاده از تئوری تیر تیموشنکو، معادلات نیرویی فرزکاری و در نظر گرفتن ضخامت براده دینامیکی مورد مقایسه و تحلیل قرار گرفته است. از نتایج این پژوهش می‌توان برای بهبود کیفیت و کارایی عملیات ترمیم دندان و هم‌چنین به‌عنوان مقدمه‌ای برای ساخت یک هندپیس هوشمند استفاده کرد.

### 3- روش حل و راستی آزمایی آن

#### 3-1- مدل‌سازی ارتعاشات

ارتعاشات عرضی تیرها عموماً بر اساس سه تئوری اویلر برنولی، رایلی و تیموشنکو بررسی می‌شوند. تئوری اویلر برنولی برای تحلیل تیرهای نازک ( $L/d > 10$ ) به کار می‌رود و از اثرات لختی دورانی و تغییر شکل برشی چشم‌پوشی می‌کند. یعنی صفحات عمود بر محور خنثی پس از تغییر شکل همچنان عمود بر محور باقی می‌مانند. تئوری رایلی اثرات لختی دورانی را مورد توجه قرار می‌دهد اما از اثرات تغییر شکل برشی چشم‌پوشی می‌کند. تئوری تیموشنکو هر دو اثر لختی دورانی و تغییر شکل برشی را در نظر می‌گیرد.

تئوری‌های مطرح شده برای ارتعاشات تیرها هرکدام مزایای خاص خود را دارند و با توجه به شرایط تیر، گاهی استفاده از تئوری‌های ساده‌تر توصیه می‌شود اما محققان زیادی از تئوری تیر تیموشنکو استفاده می‌کنند. دلیل این انتخاب، نادیده گرفتن

تشخیص اتوماتیک لایه‌های مختلف دندان را بررسی کردند. نتایج موفقیت‌آمیز بود و امکان استفاده از وسایل تشخیصی و درمانی حین تمرین دندان‌پزشکی را تأیید می‌کرد. ذاکری و ارزان پور [8] با تحلیل فرکانس ارتعاشات توربین هوای هندپیس از روش انتقال فوریه سریع، سعی در تشخیص لایه‌های مختلف دندان داشتند. سان و همکاران [2] به‌منظور ساخت یک هندپیس هوشمند برای تشخیص تغییر خواص مکانیکی لایه در حال فرزکاری، نیروی پیشروی را اندازه‌گیری و ارتباط آن با سرعت دورانی و قسمت خراب‌شده دندان را بررسی کردند. آن‌ها در نتایج کار خود بیان کردند که نیروی پیشروی می‌تواند برای تشخیص تغییر خواص مکانیکی لایه‌های دندان حین عملیات دندان‌پزشکی استفاده شود.

علاوه بر تشخیص لایه، کنترل نیروهای اعمال‌شده به ابزار در طی عملیات ترمیم دندان نیز بسیار مهم است. اعمال نیروی زیاد، موجب افزایش دما و آسیب به بافت‌های مجاور حفره خواهد شد در حالی که نیروی کم ممکن است باعث احساس درد در بیمار شود. بنابراین پزشکان از روش‌های متفاوتی نظیر استفاده از نرم‌افزارهای شبیه‌سازی پزشکی، مدل‌سازی ریاضی و تجهیزات آزمایشگاهی، میزان نیروی اعمالی مناسب در فرآیند ترمیم دندان را شناسایی و تأثیر عوامل مختلف روی آن را بررسی می‌کنند. به عنوان اولین کارها در زمینه تأثیر نیرو بر فرایند دندان‌پزشکی می‌توان به نتایج تحقیقات سورن سان [9] اشاره کرد که با استفاده از یک هندپیس توربین هوا نشان داد که نیروهای بزرگ می‌توانند سرعت دورانی ابزار را تا 50 درصد کاهش دهند. طبق تحقیقات جکسون [10] که با مطالعه دامنه نیروی برش و روند ماشین‌کاری سوراخ‌های قبلی در کاشت لایه‌های مصنوعی (ایمپلنت) به‌دست آمد، معادلات نیروی برش در ماشین‌کاری فلزات برای ماشین‌کاری سرعت‌بالای استخوان و دندان نیز قابل استفاده هستند. شرط اصلی این است که بتوان فرز را به المان‌های برنده کوچکی تقسیم کرد و سپس نیروهای اولیه بر اساس هندسه فرز و خواص لایه‌ای که لبه برنده روی آن است، محاسبه کرد. بنابراین پزشکان با کمک روش مدل‌سازی مکانیکی فرایندهای برش دندان نیز قادر به محاسبه نیروی برشی مورد نیاز خواهند بود. به عنوان مثال مقدم و همکاران [11] با نظر به تئوری‌های فرزکاری فلزات، مدلی از نیروی برشی در شبیه‌سازی سوراخ‌کاری استخوان ارائه دادند. آنها ضخامت براده را با استفاده از دو روش فرمول‌های ماشین‌کاری و مش‌بندی محاسبه کرده و مقدار نیروهای حاصل از دو روش را

<sup>1</sup>. Phase set

$$\begin{aligned} \psi &= \psi_2 - i\psi_1 \\ u &= u_2 + iu_1 \\ F_x &= F_y = 0 \end{aligned} \quad (3)$$

معادلات حرکت به شکل زیر تبدیل می‌شوند:

$$\rho Au_{tt} - kAG(u_{zz} - \psi_z) = 0 \quad (4)$$

$$EI\psi_{zz} - J\psi_{tt} + kAG(u_z - \psi) + 2J\Omega\psi_t i = 0 \quad (5)$$

جداسازی  $u$  در این دو معادله به روش زیر انجام می‌شود.  $\psi_z$  از معادله (4) محاسبه و در مشتق معادله (5) قرار داده می‌شود. به روش مشابه، برای جداسازی  $\psi$  از معادله (5)،  $u_z$  محاسبه و در مشتق معادله (4) قرار داده می‌شود. در نتیجه معادلات (6) و (7) به دست می‌آید:

$$\begin{aligned} EIu_{zzzz} - \left(\frac{\rho EI}{kG} + J\right)u_{zztt} + \frac{\rho J}{kG}u_{tttt} + \rho Au_{tt} \\ - \frac{2J\rho\Omega}{kG}u_{titi} + 2J\Omega u_{zzti} = 0 \end{aligned} \quad (6)$$

$$\begin{aligned} EI\psi_{zzzz} - \left(\frac{\rho EI}{kG} + J\right)\psi_{zztt} + \frac{\rho J}{kG}\psi_{tttt} + \rho A\psi_{tt} \\ - \frac{2J\rho\Omega}{kG}\psi_{titi} + 2J\Omega\psi_{zzti} = 0 \end{aligned} \quad (7)$$

با توجه به همسان بودن دو معادله (6) و (7) حل این معادلات به صورت زیر فرض می‌شود:

$$\begin{aligned} u &= U(z)Q(t) = U_0 e^{idz} e^{i\omega t} \\ \psi &= \psi(z)Q(t) = \Psi_0 e^{idz} e^{i\omega t} \end{aligned} \quad (8)$$

با جایگذاری رابطه (8) در معادلات (6) یا (7) معادله (9) به دست می‌آید:

$$\begin{aligned} EI d^4 - \left(\frac{\rho EI}{kG} + J\right)\omega^2 d^2 + \frac{\rho J}{kG}\omega^4 - \rho A\omega^2 \\ - \frac{2J\rho\Omega}{kG}\omega^3 + 2J\Omega\omega d^2 = 0 \end{aligned} \quad (9)$$

می‌توان معادله (9) را به صورت رابطه (10) نوشت:

$$ad^4 - bd^2 + c = 0 \quad (10)$$

$$a = EI$$

$$b = \left(\frac{\rho EI}{kG} + J\right)\omega^2 - 2J\Omega d^2 \omega$$

$$c = \frac{\rho J}{kG}\omega^4 - \frac{2J\rho\Omega}{kG}\omega^3 - \rho A\omega^2$$

مشاهده می‌شود که  $d$  به فرکانس طبیعی  $\omega$  وابسته است. مقدار  $a$  همیشه مثبت است درحالی‌که  $c$  بسته به مقدار  $\omega$  می‌تواند مثبت یا منفی باشد. برای حل معادله دو حالت مورد توجه است. حالتی که برای ارتعاشات فرکانس پایین و متناسب با  $b > \sqrt{b^2 - 4ac}$  است و حالتی که برای ارتعاشات فرکانس بالا و متناسب با  $b < \sqrt{b^2 - 4ac}$  است. چون ارتعاشات فرزندندان‌پزشکی از نوع فرکانس بالاست در این تحقیق حالت دوم در نظر گرفته می‌شود. در این حالت پاسخ معادله (10) به صورت زیر است:

$$d = \pm \bar{s}_1 \quad \bar{s}_1 = i s_1 = \sqrt{\frac{b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}} \quad (11)$$

تأثیر دو پارامتر مهم در تئوری اویلر برنولی و غیرقابل قبول بودن نتایج پیش‌بینی در تئوری رایلی هم‌زمان با افزایش سرعت دورانی و ضریب رایلی تیر است. علاوه بر این، تئوری تیموشنکو به دلیل داشتن نتایج بسیار نزدیک به حل دقیق الاستیسیته برای مقاطع دایره‌ای ارائه‌شده توسط پوچامر، مورد توجه قرار می‌گیرد.

در مراجع مختلف از تئوری تیرها برای شبیه‌سازی ارتعاش ابزار یا قطعه‌کار ماشین‌کاری استفاده شده است [14]. به طور کلی فرضیات زیر برای مدل‌سازی فرزندندان‌پزشکی استفاده شده است:

1. فرز به عنوان تیر تیموشنکو یک سر ثابت در نظر گرفته شده است.
2. فرز تیری با سطح مقطع دایره و یکنواخت در طول مدل‌سازی شده است.
3. از ارتعاشات پیچشی و طولی صرف‌نظر شده است.
4. فرز با سرعت ثابت  $\Omega$  حول محور طولی خود در حال دوران است.
5. جنس فرز همسان و ایزوتروپ فرض شده است.

با استفاده از اصل هامیلتون معادلات حرکت و شرایط مرزی برای ابزار به دست می‌آید. معادلات حرکت و شرایط مرزی با توجه به مرجع [15] در ادامه آورده شده است:

$$\begin{aligned} EI\psi_{1,zz} - J\psi_{1,tt} - kAG(\psi_1 + u_{2,z}) - 2J\Omega\psi_{2,t} &= 0 \\ EI\psi_{2,zz} - J\psi_{2,tt} + kAG(-\psi_2 + u_{1,z}) + 2J\Omega\psi_{1,t} &= 0 \\ \rho Au_{1,tt} - kAG(-\psi_{2,z} + u_{1,zz}) &= F_x \delta(z-l) \\ \rho Au_{2,tt} - kAG(\psi_{1,z} + u_{2,zz}) &= F_y \delta(z-l) \end{aligned} \quad (1)$$

$$\begin{aligned} EI\psi_{1,z} &= 0 \\ EI\psi_{2,z} &= 0 \\ kAG(\psi_1 + u_{2,z}) &= 0 \\ kAG(-\psi_2 + u_{1,z}) &= 0 \end{aligned} \quad (2)$$

در معادلات بالا ترم‌های  $F_x$  و  $F_y$  نیروهای برشی هستند. چون این نیروها تنها به سر فرز وارد می‌شوند به صورت ضرب در دلتای دیراک آورده شده‌اند. برای حل معادلات حرکت، دو مسأله باید حل گردد. اولین مسأله محاسبه شکل مودهای خمشی تیر یکسر ثابت دورانی تیموشنکو است که به ندرت یافت می‌شود. مسأله دوم محاسبه ضرایب مخصوص برش برای یافتن مقادیر نیروهای فرزکاری دندان است.

### 3-2- محاسبه شکل مود

برای یافتن معادلات فرکانس طبیعی و شکل مودهای خمشی و برشی با فرض زیر:

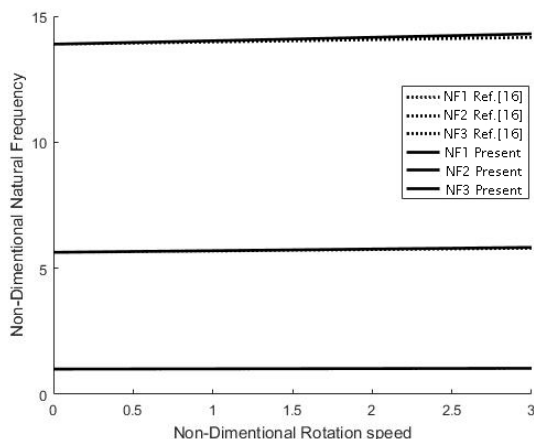


Fig. 3 Natural frequency versus spinning speed of the beam

شکل 3 تغییرات فرکانس طبیعی برحسب سرعت دورانی تیر

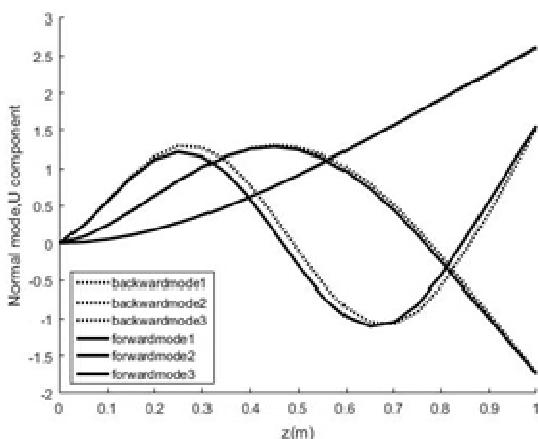


Fig. 4 Bending mode shapes obtained from presented model

شکل 4 شکل مود خمشی پژوهش حاضر

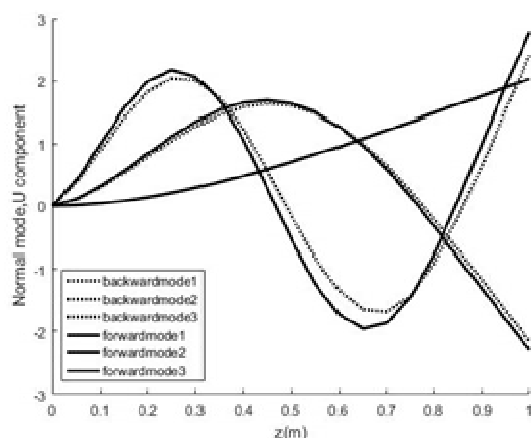


Fig. 5 Bending mode shape presented by Ref. [16]

شکل 5 شکل مود خمشی مرجع [16]

### 3-3- مدل نیروی برشی

روشی که برای مدل‌سازی نیروهای فرزکاری مورد استفاده قرار

با توجه به حل  $d$  مدهای نرمال می‌توانند به صورت زیر بیان

شوند:

$$U(z) = A_1 \cos(\bar{s}_1 z) + A_2 \sin(\bar{s}_1 z) + A_3 \cos(s_2 z) + A_4 \sin(s_2 z) \quad (12)$$

$$\Psi(z) = \bar{A}_1 \sin(\bar{s}_1 z) + \bar{A}_2 \cos(\bar{s}_1 z) + \bar{A}_3 \sin(s_2 z) + \bar{A}_4 \cos(s_2 z) \quad (13)$$

با جایگذاری مدهای نرمال در معادلات (2) و (4) و (5) و به دست آوردن روابط بین ضرایب مجهول، معادله فرکانس طبیعی و شکل مودها به شکل رابطه (14) به دست می‌آید:

$$U(z) = A_4(-\bar{c}_2 \bar{d} \cos(\bar{s}_1 z) - (\bar{c}_2/\bar{c}_1) \sin(\bar{s}_1 z) + \bar{c}_2 \bar{d} \cos(s_2 z) + \sin(s_2 z))$$

$$\Psi(z) = A_4(\bar{c}_1 \bar{c}_2 \bar{d} \sin(\bar{s}_1 z) + \bar{c}_2 \cos(\bar{s}_1 z) + \bar{c}_2^2 \bar{d} \sin(s_2 z) - \bar{c}_2 \cos(s_2 z))$$

$$[\bar{c}_2 s_2 \cos(s_2 l) - \bar{c}_1 \bar{s}_1 \cos(\bar{s}_1 l)] [s_2 \cos(s_2 l) - (\bar{s}_1 \bar{c}_2/\bar{c}_1) \cos(\bar{s}_1 l)] - [\bar{c}_2 \cos(\bar{s}_1 l) - \bar{c}_2 \cos(s_2 l)] + [\bar{c}_2 \bar{s}_1 \sin(\bar{s}_1 l) - \bar{c}_2 s_2 \sin(s_2 l)] [-s_2 \sin(s_2 l) + \bar{s}_1 \sin(\bar{s}_1 l)] - [\bar{c}_2 s \sin(s_2 l) - \bar{c}_1 \sin(\bar{s}_1 l)] = 0 \quad (14)$$

که در آن پارامترهای مجهول از رابطه (15) به دست می‌آیند:

$$\bar{c}_1 = \frac{\rho \omega^2}{kG\bar{s}_1} - \bar{s}_1 \quad \bar{c}_2 = \frac{\rho \omega^2}{kGs_2} - s_2$$

$$\bar{d} = \frac{-s_2 \sin(s_2 l) + \bar{s}_1 \sin(\bar{s}_1 l)}{\bar{c}_2 s_2 \cos(s_2 l) - \bar{c}_1 \bar{s}_1 \cos(\bar{s}_1 l)} \quad (15)$$

برای اطمینان از صحت مدل‌سازی، فرکانس طبیعی و شکل مدهای خمشی برای تیر تیموشنکو یکسر ثابت دورانی رسم و با مرجع [16] مقایسه شده است. پارامترهای فرکانس طبیعی بی‌بعد و سرعت دورانی بی‌بعد به صورت زیر تعریف می‌شوند:

$$\omega_0 = \frac{\omega}{\omega_{10}}, \Omega_0 = \frac{\Omega}{\omega_{10}} \quad (16)$$

که  $\omega_{10}$  اولین فرکانس طبیعی تیر یکسر ثابت تیموشنکو است. در شکل 3 فرکانس‌های طبیعی اول تا سوم به دست آمده از پژوهش حاضر و مرجع [16] برحسب سرعت دورانی تیر رسم و مقایسه شده‌اند. در شکل 4 و شکل 5 شکل مدهای به دست آمده از کار حاضر و شکل مدهای مرجع [16] برای هر دو حالت ارتعاشات فرکانس پایین و ارتعاشات فرکانس بالا آورده شده است. همان‌گونه که از شکل 3 و مقایسه شکل‌های 4 و 5 مشخص است نتایج کار حاضر نزدیکی خوبی با مرجع [16] دارد. بنابراین مدل‌سازی به صورت صحیح انجام شده است. گام بعدی برای حل معادلات و رسیدن به نیروی وارد بر سر ابزار، مدل‌سازی نیروهاست.

آمده از کار تجربی [19] برای جنس AL6061-T6 مقایسه شده است. نتایج این مقایسه در جدول 1 آورده شده است. همان‌گونه که در جدول مشخص است نزدیکی خوبی بین ضرایب مخصوص برش در مرجع [19] و نتایج روش ارائه شده وجود دارد به طوری که در محاسبه  $k_{tc}$  خطا کمتر از 10% و در مورد  $k_{rc}$  خطا کمتر از 5% است. بنابراین برای به دست آوردن ضرایب مخصوص برش برای سایر مواد نیز می‌توان به روش گفته شده اعتماد کرد. به این ترتیب با استفاده از شبیه‌سازی روش المان محدود ضرایب مخصوص برش برای مینا و عاج دندان به دست آمده و در جدول 2 آورده شده است.

### 3-5- حل معادلات

برای حل مسأله مقادیر ویژه، روش گلرکین پرکاربردترین نوع از روش‌های باقی مانده وزنی است. این روش برای تیرهای پایستار و غیرپایستار کاربرد دارد درحالی‌که روش رابلی و رابلی ریتز تنها برای تیرهای پایستار کاربرد دارند. در این روش پاسخ معادلات به شکل یک سری از ضرب تعدادی (مثلاً  $n$ ) تابع زمانی در همان تعداد تابع مکانی در نظر گرفته می‌شود که توابع مکان در تمامی شرایط مرزی صدق می‌کنند و به آن‌ها شکل مود گفته می‌شود.

در این مقاله تعداد شکل مودها 3 در نظر گرفته می‌شود. بنابراین، با ضرب هریک از قسمت‌های معادله (1) در شکل مود مربوط به آن قسمت و انتگرال‌گیری روی طول تیر، دستگاه معادلات مشتق معمولی با 12 معادله به دست می‌آید.

جدول 1 ضرایب مخصوص برش برای AL6061-T6

روش FEM	مرجع [19]	ضریب
769/3	884/7	$K_{tc}$ (N/mm <sup>2</sup> )
274/57	284/28	$K_{rc}$ (N/mm <sup>2</sup> )
25/4	28/7	$K_{te}$ (N/mm)
18/34	21/83	$K_{re}$ (N/mm)

جدول 2 ضرایب مخصوص برش برای مینا و عاج

عاج	مینا	ضریب
667/7	800/1	$K_{tc}$ (N/mm <sup>2</sup> )
206/06	293/46	$K_{rc}$ (N/mm <sup>2</sup> )
4/17	12/96	$K_{te}$ (N/mm)
10/28	5/94	$K_{re}$ (N/mm)

در کار حاضر برای حل عددی معادلات مشتق معمولی از

می‌گیرد روش تحلیلی است. این روش یک سری روابط بین متغیرهای فرایند و نیروهای برش (در جهت‌های مختلف) به کار می‌برد. این روابط با استفاده از مشخصات هندسی فرایند و ضرایب مخصوص برش (که با آزمایش تعیین می‌شوند و برای هر جفت ابزار-قطعه‌کار متفاوت هستند) نیروها را تعیین می‌کنند. برای محاسبه نیروها در فرایند فرزکاری از کار آلتینتاش [17] و پژوهش جلیلی و همکاران [18] استفاده شده است. در این مرجع پس از طی فرایندی محاسباتی و با فرض معین بودن ضرایب برشی مخصوص و ضرایب برشی لبه‌ای مخصوص در جهت مماسی ( $K_{tc}, K_{te}$ ) و شعاعی ( $K_{rc}, K_{re}$ ) نیروها در جهت محورهای مختصات به صورت زیر بیان می‌شوند:

$$\begin{aligned} F_x &= -\frac{N}{2\pi} [\alpha_0(x(t) - x(t - \tau)) + \beta_0(y(t) - y(t - \tau)) + \gamma_0] \\ F_y &= -\frac{N}{2\pi} [\alpha_0'(x(t) - x(t - \tau)) + \beta_0'(y(t) - y(t - \tau)) + \gamma_0'] \end{aligned} \quad (17)$$

همان‌گونه که در شکل 6 نشان داده شده است، جهت مثبت محور x در مسیر تغذیه، محور y عمود بر آن و محور z در راستای محور ابزار و به سمت اسپیندل می‌باشد.

### 3-4- محاسبه ضرایب مخصوص برش

برای رسیدن به ضرایب مخصوص برش دندان ابتدا باید شبیه‌سازی المان محدود انجام شود. یک فرایند شیرتراشی در نرم‌افزار ادونتاج<sup>1</sup> شبیه‌سازی و نیرو روی هر لبه استخراج شده است. سپس از این نیرو میانگین‌گیری، نمودار نیرو-نرخ پیشروی با تقریب خطی رسم و در مرحله پایانی با استفاده از معادله خط این نمودار، ضرایب تعیین شده است.

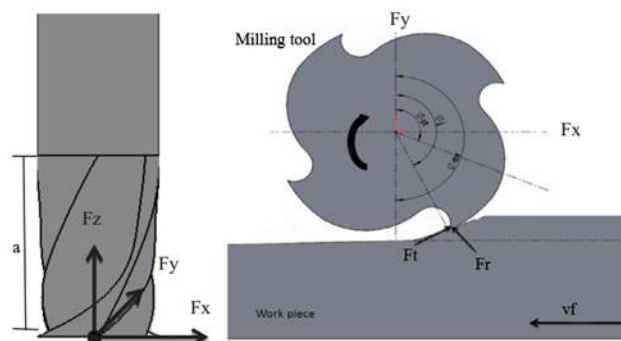


Fig. 6 Direction of coordinate axis and forces [19]

شکل 6 جهت محور مختصات و نیروها [19]

برای اثبات صحت روش المان محدود، ضرایب مخصوص برش AL6061-T6 از این روش محاسبه و با ضرایب به دست

<sup>1</sup> Advantedge

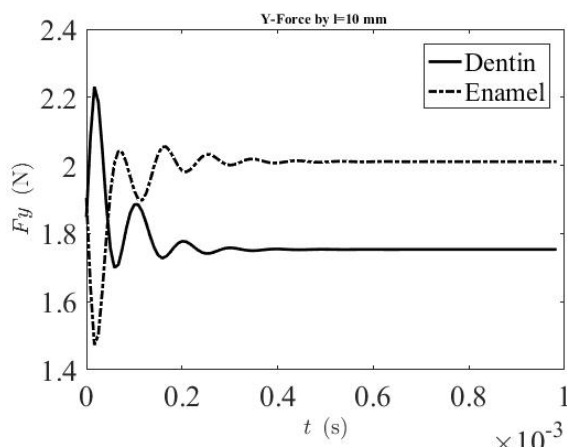


Fig. 8 y-direction cutting force for enamel and dentin layers

شکل 8 نیروی برشی در جهت y برای لایه‌های مینا و عاج

لایه مینا سختی بیشتری نسبت به لایه عاج دارد بنابراین میانگین نیروی لازم برای برش مینا بیشتر از میانگین نیروی لازم برای برش عاج است. مقدار ثابتی که نیروها به آن همگرا شدند معادل با ترم‌های  $\gamma_0$  و  $\gamma'_0$  در معادله نیرویی (17) است.

در تحقیق حاضر ضخامت براده دینامیکی مورد توجه بوده است. یعنی براده تشکیل شده در هر لحظه به جابه‌جایی سر ابزار در آن لحظه و  $\tau$  ثانیه قبل بستگی دارد و این مسأله با عبارات  $x(t) - x(t - \tau)$  و  $y(t) - y(t - \tau)$  در معادله نیرویی (17) نشان داده شده است. تفاوت برجسته این کار با پژوهش‌های پیشین در زمینه نیروی دندان‌پزشکی نیز همین مسأله است. به عنوان مثال هامرسم [12] که از مدل نیروی فرزکاری برای محاسبه نیروی فرایند ترمیم دندان استفاده کرد ضخامت براده را تنها ناشی از حرکت ثابت تیغه در نظر گرفته و میانگین نیرو را برابر 4/5 نیوتون به دست آورده است.

اعمال نیرو روی سر ابزار باعث ارتعاش ابزار می‌شود. دامنه این ارتعاش یا همان پاسخ زمانی ابزار به نیروی وارد بر آن، یکی از پارامترهای به دست آمده در پژوهش حاضر است. شکل 9 پاسخ زمانی ابزار در جهت x و شکل 10 پاسخ زمانی ابزار را در جهت y نشان می‌دهد. همگرا شدن پاسخ‌های زمانی به یک مقدار ثابت نشان دهنده پایداری عملیات ترمیم دندان در یک عمق براده‌برداری مشخص است.

با افزایش عمق براده‌برداری پایداری ابزار دچار تغییر می‌شود. به عبارتی ابزار ناپایداری بیشتری را تجربه می‌کند تا به پایداری برسد و اگر این عمق از حد مجاز فراتر رود ابزار کاملاً ناپایدار می‌شود و امکان شکستن فرز درون دندان وجود دارد.

شکل 11 رفتار ارتعاشی فرز دندان‌پزشکی را در لایه مینا و برای عمق‌های براده‌برداری متفاوت نشان می‌دهند. با افزایش

روش نیومارک استفاده شده است. روش نیومارک برای حل معادلات دیفرانسیل مرتبه دو به صورت مستقیم استفاده می‌شود در حالی که برای استفاده از روش رانگ کوتاه باید معادلات به فضای حالت برده شوند. این کار درجات آزادی و در نتیجه زمان محاسبه را افزایش می‌دهد. پس از به دست آمدن مجهولات، با توجه به مشخص بودن شکل مودها می‌توان پاسخ زمانی و در نتیجه نیروها را به راحتی به دست آورد.

#### 4- بحث و بررسی نتایج

پس از اطمینان از صحت مراحل مدل‌سازی و محاسبه ضرایب، می‌توان نتایج مختلفی از جمله پاسخ زمانی و نیرو در دو لایه مینا و عاج را مورد بررسی قرار داد. جنس فرز تنگستن کاربید و طول آزاد آن 10 mm، قطر فرز 1 mm، سرعت چرخشی ابزار 300 هزار دور بر دقیقه و عمق برش در عملیات ترمیم دندان 0/3 mm فرض شده است.

در اولین گام نیروهای برشی وارد بر سر فرز در دو جهت x و y به عنوان خروجی برنامه متلب گرفته شده است. شکل 7 نمودار مقایسه نیروی پیشروی بین دو لایه مینا و عاج را نشان می‌دهد. شکل 8 نشان‌دهنده مقایسه نیروی برسی در جهت عمود بر مسیر پیشروی بین دو لایه است.

همان‌گونه که از شکل‌ها مشخص است میانگین نیروی برشی  $F_x$  وارد بر ابزار در لایه مینا 5/4 نیوتون و لایه عاج 4/1 نیوتون است. میانگین نیروی برشی  $F_y$  در این دو لایه به ترتیب 1/9 نیوتون و 1/7 نیوتون است. اختلاف میانگین نیرو در دو لایه ناشی از تفاوت سختی دو لایه است و می‌تواند برای تشخیص لایه مورد استفاده قرار گیرد.

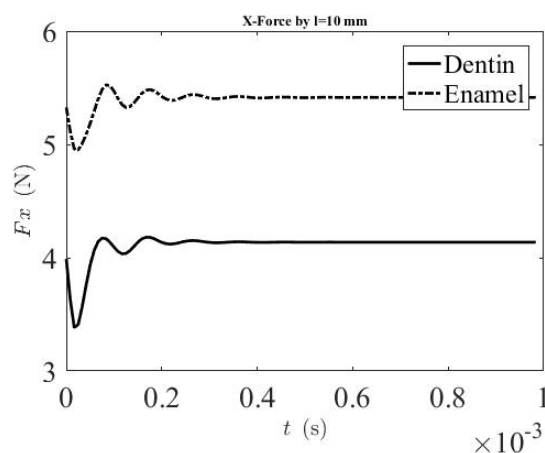


Fig. 7 x-direction cutting force for enamel and dentin layers

شکل 7 نیروی برشی در جهت x برای لایه‌های مینا و عاج



زیادی نوسان خواهد داشت که در نهایت ممکن است ابزار فرز به ناپایداری برسد و به این ترتیب به ابزار برشی و یا دندان و یا هندپیس آسیب برساند.

عمق براده‌برداری فرز دیرتر به پایداری می‌رسد و در شکل 12 مشاهده می‌شود که در عمق براده‌برداری 0/6 میلی‌متر ابزار در این لایه کاملاً ناپایدار می‌شود.

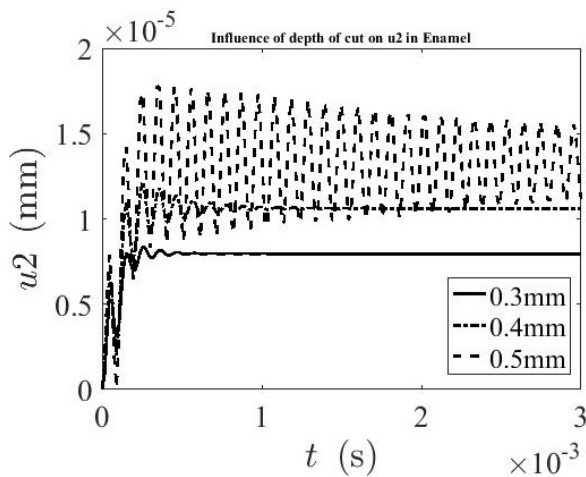
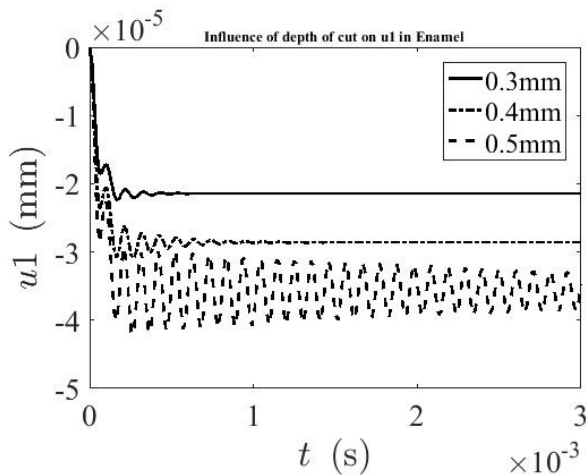


Fig. 11 Influence of depth of cut on vibration response of bur at enamel layer

شکل 11 اثر عمق برش بر پاسخ زمانی فرز در لایه‌ی مینا

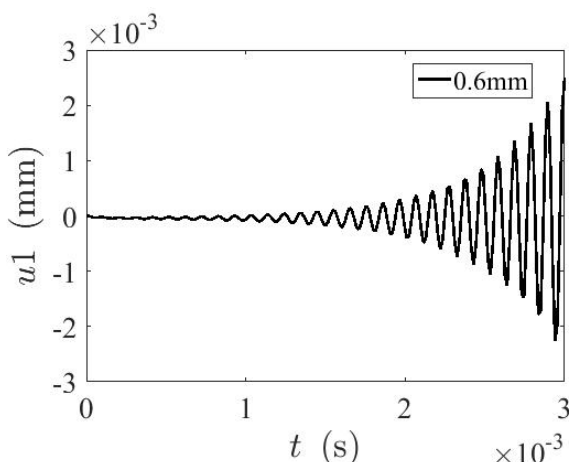


Fig. 12 Vibration response of bur at enamel in depth=0.6mm

شکل 12 پاسخ زمانی فرز در لایه مینا با عمق برش 0/6 میلی‌متر

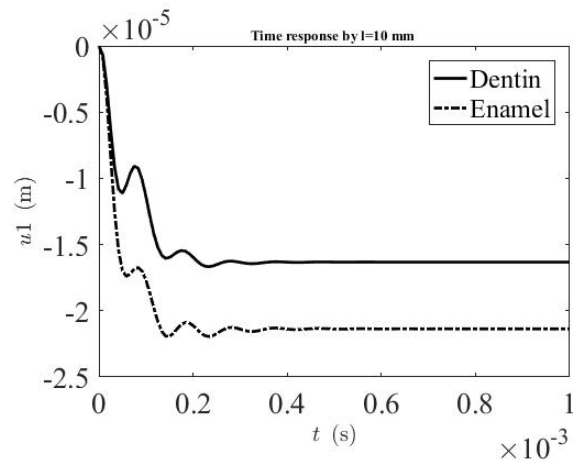


Fig. 9 x-direction vibration response of bur at enamel and dentin layers

شکل 9 پاسخ زمانی فرز در جهت X در لایه‌های مینا و عاج

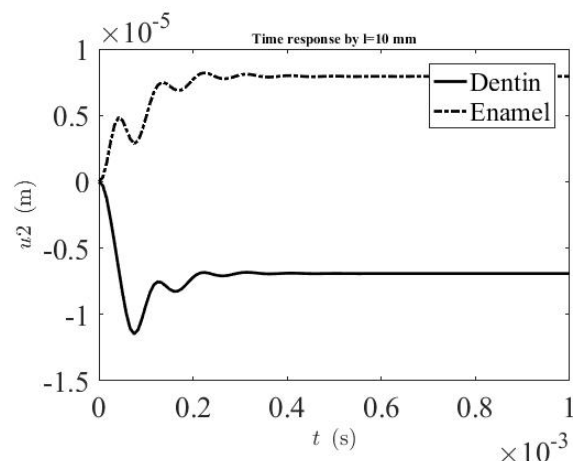


Fig. 10 y-direction vibration response of bur at enamel and dentin layers

شکل 10 پاسخ زمانی فرز در جهت Y در لایه‌های مینا و عاج

این ناپایداری در اثر ارتعاشات ساختاری بین ابزار فرز و دندان در نقطه تماس ایجاد می‌شود. وقتی دندان به منطقه برش وارد می‌شود، در نتیجه‌ی نوسان ابزار، یک سطح موج‌دار ایجاد خواهد شد. وقتی دومین لبه برش وارد می‌شود، آن دندان نیز ارتعاشی داشته و در نتیجه سطح موج‌داری بر جای می‌گذارد. چنانچه موج حاضر و موج قبلی هم‌فاز باشند، ضخامت براده دینامیکی همچنان ثابت باقی خواهد ماند؛ اما چنانچه اختلاف فاز برابر 180 درجه باشد، ضخامت براده دینامیکی بین دو مقدار بیشینه و کمینه تغییر خواهد کرد. با توجه به اینکه نیروی برشی به ضخامت براده وابسته است، بنابراین این نیرو نیز با دامنه

## 5- نتیجه‌گیری

در مرحله اول فرز دندان‌پزشکی به عنوان تیر یک سر ثابت دورانی مدل‌سازی شد و در نتیجه معادلات حاکم بر آن به دست آمد. چون ارتعاشات در فرز تابعی از دو پارامتر مکان و زمان در نظر گرفته شد، معادلات حاکم یک دستگاه معادلات مشتق جزئی را تشکیل دادند. برای حل این دستگاه معادلات از روش نیمه تحلیلی استفاده شد. ابتدا با روش گلرکین دستگاه معادلات به مشتق معمولی تبدیل و سپس با روش‌های عددی حل شد.

عملیاتی که در آن فرز دندان‌پزشکی با سرعت زیاد از دندان براده‌برداری می‌کند اغلب به عنوان سوراخ‌کاری و فرزکاری شناخته می‌شود. با توجه به تشابه هندسی فرز دندان‌پزشکی مورد نظر در این پروژه به فرز انگشتی، این عملیات به عنوان فرزکاری در نظر گرفته و نیروهای برشی حین فرایند فرزکاری به عنوان نیروی عرضی وارد معادلات شد. نیرو در این معادلات تابع مکان و زمان و دارای تأخیر زمانی است. این ویژگی‌ها از تفاوت‌های مهم کار حاضر نسبت به پژوهش‌های پیشین در حوزه پزشکی است.

معادلات نیرویی فرزکاری شامل ضرایبی وابسته به جنس ابزار و قطعه‌کار به اسم ضرایب مخصوص برش هستند. پیش از استفاده از روش عددی، محاسبه این ضرایب و در نتیجه محاسبه نیروهای برشی الزامی است. کار حاضر برای اولین بار ضرایب مخصوص برش را برای مینا و عاج محاسبه کرده است. برای محاسبه این ضرایب ابتدا فرایند فرزکاری معمولی در نرم‌افزار المان محدود ادونتاج شبیه‌سازی و نیروها استخراج شد. با داشتن نیرو و جایگذاری آن در فرمول‌های مربوط، ضرایب مخصوص برش و در نتیجه معادلات نیرویی حساب شد.

با به دست آمدن معادلات نیرویی، معادلات مشتق جزئی حاکم بر ارتعاشات ابزار با استفاده از روش گلرکین به معادلات مشتق معمولی تبدیل و سپس با روش نیومارک حل شد تا نیروهای وارد بر سر ابزار و پاسخ ارتعاشی ابزار به این نیروها به دست آید.

نتایج نشان داد در لایه مینا به دلیل سختی زیاد آن به عنوان سخت‌ترین عضو بدن، نیروی بیشتری به سر ابزار وارد می‌شود. همچنین نیرو در جهت پیشروی ابزار بسیار بیشتر از جهت عمود بر آن است. همگرا شدن نیروها و پاسخ‌های زمانی به یک مقدار ثابت نشان دهنده پایداری عملیات ترمیم دندان در یک عمق براده‌برداری مشخص است. البته بیشتر شدن عمق برش زمان رسیدن به پایداری را افزایش می‌دهد و حتی می‌تواند سبب ناپایداری فرز شود. با توجه به اندازه دامنه ارتعاشات یا

دامنه نیروی برش در هر لایه، می‌توان به فکر ساخت یک هندپیس هوشمند بود که توانایی تشخیص به‌هنگام لایه در حال براده‌برداری را داشته باشد.

## 6- فهرست علائم

$u_1$	خمش نسبت به محور $x$
$u_2$	خمش نسبت به محور $y$
$\psi_1$	زاویه خمش نسبت به محور $x$
$\psi_2$	زاویه خمش نسبت به محور $y$
$E$	مدول الاستیسیته
$G$	مدول برشی
$k$	ضریب تصحیح برشی
$\rho$	چگالی
$I$	ممان سطح مقطع
$J$	ممان اینرسی تیر
$A$	مساحت مقطع
$l$	طول تیر
$F_x$	نیروی برشی در راستای محور $x$
$F_y$	نیروی برشی در راستای محور $y$
$\varphi$	موقعیت زاویه‌ای لبه برنده
$\Omega$	سرعت دورانی ابزار
$N$	تعداد لبه ابزار
$c_f$	نرخ پیشروی
$K_{tc}$	ضریب مخصوص برشی مماسی
$K_{rc}$	ضریب مخصوص برشی شعاعی
$K_{te}$	ضریب مخصوص لبه‌ای مماسی
$K_{re}$	ضریب مخصوص لبه‌ای شعاعی
$\omega$	فرکانس طبیعی
$\omega_0$	فرکانس طبیعی بی بعد
$\omega_{10}$	اولین فرکانس طبیعی تیر
$\Omega_0$	سرعت دورانی بی بعد
$\tau$	تأخیر زمانی

## 7- مراجع

- [1] Ruth Louise Poole, "Vibration of High-speed Dental Handpieces Measured Using Laser Vibrometry," University of Birmingham, 2009.
- [2] H. Sun, A. Lau, Y. Cheo, L. Lin, R. DeLong, and A. Fok, "Relationships between tissue properties and operational parameters of a dental handpiece during simulated cavity preparation.pdf," *J. Dent. Biomech.*, 2013.
- [3] V. Zakeri and S. Arzanpour, "Measurement and analysis of dental handpiece vibration for real-time discrimination of tooth layers," *J. Sel. Areas*

- method for haptic simulation of bone machining, Haptics: Perception,” in *Devices and Scenarios*, 2008, pp. 651–660.
- [12] I.W.J.Hamersma, “Implementation of A Cylindrical Drill in A Haptic Simulation Environment,” Eindhoven University of Technology, 2010.
- [13] J.Wu, D.Wang, C.C.L.Wang, and Y.Zhang, “Toward stable and realistic haptic interaction for tooth preparation simulation,” *J. Comput. Andin. Sci. Eng.*, Vol. 10, No. 2, pp. 1–9, 2010.
- [14] A. Mokhtari, A. Mazidi, and M. M. Jalili, “Investigation of rotary inertial dynamic effects on chatter boundary in milling process using three-dimensional Timoshenko tool model,” Vol. 0, No. 0, pp. 1–18, 2018.
- [15] S. . Choi, C. Pierre, and A. G. Ulsoy, “Consistent Modeling of Rotating Timoshenko Shafts Subject to Axial Loads,” *J. Vib. Acoust.*, Vol. 114, No. 2, pp. 249–259, 1992.
- [16] J. W. Zu and R. P. S. Han, “Natural Frequencies and Normal Beam With General Boundary Conditions,” *JournalofAppliedMechanics*, Vol. 59, pp. 197–204, 1992.
- [17] Y. Altintas, *Manufacturing Automation*. 2012.
- [18] M. M. Jalili, J. Hesabi, and M. M. Abootorabi, “Simulation of forced vibration in milling process considering gyroscopic moment and rotary inertia,” *Int. J. Adv. Manuf. Technol.*, 2016.
- [19] M. Y. Tsai, S. Y. Chang, J. P. Hung, and C. C. Wang, “Investigation of milling cutting forces and cutting coefficient for aluminum 6060-T6,” *Comput. Electr. Eng.*, Vol. 000, pp. 1–11, 2015.
- Bioeng.*, Vol. 1, No. 1, pp. 13–18, 2010.
- [4] P.Zaslansky, A.A.Friesem, and S.Weiner, “Structure and mechanical properties of the soft zone separating bulk dentin and enamel in crowns of human teeth: Insight into tooth function,” *J. Struct. Biol.*, Vol. 153, No. 2, pp. 188–199, 2006.
- [5] K. Hailu, D. Lawoyin, A. Glascoe, and A. Jackson, “Unexpected Hazards with Dental High Speed Drill,” *Dent. J.*, Vol. 5, No. 1, p. 10, 2017.
- [6] E.E.Henry and F.A.Peyton, “Vibration characteristics of the rotating dental instrument,” *J. Dent. Res.*, Vol. 29, No. 5, pp. 601–615, 1950.
- [7] T.Kocher, Strackeljan, and D.Behr, “Feasibility of computer-assisted recognition of different dental hard tissues,” *J. Dent. Res.*, Vol. 79, No. 3, pp. 829–834, 2000.
- [8] V.Zakeri and S.Arzanpour, “Measurement and analysis of dental handpiece vibration for real-time discrimination of tooth layers,” *J. Sel. Areas Bioeng.*, 2010.
- [9] F.M.Sorenson, A.W.Aplin, and K.R.Cantwell, “Thermogenics in cavity preparation using air turbine handpieces-Relationship of heat transferred to rate of tooth structure removal,” *J. Prosthet. Dent.*, Vol. 14, No. 3, pp. 524–532, 1964.
- [10] M.J.Jackson, G.M.Robinson, H.Sein, and W. A. R.Woodwards, “Machining cancellous bone prior to prosthetic implantation,” *J. Mater. Eng. Perform.*, Vol. 14, No. 3, pp. 293–300, 2005.
- [11] M.Moghaddam, A.Nahvi, M.Arbabtafti, and M.Mahvash, “A Physically realistic voxel-based