

طراحی نمودارهای کنترل میانگین و انحراف معیار با نمونه‌گیری چندگانه

زینب لطیفی

مربی، عضو هیئت علمی*، گروه مهندسی برق، دانشگاه صنعتی شهدای هویزه، سوسنگرد، ایران

آسیه ثالثی

مربی، گروه علوم ریاضی و کامپیوتر، دانشگاه شیخ بهایی، اصفهان، ایران

چکیده در کنترل کیفیت آماری، معمولاً تمرکز و پراکندگی مشخصه‌های کیفیت پیوسته در یک فرایند، توأمأ و با کمک دو نمودار بررسی می‌شوند. بدین ترتیب تغییرها در هر یک به صورت همزمان قابل شناسایی خواهند بود. به علت کارایی بالای نمودارهای کنترل توأم میانگین و انحراف معیار با نمونه‌گیری دوگانه در شناسایی سریع تغییرهای میانگین و انحراف استاندارد فرایند، بحث و بررسی در مورد این دسته از نمودارها لازم و ضروری به نظر می‌رسد. در این مقاله، بر پایه‌ی نتایج حاصل از طراحی نمودارهای کنترل توأم میانگین و انحراف معیار با نمونه‌گیری دوگانه، نمودارهای کنترل توأم میانگین و انحراف معیار با نمونه‌گیری سه‌گانه به عنوان مسئله‌ی بهینه‌سازی فرمول‌بندی می‌شوند و برای حل این مسئله، الگوریتم ژنتیک پیش‌نهاد می‌شود.

کلمات کلیدی کنترل کیفیت آماری، مشخصه‌ی کیفیت، نمونه‌گیری چندگانه، مسئله‌ی بهینه‌سازی

۱- مقدمه

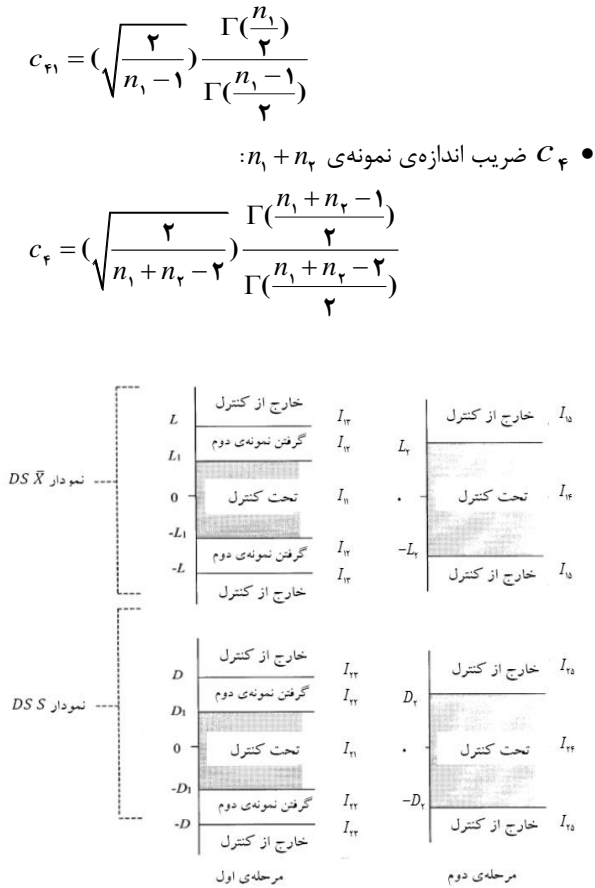
وقتی تعداد مرحله‌های نمونه‌گیری (فراوانی نمونه‌گیری) از یک مرحله بیش‌تر می‌شود، نمودارهای کنترل با نمونه‌گیری چندگانه حساسیت بیش‌تری برای شناسایی تغییرها از خود ارائه می‌دهند. در نمودار \bar{X} با نمونه‌گیری دوگانه (DS²)، که اولین بار توسط کروسدیل معرفی شد [۳]. فرض بر این است که انحراف معیار در کل مسیر کنترل فرایند بدون تغییر باقی بماند که فرض معقولی به نظر نمی‌رسد. نمودار کنترل S با نمونه‌گیری دوگانه به وسیله‌ی هی و گریگوریان معرفی شد تا مکمل خوبی برای نمودار کنترل \bar{X} با نمونه‌گیری دوگانه باشد [۴]. در این مقاله به معرفی، شرح و اجرای نمودارهای کنترل توأم \bar{X} و S با نمونه‌گیری دوگانه و نمودارهای کنترل توأم \bar{X} و S با نمونه‌گیری سه‌گانه (TS³) پرداخته می‌شود. طراحی آماری این گونه نمودارها به صورت مسئله‌ی بهینه‌سازی فرمول‌بندی شده و به وسیله‌ی الگوریتم ژنتیک حل می‌شوند.

در دنیای صنعتی امروز، به دلیل گسترده شدن عرصه‌ی رقابت، افزایش هزینه‌های نیروی انسانی، انرژی و مواد اولیه و نیز ارتقاء سطح آگاهی و توقع مصرف‌کننده نسبت به کیفیت، همواره باید به دنبال یافتن راه‌حل‌های کارا و سودمند در جهت بهبود کیفیت محصول‌ها بود. کنترل آماری فرایند (SPC¹)، ابزاری توانمند برای ایجاد ثبات در فرایند و بهبود کارایی آن از طریق کاهش تغییرپذیری است. هدف نمودارهای کنترل، مخاطب قرار دادن مفهومی به نام پایداری (تحت کنترل آماری) فرایند است [۱]. چنانچه رفتار (تغییرپذیری) متغیر یا متغیرهای خروجی از محدوده‌ی تعیین شده تجاوز نماید و روند یا چرخه‌ی غیرطبیعی از خود نشان دهد، نمودارهای کنترل، هشدارهای لازم را مبنی بر عدم پایداری فرایند خواهند داد [۲].

* (Corresponding author) z.latifi@shhut.ac.ir

۲- بررسی نمودارهای کنترل توأم میانگین و انحراف معیار با نمونه‌گیری دوگانه

تحقیق‌های دادین [۵]، هی و گریگوریان [۶] و هی و همکاران [۷]، باعث پیشرفت چشمگیری در توسعه نمودارهای کنترل توأم \bar{X} و S شد. در تمام این مقاله، فرض شده که نمودارهای کنترل توأم \bar{X} و S با نمونه‌گیری دوگانه، برای کنترل فرایندی که مشاهده‌هایی مستقل از مشخصه‌ی کیفیت مورد نظر X دارند، استفاده می‌شود، همچنین آن‌ها به صورت نرمال با میانگین μ و واریانس σ^2 توزیع شده‌اند. به علاوه این فرض را در نظر می‌گیریم که زمانی که فرایند خارج از کنترل است، یا ناشی از تغییر در میانگین از μ به $\mu_1 = \mu \pm \delta\sigma$ با $\delta > 0$ است، یا ناشی از تغییر در انحراف استاندارد فرایند از σ به $\sigma_1 = \rho\sigma$ با $\rho > 1$ است و یا ناشی از تغییرهای هر دو خواهد بود. نمودارهای کنترل توأم \bar{X} و S با نمونه‌گیری دوگانه در شکل ۱ ترسیم شده است. لازم است که قبل از هر چیزی، ابتدا پارامترهای طراحی نمودار کنترل مورد نظر معرفی شوند.



شکل ۱: نمودارهای کنترل توأم \bar{X} و S با نمونه‌گیری دوگانه

روش اجرای نمودارهای کنترل توأم \bar{X} و S با نمونه‌گیری دو-گانه به‌طور خلاصه در زیر آمده است [۶]:

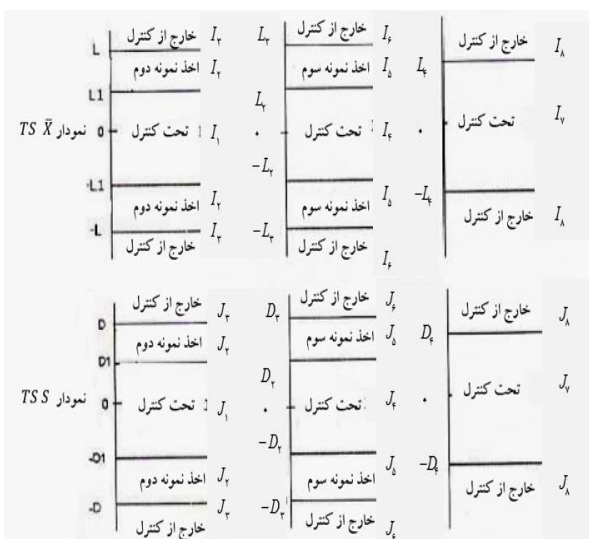
گام اول: نمونه‌ای به اندازه‌ی n_1 می‌گیریم و میانگین نمونه \bar{X}_1 و انحراف معیار نمونه S_1 را محاسبه می‌کنیم.

گام دوم: اگر $\frac{\bar{X}_1 - \mu_0}{\sigma / \sqrt{n_1}}$ در دامنه‌ی $[-L_1, L_1]$ و

در دامنه‌ی $[-D_1, D_1]$ قرار بگیرد، آن‌گاه فرایند تحت کنترل نامیده می‌شود.

- n_1 و n_2 به ترتیب اندازه‌ی اولین و دومین نمونه
- $[-D_1, D_1]$: حدود کنترل مربوط به اولین نمونه‌ی نمودار S با نمونه‌گیری دوگانه، که در درون این حدود، فرایند تحت کنترل نامیده می‌شود.
- $[-D, D]$: حدود کنترل مربوط به اولین نمونه‌ی نمودار S با نمونه‌گیری دوگانه، که در بیرون از این حدود، فرایند خارج از کنترل نامیده می‌شود.
- $[-D_2, D_2]$: حدود مربوط به دومین نمونه‌ی نمودار S با نمونه‌گیری دوگانه، که در درون این حدود، فرایند تحت کنترل نامیده می‌شود.
- $[-L_1, L_1]$: حدود کنترل مربوط به اولین نمونه برای نمودار \bar{X} با نمونه‌گیری دوگانه، که در درون این حدود، فرایند تحت کنترل است.
- $[-L, L]$: حدود کنترل مربوط به دومین نمونه برای نمودار \bar{X} با نمونه‌گیری دوگانه، که در بیرون از این حدود، فرایند خارج از کنترل است.
- $[-L_2, L_2]$: حدود کنترل مربوط به دومین نمونه برای نمودار \bar{X} با نمونه‌گیری دوگانه، که در درون این حدود، فرایند تحت کنترل است.
- C_{τ_1} ضریب اندازه‌ی نمونه‌ی n_1 :

ترتیب هر سه‌ی آن‌ها از توزیع احتمال یکسانی پیروی می‌کنند. نمای کلی طرح با استفاده از شکل ۲ ارائه شده است.



شکل ۲ نمایش نمودارهای کنترل توأم \bar{X} و S با نمونه‌گیری سه‌گانه

قبل از ارائه‌ی دستورالعمل اجرای طرح TS، به معرفی پارامترهای نامعلوم زیر می‌پردازیم:

- n_i : اندازه نمونه در مرحله i ام
- L_1, L : حدود نمودار کنترل \bar{X} در اولین مرحله
- L_2, L_3 : حدود نمودار کنترل \bar{X} در دومین مرحله
- L_4 : حدود نمودار کنترل \bar{X} در سومین مرحله
- D_1, D : حدود نمودار کنترل S در اولین مرحله
- D_2, D_3 : حدود نمودار کنترل S در دومین مرحله
- D_4 : حدود نمودار کنترل S در سومین مرحله

برای اجرای نمودار کنترل توأم \bar{X} و S در طرح TS، علاوه بر پنج مرحله‌ی اول صورت گرفته در نمونه‌گیری دوگانه، در ادامه، سه مرحله‌ی زیر نیز انجام می‌شود [۸]:

مرحله‌ی اول: اگر $\frac{\bar{Y} - \mu_0}{\sigma} \geq L_1$ یا $\frac{\bar{Y} - \mu_0}{\sigma} \leq -L_1$ در بازه‌های $(L_1, +\infty)$ یا $(-\infty, -L_1)$ قرار گیرد، و یا مقدار $\frac{S_{12} - c_f \sigma}{\sigma \sqrt{1 - c_f^2}}$ در بازه‌های

$(L_1, +\infty)$ یا $(-\infty, -L_1)$ قرار گیرد، و یا مقدار $\frac{S_{12} - c_f \sigma}{\sigma \sqrt{1 - c_f^2}}$ در بازه‌های

گام سوم: اگر $\frac{\bar{X}_1 - \mu_0}{\sigma} \geq L_1$ یا $\frac{\bar{X}_1 - \mu_0}{\sigma} \leq -L_1$ در دامنه‌ی $(L_1, +\infty)$ یا $(-\infty, -L_1)$ قرار بگیرد یا $\frac{S_1 - c_{f1} \sigma}{\sigma \sqrt{1 - c_{f1}^2}}$ در دامنه‌ی $(D_1, +\infty)$ و $(-\infty, -D_1)$ قرار بگیرد، بنا بر این فرایند خارج از کنترل است.

گام چهارم: اگر $\frac{\bar{X}_1 - \mu_0}{\sigma} \geq L_1$ یا $\frac{\bar{X}_1 - \mu_0}{\sigma} \leq -L_1$ در فاصله‌ی $[L_1, L_2]$ یا $[-L_2, -L_1]$ (ناحیه‌ی هشدار) قرار بگیرد و یا اگر $\frac{S_1 - c_{f1} \sigma}{\sigma \sqrt{1 - c_{f1}^2}}$ در فاصله‌ی $[D_1, D_2]$ یا $[-D_2, -D_1]$ (ناحیه‌ی هشدار) قرار بگیرد، باید نمونه‌ی دوم را با اندازه‌ی n_2 بگیریم و میانگین نمونه \bar{X}_2 و میانگین نمونه‌ی کل را $\bar{Y} = \frac{n_1 \bar{X}_1 + n_2 \bar{X}_2}{n_1 + n_2}$ و انحراف استاندارد نمونه‌ی کل را $S_{12} = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^2 (n_i - 1) S_i^2}{\sum_{i=1}^2 n_i - 2}} = \sqrt{\frac{(n_1 - 1) S_1^2 + (n_2 - 1) S_2^2}{n_1 + n_2 - 2}}$ محاسبه کنیم.

گام پنجم: اگر $\frac{\bar{Y} - \mu_0}{\sigma} \geq L_1$ یا $\frac{\bar{Y} - \mu_0}{\sigma} \leq -L_1$ در فاصله‌ی $(L_1, L_2]$ یا $[-L_2, -L_1]$ و $\frac{S_{12} - c_f \sigma}{\sigma \sqrt{1 - c_f^2}}$ در فاصله‌ی $[D_1, D_2]$ یا $[-D_2, -D_1]$ قرار بگیرد، بنا بر این، فرایند تحت کنترل خواهد بود، در غیر این صورت فرایند خارج از کنترل است.

۳- بررسی نمودارهای کنترل توأم میانگین و انحراف معیار با نمونه‌گیری سه‌گانه

برای معرفی طرح TS، همان فرض‌هایی که برای نمودار کنترل توأم \bar{X} و S با نمونه‌گیری دوگانه فرض شد، برقرار است. برای طرح TS، این فرض نیز در نظر گرفته می‌شود که در صورت لزوم، سه نمونه می‌تواند بدون اتلاف زمان گرفته شود و به این

در این بخش طراحی آماري نمودارهای کنترل توأم \bar{X} و S با نمونه گیری سه گانه، به شکل یک مسئله بهینه سازی به صورت رابطه ی ۱ فرمول بندی می شود [۸].

$$\text{Min } ARL \quad (1)$$

$$n_1, n_2, n_3, L_1, L_2, L_3, L_4, D_1, D_2, D_3, D_4$$

رابطه ی ۲ به عنوان شرط در مسئله ی بهینه سازی رابطه ی ۱، اعمال می شود:

$$n_1 + n_2 \times P[\text{select } n_2 | \mu = \mu_0; \sigma = \sigma_0] + n_3 \times P[\text{select } n_3 | \mu = \mu_0; \sigma = \sigma_0] \leq N_{\max}$$

$$P[\text{Alarms of (TS}\bar{X}\text{) chart } | \mu = \mu_0; \sigma = \sigma_0] \leq \alpha_{\bar{X}} \quad (2)$$

$$P[\text{Alarms of (TSS) chart } | \sigma = \sigma_0] \leq \alpha_S$$

$$L_1 < L_2, D_1 < D_2, L_3 < L_4, D_3 < D_4$$

از آن جا که، طرح هایی نظیر DS و TS، در مواقعی که کارایی و دقت در کنترل، دارای اهمیت بیش تری نسبت به هزینه می باشند، استفاده می شوند، بنا بر این، ترجیح داده می شود که مسئله ی بهینه سازی طرح TS را بر اساس مینیمم کردن تابع هدف که همان ARL نمودار کنترل توأم \bar{X} و S در طرح TS است، حل شود. به این ترتیب، برای این که نمونه های اخذ شده از حد مورد نظر ما فراتر نروند، مقدار ماکسیمم را برای آن در نظر گرفته ایم و شرط مذکور را به گونه ای طراحی کرده ایم که تعداد نمونه ی اخذ شده در حالت تحت کنترل را در حد کم تر و یا مساوی مقدار ماکسیمم در نظر گرفته شده محدود کند.

لذا تابع هدف مسئله ی بهینه سازی، مینیمم کردن ARL، یعنی متوسط مدت اجرای نمودارهای کنترل توأم \bar{X} و S در شرایط خارج از کنترل فرایند است. در رابطه ی ۲، شرط اول بیان می کند که، اندازه ی نمونه ی نمودارهای توأم \bar{X} و S با نمونه گیری دو گانه و سه گانه هنگامی که فرایند تحت کنترل است، از مقدار مشخص N_{\max} بزرگ تر نیست. اندازه ی نمونه، همان مجموع اندازه نمونه ای است که در مرحله ی اول و مرحله ی دوم گرفته می شود، ضرب در احتمال گرفتن نمونه ی دوم و

$[D_2, +\infty)$ یا $(-\infty, -D_2]$ قرار گیرد، طرح TS نشان دهنده ی خارج از کنترل بودن فرایند است.

مرحله ی دوم: اگر مقدار $\frac{\bar{Y} - \mu_0}{\sigma}$ در داخل بازه ی

$[L_2, L_2]$ یا $[-L_2, -L_2]$ قرار گیرد، و یا اگر مقدار $\frac{S_{12} - c_{\sigma}\sigma}{\sigma\sqrt{1 - c_{\sigma}^2}}$ در داخل بازه ی $[D_2, D_2]$ یا $[-D_2, -D_2]$

واقع شود، نمونه ی سوم را با اندازه ی n_3 انتخاب می کنیم و بر اساس نمونه ی جدید، میانگین نمونه ی \bar{X}_3 و میانگین ادغام شده ی سه نمونه یعنی $\bar{W} = \frac{n_1\bar{X}_1 + n_2\bar{X}_2 + n_3\bar{X}_3}{n_1 + n_2 + n_3}$ همچنین انحراف استاندارد ادغام شده برای سه نمونه

$$S_{PP} = \sqrt{\frac{(n_1 - 1)S_1^2 + (n_2 - 1)S_2^2 + (n_3 - 1)S_3^2}{n_1 + n_2 + n_3 - 3}}$$

خواهد شد.

مرحله ی سوم: اگر $\frac{\bar{W} - \mu_0}{\sigma}$ در بازه ی $[-L_3, L_3]$

قرار گیرد و مقدار $\frac{S_{PP} - c_{\sigma}\sigma}{\sigma\sqrt{1 - c_{\sigma}^2}}$ در داخل فاصله ی

$[-D_3, D_3]$ قرار گیرد، طرح TS نشان می دهد که فرایند تحت کنترل است و در غیر این صورت فرایند خارج از کنترل خواهد بود

$$c_{\sigma} = \left(\sqrt{\frac{2}{n_1 + n_2 + n_3 - 3}} \right) \frac{\Gamma\left(\frac{n_1 + n_2 + n_3 - 2}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{n_1 + n_2 + n_3 - 3}{2}\right)}$$

که ضریبی برای اندازه ی نمونه ی $n_1 + n_2 + n_3$ است و از آن برای محاسبه ی میانگین و واریانس S_{PP} استفاده می شود.

۴- بهینه سازی نمودارهای کنترل توأم میانگین و انحراف معیار با نمونه گیری سه گانه

$$\begin{aligned}
I_1 &= \left[\mu - \frac{L_1\sigma}{\sqrt{n_1}}, \mu - \frac{L_1\sigma}{\sqrt{n_1}} \right], \\
I_r &= \left[\mu - \frac{L_r\sigma}{\sqrt{n_1}}, \mu - \frac{L_r\sigma}{\sqrt{n_1}} \right] \\
\cup &\left[\mu + \frac{L_1\sigma}{\sqrt{n_1}}, \mu + \frac{L_r\sigma}{\sqrt{n_1}} \right], \\
I_r &= \left[\mu - \frac{L_r\sigma}{\sqrt{n_1+n_r}}, \mu + \frac{L_r\sigma}{\sqrt{n_1+n_r}} \right], \\
I_f &= \left[\mu - \frac{L_f\sigma}{\sqrt{n_1+n_r}}, \mu - \frac{L_f\sigma}{\sqrt{n_1+n_r}} \right] \\
\cup &\left[\mu + \frac{L_r\sigma}{\sqrt{n_1+n_r}}, \mu + \frac{L_f\sigma}{\sqrt{n_1+n_r}} \right] \\
I_\delta &= \left[\mu - \frac{L_\delta\sigma}{\sqrt{n_1+n_r+n_\delta}}, \mu + \frac{L_\delta\sigma}{\sqrt{n_1+n_r+n_\delta}} \right],
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
J_1 &= \left[c_{f1}\sigma - D_1\sigma\sqrt{1-c_{f1}^2}, c_{f1}\sigma + D_1\sigma\sqrt{1-c_{f1}^2} \right], \\
J_r &= \left[c_{f1}\sigma - D_r\sigma\sqrt{1-c_{f1}^2}, c_{f1}\sigma - D_r\sigma\sqrt{1-c_{f1}^2} \right] \\
\cup &\left[c_{f1}\sigma + D_1\sigma\sqrt{1-c_{f1}^2}, c_{f1}\sigma + D_r\sigma\sqrt{1-c_{f1}^2} \right], \\
J_r &= \left[c_f\sigma - D_r\sigma\sqrt{1-c_f^2}, c_f\sigma + D_r\sigma\sqrt{1-c_f^2} \right], \\
J_f &= \left[c_f\sigma - D_f\sigma\sqrt{1-c_f^2}, c_f\sigma - D_f\sigma\sqrt{1-c_f^2} \right] \\
\cup &\left[c_f\sigma + D_r\sigma\sqrt{1-c_f^2}, c_f\sigma + D_f\sigma\sqrt{1-c_f^2} \right], \\
J_\delta &= \left[c_{ff}\sigma - D_f\sigma\sqrt{1-c_{ff}^2}, c_{ff}\sigma + D_f\sigma\sqrt{1-c_{ff}^2} \right]
\end{aligned}$$

شرط‌های دیگر مسئله‌ی بهینه‌سازی، در رابطه با خطای نوع اول نمودار کنترل توأم \bar{X} و S در طرح TS است. میزان دقت در این شرط‌ها، تحت کنترل مجری طرح است. به این ترتیب که وی می‌تواند با انتخاب مقادیر مختلف برای $\alpha_{\bar{X}}$ و α_S ، که به-عنوان حد بالای احتمال خطای نوع اول برای نمودار کنترل توأم \bar{X} و S در طرح TS به شمار می‌روند و از طرفی در شرط‌های مسئله‌ی بهینه‌سازی استفاده شده‌اند، مقدار دقت موردنظر را

همچنین اندازه‌ی نمونه در مرحله‌ی سوم ضرب در احتمال گرفتن نمونه‌ی سوم.

همچنین، در رابطه‌ی ۲، شرط‌های دوم و سوم بیان می‌کنند که، احتمال اعلام هشدار، بزرگ‌تر از $\alpha_{\bar{X}}$ در نمودار \bar{X} با نمونه-گیری سه‌گانه، و بزرگ‌تر از α_S برای نمودار S با نمونه‌گیری سه‌گانه نیست. علاوه بر این، شرط‌های بیان شده در رابطه ۲، کران‌های پایین و بالای نمودار را نیز روی D_f, D_r, D_δ ، D_1, D_r, D_f, D_δ ، L_1, L_r, L_f, L_δ و L وضع می‌کنند. از طرفی احتمال رفتن به مرحله‌ی دوم را می‌توان به‌صورت رابطه‌ی ۳ نوشت:

$$\begin{aligned}
&P(\bar{X}_1 \in I_1)P(S_1 \in J_r) \\
&+ P(\bar{X}_1 \in I_r)P(S_r \in J_r) \\
&+ P(\bar{X}_1 \in I_f)P(S_f \in J_1)
\end{aligned} \quad (3)$$

و احتمال رفتن به مرحله‌ی سوم به صورت رابطه‌ی ۴ خواهد بود:

$$\begin{aligned}
&P(\bar{Y} \in I_r)P(S_{1r} \in J_f) \\
&+ P(\bar{Y} \in I_f)P(S_{1r} \in J_f) \\
&+ P(\bar{Y} \in I_\delta)P(S_{1r} \in J_r)
\end{aligned} \quad (4)$$

فاصله‌های I و J به‌کار رفته در رابطه‌های ۳ و ۴ به‌صورت زیر می‌باشند [۹]:

در رابطه‌های ۷ و ۸، $f(\cdot)$ تابع چگالی احتمال نرمال \bar{X} و $\varphi(\cdot)$ تابع چگالی نرمال استاندارد می‌باشد. لازمه‌ی محاسبه‌ی مقدار $P_{\alpha\bar{X}}$ در رابطه‌ی ۸، به‌دست آوردن احتمال حالتی است که \bar{X}_1 حاصل از نمونه‌ی اول در بازه‌ی I_τ قرار گیرد، و به این ترتیب اجرای طرح به مرحله‌ی دوم برود و مقدار محاسبه شده‌ی \bar{Y} در مرحله‌ی دوم در بازه‌ی I_τ قرار بگیرد و تصمیم‌گیری به بعد از گرفتن نمونه‌ی سوم موکول شود. سپس در مرحله‌ی سوم مقدار \bar{W} محاسبه شده در داخل بازه‌ی I_δ واقع شود. به این معنا که در مرحله‌ی اول و دوم مقادیر محاسبه شده در داخل نواحی هشدار قرار گیرد و در مرحله‌ی سوم تحت کنترل بودن فرایند تأیید شود. احتمال قرار گرفتن \bar{W} در بازه‌ی I_δ را بر روی مقدار \bar{Y} شرطی می‌کنیم. زیرا اگر \bar{Y} در طرح محاسبه شده باشد، به‌طور مستتر حاوی این معناست که در مرحله‌ی اول، \bar{X}_1 در ناحیه‌ی هشدار واقع شده است. بنا بر این $P_{\alpha\bar{X}}$ به صورت رابطه‌ی ۹ در می‌آید [۸]:

$$\begin{aligned}
 P_{\alpha\bar{X}} &= \int_{y \in I_\tau} P[\bar{W} \in I_\delta | \bar{Y} = y] f(y) dy \\
 &= \int_{z \in I_\tau^*} P[\bar{W} \in I_\delta | Z_\tau = z] \varphi(z) dz \\
 &= \int_{z \in I_\tau^*} \left[\Phi\left[\frac{c_\tau L_\tau + \delta c_\tau r_\tau}{\lambda} - \frac{\sqrt{n_1 + n_\tau}}{\sqrt{n_\tau}} z\right] \right. \\
 &\quad \left. - \Phi\left[-\frac{c_\tau L_\tau + \delta c_\tau r_\tau}{\lambda} - \frac{\sqrt{n_1 + n_\tau}}{\sqrt{n_\tau}} z\right] \right] \varphi(z) dz, \quad (9) \\
 I_\tau^* &= \left[\frac{1}{\lambda}(\sqrt{n_1 + n_\tau} \delta - L_\tau), \frac{1}{\lambda}(\sqrt{n_1 + n_\tau} \delta - L_\tau) \right] \\
 &\cup \left[\frac{1}{\lambda}(\sqrt{n_1 + n_\tau} \delta + L_\tau), \frac{1}{\lambda}(\sqrt{n_1 + n_\tau} \delta + L_\tau) \right]
 \end{aligned}$$

برای محاسبه‌ی خطای نوع اول و نوع دوم برای نمودار کنترل S در طرح TS نیز به دانستن مقادیر احتمال‌های تحت کنترل بودن فرایند توسط نمودار کنترل S، در مراحل مختلف طرح TS نیاز داریم. احتمال تحت کنترل بودن فرایند توسط نمودار کنترل S در طرح TS است و طبق رابطه‌ی ۱۰ محاسبه می‌شود:

$$\begin{aligned}
 P_{\alpha S} &= P_{\alpha_1 S} + (P_{\alpha_2 S} | \text{go to second part}) \\
 &\quad + (P_{\alpha_3 S} | \text{go to third part}) \quad (10)
 \end{aligned}$$

تعیین کند. α و β کلی برای طرح TS به صورت رابطه‌ی ۵ محاسبه می‌شود:

$$\begin{aligned}
 \alpha &= \alpha_{\bar{X}} + \alpha_S - \alpha_{\bar{X}} \alpha_S \\
 \beta &= \beta_{\bar{X}} \beta_S \quad (5)
 \end{aligned}$$

همچنین در این طرح، $P_{\alpha\bar{X}}$ به صورت رابطه‌ی ۶ محاسبه می‌شود:

$$\begin{aligned}
 P_{\alpha\bar{X}} &= P_{\alpha_1 \bar{X}} + (P_{\alpha_2 \bar{X}} | \text{go to second part}) \\
 &\quad + (P_{\alpha_3 \bar{X}} | \text{go to third part}) \quad (6)
 \end{aligned}$$

که با قرار گرفتن \bar{X}_1 در بازه‌ی I_1 حاصل می‌شود و $P_{\alpha_1 \bar{X}}$ یعنی، احتمال این‌که فرایند در مرحله‌ی دوم توسط نمودار \bar{X} طرح TS تحت کنترل تشخیص داده شود که برابر است با احتمال این‌که \bar{Y} محاسبه شده در مرحله‌ی دوم داخل بازه‌ی I_τ بیفتد، به شرط آن‌که میانگین حاصل از نمونه‌ی اول در داخل بازه‌ی I_τ قرار گرفته باشد، به صورت رابطه‌ی ۷ و ۸ محاسبه می‌شوند:

$$\begin{aligned}
 P_{\alpha_1 \bar{X}} &= P[\bar{X}_1 \in I_1] \\
 &= \Phi\left[\frac{1}{\lambda}(\sqrt{n_1} \delta + L_1)\right] \\
 &\quad - \Phi\left[\frac{1}{\lambda}(\sqrt{n_1} \delta + L_1)\right] \quad (7)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 P_{\alpha_2 \bar{X}} &= \int_{x \in I_\tau} P[\bar{Y} \in I_\tau | \bar{X}_1 = x] f(x) dx \\
 &= \int_{z \in I_\tau^*} P[\bar{Y} \in I_\tau | Z_1 = z] \varphi(z) dz \\
 &= \int_{z \in I_\tau^*} \left\{ \Phi\left[\frac{L_\tau + r\delta}{\lambda} - \frac{\sqrt{n_1}}{\sqrt{n_\tau}} z\right] \right. \\
 &\quad \left. - \Phi\left[\frac{-L_\tau + r\delta}{\lambda} - \frac{\sqrt{n_1}}{\sqrt{n_\tau}} z\right] \right\} \varphi(z) dz, \quad (8)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 I_\tau^* &= \left[\frac{1}{\lambda}(\sqrt{n_1} \delta - L_1), \frac{1}{\lambda}(\sqrt{n_1} \delta - L_1) \right] \\
 &\cup \left[\frac{1}{\lambda}(\sqrt{n_1} \delta + L_1), \frac{1}{\lambda}(\sqrt{n_1} \delta + L_1) \right]
 \end{aligned}$$

هنگامی که تغییری در انحراف استاندارد فرایند رخ دهد، احتمال این که در مرحله اول، فرایند توسط نمودار S تحت کنترل اعلام

که $P_{\alpha_{iS}}$ احتمال تحت کنترل بودن فرایند در مرحله i ام است. در محاسبه $P_{\alpha_{iS}}$ برای رسیدن به توزیع χ^2 دو، در ابتدا تبدیل‌هایی روی S_i مطابق رابطه ۱۱ انجام می‌دهیم:

$$\begin{aligned} X_1 &= \frac{(n_1-1)S_1^2}{\sigma_1^2} \square \chi_{n_1-1}^2, \\ X_2 &= \frac{(n_2-1)S_2^2}{\sigma_1^2} \square \chi_{n_2-1}^2 \\ X_3 &= \frac{(n_3-1)S_3^2}{\sigma_1^2} \square \chi_{n_3-1}^2, \\ X_4 &= \frac{(n_1+n_2-2)S_{12}^2}{\sigma_1^2} \square \chi_{n_1+n_2-1}^2 \end{aligned} \quad (11)$$

شود برابر است با احتمال این که مقدار محاسبه شده S_1 در مرحله اول، در بازه مرکزی J_1 قرار بگیرد مطابق رابطه ۱۲:

$$P_{\alpha_{iS}} = \int_{x_1 \in J_1^*} \left\{ \int_{x_2 \in [A, B]} \frac{x_2^{\frac{(n_2-1)}{2} - 1} e^{-\frac{x_2}{\sigma_1^2}}}{\sigma_1^{\frac{(n_2-1)}{2}} \Gamma(\frac{n_2-1}{2})} dx_2 \right\} dx_1,$$

$$\frac{x_1^{\frac{(n_1-1)}{2} - 1} e^{-\frac{x_1}{\sigma_1^2}}}{\sigma_1^{\frac{(n_1-1)}{2}} \Gamma(\frac{n_1-1}{2})} dx_1,$$

(۱۳)

$$J_1^* = \left[\frac{(n_1-1)}{\lambda^2} (c_{f1} \sigma - D \sigma \sqrt{1-c_{f1}^2})^2, \right.$$

$$\left. \frac{(n_1-1)}{\lambda^2} (c_{f1} \sigma - D_1 \sigma \sqrt{1-c_{f1}^2})^2 \right]$$

$$\cup \left[\frac{(n_1-1)}{\lambda^2} (c_{f1} \sigma + D_1 \sigma \sqrt{1-c_{f1}^2})^2, \right.$$

$$\left. \frac{(n_1-1)}{\lambda^2} (c_{f1} \sigma + D \sigma \sqrt{1-c_{f1}^2})^2 \right]$$

$$P_{\alpha_{iS}} = \int_{x_1 \in J_1^*} \frac{1}{\sigma_1^{\frac{(n_1-1)}{2}} \Gamma(\frac{n_1-1}{2})} x_1^{\frac{(n_1-1)}{2} - 1} e^{-\frac{x_1}{\sigma_1^2}} dx_1,$$

$$J_1^* = \left[\frac{(n_1-1)}{\lambda^2} (c_{f1} \sigma - D_1 \sigma \sqrt{1-c_{f1}^2})^2, \right. \quad (12)$$

$$\left. \frac{(n_1-1)}{\lambda^2} (c_{f1} \sigma + D_1 \sigma \sqrt{1-c_{f1}^2})^2 \right]$$

احتمال این که در مرحله دوم، تحت کنترل بودن فرایند، توسط نمودار کنترل S در طرح TS اعلام شود برابر است با احتمال این که در مرحله دوم S_{12} در داخل بازه J_2 واقع شود، به شرط آن که S_1 در مرحله اول در بازه J_1 قرار گیرد. مقدار این احتمال، طبق رابطه ۱۳ محاسبه می‌شود:

اما احتمال تحت کنترل بودن فرایند در مرحله سوم برابر است با احتمال آن که در مرحله اول به واسطه قرار گرفتن مقدار S_1 در بازه J_2 به مرحله دوم رفته باشیم و پس از آن در مرحله دوم نیز S_{12} در بازه J_4 واقع شود و ما مجبور به گرفتن نمونه سوم باشیم و سپس در مرحله سوم S_{pp} حاصل، در داخل بازه مرکزی یعنی J_5 قرار گیرد؛ مطابق رابطه ۱۴:

یک متغیره \bar{X} و S با بیش از یک مرحله نمونه‌گیری نیز تعمیم داد. همچنین این نمودارها بهتر است زمانی که دقت نسبت به هزینه در اولویت قرار دارد، مورد استفاده قرار گیرند.

مراجع

[۱] مونتگومری، داگلاس سی (۱۹۹۸). کنترل کیفیت آماری. رسول نورالسنا، مترجم (۱۳۷۷). نوبت شانزدهم، تهران، انتشارات دانشگاه علم و صنعت ایران.

[۲] بامنی مقدم، محمد (۱۳۸۵). کنترل کیفیت آماری. تهران، انتشارات دانشگاه پیام نور.

[3] Croasdale, P. (1974). *Control Charts for a Double Sampling scheme Based on Average Production Run Lengths. International Journal of Production Research*, Vol (12), 585-592.

[4] He, D., & Grigoryan, A. (2010). *An Improved Double Sampling S-chart, International Journal of Production Research*, Vol (41), 2663-2679.

[5] Daudin, J.J. (1992). *Double Sampling \bar{X} Charts. Journal of Quality Technology*, Vol (24), 78-87.

[6] He, D., & Grigoryan, A. (2015). *Joint Statistical Design of Double Sampling \bar{X} and S Charts. European Journal of Operational Research*, Vol (168), 122-142.

[7] He, D., Grigoryan, A., & Sigh, M. (2013). *Design of Double and Triple-Sampling \bar{X} Control Charts Using Genetic Algorithms. International Journal of Production Research*, Vol (40), 1387-1404.

[8] Bateni, N., & Hamadani, A. Z. (2011). *Computation of the Probability of a Process Being in Control at the Third Stage for the TS \bar{X} Chart. International Journal of Production Research*, Vol (47), 7069-7073.

[9] Woodall, W.H., & Montgomery, D.C. (1999). *Research Issues and Ideas in Statistical Process Control. Journal of Quality Control*, Vol (31), 376-386.

[10] Rao, S.S. (1996). *Engineering Optimization: Theory and practice*. New York: John Wiley and Sons.

$$P_{\alpha\gamma S} = \int_{x_f \in J_f^*} \left[\int_{x_f \in [C,D]} \frac{x_f^{\frac{(n_f-1)}{2}} e^{-\frac{x_f}{2}}}{\Gamma(\frac{n_f-1}{2})} dx_f \right] \frac{x_f^{\frac{(m+n_f-2)}{2}} e^{-\frac{x_f}{2}}}{\Gamma(\frac{m+n_f-2}{2})} dx_f, \tag{۱۴}$$

$$J_f^* = [r_f \frac{1}{\lambda^2} (c_f - D_f \sqrt{1-c_f^2})^2, r_f \frac{1}{\lambda^2} (c_f + D_f \sqrt{1-c_f^2})^2],$$

$$U [r_f \frac{1}{\lambda^2} (c_f + D_f \sqrt{1-c_f^2})^2, r_f \frac{1}{\lambda^2} (c_f + D_f \sqrt{1-c_f^2})^2]$$

در رابطه‌ی ۱۴، $r_f = n_1 + n_2 - 2$ و $\frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2} = \lambda$ است.

همان‌طوری که قبلاً اشاره شد، اگر از تکنیک‌های غیرخطی استاندارد برای حل این نوع مسائل بهینه‌سازی استفاده شود، از نظر محاسباتی پرهزینه و وقت‌گیر و ناکارآمد خواهد بود [۷]. اخیراً الگوریتم‌های ژنتیک به‌عنوان یک تکنیک بهینه‌سازی، برای مسائل پیچیده، به‌طور قابل ملاحظه‌ای مورد توجه قرار گرفته‌اند. بنا بر این مدل نهایی حاصل شده را توسط الگوریتم ژنتیک حل کرده تا مقادیر بهینه‌ای برای پارامترهای طرح حاصل شود [۱۰].

۵- خلاصه و نتیجه‌گیری

در این مقاله نمودارهای کنترل توأم یک متغیره \bar{X} و S با نمونه‌گیری دوگانه و نمونه‌گیری سه‌گانه برای پایش همزمان میانگین و تغییرپذیری فرایند معرفی و بررسی شدند. طراحی آماری این نمودارها به‌عنوان مسئله‌ی بهینه‌سازی مطرح گردید. مسئله‌ی بهینه‌سازی مطرح شده، مینیمم سازی متوسط مدت اجرای (ARL) فرایند در شرایط تحت کنترل با شرط‌های مفروض است. از آن‌جا که، استفاده از روش‌های خطی استاندارد برای حل این مسئله با دشواری همراه است، به کارگیری الگوریتم ژنتیک در این زمینه مفید به نظر می‌رسد. شایان ذکر است که نتایج این مقاله را می‌توان به نمودارهای کنترل توأم

پیوست‌ها

¹Statistical Process Control²Double Sampling³Triple SamplingBamemiMoghadam, M. (1385). *Statistical Quality Control*. Tehran, Payam Noor University. (Persian)Montgomery, Douglas C. (1998). *Statistical Quality Control*. Rasoul Nour Alsana translator (1377), 16th edition, Tehran, Iran University of Science and Technolo. (Persian)

Archive of SID