

# بهینه‌سازی مسئله چند هدفه تخصیص افزونگی و قابلیت اطمینان در سیستم‌های چند وضعیتته سری - موازی

هیوا فاروقی\*

(نویسنده مسئول) استادیار گروه مهندسی صنایع، دانشگاه کردستان

زهرا سلگی

کارشناس ارشد مهندسی صنایع، دانشگاه کردستان، zahrasolgi499@gmail.com

## چکیده

این مقاله به بررسی مسئله قابلیت اطمینان و تخصیص افزونگی چند هدفه برای سیستم‌های چند وضعیتته سری - موازی می‌پردازد. از این رو مدل ریاضی مناسبی به منظور بهینه‌سازی دسترسی‌پذیری سیستم و کمینه‌سازی هزینه‌های طراحی مربوطه با در نظر گرفتن محدودیت‌های بودجه و وزن فیزیکی سیستم پیشنهاد شده است. به منظور تخمین دسترسی‌پذیری سیستم چند وضعیتته، از روش تابع مولد عمومی که به عنوان روشی کارآمد جهت محاسبه قابلیت اطمینان و دسترسی‌پذیری سیستم‌های چند وضعیتته مطرح است، استفاده شده است. پس از حل مدل ریاضی به روش افسیلون محدودیت، به منظور بهینه‌سازی همزمان دو تابع هدف و تولید جواب‌های پارتویی مدل ریاضی مسئله در ابعاد بزرگتر، نسخه دوم الگوریتم فراابتکاری ژنتیک با مرتب‌سازی نامغلوب توسعه داده شده است. در خاتمه برای ارزیابی کارایی الگوریتم حل پیشنهادی، تعدادی مسئله نمونه در ابعاد مختلف تولید و حل شده است. نتایج حاصل از الگوریتم فراابتکاری با نتایج به دست آمده از حل مدل ریاضی به روش افسیلون محدودیت توسط آزمون تی مقایسه شده که حاکی از کارایی الگوریتم حل پیشنهادی می‌باشد.

## کلمات کلیدی

تخصیص افزونگی و قابلیت اطمینان، سیستم‌های چند وضعیتته، دسترسی‌پذیری، تابع مولد عمومی، الگوریتم ژنتیک با مرتب‌سازی نامغلوب.

## ۱- مقدمه

محدودی از نرخ عملکرد باشد را سیستم چندوضعیتی می‌نامند. هر کدام از اجزای این سیستم به نوبه خود دارای چندین وضعیت می‌باشند. نرخ عملکرد این سیستم چند وضعیتته (MSS) به دسترسی‌پذیری واحدهای آن بستگی دارد به طوری که مقادیر مختلفی از واحدهای در دسترس موجب ارائه سطوح متفاوتی از عملکرد می‌شود. هر جزء معمول از سیستم، با احتمال خاصی، ممکن است در نرخ عملکردی بین ۰٪ تا ۱۰۰٪ کار کند.

از نظر قابلیت اطمینان سیستم کلاسیک، سیستمی دو وضعیت‌هاست که در آن اجزا دارای دو وضعیت "عملکرد کامل" یا "شکست کامل" باشند. برخی از سیستم‌های فنی می‌توانند وظایف خود را در سطوح مختلفی از بازدهی، که به نرخ عملکرد اشاره دارد، انجام دهند. سیستمی که می‌تواند دارای تعداد

\* (Corresponding author) h.farughi@uok.ac.ir

تعداد وضعیت‌های سیستم را کاهش می‌دهد و محاسبات مربوط به قابلیت اطمینان و دسترسی‌پذیری سیستم را آسان‌تر می‌کند [۳]. کوو و وان [۴] بر روی طراحی بهینه قابلیت اطمینان، که در آن UGF به‌عنوان روش اصلی در ارزیابی قابلیت اطمینان سیستم چند وضعیت به کار برده شد، بحث کردند.

اگرچه UGF به عنوان یک روش مناسب برای ارزیابی قابلیت اطمینان سیستم‌های چندوضعیتی است، اما زمانی که تعداد اجزای موجود در سیستم افزایش یابد زمان مورد نیاز CPU به طور چشمگیری افزایش می‌یابد. در همین راستا الگوریتم‌های ابتکاری و فراابتکاری زیادی برای حل مسائل تخصیص افزونگی و قابلیت اطمینان سیستم‌های سری- موازی چند وضعیت ارائه شد. اوزینب و همکاران [۵] الگوریتم ابتکاری جستجوی ممنوع کارآمدی را برای حل مسئله تخصیص افزونگی چندوضعیتی در سیستم‌های سری- موازی همگن ارائه دادند. لی و همکاران [۶] مسئله بهینه-سازی افزونگی جوامع ناهمگن چندوضعیتی برای سیستم‌های سری- موازی محدود به علل شکست‌های رایج را مورد توجه قرار دادند. به منظور دستیابی به سطح مطلوب قابلیت اطمینان و حداقل مقدار هزینه برای این سیستم، از تابع مولد جهانی برای ارزیابی قابلیت اطمینان استفاده شده و در نهایت برای حل مدل بهینه الگوریتم ژنتیک را به کار گرفته‌اند. شارما و همکاران [۷] به ارزیابی قابلیت اطمینان و بهینه‌سازی طراحی برای سیستم‌های سری- موازی چندوضعیتی در جوامع ناهمگن پرداختند. هدف مسئله حداقل کردن هزینه‌های طراحی سیستم و برآورده کردن محدودیت‌های قابلیت اطمینان و تقاضای بار مشتریان است. آن‌ها الگوریتم کلونی مورچگان را برای حل این مسئله به کار گرفتند. هسی و همکاران [۸] از الگوریتم کلونی زنبورعسل برای حل مسئله تخصیص افزونگی با اجزا ترکیب شده در سیستم‌های سری- موازی استفاده کردند. ذوالفقاری و همکاران [۹] نیز به بررسی مسئله تخصیص افزونگی چندهدفه در سیستم‌های سری- موازی با در نظر گرفتن اجزا قابل تعمیر و غیرقابل تعمیر به صورت همزمان، با اهداف حداکثر کردن دسترسی‌پذیری و حداقل کردن هزینه کل سیستم، پرداخته‌اند. آن‌ها از رویکرد ژنتیک برای حل این مدل استفاده کردند. گارگ و شارما [۱۰] مسئله تخصیص افزونگی چندهدفه در سیستم‌های سری- موازی را ارائه کردند که در آن، استراتژی فعال برای سیستم در نظر گرفته شده است. در ساله‌ای اخیر محققین و پژوهشگران، با توجه به ماهیت پیچیده مسائل تخصیص افزونگی و قابلیت اطمینان از الگوریتم‌های فرا ابتکاری برای حل این مسائل استفاده کرده‌اند [۱۱]، [۱۲] و [۱۳]. در دو پژوهش کیم [۱۴] و ابویی و همکاران [۱۵] از رویکرد مدل مارکوف به منظور محاسبه دقیق مقدار قابلیت اطمینان استفاده

سیستم چند وضعیت سری - موازی متشکل از تعدادی زیرسیستم است که به صورت سری به هم متصل شده‌اند، به طوری که هر زیرسیستم می‌تواند شامل چند جزء مختلف باشد به منظور افزایش قابلیت که به طور موازی به هم متصل هستند. اطمینان کل سیستم از اجزا مازاد در کنار اجزا اصلی سیستم استفاده می‌شود. هدف از بهینه‌سازی در این مسائل، برقراری تعادل بین تعداد و نوع اجزا مازاد به کاررفته در سیستم از یک سو و هزینه، حجم و وزن نهایی کل سیستم از سوی دیگر و همچنین لحاظ کردن محدودیت‌های ماهیتی موجود در سیستم، در حین طراحی است. از آنجایی که انتخاب تعداد و نوع اجزا مازاد برای سیستم هدف مطلوب است، به مسائل مربوط به در نظر گرفتن اجزا مازاد برای ارتقاء قابلیت اطمینان، مسائل تخصیص اجزا مازاد گفته می‌شود. این اجزا با توجه به نوعشان از نظر هزینه، در دسترس بودن و عملکرد آن‌ها مشخص می‌شود. وجود اجزا افزونه باعث بهبود در دسترسی‌پذیری می‌شود اما افزایش هزینه کل را به همراه دارد.

در این مقاله، مسئله تخصیص افزونگی و قابلیت اطمینان در سیستم‌های چند وضعیت سری- موازی مورد توجه قرار گرفته است. از این رو هدف اصلی در این پژوهش بهینه‌سازی کردن دسترسی‌پذیری سیستم در راستای افزایش قابلیت اطمینان آن است. بعلاوه، کمینه‌سازی هزینه‌های طراحی به عنوان هدف دیگر این مسئله در نظر گرفته می‌شود. با توجه به این که اجزا افزونه در این سیستم قابل تعمیر بوده و به صورت آماده به کار سرد در سیستم وجود دارند، میزان پیچیدگی محاسباتی مسئله به شدت افزایش می‌یابد؛ لذا برای حل مسئله، علاوه بر استفاده از روش اپسیلون محدودیت در مسائل سایز کوچک، از نسخه دوم الگوریتم ژنتیک با مرتب‌سازی نامغلوب (NSGA-II) در حل همه مسائل استفاده می‌شود.

## ۲- مطالعات پیشین

سیستم چند وضعیت اولین بار توسط مارچلند در سال ۱۹۷۵ معرفی شد [۱]. تعیین قابلیت اطمینان سیستم‌های چند وضعیت به استفاده از روابط ریاضی بسیار سخت یا ناممکن است، زیرا وضعیت سیستم و پیچیدگی محاسباتی به سرعت افزایش می‌یابد. به‌عنوان یک پیشنهاد، اوشاکوف [۲] برای اولین بار رویکرد تابع مولد عمومی را معرفی کرد. UGF به‌عنوان روشی مناسب جهت محاسبه قابلیت اطمینان و دسترسی‌پذیری سیستم‌های چند وضعیت شناخته شده است. این روش به‌طور باورنکردنی ارزیابی

- ۱- اجزا از هم مستقل‌اند.
  - ۲- هر جزء نرخ عملکرد متفاوتی در هر وضعیت دارد.
  - ۳- همه افزونگی‌های عناصر برای هر زیرسیستم یکسان‌اند.
  - ۴- اجزا افزونه به صورت آماده به کار سرد در سیستم وجود دارند. به این معنی که هنگام ورود به سیستم و جایگزینی، در سطح عملکرد کامل خود هستند.
  - ۵- یک تعمیرکار در سیستم وجود دارد.
  - ۶- انتقال وضعیت فقط بین وضعیت‌های مجاور رخ می‌دهد.
  - ۷- نرخ عملکرد یک زیرسیستم چند وضعیتیه موازی برابر با مجموع نرخ‌های عملکرد اجزا آن است.
  - ۸- نرخ عملکرد یک سیستم چند وضعیتیه سری - موازی برابر با حداقل نرخ عملکرد زیرسیستم‌های آن است.
- ساختار سیستم چندوضعیتی سری - موازی دارای  $N$  زیرسیستم است که به صورت سری به هم متصل می‌باشد؛ و هر زیرسیستم  $i$  دارای  $\Pi_i$  جزء است که به صورت سری به هم متصل هستند.

## ۲-۳- مدل‌سازی ریاضی مسئله

### اندیس‌ها

- i: شاخص نوع زیرسیستم‌ها  
 h: شاخص نوع اجزا  
 j: شاخص نوع وضعیت اجزا  
 m: تعداد وضعیت MSS,  $m \in \{1, 2, \dots, M\}$

### پارامترها

- C: بیشترین هزینه مجاز برای سیستم  
 W: بیشترین وزن مجاز برای سیستم  
 $C_{ih}$ : هزینه جزء نوع h در زیرسیستم i  
 $G_{ih}$ : نرخ عملکرد جزء نوع h در زیرسیستم i  
 $W_{ih}$ : وزن جزء نوع h در زیرسیستم i  
 $C_o^i$ : هزینه بالاسری زیرسیستم i  
 $G_k^o$ : سطح عملکرد موردنیاز سیستم چند وضعیتیه  
 $A_{ms}$ : دسترسی پذیری پایدار MSS  
 $G_s$ : ظرفیت کل سیستم  
 $G_m$ : سطح عملکرد پایدار MSS وابسته به وضعیت m

شده است. هادی‌پور و همکاران [۱۶] مدلی جدید برای بیشینه کردن میانگین زمان شکست و کمینه کردن هزینه‌های سیستم ارائه دادند که در این مدل هر زیرسیستم می‌تواند به طور همزمان از اجزا افزونه آماده به کار گرم و فعال استفاده کند. به منظور حل مدل پیشنهادی الگوریتم فراابتکاری جریان آب چند هدفه را به کار گرفتند. ایصدقی و همکاران [۱۷] با ارائه یک الگوریتم ژنتیک کارآمد، مسئله تخصیص افزونگی در سیستم‌های چند وضعیتیه سری - موازی را بررسی کردند. برای محاسبه قابلیت اطمینان سیستم از ترکیب الگوریتم ارائه شده با تابع U- استفاده شده است.

با توجه به بررسی ادبیات موضوع می‌توان به این نکته پی برد که اکثر تحقیقات مرتبط در این حوزه، روی بیشینه کردن قابلیت اطمینان متمرکز بوده و برای اجزا فقط دو وضعیت در نظر گرفته شده است. در این پژوهش هر کدام از اجزا می‌توانند دارای چندین وضعیت باشند که برای تعیین نرخ‌های انتقال وضعیت، از مدل‌های مارکوفی استفاده می‌شود. این انتقال وضعیت‌ها فقط بین وضعیت‌های مجاور با نرخ تعمیر و نرخ شکست ثابت رخ می‌دهد. بعلاوه، در این پژوهش اجزا به صورت قابل تعمیر در نظر گرفته شده و با توجه به اینکه اجزای افزونه موجود در سیستم ممکن است فعال نبوده و به صورت آماده‌به‌کار در سیستم موجود باشند، فرض دیگر این مسئله در نظر گرفتن اجزای افزونه به صورت آماده‌به‌کار سرد است که منجر به پیچیدگی زیادی در محاسبه دسترسی‌پذیری سیستم می‌شود. با این توصیف در ادامه مقاله، مدلی جهت بیشینه سازی دسترسی پذیری در کنار کمینه کردن هزینه‌های طراحی ارائه شده و به منظور حل مدل و تولید جواب‌های پارتویی برای مسئله، نسخه دوم الگوریتم فراابتکاری ژنتیک با مرتب‌سازی نامغلوب به کار گرفته شده و با نتایج حاصل از روش اسپیلون محدودیت مقایسه می‌گردد.

## ۳- روش پژوهش

برای ارائه مدل ریاضی مسئله، در این بخش ابتدا مفروضات لحاظ شده در مسئله، بیان شده و پس از معرفی نمادها، پارامترها و متغیرهای تصمیم، تخمین دسترسی‌پذیری سیستم‌های چند وضعیتیه بر اساس تابع مولد عمومی (U) و نمودار مارکوف تشریح شده و در نهایت، مدل ریاضی مسئله ارائه و تشریح گردیده است.

## ۱-۳- مفروضات پژوهش

مفروضاتی که در تعریف مسئله این پژوهش در نظر گرفته شده است به شرح زیر است:

نشریه مهندسی و مدیریت کیفیت

متغیر تصمیم

۴- روش تابع مولد عمومی

در ادبیات موضوع تابع- $U$  با مشخصات زیر شناخته شده است.تعریف ۱: تابع- $U$  برای متغیر تصادفی  $G_S$  به صورت چندجمله‌ای مندرج در رابطه (۲) تعریف شده است:

$$U(z) = \sum_{m=1}^M p_m Z^{G_m} \quad (2)$$

که در آن متغیر  $G_S$  دارای  $M$  مقدار ممکن و  $p_m$  احتمال آنکه  $G_S$  برابر با  $G_m$  باشد.تعریف ۲: اگر متغیر تصادفی  $G_S$  عملکرد خروجی وضعیت پایدار MSS باشد، دسترسی پذیری  $A_{ms}(G_k^*)$  توسط رابطه احتمالی (۳) مشخص می‌شود:

$$pr[G_S \geq G_k^0] = \phi(U(z)z^{-G_k^0}) \quad (3)$$

که در آن  $\phi$  عملگری است که بر اساس رابطه (۴) تعریف می‌گردد.

$$\begin{aligned} \phi(pz^\alpha) &= p.l[\alpha \geq 0] \\ l_{[true]} &= 1 \\ l_{[false]} &= 0 \end{aligned} \quad (4)$$

با به کارگیری عملگر  $\phi$ ، ضرایب چندجمله‌ای  $U(z)$  برای هر عبارت با  $G_m \geq G_k^*$  باهم جمع شده و احتمالاتی که در آن  $G_S$  کوچک‌تر از مقادیر دلخواه  $G_k^*$  نباشد به‌طور سیستماتیک به دست می‌آید [۵].

به‌طور کلی برای تعیین دسترسی پذیری یک سیستم چند وضعیت سر- موازی، ابتدا باید برای هر نوع از اجزا در زیرسیستم، توزیع-های مراحل تعیین شود؛ سپس توزیع عملکرد سیستم بر اساس توزیع‌های مراحل اجزا با استفاده از رویکرد UGF مشخص شده و در نهایت دسترسی پذیری سیستم تعیین گردد.

 $\Pi_{ih}$ : تعداد اجزا افزونه نوع  $h$  در زیرسیستم  $i$  $C_s$ : هزینه کل سیستم $A_s$ : دسترسی پذیری کل سیستم

## ۳-۲-۱- محاسبه هزینه سیستم

در سیستم مورد نظر، برای هر زیرسیستم  $i$  تعدادی اجزا مختلف در دسترس است. برداری از پارامترهای  $G_{ih}$  و  $A_{ih}$  و  $C_{ih}$  را می‌توان برای هر جزء نوع  $h$  در زیرسیستم  $i$  در نظر گرفت. این بردار به ترتیب شامل ظرفیت، دسترسی پذیری و هزینه‌ی اجزا می‌باشد. به منظور افزایش سطح دسترسی پذیری، به هر زیرسیستم  $i$ ، تعدادی اجزا موازی از هر نوع  $h$  می‌توان تخصیص داد که به صورت  $\Pi_{ih}$  برای  $1 \leq i \leq N$  و  $1 \leq h \leq H_i$  تعریف می‌شود که در آن  $H_i$  تعداد کل انواع اجزا در دسترس برای زیرسیستم  $i$  می‌باشد. بردار  $\Pi_i = \{\Pi_{ih}\}$  برای ساختار کلی سیستم تعریف شده است.

هزینه کل سیستم به صورت رابطه (۱) تعریف می‌شود:

$$C_s = \sum_{i=1}^N (C_i + \sum_{h=1}^{H_i} C_h^i (n_{ih} + \exp(n_{ih}/\varphi))) \quad (1)$$

که در آن  $C_0^i$  هزینه بالاسری مربوط به هر کدام از زیرسیستم‌ها است. فاکتور  $\exp(n_{ih}/\varphi)$  هزینه‌های اضافی که ناشی از اتصال و راه‌اندازی برای اجزا افزونه است، را محاسبه می‌کند [۱۸].

## ۳-۲-۲- تخمین و محاسبه دسترسی پذیری MSS

در تجزیه و تحلیل و بهینه‌سازی قابلیت اطمینان سیستم‌های سری - موازی، تلاش‌های اندکی جهت توسعه روش‌های مربوطه صورت گرفته است. به طور کلی می‌توان گفت روش‌های تخمین قابلیت اطمینان سیستم‌های سری- موازی براساس چهار رویکرد زیر می‌باشند:

۱- رویکرد ساختار تابع

۲- رویکرد فرآیندهای احتمالی (مارکوف)

۳- روش شبیه‌سازی مونت-کارلو

۳-۲-۱- تعیین توزیع وضعیت اجزا

$$p_{h,j}^i = \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^j p_0 \quad 0 < j < M_h^i \quad (6)$$

که

$$p_{h,0}^i = \left[1 + \frac{\lambda}{\mu} + \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^2 + \dots + \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^{(M_h^i - 1)(n_{ih} + 1)}\right]^{-1} \quad (7)$$

احتمال آنکه جزء نوع  $h$  در زیرسیستم  $i$  در وضعیت  $j$  باشد.  $p_{h,j}^i$  هم نرخ عملکرد جزء نوع  $h$  در زیرسیستم  $i$  و در وضعیت  $j$  را ارائه می‌دهد. وقتی جزئی در وضعیت صفر است (شکست کامل)، نرخ عملکرد آن برابر با صفر می‌باشد  $g_{h,j}^i = 0$ . با استفاده از رویکرد UGF تابع  $u$ -برای یک جزء نوع  $h$  در زیرسیستم  $i$  به صورت رابطه (۸) نمایش داده می‌شود:

$$U_h^i(z) = p_{h,0}^i(t)Z^0 + p_{h,1}^i(t)Z^{g_{h,1}^i} + \dots + p_{h,M_h^i}^i(t)Z^{g_{h,M_h^i}^i} \quad (8)$$

۳-۲-۲- توزیع عملکرد و دسترسی پذیری سیستم

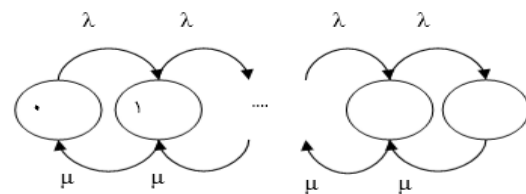
توزیع عملکرد سیستم را می‌توان بر اساس توزیع مراحل اجزا  $p_{h,j}^i$  و همین‌طور انواع و تعداد اجزای سیستم تعیین کرد. رویکرد UGF می‌تواند با وابستگی بین نرخ عملکرد سیستم و نرخ‌های عملکرد اجزا سروکار داشته باشد. همان‌گونه که گفته شد در سیستم سری- موازی، نرخ عملکرد یک زیرسیستم موازی برابر با مجموع نرخ‌های عملکرد اجزا و نرخ عملکرد سیستم برابر با کم‌ترین مقدار نرخ‌های عملکرد زیرسیستم‌ها می‌باشد. بنا بر این UGF زیرسیستم  $i$  طبق رابطه (۹) محاسبه می‌شود:

$$U_i(z) = \sum_{k_1=0}^{M_1} \sum_{k_2=0}^{M_2} \dots \sum_{k_{H_i}=0}^{M_{H_i}} \left( \prod_{i=1}^{H_i} p_{k_i}^i(t) Z^{\otimes (g_{k_1}^1, \dots, g_{k_{H_i}}^{H_i})} \right) \quad (9)$$

که در آن

$$\otimes (g_{k_1}^1, \dots, g_{k_{H_i}}^{H_i}) = \sum_{i=1}^{s_i} g_{k_i}^i \quad (10)$$

برای هر نوع از اجزا با در نظر گرفتن این فرض که زمان‌های تعمیر و خرابی آنها دارای توزیع نمایی هستند، می‌توان توزیع وضعیت را با استفاده از رویکرد مارکوف و حل معادلات دیفرانسیل سیستم محاسبه نمود. خروجی آن  $p_{h,j}^i$  می‌باشد که احتمال آنکه جزء نوع  $h$  در زیرسیستم  $i$  در زمان  $t$  در وضعیت  $j$  باشد را نشان می‌دهد.  $0 \leq j \leq M_h^i$  بالاترین وضعیت ممکن جزء نوع  $h$  در زیرسیستم  $i$  با در نظر گرفتن تعداد اجزا افزونه برای آن جزء را بیان می‌کند. به منظور محاسبه توزیع وضعیت هر کدام از اجزا اگر فرض کنیم  $n$  عدد از جزء نوع  $h$  در زیرسیستم  $i$  موجود باشد با به کارگیری نرخ شکست ثابت  $\lambda$  و نرخ تعمیر ثابت  $\mu$ ، و همچنین وجود یک تعمیرکار در سیستم، با توجه به شکل (۱) و حل معادلات مربوطه می‌توان  $p_{h,j}^i$  را محاسبه نمود.



شکل (۱): نمودار مارکوف

در سیستم مذکور، برای ارتقاء سطح دسترسی پذیری سیستم، اجزا افزونه به صورت آماده‌به‌کار سرد در هر مرحله نگاه داشته شده و به محض خراب شدن جزء اصلی، بلافاصله جزء افزونه با نرخ عملکرد کامل وارد سیستم می‌شود.

توزیع وضعیت پایدار را با حل معادله چاپمن- کلموگروف می‌توان بر اساس روابط (۵) تا (۷) به دست آورد:

$$p_h^i \cdot Q = 0 \quad (5)$$

که در آن

$$p_h^i = \{p_{h,0}^i, p_{h,1}^i, \dots, p_{h,M_h^i}^i\}$$

بردار توزیع احتمالات را بیان می‌کند. در نتیجه داریم:

$$\max A_s \quad (۱۵)$$

$$\min C_s = \sum_{i=1}^N (C_i^i + \sum_{h=0}^{H_i} C_h^i (n_h^i + \exp(n_h^i/4))) \quad (۱۶)$$

subject to :

$$\sum_{i=1}^N (C_0^i + \sum_{h=0}^{H_i} C_h^i (n_h^i + \exp(n_h^i/4))) \leq C \quad (۱۷)$$

$$\sum_{h=0}^{H_i} W_h^i (n_h^i + \exp(n_h^i/4)) \leq W \quad (۱۸)$$

$$0 \leq n_h^i \leq n_{\max} \quad n_h^i \in z^+ \quad (۱۹)$$

در مدل ارائه شده، روابط (۱۵) و (۱۶) مربوط به توابع هدف می‌باشند و به ترتیب دسترسی‌پذیری و هزینه سیستم را نشان می‌دهند. رابطه (۱۵) بر اساس مراحل عنوان شده در بخش ۳-۲-۲ تعیین می‌شود. رابطه (۱۶) نیز بر اساس توضیحات بخش ۳-۲-۱ به دست آمده است. محدودیت (۱۷) بیانگر حداکثر هزینه‌ی مجاز برای سیستم است، در حالی که محدودیت (۱۸) برای نمایش حداکثر وزن مجاز سیستم منظور شده است. در این جا منظور از وزن سیستم، وزن فیزیکی آن می‌باشد که به‌طور مثال در قطعات الکترونیکی مسئله‌ی مهمی است. محدودیت (۱۹) نیز بیانگر این است که تعداد اجزا افزونه به کار گرفته‌شده در سیستم از نوع اعداد صحیح مثبت می‌باشد.

#### ۴- الگوریتم حل پیشنهادی

الگوریتم NSGA-II یکی از پرکاربردترین و قدرتمندترین الگوریتم‌های موجود برای حل مسائل بهینه‌سازی چند هدفه است و کارایی آن در حل مسائل مختلف، به اثبات رسیده است. اسرینواس و دِب در سال ۱۹۹۵ روش بهینه‌سازی NSGA را برای حل مسائل بهینه‌سازی چند هدفه معرفی نمودند. نسخه دوم الگوریتم NSGA با نام NSGA-II توسط دِب و همکارانش در سال ۲۰۰۰ معرفی گردید.

##### ۴-۱ ساختار نمایش جواب

به منظور نمایش جواب‌ها در مسئله مورد نظر، هر جواب از طریق

درنهایت می‌توان تابع-U را برای سیستم سری- موازی چند وضعیت بر اساس رابطه (۱۱) محاسبه نمود:

$$U(z) = \sum_{k_{s_1}=k_{s_1}^0}^{M_{s_1}} \sum_{k_{s_2}=k_{s_2}^0}^{M_{s_2}} \dots \sum_{k_{s_N}=k_{s_N}^0}^{M_{s_N}} (\prod_{i=s_1}^{s_N} p_{k_i}^i(t) Z^{\otimes (g_{k_{s_1}}^{s_1}, \dots, g_{k_{s_N}}^{s_N})}) \quad (۱۱)$$

$$= \sum_{j=0}^{M_s} p_j z^{g_j}$$

که در آن

$$\otimes (g_{k_{s_1}}^{s_1}, \dots, g_{k_{s_N}}^{s_N}) = \min(g_{k_{s_1}}^{s_1}, \dots, g_{k_{s_N}}^{s_N}) \quad (۱۲)$$

$M_i$  بالاترین وضعیت زیرسیستم  $i$  و  $s_N$  تعداد کل زیرسیستم‌ها می‌باشد.

شاخص دسترسی‌پذیری سیستم بر اساس توزیع‌های عملکرد وضعیت پایدار سیستم محاسبه می‌شوند. تابع-U که در رابطه (۱۳) بیان شده است، جهت توصیف توزیع عملکرد وضعیت پایدار سیستم به کار گرفته می‌شود.

$$U(z) = \sum_{j=0}^{M_s} p_j z^{g_j} \quad (۱۳)$$

که در آن  $p_j$  احتمال وضعیت پایدار سیستم در وضعیت  $j$  می‌باشد. برای سطح تقاضای ثابت  $w$  دسترسی‌پذیری سیستم نیز توسط رابطه (۱۴) تعیین می‌شود:

$$A(w) = \sum_{j=0}^{M_s} p_j \cdot \mathbb{1}(g_j \geq w) \quad (۱۴)$$

جایی که در آن مقدار تابع  $\mathbb{1}(g_j \geq w) = 1$  اگر  $g_j \geq w$  و  $\mathbb{1}(g_j \geq w) = 0$  اگر  $g_j < w$ .

#### ۳-۲-۳- مدل ریاضی ارائه شده

به‌طور کلی می‌توان گفت این‌گونه مسائل، جزو مسائل برنامه‌ریزی عدد صحیح غیرخطی می‌باشد. مدل ریاضی ارائه شده بر اساس روابط (۱۵) تا (۱۹) می‌باشد.

۷،۸،۹،۱۰،۱۱،۱۲،۱۳،۱۴،۱۵ پس از آزمون و خطا و انجام آزمایش‌های مختلف به صورت جدول (۱) می‌باشد.

جدول (۱): مقادیر تنظیم شده پارامترهای الگوریتم NSGA II			
تعداد جمعیت	نرخ تقاطع	نرخ جهش	نسل
۱۰n	۰/۴	۰/۲	مثال‌های کوچک
۱۰n	۰/۵	۰/۳	مثال‌های متوسط و بزرگ

#### ۴-۴ - تولید مثال‌های نمونه

به منظور بررسی و آزمایش عملکرد الگوریتم ارائه شده باید از تعدادی مثال‌های معیار استفاده کرد. مثال‌های تولید شده برای مسئله مذکور، با توجه به تعداد اجزای سیستم، وضعیت هر کدام از اجزا، ساختار سری- موازی بودن اجزا و زیرسیستم‌ها و همچنین میزان سطوح تقاضای اعلام شده از طرف مشتریان می‌تواند متفاوت باشد. بر این اساس، مثال‌های تولیدی در ابعاد کوچک و متوسط با ۳ و ۵ جزء و در ابعاد بزرگ با ۶ و ۸ و ۱۰ جزء در سطوح مختلفی از تقاضا که هر کدام از اجزای آن می‌تواند دارای دو یا سه وضعیت باشد، در نظر گرفته شده‌اند. به منظور حل مدل ریاضی مسئله، مثال‌های با ابعاد کوچک پس از کدنویسی در نرم افزار GAMS، توسط روش اپسیلون محدودیت و با استفاده از حل کننده‌ی BARON حل شده‌اند. مسائل در ابعاد بزرگ نیز توسط الگوریتم کدنویسی و حل شده‌اند.

#### ۴-۵ - کارایی الگوریتم حل پیشنهادی

در این جا به منظور کارایی مقایسه الگوریتم از چندین شاخص که برای مقایسه الگوریتم‌های چندهدفه به کار می‌روند، استفاده شده است. این شاخص‌ها عمدتاً به دو دسته تقسیم می‌شوند که دسته اول بر همگرایی و کیفیت جواب‌ها تأکید دارند و دسته دوم پراکندگی و گسترش جواب‌ها را در فضای حل مورد توجه قرار می‌دهند. در ادامه، سه شاخص مورد نظر برای تحلیل و بررسی نتایج این پژوهش معرفی شده است.

##### ۴-۵-۱ - معیار بیشترین گسترش (MID)

این معیار که توسط زیتلر [۱۹] ارائه شده است، طول قطر مکعب فضایی که توسط مقادیر انتهایی اهداف برای مجموعه

برداری به طول تعداد اجزا موجود در سیستم که هر ژن آن معرف تعداد اجزای مازاد برای آن جزء است، انتخاب می‌شود. تعداد اجزا مازاد برای هر جزء با توجه به حدود بالا و پایینی که برای آن وجود دارد، در ژن مربوطه ثبت می‌شود. در شکل (۲) نمایشی از یک جواب برای مسئله‌ای به ۶ جزء نشان داده شده است. برای نمونه عدد ۳ در موقعیت ژن دوم به معنی داشتن ۳ جزء مازاد برای جزء دوم است.

۱	۳	۰	۲	۲	۱
---	---	---	---	---	---

شکل (۲): مثالی از ساختار نمایش جواب

به منظور محاسبه امتیاز هر جواب با توجه به ساختار مدل پیشنهادی که در آن دسترسی‌پذیری و هزینه اجزا مد نظر قرار گرفته شده است، محاسبه شده است. با توجه به محدودیت‌های مسئله، هزینه سیستم نباید از مقدار مشخصی تجاوز کند که در غیر این صورت جریمه تعلق می‌گیرد. وجود محدودیت وزن برای سیستم نیز از طریق اعمال جریمه در نظر گرفته شده است.

#### ۴-۲ - عملگر ترکیب<sup>۸</sup>

استفاده از عملگر ترکیب در روند اجرای الگوریتم ژنتیک از اهمیت بالایی برخوردار می‌باشد، چرا که باعث بروز پراکندگی در ژن‌ها و توزیع آن‌ها میان دیگر کروموزوم‌ها می‌شود. در الگوریتم مورد استفاده در این پژوهش از ترکیب یکنواخت استفاده شده است. این فرآیند با تولید دنباله‌ای از  $L$  متغیر تصادفی از توزیع یکنواخت در بازه  $[0,1]$  پیاده‌سازی می‌شود. در هر موقعیت اگر مقدار، کمتر از پارامتر  $P_c$  باشد، ژن از والد اول و در غیر این صورت از دومی به ارث برده می‌شود. فرزند دوم با فرآیندی برعکس این فرآیند تولید می‌شود.

#### ۴-۳ - عملگر جهش<sup>۹</sup>

این عملگر قادر است که با ایجاد تغییرات کاملاً تصادفی در کروموزوم‌ها، ژن‌های جدیدی به وجود آورد که در گذشته در جمعیت وجود نداشته است. در این پژوهش از عملگر جهش تصادفی استفاده شده است. برای معیار توقف هم در این تحقیق از معیار حداکثر تکرار الگوریتم استفاده شده است. تنظیم پارامترهای این الگوریتم برای سه پارامتر نرخ تقاطع، نرخ جهش و تعداد جمعیت هر نسل برای مسائل با ابعاد کوچک (مسائل شماره ۱،۲،۳،۴،۵،۶) و متوسط و بزرگ (مسائل شماره

۱۰ بار اجرا توسط الگوریتم فراابتکاری، کم‌تر از همین مقادیر برای حل مدل ریاضی توسط روش اپسیلون محدودیت است. در ابعاد متوسط از مسئله نیز مقادیر این شاخص‌ها بسیار نزدیک به مقادیری است که از حل دقیق مسائل مذکور به دست می‌آید. ستون آخر که مربوط به شاخص زمان اجرا برای حل مسائل می‌باشد نشان می‌دهد که الگوریتم فراابتکاری قادر است در زمان خیلی کم‌تر از حل مدل ریاضی به کیفیت و تعداد جواب‌های نامغلوب قابل قبولی از مجموعه جواب‌های پارتویی برسد.

جدول (۲): معیارهای مقایسه برای مسائل نمونه توسط الگوریتم

اجزا	فراابتکاری و حل مدل ریاضی		
	تعداد	تقاضا مسئله	GAMS
جزء ۳	۱	۱۰۰	۴۳۹۲
	۲	۸۰	۲۹۴۰
	۳	۵۰	۳۱۲۷
جزء ۵	۴	۲۱۰	۱۰۱۵۵
	۵	۱۷۰	۱۰۱۵۵
	۶	۱۳۰	۱۰۱۵۵
جزء ۶	۷	۲۱۰	۹۷۷۴
	۸	۱۷۰	-
	۹	۱۳۰	-
جزء ۸	۱۰	۲۱۰	-
	۱۱	۱۵۰	-
	۱۲	۱۰۰	-
جزء ۱۰	۱۳	۲۷۰	-
	۱۴	۲۰۰	-
	۱۵	۱۵۰	-

جواب‌های نامغلوب به کار می‌رود را اندازه‌گیری می‌کند. رابطه زیر رویه محاسباتی این شاخص را نشان می‌دهد:

$$MID = \sqrt{\sum_{j=1}^m (\max_i f_i^j - \min_i f_i^j)^2} \quad (17)$$

## ۲-۵-۴- معیار تنوع (DM)

این مقیاس، پراکندگی در بین مجموعه حل‌های نامغلوب را اندازه‌گیری می‌کند که رابطه آن به صورت زیر است:

$$DM = \sqrt{\sum_{i=1}^m \max(\|x_i - y_i\|)} \quad (18)$$

که در آن  $\|x_i - y_i\|$  فاصله مستقیم بین حل نامغلوب  $x_i$  و حل نامغلوب  $y_i$  می‌باشد. این معیار هر چه بیش‌تر باشد دلالت بر این دارد که جواب‌های یکسان کمتری وجود دارد و تنوع بیشتری در بین جواب‌ها به چشم می‌خورد [۲۰].

## ۳-۵-۴- معیار زمان اجرا (T)

این معیار زمان اجرای الگوریتم برای به دست آوردن جواب‌های نامغلوب را به عنوان معیار ارزیابی در نظر می‌گیرد.

## ۵- نتایج و یافته‌ها

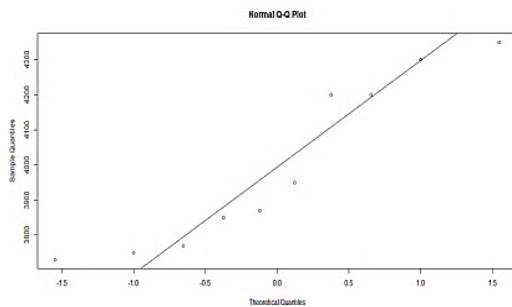
در این بخش به حل مثال‌های تولید شده با استفاده از روش اپسیلون محدودیت و الگوریتم NSGA-II پرداخته می‌شود. هدف از الگوریتم ارائه شده پیشرفت به سمت مرز بهینه پارتو و همچنین چگالی و تنوع خوب در مرز بهینه پارتو می‌باشد. به منظور ارزیابی و مقایسه حل مدل ریاضی و الگوریتم، از معیارهای تعریف شده در بخش ۴-۵ استفاده می‌گردد. هر مثال توسط الگوریتم ۱۰ بار اجرا شده و میانگین جواب‌های نامغلوب این ۱۰ اجرا برای مقایسه نتایج در نظر گرفته می‌شوند. جداول (۲) و (۳) مقادیر مربوط به شاخص‌های مقایسه‌ای بیشترین گسترش، تنوع و زمان حل برای مسائل نمونه در ابعاد کوچک، متوسط و بزرگ را نشان می‌دهد. همانطور که از این جداول قابل دریافت است، مقادیر شاخص بیشترین گسترش و تنوع در مسائل با ابعاد کوچک برای میانگین



فرضیه های آزمون

$$\begin{cases} H_0: \mu = 4392 \\ H_1: \mu < 4392 \end{cases} \quad (19)$$

فرض نرمال بودن نتایج حاصل از الگوریتم در شکل (۳) نشان داده شده است.



شکل (۳): نرمال بودن نتایج حاصل از الگوریتم برای مسئله ۱

با توجه به مقادیر گزارش شده توسط نرم افزار R و مقدار P-value به دست آمده، در سطح معنی‌داری ۰/۰۵ فرض برابری میانگین نتایج حاصل از الگوریتم برای معیار بیشترین گسترش با مقدار  $\mu_0$  رد می‌شود یا به عبارت دیگر در سطح اطمینان ۹۵ درصد میانگین نتایج حاصل از الگوریتم برای معیار بیشترین گسترش کم‌تر از مقدار  $\mu_0$  است.

به طور کلی P-مقدار حاصل از آزمون تی شاخص‌های ارزیابی بیشترین گسترش و تنوع برای مسائل ۱ تا ۷ در جدول (۴) نشان داده شده است.

جدول (۴): P-مقدار حاصل از آزمون تی برای مسائل نمونه

مسئله	P-value	
	MID	DM
۱	۰/۰۰۲۸۸۳	۰/۰۰۰۳۳
۲	۰/۰۰۳۶۳۶	۰/۰۰۴۳۲۱
۳	۰/۰۰۳۰۶۳	۰/۰۰۳۱۰۴
۴	۰/۰۰۱۵۷	۰/۰۰۹۳۸۵
۵	۰/۰۳۶۹۵	۰/۰۳۵۹۳
۶	۰/۰۰۵۷۸۶	۰/۰۰۵۵۵
۷	۰/۰۰۳۰۳۴	۰/۰۰۳۰۱۹

جدول (۳): معیارهای مقایسه برای مسائل نمونه توسط الگوریتم فراابتکاری و حل مدل ریاضی (ادامه)

تعداد اجزا	مسئله	تقاضا	NSGA-II		
			MID	DM	T
جزء ۳	۱	۱۰۰	۳۹۹۷	۶۳/۲۰۸۱	۲۳/۴۴۳۰
	۲	۸۰	۲۷۴۱	۵۲/۳۳۴۵۶	۲۳/۴۸۶۲
	۳	۵۰	۲۹۹۶	۵۴/۷۰۸۳۴	۲۳/۵۸۹۰
جزء ۵	۴	۲۱۰	۹۹۰۷	۹۹/۲۹۳۳۸	۹۱/۵۶۳۲
	۵	۱۷۰	۱۰۰۹۳	۱۰۰/۴۳۸۵	۹۱/۷۰۵۴
	۶	۱۳۰	۱۰۰۲۰	۱۰۰/۰۹۲۹	۹۲/۳۶۴۶
جزء ۶	۷	۲۱۰	۹۷۱۵	۹۸/۵۵۸۴	۱۲۴/۰۲۰۲
	۸	۱۷۰	۹۶۸۸	۹۸/۴۱۶۹	۱۳۰/۱۵۸۳
	۹	۱۳۰	۹۷۳۵	۹۸/۶۵۸۱	۱۲۹/۱۱۲۳
جزء ۸	۱۰	۲۱۰	۱۰۹۵۲	۱۰۴/۶۳	۲۴۸/۶۶۶۴
	۱۱	۱۵۰	۱۱۴۱۰	۱۰۶/۷۶۳۸	۲۵۰/۹۹۰۵
	۱۲	۱۰۰	۱۱۶۴۰	۱۰۷/۸۸۸۲	۲۵۵/۲۳۶۲
جزء ۱۰	۱۳	۲۷۰	۱۰۵۱۰	۱۰۲/۵۱۰۸	۳۸۴/۰۰۳۸
	۱۴	۲۰۰	۱۰۵۳۰	۱۰۲/۶۱۴۲	۳۸۶/۹۴۴۳
	۱۵	۱۵۰	۱۰۵۴۰	۱۰۲/۶۴۹۰	۴۰۲/۰۱۱۱

به منظور ارزیابی عملکرد الگوریتم پیشنهادی و حل مدل ریاضی مسئله، آزمون "تی" به کار گرفته می‌شود. به این صورت که  $\mu_0$  را برابر با مقادیر شاخص‌های ارزیابی برای حل مدل ریاضی و  $\mu$  را برابر با میانگین ۱۰ بار اجرا توسط الگوریتم فراابتکاری برای هر مسئله در نظر می‌گیریم. در این آزمون فرض صفر  $H_0: \mu = \mu_0$  در برابر فرض مقابل  $H_1: \mu < \mu_0$  بررسی می‌شود. اگر فرض  $H_0$  رد شود به این معنی است که مقادیر شاخص‌های ارزیابی بیشترین گسترش و تنوع برای حل مدل ریاضی بیش‌تر از میانگین اجراهای الگوریتم است. جهت انجام این آزمون از نرم افزار آماری R استفاده شده است. به طور مثال برای مسئله ۱ با سیستمی دارای ۳ جزء و سطح تقاضای ۱۰۰ نتایج آزمون تی برای شاخص بیشترین گسترش به شرح زیر است:

homogenous series-parallel multi-state systems. *Reliab Eng Syst Saf*, 93:1257-72.

[6] Li, Ch.Y., Chen, X., Yi, X.Sh., & Tao, J.Y. (2010). Heterogeneous redundancy optimization for multi-state series-parallel systems subject to common cause failures. *Reliability Engineering and System Safety*, 95:202-207.

[7] Sharma, V.K., Agarwal, M., & Sen, K. (2011). Reliability evaluation and optimal design in heterogeneous multi-state series-parallel systems. *Information Sciences*, 181:362-378.

[8] Hsieh, T.J., Yeh, W.Ch. (2012). Penalty guided bees search for redundancy allocation problems with a mix of components in series-parallel systems. *Computers & Operations Research*, 39:2688-2704.

[9] Zoufaghari, H., Hamadani, A.Z., & Abouei Ardakan, M. (2013). Bi-objective redundancy allocation problem for a system with mixed repairable and non-repairable components. *ISA Transactions*, pp.1-8.

[10] Garg, H., Sharma, S.P. (2013). Multi-objective reliability-redundancy allocation problem using particle swarm optimization. *Computers & Industrial Engineering*, Vol. 64, pp. 247-255.

[11] Ardakan, M. A., Hamadani, A. Z., & Alinaghian, M. (2015). Optimizing bi-objective redundancy allocation problem with a mixed redundancy strategy. *ISA transactions*, 55, 116-128.

[12] Abouei Ardakan, M., Sima, M., & Zeinal Hamadani, A., & Coit, D. W. (2016). A novel strategy for redundant components in reliability--redundancy allocation problems. *IIE Transactions*, 48(11), 1043-1057.

[13] Ardakan, M. A., & Hamadani, A. Z. (2014). Reliability optimization of series-parallel systems with mixed redundancy strategy in subsystems. *Reliability Engineering & System Safety*, 130, 132-139.

[14] Kim, H., & Kim, P. (2017). Reliability-redundancy allocation problem considering optimal redundancy strategy using parallel genetic algorithm. *Reliability Engineering & System Safety*, 159, 153-160.

[15] Abouei Ardakan, M., Rezvan, M. T. (2017). Multi objective optimization of reliability-redundancy allocation problem with cold-standby strategy using NSGA-II. *Reliability Engineering & System Safety*.

[16] Hadipour, H., Amiri, M., & Sharifi, M. (2018). Redundancy allocation in series-parallel systems under

## ۶- جمع بندی و نتیجه گیری

در این مقاله، مدلی دو هدفه برای مسئله تخصیص افزونگی و قابلیت اطمینان سیستم‌های چندوضعیتی سری- موازی ارائه شده است. هر کدام از اجزا سیستم می‌توانند علاوه بر وضعیت شکست کامل و عملکرد کامل، دارای وضعیت‌های بینابینی شکست جزئی، ناشی از عواملی مانند قطع برق و ... باشند. اجزای افزونه به کار گرفته شده در سیستم از نوع آماده به کار سرد است که به محض خرابی جزء اصلی، جایگزین آن می‌شود. از آنجا که اینگونه مسائل جزو مسائل NP-hard شناخته شده‌اند به منظور حل آن از الگوریتم فراابتکاری NSGA-II استفاده شده است. به طور کلی از نتایج حاصل از حل مسائل نمونه با الگوریتم فراابتکاری و مقایسه آن‌ها با نتایج حاصل از مدل ریاضی می‌توان به این نتیجه رسید که الگوریتم توسعه داده شده کارایی مناسبی دارد و می‌تواند در مدت زمان خیلی کمتری به کیفیت قابل قبولی از مجموعه جواب‌های پارتویی برسد. علاوه بر اکثر مسائلی که تابع هدف اول به صورت حدی به یک مقدار مشخص همگرا می‌شود، تمامی جواب‌های پارتویی را به دست می‌آورد. در نظر گرفتن انتقال وضعیت بین وضعیت‌های مختلف، نرخ شکست و نرخ تعمیر به صورت اعداد فازی و اعداد تصادفی و وابسته بودن نرخ شکست و نرخ تعمیر به زمان، می‌تواند از جمله پیشنهادهای مفید برای تحقیقات آتی در این زمینه باشد.

## فهرست منابع

[1] Murchland, J. (1975). Fundamental concepts and relations for reliability analysis of multi state systems reliability and fault tree analysis, in reliability and fault tree analysis, eds. R. Bartow, J. Fussell, and N. Singpurwalla, Philadelphia: SIAM, pp. 581-618.

[2] Ushakov I. (1986). Universal generating function, *Soviet J. Comput. Systems Sci*, 24(5):118-29.

[3] Ding Y, Lisnaski A. (2008). Fuzzy universal generating function for multi-state system reliability assessment. *Fuzzy Sets Syst*, 159:307-24

[4] Kuo, W., Wan, R. (2007). Recent advances in optimal reliability allocation. *IEEE Trans Syst Man Cybern Part A: Syst Hum*, 37:143-56.

[5] Ouzineb M., Nourelfath, M., & Gendreau, M. (2008). Tabu search for the redundancy allocation problem of

<sup>7</sup> Deb

<sup>8</sup> Crossover operator

<sup>9</sup> Mutation Operator

<sup>10</sup> Maximum spread or diversity

<sup>11</sup> Diversification Metric

<sup>12</sup> T-test

<sup>1</sup>Redundancy allocation problems

<sup>2</sup>Universal Generating Function

<sup>3</sup>Homogenous

<sup>4</sup> Multi Objective Water Flow algorithm

<sup>5</sup>Chapman-Kolmogorov

<sup>6</sup> Srinvas