پایش پروفایل‌های چندمتغیره خطی ساده خودهمبسته در فاز ۱ تحت مدل‌های AR(1) و MA(1)

محمد تقی‌پور، mohamad_taghipour@yahoo.com
گروه مهندسی صنایع، دانشگاه آزاد اسلامی واحد علوم و تحقیقات
امیرحسین امیری
(نویسنده مسئول) دانشیار،گروه مهندسی صنایع، دانشکده فنی و مهندسی، دانشگاه شاهد*
عباس سقایی، a.saghaei@srbiau.ac.ir
دانشیار،گروه مهندسی صنایع، دانشگاه آزاد اسلامی واحد علوم و تحقیقات

چکیده در برخی مسائل، کیفیت یک فرایند یا محصول با استفاده از یک پروفایل که رابطه بین یک یا چند متغیر پاسخ و یک یا چند متغیر مستقل است توصیف و کنترل می‌شود. در موارد مشخصی که متغیرهای پاسخ همبسته‌اند، می‌توان کیفیت فرآیند یا محصول را به وسیله چندین پروفایل هم‌زمان توصیف نمود. در برخی موارد به دلیل فاصله کم بین دوبار نمونه‌گیری، متغیرهای پاسخ در یک پروفایل خودهمبسته می‌شوند. خود همبستگی روی براورد پارامترهای رگرسیون تاثیر گذاشته و عملکرد نمودارهای کنترلی در کشف تغییرها ضعیف‌تر می‌شود. در این مقاله یک پروفایل چندمتغیره خطی ساده خودهمبسته در نظر گرفته می‌شود و فرض می‌شود که خودهمبستگی بتواند با مدل‌های AR(1) و MA(1) توصیف شود. سپس دو نمودار کنترل برای پایش پروفایل‌های چندمتغیره خطی ساده در فاز ۱ پیشنهاد می‌شود. عملکرد نمودارهای کنترل پیشنهادی در فاز ۱ با استفاده از شبیه‌سازی و معیار توان آزمون مقایسه می‌شوند.

کلمات کلیدی پروفایل‌های چند متغیره خطی ساده خود همبسته، خود همبستگی درون پروفایل، فاز ۱، معیار توان آزمون

۱– مقدمه

در بعضی از کاربردهای کنترل فرآیند آماری، کیفیت یک فرآیند یا محصول به جای این که به وسیله یک یا چند مشخصه کیفی توصیف و با استفاده از نمودارهای کنترل تک متغیره یا چند متغیره کنترل شود، با استفاده از یک پروفایل که رابطه بین چند متغیر پاسخ و یک یا چند متغیر مستقل است توصیف و کنترل می شود[۱].

یک پروفایل می‌تواند یک رابطه خطی ساده، خطی چندگانه، چندمتغیره، چندجمله‌ای و در مواردی غیرخطی باشد [۲]. یکی از فرض‌های اصلی در بسیاری از روش‌های کنترل فرآیند آماری مستقل بودن مشاهده‌ها است. در صورت وجود خود همبستگی بین مشاهده‌ها در طول زمان، حتی خیلی کم، نمودارهای کنترل کارایی خود را از دست داده و با انعکاس تعداد زیادی هشدارهای اشتباهی نتایج گمراه‌کننده‌ای را به همراه خواهند داشت[۳]. به عبارت دیگر، عدم برقراری شرط مستقل بودن داده‌ها می‌تواند عملکرد نمودارهای کنترل را تحت‌تاثیر قرار دهد.

از جمله اولین تحقیق‌ها روش‌های پایش پروفایل‌های خطی ساده در فاز ۱ می‌توان به مستک و همکاران [۴]، استور و بریل [۵] و محمود و وودال [۶] اشاره کرد. همچنین کاظم‌زاده و همکاران [۷] سه روش برای پایش پروفایل‌های چندجمله‌ای در فاز ۱ پیشنهاد نمودند و عملکرد این سه روش را در حالت‌های تغییرها پایدار و تغییرها موقت مقایسه نمودند. پایش پروفایل‌های خطی چندگانه چند متغیره در فاز ۱ توسط ایوزیان [۸] بررسی شد که شامل روش‌هایی از جمله روش مبتنی بر تعمیم آماره T^2پیشنهادی توسط ویلیامز و همکاران [۹]، تعمیم

*(Corresponding author) amiri@shahed.ac.ir

روش LRT ارائه شده توسط محمود و همکاران [۱۰] برای حالت چند متغیره، روش رویکرد ویلکس توسعه‌ای بر روش F به کار گرفته شده توسط محمود و وودال [۶] و همچنین رویکرد مبتنی بر تحلیل مؤلفه‌های اصلی به عنوان روشی دیگر مورد بحث قرار گرفت. ضمناً روش‌های پایش پروفایل‌های خطی ساده چندمتغیره در فاز ۱ توسط ایوزیان و همکاران[۸] مورد بررسی قرار گرفت. جنسن و همکاران [۱۱] از مدل‌های خطی آمیخته برای پایش پروفایل‌های خطی عمومی و خود همبسته در فاز ۱ استفاده نمودند.

کیو و همکاران [۱۲] برای پایش پروفایل‌های ناپارامتری از مدل‌های آمیخته در شرایط خود همبستگی درون پروفایل‌ها استفاده نمودند. نورالسنا و همکاران [۱۳] و سلیمانی و همکاران [۱۴] پایش پروفایل‌های خطی ساده در حالت خودهمبستگی بین و درون پروفایل را در فاز ۲ و همچنین هادی‌زاده و سلیمانی[۱۵] پایش پروفایل‌های خطی ساده را در فاز ۲ بررسی نمودند. تقی‌پور و همکاران [۱۶] پایش پروفایل‌های چند متغیره خودهمبسته در فاز ۱ را تحت مدل ARMA(1,1) بررسی نمودند.

از طرف دیگر با پیشرفت فن‌آوری و سنسورهای اندازه‌گیری فاصله زمانی بین دو بار نمونه‌گیری کاهش یافته است. این موضوع باعث می‌شود که مشاهدات درون پروفایل‌ها با یکدیگر خودهمبسته شوند که این مسئله در عملکرد نمودارهای کنترلی تاثیر می‌گذارد و نمودارهای کنترل معمولی که برای کنترل پروفایل‌های چند متغیره توسعه داده شده‌اند کارایی خود را از دست می‌دهند. سلیمانی و نورالسنا [۱۷] و سلیمانی و همکاران [۱۸] پایش پروفایل‌های چند متغیره خودهمبسته در فاز۲ را مورد بررسی قرار دادند. لیکن در عمل معمولا پارامترهای پروفایل چند متغیره نامعلوم و بایستی براورد شود و هم‌چنین هیچ اطلاعاتی در خصوص پایداری(تحت کنترل به آن) فرآیند در دست نیست.

در این مقاله روش‌هایی برای پایش پروفایل‌های خودهمبسته چند متغیره در فاز ۱ ارایه می شود. عملکرد روش‌های پیشنهادی با استفاده از شبیه‌سازی ارزیابی می‌شود. برای تحلیل داده‌ها از کدنویسی در نرم افزار Matlab استفاده شده است و معیارهای احتمال خطای نوع اول و توان آزمون نمودارهای کنترلی پیشنهادی به ازای تغییرات مختلف محاسبه شده‌اند.

ساختار مقاله بدین صورت است که در بخش دوم، مدل‌های پروفایل‌های چندمتغیره خودهمبسته AR(1) و MA(1) و روش تغییر متغیر جهت کاهش اثر خودهمبستگی ارائه می‌شوند. سپس در بخش سوم، روش‌های پایش پروفایل‌های چندمتغیره خودهمبسته در فاز۱ ارائه خواهند شد. در بخش چهارم، عملکرد روش‌های پیشنهادی با استفاده از شبیه‌سازی و معیارهای احتمال خطای نوع اول و توان آزمون تحت فرض مدل‌های AR(1) و MA(1) مورد بررسی قرار گرفته و با هم مقایسه می‌شوند. بخش نتیجه‌گیری هم، بخش پایانی است.

۲- مدل‌سازی پروفایل چندمتغیره خودهمبسته

مدل پروفایل خطی چند متغیره ساده زمانی که مقادیر باقیمانده درون یک پروفایل از یک فرآیند اتورگرسیو مرتبه اول (AR(1)) و میانگین متحرک مرتبه اول (MA(1)) پیروی کنند به‌ترتیب به صورت زیر هستند:

مدل AR(1)

$$\mathbf{y}_{ik} = \boldsymbol{\beta}_0 + \mathrm{x}_i\boldsymbol{\beta}_1 + \boldsymbol{\varepsilon}_{ik}, \quad i = 1,2,\dots n, \mathrm{k} = 1,2,\dots m, \quad \boldsymbol{\varepsilon}_{ik} = \boldsymbol{\varepsilon}_{i-1,k}\boldsymbol{\varphi} + \mathbf{a}_{ik} \qquad (۱)$$

مدل MA(1)

$$\mathbf{y}_{ik} = \boldsymbol{\beta}_0 + \mathrm{x}_i\boldsymbol{\beta}_1 + \boldsymbol{\varepsilon}_{ik}, \quad \boldsymbol{\varepsilon}_{ik} = \mathbf{a}_{ik} - \mathbf{a}_{i-1,k}\boldsymbol{\theta} \qquad (۲)$$

می‌توان نشان داد که ساختار خودهمبستگی موجود در رابطه‌های (۱) و (۲) منجر به ایجاد ساختار خودهمبستگی مشابهی درون مشاهده‌های هر پروفایل به ازای مقادیر مختلف x می‌شود، یعنی:

مدل AR(1)

$$\mathbf{y}_{ik} - (\boldsymbol{\beta}_0 + x_i\boldsymbol{\beta}_1) = [\mathbf{y}_{(i-1)k} - (\boldsymbol{\beta}_0 + x_{(i-1)}\boldsymbol{\beta}_1)]\boldsymbol{\varphi} + \mathbf{a}_{ik}. \qquad (۳)$$

مدل MA(1)

$$\mathbf{y}_{ik} - (\boldsymbol{\beta}_0 + x_i\boldsymbol{\beta}_1) = \mathbf{a}_{ik} - \mathbf{a}_{(i-1)k}\boldsymbol{\theta}. \qquad (۴)$$

در رابطه‌های بالا، y_{ik} بردار $\mathrm{p} \times 1$ شامل متغیرهای پاسخ بوده و $\boldsymbol{\beta}_0$ و $\boldsymbol{\beta}_1$ بردارهای $\mathrm{p} \times 1$ پارامترهای رگرسیونی هستند. ماتریس‌های $\boldsymbol{\varphi}$ و $\boldsymbol{\theta}$ ماتریس‌های قطری $(\mathrm{p} \times \mathrm{p})$ بوده که

جهت سادگی عناصر روی قطرها یعنی ضرایب خود همبستگی (φ, θ) برای هر ماتریس برابر در نظر گرفته می‌شوند، یعنی:

$$\boldsymbol{\varphi} = \begin{bmatrix} \varphi & \dots & 0 \\ \vdots & \varphi & \vdots \\ 0 & \dots & \varphi \end{bmatrix}, \quad (۵)$$

$$\boldsymbol{\theta} = \begin{bmatrix} \theta & \dots & 0 \\ \vdots & \theta & \vdots \\ 0 & \dots & \theta \end{bmatrix}. \quad (۶)$$

همچنین $\boldsymbol{\varepsilon}_{\mathbf{ik}}$ نیز برداری با بعد $p \times 1$ از مقادیر باقی مانده‌های خودهمبسته بوده که از توزیع نرمال چند متغیره با بردار میانگین صفر و ماتریس کوواریانس معلوم با بعد $p \times p$ پیروی می‌کند. همچنین $\mathbf{a}_{ik}$ بردار متغیرهای مستقل و دارای توزیع نرمال چند متغیره با بردار میانگین صفر و ماتریس کوواریانس $\Sigma_{\mathbf{a}}$ است.

در ادبیات کنترل کیفیت آماری بیان شده است که وجود خودهمبستگی تاثیر نامطلوبی بر عملکرد پایش فرآیندهای مختلف دارد. لذا رویکرد ارائه شده توسط گل‌نبی و هوشمند به منظور حذف اثر خودهمبستگی در پایش پروفایل خطی ساده چند متغیره در فاز ۱ توسعه داده می‌شود.

برای این منظور، مشاهده‌ها پروفایل kام با استفاده از رابطه (۷) در ذیل، به مشاهده‌هایی مستقل تبدیل می‌شوند.

$$\mathbf{Y}_k' = \boldsymbol{\gamma}^{-\frac{1}{2}}\left(\mathbf{Y}_k - \mathbf{E}(\mathbf{Y})\right). \quad (۷)$$

که در آن $\mathrm{E}(\mathbf{Y}) = \mathbf{XB}$ بوده و $\boldsymbol{\gamma}$ ماتریس کوواریانس مشاهده‌ها است که برای مدل خودهمبستگی AR (1) و MA(1) به ترتیب به صورت زیر است:

مدل AR(1)

$$\boldsymbol{\gamma} = \begin{bmatrix} \frac{1}{(1-\varphi^2)}\sigma_a^2 & \frac{\varphi}{(1-\varphi^2)}\sigma_a^2 & \frac{\varphi^2}{(1-\varphi^2)}\sigma_a^2 & \cdots & \frac{\varphi^{n-1}}{(1-\varphi^2)}\sigma_a^2 \\ \frac{\varphi}{(1-\varphi^2)}\sigma_a^2 & \frac{1}{(1-\varphi^2)}\sigma_a^2 & \frac{\varphi}{(1-\varphi^2)}\sigma_a^2 & \cdots & \frac{\varphi^{n-2}}{(1-\varphi^2)}\sigma_a^2 \\ \frac{\varphi^2}{(1-\varphi^2)}\sigma_a^2 & \frac{\varphi}{(1-\varphi^2)}\sigma_a^2 & \frac{1}{(1-\varphi^2)}\sigma_a^2 & \cdots & \frac{\varphi^{n-3}}{(1-\varphi^2)}\sigma_a^2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ \frac{\varphi^{n-1}}{(1-\varphi^2)}\sigma_a^2 & \frac{\varphi^2}{(1-\varphi^2)}\sigma_a^2 & \frac{\varphi}{(1-\varphi^2)}\sigma_a^2 & \cdots & \frac{1}{(1-\varphi^2)}\sigma_a^2 \end{bmatrix}, \quad (۸)$$

مدل MA(1)

$$\boldsymbol{\gamma} = \begin{bmatrix} (1+\theta^2)\sigma_a^2 & -\theta\,\sigma_a^2 & 0 & \cdots & 0 \\ -\theta\,\sigma_a^2 & (1+\theta^2)\sigma_a^2 & -\theta\,\sigma_a^2 & \cdots & 0 \\ 0 & -\theta\,\sigma_a^2 & (1+\theta^2)\sigma_a^2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & (1+\theta^2)\sigma_a^2 \end{bmatrix}. \quad (۹)$$

واضح است که پس از استفاده از رابطه تبدیل (۷)، ماتریس $\mathbf{Y}$ شامل متغیرهای پاسخ خودهمبسته، به ماتریس $\mathbf{Y}'$ که مشاهده‌ها آن مستقل است تبدیل خواهد شد. در این صورت ارتباط بین متغیرهای پاسخ تبدیل یافته و متغیر مستقل در iامین مشاهده از پروفایل kام زمانی که فرآیند تحت کنترل است به صورت زیر بیان می‌شود:

$$\mathbf{y}'_{ik} = \boldsymbol{\alpha}_0 + \mathbf{x}_i\boldsymbol{\alpha}_1 + \boldsymbol{\varepsilon}'_{ik}; \quad (۱۰)$$

$$i = 1,2,\dots n, k = 1,2,\dots m,$$

۳-رویکردهای پایش پروفایل‌های چندمتغیره خطی ساده خودهمبسته در فاز ۱

در این بخش دو روش شامل نمودارهای کنترل مربع تی و لامبدا ویلکس/ام برای پایش پروفایل‌های چندمتغیره خطی ساده خودهمبسته در فاز ۱ توسعه داده می‌شود.

۳-۱- روش مربع تی

به منظور ایجاد آماره مربع تی برای پایش فرآیند، ابتدا براورد ماتریس $\mathbf{a} = (\mathbf{a}_0, \mathbf{a}_1)^T$ (بعد $p\times2$) با استفاده از روش حداقل مربعات و بر اساس رابطه تبدیل ذکر شده به صورت زیر به دست می آید:

$$\hat{\mathbf{a}}_k = (\hat{\mathbf{a}}_{0k}, \hat{\mathbf{a}}_{1k})^T = (\mathbf{X}^T\mathbf{X})^{-1}\mathbf{X}^T\mathbf{Y}_k', \quad (۱۱)$$

که در آن عناصر ماتریس $\hat{\mathbf{a}}_k$ را می‌توان از رابطه زیر محاسبه نمود:

(۱۲)

$$\hat{\mathbf{a}}_k = \begin{pmatrix} \hat{\mathrm{a}}_{01\mathrm{k}} & \dots & \hat{\mathrm{a}}_{0\mathrm{pk}} \\ \hat{\mathrm{a}}_{11\mathrm{k}} & \dots & \hat{\mathrm{a}}_{1\mathrm{pk}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \bar{\mathrm{y}}'_{01k} - \hat{\mathrm{a}}_{11k}\bar{\mathrm{x}} & \dots & \bar{\mathrm{y}}'_{0pk} - \hat{\mathrm{a}}_{1pk}\bar{\mathrm{x}} \\ \frac{\mathrm{S}_{xy(1)}}{\mathrm{S}_{xx}} & \dots & \frac{\mathrm{S}_{xy(p)}}{\mathrm{S}_{xx}} \end{pmatrix},$$

در رابطه (۱۳)، $\bar{\mathrm{x}} = \frac{1}{\mathrm{n}}\sum_{i=1}^{n}\mathrm{x}_i$ ، $\mathrm{S}_{xx} = \sum_{i=1}^{n}(\mathrm{x}_i - \bar{\mathrm{x}})^2$

$\bar{\mathrm{y}}'_{jk} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}y'_{ijk}$، $\mathrm{S}_{xy'} = \sum_{i=1}^{n}(\mathrm{x}_i - \bar{\mathrm{x}})\mathrm{y}'_{ijk}$ و $\hat{\mathrm{a}}_{ijk} = \frac{\mathrm{S}_{xy(j)}}{\mathrm{S}_{xx}}$ سپس آماره توسعه یافته مربع تی برای پایش پروفایل kام در فاز ۱ به صورت زیر محاسبه می‌شود:

$$\mathbf{T}_k^2 = (\hat{\mathbf{a}}_k - \bar{\hat{\mathbf{a}}})^T\mathbf{S}_{\hat{a}}^{-1}(\hat{\mathbf{a}}_k - \bar{\hat{\mathbf{a}}}), \quad (۱۳)$$

که در آن میانگین براوردهای پارامترهای مدل رگرسیونی به صورت زیر محاسبه می‌شود:

$$\bar{\hat{\mathbf{a}}}^T = \frac{1}{m}\sum_{k=1}^{m}\hat{\mathbf{a}}_K^T. \quad (۱۴)$$

به منظور محاسبه ماتریس $\mathbf{S}_{\hat{a}}$ در رابطه (۱۴)، ابتدا ماتریس $\hat{\mathbf{V}} = \left[\hat{\mathbf{V}}_1, \hat{\mathbf{V}}_2, \dots, \hat{\mathbf{V}}_{m-1}\right]^T$ تشکیل می‌شود که در آن:

$$\hat{\mathbf{v}}_k = \hat{\mathbf{a}}_{k+1}^T - \hat{\mathbf{a}}_k^T ; \mathrm{k} = 1,2, \dots , m-1. \qquad (۱۵)$$

در نهایت داریم:

$$\mathbf{S}_{\hat{a}} = \frac{\hat{\mathbf{V}}^T \times \hat{\mathbf{V}}}{2 \times (m-1)}. \qquad (۱۶)$$

حد بالای نمودار کنترل مربع تی به گونه‌ای محاسبه می‌شود که احتمال خطای نوع اول دلخواه به دست می‌آید.

۳-۲- روش لامبدا ویلکس/ام

فرض کنید m پروفایل خطی ساده چندمتغیره در دسترس است که هر کدام دارای n سطح است. به منظور توسعه آماره لامبدا ویلکس، ابتدا تمامی m نمونه ادغام و یک نمونه کلی به بزرگی mn تشکیل می‌شود. سپس m-1 متغیر نشانگر به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$z_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{اگر } i \text{اُمین مشاهده مربوط به } j \text{اُمین پروفایل باشد} \\ 0 & \text{در غیر این صورت} \end{cases} \qquad (۱۷)$$

که در آن $i = 1, mn; j = 1, \dots m-1$، سپس پروفایل m ام به عنوان نمونه مرجع در نظر گرفته می‌شود و برای i امین مشاهده را خواهیم داشت:

$$\acute{\mathbf{y}}_i = \mathbf{a}_0 + \mathbf{a}_1 \mathbf{x}_i + \mathbf{a}_{01} \mathbf{Z}_{1i} + \mathbf{a}_{02} \mathbf{Z}_{2i} + \dots + \mathbf{a}_{0\acute{m}} \mathbf{Z}_{\acute{m}\imath} + \mathbf{a}_{11} \mathbf{Z}_{1i} x_i + \mathbf{a}_{12} \mathbf{Z}_{2i} x_i + \dots + \mathbf{a}_{1\acute{m}} \mathbf{Z}_{\acute{m}\imath} x_i + \boldsymbol{\varepsilon}_i, \mathbf{i} = 1, \dots , mn, \acute{m} = m-1. \qquad (۱۸)$$

به منظور بررسی پایداری فرایند آزمون فرضیه ذکر شده در رابطه(۱۹) در نظر گرفته می‌شود:

$$\mathbf{H}_0 : \mathbf{a}_{01} = \dots = \mathbf{a}_{02} = \mathbf{a}_{0\acute{m}} = \mathbf{a}_{11} = \mathbf{a}_{12} = \dots = \mathbf{a}_{1\acute{m}} = 0 \qquad (۱۹)$$

$\mathbf{H}_1$: حداقل یکی از $\mathbf{a}_{ij}$ ها صفر نیستند.

مدل رگرسیونی کاهش یافته تحت فرضیه صفر به صورت زیر است:

$$\mathbf{y}'_i = \mathbf{a}_0 + \mathbf{a}_1 x_i + \boldsymbol{\varepsilon}_i ; \mathbf{i} = 1, \dots mn. \qquad (۲۰)$$

آماره تعمیم یافته لامبدا ویلکس از طریق رابطه زیر قابل محاسبه است:

$$\Lambda = \frac{|\mathbf{Y}'^T \mathbf{Y}' - \hat{\mathbf{a}}_f^T \mathbf{X}_f^T \mathbf{Y}'|}{|\mathbf{Y}'^T \mathbf{Y}' - \hat{\mathbf{a}}_r^T \mathbf{X}_r^T \mathbf{Y}'|}, \qquad (۲۱)$$

که در آن Y' یک ماتریس $mn \times p$ شامل متغیرهای پاسخ تبدیل شده برای نمونه‌های ادغام شده، $\mathbf{X}_f$ یک ماتریس $mn \times 2m$ شامل متغیرهای مستقل برای مدل کامل و همچنین $\mathbf{X}_r$ یک ماتریس $mn \times 2$ شامل متغیرهای مستقل برای مدل تعدیل یافته است. همچنین $\hat{\mathbf{a}}_f$ یک ماتریس $2m \times p$ از پارامترهای برآورد شده برای مدل کامل است در حالی که $\hat{\mathbf{a}}_r$ ماتریس $2 \times p$ از پارامترهای مدل رگرسیونی کاهش یافته است. اگر $\Lambda > UCL$ باشد، یک هشدار خارج از کنترل از نمودار کنترل تعمیم یافته دریافت می‌شود که UCL به نحوی تنظیم می‌شود که احتمال خطای نوع اول مورد نظر حاصل شود. به منظور پایش ماتریس کوواریانس، ابتدا براورد نااُریب ماتریس کوواریانس ضرایب برای نمونه k ام به شکل زیر محاسبه می‌شود:

$$\mathbf{S}_k = \frac{\acute{\mathbf{Y}}_k^T \mathbf{Y}'_k - \hat{\mathbf{a}}_k^T \mathbf{X}^T \mathbf{Y}'_k}{n-2}, k = 1, \dots , m, \qquad (۲۲)$$

که $\mathbf{Y}'_k$ یک ماتریس $n \times p$ شامل مقادیر پاسخ تبدیل شده در پروفایل k ام بوده و $\mathbf{X}$ یک ماتریس $n \times 2$ شامل متغیرهای مستقل است. همچنین $\hat{\mathbf{a}}_k$ نیز براوردی برای $\mathbf{a}$ در پروفایل k ام است. به منظور محاسبه آماره مناسب برای بررسی پایداری ماتریس کوواریانس، آماره M به صورت زیر محاسبه می‌شود:

$$M = \frac{|\mathbf{S}_1|^{(n-2)/2} |\mathbf{S}_2|^{(n-2)/2} \dots |\mathbf{S}_m|^{(n-2)/2}}{|\mathbf{S}_{pl}|^{m(n-2)/2}} = \frac{(|\mathbf{S}_1| \times |\mathbf{S}_2| \times \dots \times |\mathbf{S}_m|)^{(n-2)/2)}}{|\mathbf{S}_{pl}|^{m(n-2)/2}}, \qquad (۲۳)$$

که:

$$\mathbf{S}_{pl} = \frac{\sum_{k=1}^{m} (n-2) \mathbf{S}_k}{\sum_{k=1}^{m} (n-2)} = \frac{\sum_{k=1}^{m} \mathbf{S}_k}{m}. \qquad (۲۴)$$

لازم به ذکر است که مقادیر آماره M در بازه $[0,1]$ به دست می‌آیند. نمودار کنترلی مورد نظر زمانی یک هشدار خارج از کنترل صادر می‌کند که $M<LCL$ باشد که LCL حد پایین نمودار کنترلی است که به نحوی تنظیم می‌شود که احتمال خطای نوع اول از پیش تعیین به دست آید. در نهایت، آماره M به طور همزمان با آماره لامبدا ویلکس استفاده می‌شود تا هم بردار میانگین و هم ماتریس کواریانس پروفایل‌های خطی چند متغیره به طور همزمان پایش شود. روش ترکیبی مورد نظر زمانی یک هشدار خارج از کنترل صادر می‌کند که حداقل یکی از آماره‌های آن در حالت خارج از کنترل قرار گیرند.

۴- ارزیابی عملکرد روش‌های پیشنهادی

در این قسمت عملکرد روش‌های پیشنهادی ارائه شده، برای پایش پروفایل‌های چندمتغیره خطی ساده خودهمبسته در فاز۱ با استفاده از معیار توان آزمون، مورد بررسی قرار می‌گیرد. برای این منظور، از یک مثال عددی استفاده شده و تحلیل روی پارامترهای مدل‌های AR(1) و MA(1) و مکان نقطه تغییر نیز انجام شده است.

همچنین یک پروفایل خطی ساده دو متغیره به‌صورت $y_1 = 3 + 2x + \varepsilon_1$ و $y_2 = 2 + x + \varepsilon_2$ در نظر گرفته شده که در اینجا $n = 4$ و $m = 20$ است. برای مقایسه عملکرد

روش‌های پیشنهادی در فاز ۱، احتمال خطای نوع اول کل برای هر روش به‌طور تقریبی برابر ۰/۰۵ در نظر گرفته شده است. در روش لامبدا ویلکس، برای به‌دست آوردن احتمال کل خطای نوع اول مساوی ۰/۰۵، احتمال خطای نوع اول هر نمودار مساوی ۰/۰۲۵ فرض شده است. سپس، توان این نمودارهای کنترل برای شناسایی حالات خارج از کنترل مختلف از طریق ۱۰۰۰۰ شبیه‌سازی برحسب معیار احتمال هشدار مقایسه شده است. مقادیر متغیر مستقل در هر پاسخ به صورت x=۲,۴,۶,۸ در نظر گرفته شده است. جداول ۱ تا ۶ احتمال هشدار خارج از کنترل را تحت تغییرها مختلف و زمان‌های تغییر متفاوت برای ۱۶و۱۳و۱۰= τ تحت پارامترهای خودهمبستگی θ, φ برابر با ۰/۹ نشان می‌دهند. تغییرات در پارامترهای مدل به این صورت است که عرض از مبدا پروفایل اول از β_{01} به $\beta_{01}+\lambda_0\sigma_1$ و شیب پروفایل اول از β_{11} به $\beta_{11}+\delta_1\sigma_1$ و انحراف معیار پروفایل اول از σ_1 به $\gamma_1\sigma_1$ تغییر داده می شود و توان آزمون درجداول گزارش می‌شود. لازم به ذکر است که در جداول ۱ تا ۶ روش لامبدا ویلکس که به همراه آماره M برای پایش فرآیند استفاده می‌شود با علامت WL/M نشان داده شده است.

جدول ۱- احتمال هشدار خارج از کنترل تحت تغییرهای پله‌ای از β_{01} به $\beta_{01}+\lambda_0\sigma_1$ تحت مدل AR(1) با ۰/۹=φ

τ =۱۰										
λ_0	۰/۲	۰/۴	۰/۶	۰/۸	۱	۱/۲	۱/۴	۱/۶	۱/۸	۲
T^2	۰/۰۱۱۳	۰/۰۲۲۷	۰/۰۳۷۸	۰/۰۵۴۶	۰/۰۶۲۸	۰/۰۶۸۰	۰/۰۷۴۲	۰/۰۷۵۷	۰/۰۸۰۸	۰/۰۸۱۶
WL/M	۰/۰۱۳۴	۰/۰۲۴۳	۰/۰۳۹۲	۰/۰۵۷۱	۰/۰۶۴۰	۰/۰۶۸۲	۰/۰۷۴۵	۰/۰۷۷۹	۰/۰۸۱۳	۰/۰۸۲۶

جدول ۲- احتمال هشدار خارج از کنترل تغییرهای پله‌ای از β_{11} به $\beta_{11}+\lambda_1\sigma_1$ تحت مدلAR(1) با ۰/۹= φ

τ =۱۳										
λ_1	۰/۰۲۵	۰/۰۵	۰/۰۷۵	۰/۱	۰/۱۲۵	۰/۱۵۰	۰/۱۷۵	۰/۲	۰/۲۲۵	۰/۲۵
T^2	۰/۰۲۸۳	۰/۰۰۴۷	۰/۰۴۳۴	۰/۰۳۰۶	۰/۰۰۶۲	۰/۰۲۱۷	۰/۰۷۱۲	۰/۶۷۱	۰/۷۱۶	۰/۶۱۰
WL/M	۰/۲۶۹	۰/۰۴۳۰	۰/۰۷۷۹	۰/۰۴۰۸	۰/۱۲۰	۰/۱۲۲۴	۰/۱۴۸۸	۰/۲۰۰۸	۰/۲۱۴	۰/۲۷۹

جدول۳- احتمال هشدار خارج از کنترل تحت تغییرهای پله‌ای از σ_1 به $\gamma_1\sigma_1$ تحت مدلAR(1) با ۰/۹= φ

τ =۱۶										
γ	۱/۲	۱/۴	۱/۶	۱/۸	۲	۲/۲	۲/۴	۲/۶	۲/۸	۳
T^2	۰/۰۶۱۱	۰/۰۶۶۰	۰/۰۶۹۱	۰/۰۷۰۹	۰/۰۷۳۲	۰/۰۷۴۸	۰/۰۷۶۰	۰/۰۷۶۵	۰/۰۷۷۱	۰/۰۷۷۴
WL/M	/۰۷۵۴	۰/۰۷۶۷	۰/۰۷۸۷	۰/۰۷۹۱	۰/۰۷۹۹	۰/۰۸۰۰	۰/۰۸۰۴	۰/۰۸۰۵	۰/۰۸۰۹	۰/۰۸۱۱

جداول ۱ تا ۳ توان آزمون روش‌های پیشنهادی را تحت تغییرها در عرض از مبدا، شیب و انحراف معیار پروفایل اول به ترتیب تحت زمان تغییر ۱۰,۱۳,۱۶, = τ بر اساس مدل AR(1) نشان می‌دهند. همانگونه که در جداول ۱ تا ۳ مشاهده می‌شود با افزایش بزرگی تغییر توان آزمون در هر دو روش افزایش می‌یابد. همچنین بر اساس نتایج می‌توان بیان نمود که توان آزمون روش لامبدا ویلکس/ام بهتر از روش مربع تی است.

جدول۴- احتمال هشدار خارج از کنترل تحت تغییرهای پله‌ای از β_{01} به $\beta_{01+}\lambda_0\sigma_1$ تحت مدل MA(1) با θ =۰/۹

τ =۱۰										
λ_0	۰/۲	۰/۴	۰/۶	۰/۸	۱	۱/۲	۱/۴	۱/۶	۱/۸	۲
T^2	۰/۰۲۳۹	۰/۰۵۵۵	۰/۰۷۰۲	۰/۰۷۸۰	۰/۰۸۱۹	۰/۰۸۵۵	۰/۰۸۷۵	۰/۰۸۸۶	۰/۰۸۹۴	۰/۰۹۰۱
WL/M	۰/۰۲۴۹	۰/۰۵۸۵	۰/۰۷۵۹	۰/۰۷۸۵	۰/۰۸۲۷	۰/۰۸۵۰	۰/۰۸۷۱	۰/۰۸۸۹	۰/۰۸۹۶	۰/۰۹۲۸

جدول ۵- احتمال هشدار خارج از کنترل تحت تغییرهای پله‌ای از β_{11} به $\beta_{11+}\lambda_1\sigma_1$ تحت مدل MA(1) با θ =۰/۹

τ =۱۳										
λ_1	۰/۰۲۵	۰/۰۵	۰/۰۷۵	۰/۱	۰/۱۲۵	۰/۱۵۰	۰/۱۷۵	۰/۲۱	۰/۲۲۵	۰/۲۵
T^2	۰/۰۰۱۳	۰/۰۰۴۷	۰/۰۰۸۶	۰/۰۰۹۴	۰/۰۰۹۶	۰/۰۱۱۷	۰/۰۵۴۳	۰/۰۸۷۳	۰/۰۹۴۷	۰/۰۹۸۶
WL/M	۰/۰۰۴۱	۰/۰۲۳۳	۰/۰۳۸۵	۰/۰۴۵۸	۰/۰۹۰۴	۰/۱۰۳	۰/۱۷۰۸	۰/۱۸۹۳	۰/۲۰۶۱	۰/۲۹۸۳

جدول۶- احتمال هشدارخارج از کنترل تحت تغییرهای پله‌ای از σ_1 به $\gamma_1\sigma_1$ تحت مدل MA(1) با θ =۰/۹

τ =۱۶										
γ	۱/۲	۱/۴	۱/۶	۱/۸	۲	۲/۲	۲/۴	۲/۶	۲/۸	۳
T^2	۰/۰۶۱۸	۰/۰۶۵۰	۰/۰۶۸۸	۰/۰۷۲۲	۰/۰۷۳۳	۰/۰۷۴۸	۰/۰۷۵۹	۰/۰۷۶۴	۰/۰۷۷۸	۰/۰۷۸۳
WL/M	۰/۰۷۵۳	۰/۰۷۷۵	۰/۰۷۷۵	۰/۰۷۹۲	۰/۰۷۹۷	۰/۰۸۰۱	۰/۰۸۰۶	۰/۰۸۰۷	۰/۰۸۰۹	۰/۰۸۱۲

۵- نتیجه‌گیری و پیشنهاد برای مطالعه آتی

در این تحقیق، پایش پروفایل‌های خطی ساده چندمتغیره در فاز ۱ با وجود همبستگی درون پروفایل‌ها مورد بررسی قرار گرفت. از آن‌جا که وجود خودهمبستگی تاثیر نامطلوبی بر عملکرد پایش پروفایل‌ها دارد، در این تحقیق رویکردی که توسط گل‌نبی و هوشمند به منظور حذف اثر خودهمبستگی در پایش پروفایل خطی ساده چند متغیره در فاز ۱ مطرح شده بود، تعمیم داده شد. این تغییر متغیر پاسخ‌های خودهمبسته را به پاسخ‌های مستقل تبدیل نمود و سپس عملکرد دو روش در فاز ۱ پروفایل‌های خطی ساده چندمتغیره با استفاده از شبیه‌سازی و استفاده از معیار توان آزمون مورد بررسی قرار گرفت. در این مقاله دو مدل AR(1) و MA(1) بررسی و پروفایل‌های چندمتغیره بر اساس آن‌ها مدل‌سازی شدند و اثر تغییر متغیر اعمال شده روی آن‌ها تحلیل شد. نتایج شبیه‌سازی به ازای تغییرهای مختلف در پارامترهای پروفایل‌های چندمتغیره به ازای ضرایب خودهمبستگی قویφ=۰/۹ وθ=۰/۹ و تحت زمان‌های مختلف تغییر گزارش شد. نتایج نشان داد که هر چه بزرگی تغییر افزایش می‌یابد توان نمودارهای کنترل نیز بهبود می‌یابد. همچنین در مقایسه بین دو روش مورد ارزیابی عملکرد نمودار لامبدا ویلکس/ام بهتر از نمودار مربع تی ارزیابی شد زیرا توان آزمون بیش‌تری را از خود نشان داد.

بررسی عملکرد نمودارهای کنترلی پیشنهادی تحت مرتبه‌های بالاتر از ۱ در مدل‌های AR و MA می‌تواند به عنوان پیشنهاد برای مطالعه آتی مدنظر قرار گیرد. همچنین ارزیابی عملکرد سایر روش‌ها برای پایش پروفایل‌های چندمتغیره خودهمبسته و با استفاده از سایر تبدیل متغیرها برای حذف اثر خودهمبستگی می‌تواند موضوع‌های مناسبی برای تحقیق‌های آتی باشند.

۶- مراجع

[۱] ایوزیان، م.، (۱۳۸۸). توسعه روش‌هایی برای پایش پروفایل‌های چند متغیره، رساله دکترا. دانشگاه علم و صنعت، دانشکده صنایع.

[۲] سلیمانی، پ.، (۱۳۹۰). توسعه روشهایی برای پایش پروفایل‌های چند متغیره خودهمبسته، رساله دکترا، دانشگاه آزاد اسلامی واحد علوم و تحقیقات، دانشکده فنی و مهندسی.

[۳] مونتگمری، د.س.، (۱۳۹۳). کنترل کیفیت آماری. ترجمه: دکتر رسول نورالسناء، چاپ ششم، انتشارات دانشگاه علم و صنعت.

[4] Mestek, O., Pavlik, J., and Suchanek, M. (1994*). Multivariate control charts: control charts for calibration curves. Fresenius*، *Journal of Analytical Chemistry*, 350(6), 344-351.

[5] Stover, F. S., and Brill, R.v. (1998). *Statistical quality control applied to ion chromatography calibrations. Journal of Chromatography, A,* 804(1-2), 37-43.

[6] Mahmoud, M. A., and Woodall, W. H. (2004). *Phase I monitoring of linear profiles with calibration application, Technometrics*, 46(4), 380-391.

[7] Kazemzadeh, R.B., Noorossana R. & Amiri, A. (2010). *Phase II monitoring of autocorrelated polynomial profile in AR(1) processes. International Journal of Science and Technology, Scientia Iranica*.17(1), 12-24.

[8] Eyvazian, M., Noorossana, R., Saghaei, A. & Amiri, A. (2011). *Phase II monitoring of multivariate multiple linear regression profiles. Quality and Reliability Engineering International*, 27 (3), 281-296.

[9] Williams, J.D., Woodal, W.H., and Birch, J. B. (2007). *Statistical monitoring of nonlinear product and process quality profiles. Quality and Reliability Engineering International,* 23(8), 925-941.

*[10]*Mahmoud, M. A., Parker, P. A., WOODALL, w. h., AND Hawkins, D. M. (2007). *A change point method for linear profile data. Quality and Reliability Engineering International,* 23(2), 247-268

[11] Jensen, W.A., Birch, L.B. and Woodall, W.H (2008). *Monitoring correlation within linear profiles using mixed models. Journal of Quality Technology,* 40(2), 167-183.

[12] Qui P., Zou, Ch., Wang, Zh., (2010). *Nonparametric profile monitoring by mixed effects modeling. Technometrics,* 52(3): 265-277.

[13] Noorossana, R., Eyvazian, M., Amiri, A. & Mahmoud, M. A. (2010). *Statistical monitoring of multivariate multiple linear regression profiles in phase I with calibration application. Quality and Reliability Engineering International*, 26(3), 291-303.

[14] Soleimani, P., Noorossana, R. & Amiri, A. (2009). *Simple linear profiles monitoring in the presence of within profile autocorrelation. Computers and Industrial Engineering*, 57(3), 1015-1021.

[15] Hadizadeh, R., Soleimani, P. (2017). *Monitoring simple linear in the presence of generalized autoregressive conditional heteroscedasticity*. Quality and Relibility Engineering International, Wiley. 33(8), 2423-2436.

[16] Taghipour, M., Amiri, A., Saghaei, A. (2017). *Phase I monitoring of within-profile autocorrelated multivariate linear profiles. Journal of Engineering Research*, 5 (4), 195-208.

[17] Soleimani, P. & Noorossana, R. (2014). *Monitoring multivariate simple linear profiles in the presence of between profile autocorrelation. Communications in Statistics-Theory and Methods,* 43(3), 530-546.

[18] Soleimani, P., Noorossana, R. & Niaki, S.T.A. (2013). *Monitoring autocorrelated multivariate simple linear profiles. The International Journal of Advanced Manufacturing Technology*, 67(5-8), 1857-1865.

*[19]*Golnabi, S. & Houshmand A. A. (1999). *Multivariate Shewhart X-bar chart. Internet Statistics, 4, a webbased journal: www.interstat.stat.vt.edu*.