بهینه‌سازی یکپارچه قیمت، سیاست‌های وارانتی پایه و تمدید وارانتی با در نظر گرفتن محصولات از وارانتی خارج‌شده

محسن افصحی

دانشجوی دکتری مهندسی صنایع، دانشکده مهندسی صنایع و سیستم ها، دانشگاه تربیت مدرس (M.afsahi@modares.ac.ir)

علی حسین‌زاده کاشان*

استادیار، دانشکده مهندسی صنایع و سیستم ها، دانشگاه تربیت مدرس

بختیار استادی

استادیار، دانشکده مهندسی صنایع و سیستم ها، دانشگاه تربیت مدرس (Bostadi@modares.ac.ir)

سید حسام‌الدین ذگردی

استاد، دانشکده مهندسی صنایع و سیستم ها، دانشگاه تربیت مدرس(Zegordi@modares.ac.ir)

چکیده امروزه تولیدکنندگان از وارانتی به‌عنوان یک ابزار تبلیغاتی مهم جهت افزایش سهم بازار استفاده می‌کنند. ارائه محصول به بازار با وارانتی طولانی‌تر گرچه باعث جذب بیشتر مشتریان می‌شود، ولی هزینه‌های تولیدکننده را افزایش می‌دهد. در دنیای واقعی، تولیدکنندگان پس از اتمام وارانتی پایه، امکانی برای خریداران فراهم می‌کنند که با پرداخت مبلغی مشخص، بتوانند وارانتی خود را برای مدت‌زمانی معین تمدید نمایند. بدین ترتیب محصولاتی که وارانتی خود را تمدید نمی‌کنند به‌عنوان محصولات از وارانتی خارج‌شده، منبع اصلی سودآوری تولیدکننده از فروش قطعات یدکی محسوب می‌شوند. در این تحقیق مدلی جدید ارائه‌شده است که به تولیدکننده کمک می‌نماید در جهت افزایش سود و با در نظر گرفتن سطح رضایت مشتری و اثر فروش قطعات یدکی به محصولات از وارانتی خارج‌شده، مواردی نظیر قیمت‌گذاری محصول اصلی، طول دوره وارانتی پایه، طول دوره تمدید وارانتی، قیمت تمدید وارانتی را مورد بهینه‌سازی قرار دهد. برای حل مدل از الگوریتم ازدحام ذرات توسعه‌یافته و الگوریتم لیگ ورزشی استفاده‌شده است. با توجه به اینکه شرکت گلدیران در ایران به‌عنوان نماینده خدمات پس از فروش شرکت LG برای محصولات تحت این برند امکان تمدید وارانتی پایه را فراهم نموده است، مدل ارائه‌شده با داده‌های مربوط به محصول LED مورد حل قرارگرفته است. نتایج نشان می‌دهد که شرکت گلدیران با تغییر مقادیر طول دوره وارانتی پایه و تمدید وارانتی با توجه به چرخه عمر محصول و مدت‌زمان برنامه‌ریزی می‌تواند به افزایش حاشیه سود تولیدکننده کمک نماید درصورتی‌که هم‌اکنون این شرکت برای تمامی محصولات خود طول دوره وارانتی و تمدید وارانتی را ثابت در نظر می‌گیرد.

کلمات کلیدی وارانتی پایه، ورانتی تمدیدشده، قیمت‌گذاری پویا، بهینه‌سازی ترکیبی.

۱- مقدمه

پیشرفت تکنولوژی در جوامع صنعتی باعث شده است که محصولات ازنظر عملکرد بسیار به یکدیگر نزدیک شوند. ازاین‌رو تولیدکنندگان برای ایجاد تمایز و افزایش سهم بازار سعی به ارائه وارانتی‌های طولانی‌تر برای محصولات خود دارند[۱]. وارانتی قراردادی است که طی آن تولیدکننده متعهد به احیای عیوب یا خرابی‌های محصولات در دوره‌ای مشخص و با حدودی تعیین‌شده در قرارداد می‌شود. این عیوب معمولاً مرتبط با طراحی، تولید و یا تضمین کیفیت است [۲].

وارانتی با دوره‌ی طولانی‌تر معمولاً مشتریان بیشتری را جذب می‌کند (چراکه طول دوره وارانتی شاخصی از عملکرد محصول در منظر مشتریان است)، اما به همان نسبت هزینه‌های سرویس بالاتری دارد و بدیهی است که هزینه سرویس‌دهی به تولیدکننده وارد می‌شود. هزینه سرویس وارانتی هزینه احیای خرابی محصول در طول دوره وارانتی است و این هزینه به محصول بستگی دارد و می‌تواند بین ۲ تا ۱۰ درصد قیمت فروش محصول باشد [۳]. قرارداد وارانتی هم برای تولیدکننده و هم برای خریدار نقش حمایتی دارد. از تولیدکننده در برابر شکایات نامرتبط که بر اثر استفاده نادرست از محصول رخ می‌دهد، حمایت می‌کند

*(Corresponding author) A.kashan@modares.ac.ir

Archive of SID

www.SID.ir

برای مثال تولیدکنندگان آمریکایی سالانه چیزی حدود ۲۵ بیلیون دلار برابر با ۲ درصد سود سالانه خود را برای سرویس وارانتی هزینه می‌کنند و از خریدار در برابر خرابی‌های ناشی از عدم کارکرد مناسب محصول حمایت می‌نماید [۲].

به‌طورکلی تولیدکنندگان دو نوع وارانتی برای محصولات ارائه می‌دهند. وارانتی پایه[1] و وارانتی تمدیدشده[2] [۴]. زمانی که مشتریان یک محصول را خریداری می‌کنند، آن محصول شامل وارانتی می‌شود و مدت وارانتی آن به همراه محصول معلوم است. در پیشینه تحقیق به این نوع وارانتی، وارانتی پایه گفته می‌شود. بعد از اتمام وارانتی پایه، تولیدکننده در قبال دریافت مبلغی مشخص پیشنهاد تمدید وارانتی برای مدتی معین را به مشتری می‌دهد که این نوع وارانتی، وارانتی تمدیدشده نامیده می‌شود[۵]. بنابراین این چالش به وجود می‌آید که تولیدکننده قیمت و طول دوره تمدید وارانتی را به چه صورت ارائه دهد. بدیهی است که هرچقدر تولیدکننده طول دوره تمدید وارانتی را طولانی‌تر و قیمت آن را پایین‌تر ارائه دهد مشتریان بیشتری وارانتی محصول خود را تمدید می‌کنند ولی حاشیه سود آن از فروش تمدید وارانتی پایین‌تر می‌آید.

در دنیای واقعی سودآوری تولیدکنندگان محصولات تحت وارانتی از سه منبع اصلی تأمین می‌شود: ۱) سود حاصل از فروش محصول اصلی، ۲) سود حاصل از فروش قطعات یدکی به محصولات از وارانتی خارج‌شده و ۳) سود حاصل از فروش تمدید وارانتی. این در حالی است که معمولاً در تحقیقات حوزه بهینه‌سازی وارانتی نقش فروش قطعات یدکی به محصولات از وارانتی خارج‌شده در سود تولیدکننده دیده نمی‌شود و بیشتر به مسئله کمینه‌سازی هزینه پرداخته می‌شود برای نمونه می‌توان به مقالات [۳], [۶]–[۸]اشاره کرد.

در اینجا چالشی که وجود دارد محاسبه تعداد خرابی مربوط به محصولات تحت وارانتی و از وارانتی خارج‌شده در هر بازه زمانی از چرخه عمر محصول است. که در این تحقیق مدلی ارائه‌شده است که قابلیت محاسبه تعداد خرابی محصولات تحت وارانتی پایه، وارانتی تمدیدشده و از وارانتی خارج‌شده در هر بازه زمانی از چرخه عمر محصول را دارد تا تولیدکنندگان توانایی تخمین هزینه‌های وارانتی محصولات و همچنین تخمین سود حاصل از فروش قطعات یدکی به محصولات از وارانتی خارج‌شده را داشته باشند.

بدین ترتیب در این تحقیق هدف بیشینه‌سازی سود تولیدکننده در بازه زمانی برنامه‌ریزی به‌واسطه قیمت‌گذاری پویای محصول در دوره‌های مختلف زمانی، تعیین طول دوره وارانتی پایه، طول دوره تمدید وارانتی و قیمت تمدید وارانتی است.

در ادامه در بخش ۲ مروری بر ادبیات موضوع انجام‌شده است. در بخش ۳ به تعریف مسئله و ارائه فرضیات و نحوه اندیس گذاری پرداخته می‌شود. در بخش ۴ مدل پیشنهادی معرفی‌شده و در بخش ۵ روش حل مدل ارائه خواهد شد. در بخش ۶ مطالعه موردی در رابطه با محصول "55 LED شرکت LG که با خدمات پس از فروش شرکت گلدیران در ایران به فروش می‌رسد، موردبحث قرار می‌گیرد و درنهایت در بخش ۷ جمع‌بندی در رابطه با مسئله تحقیق ارائه می‌شود.

۲- مرور ادبیات

بلیشک و مورتی[3] (۱۹۹۲) اولین مقاله مروری را در پیشینه تحقیق در رابطه با وارانتی محصولات نو و تحلیل آن مطرح منتشر کردند. آن‌ها مروری جامع بر مدل‌های ریاضی صورت دادند و برای اولین بار دسته‌بندی کاملی از سیاست‌های مختلف وارانتی ارائه کردند[۹]. مورتی و همکاران (۲۰۰۴) به بررسی اهمیت و ابعاد مختلف تصمیمات لجستیکی در مدیریت وارانتی پرداختند[۱۰].

در پیشینه موضوع قیمت‌گذاری و سیاست‌های وارانتی به‌عنوان دو عامل مهم در افزایش رضایت مشتریان و سهم بازار یادشده است. بدیهی است پیشنهاد وارانتی با مدت طولانی‌تر گرچه باعث افزایش رضایت و فروش محصولات می‌شود ولی هزینه‌های تولیدکننده را نیز افزایش می‌دهد. از طرف دیگر فروش محصول باقیمت کمتر موجب فروش بیشتر تولیدکننده می‌شود ولی بدیهی است که حاشیه سود تولیدکننده پایین می‌آید. در این تحقیق مدلی ارائه‌شده است که به‌صورت یکپارچه تصمیمات تولیدکننده را در رابطه با تعیین قیمت محصول، طول دوره وارانتی، طول دوره تمدید وارانتی و قیمت تمدید وارانتی در راستای افزایش سود وی، بهینه می‌کند. بنابراین، در اینجا دو حوزه اصلی از ادبیات وارانتی موردبررسی قرار خواهد گرفت: قیمت‌گذاری به همراه بهینه‌سازی طول وارانتی پایه و وارانتی تمدیدشده.

کلیکمن و برگر[4] تقاضای محصول را تابعی نمایی از دو متغیر تصمیم قیمت و طول دوره وارانتی در نظر گرفتند و باهدف بیشینه‌سازی سود تولیدکننده، مقادیر متغیرهای تصمیم را محاسبه نمودند. آن‌ها فرض بر این داشتند که سیاست وارانتی سیاست تجدید ناپذیر و تعویض رایگان[5] بوده و قیمت‌گذاری محصول به‌صورت ایستا در نظر گرفته‌شده است[۱۱]. منزس و کوریم[6] مقدار بهینه طول دوره وارانتی پایه را به‌واسطه حل یک

[1] Base Warranty
[2] Extended Warranty
[3] Blischke and Murthy
[4] Glickman and Berger
[5] Non-renewing free replacement warranty
[6] Menezes and Currim

Archive of SID
www.SID.ir

مسئله بهینه‌سازی تک دوره‌ای وارانتی برای دو نوع سیاست وارانتی تعمیر رایگان و تعمیر با دریافت بخشی از هزینه محاسبه نمودند[۱۲].

لین و شاو[۷] از تئوری کنترل برای تعیین طول دوره وارانتی پایه و فروش تجمعی استفاده کردند [۱۳]. وو و همکاران مدلی جهت بهینه‌سازی قیمت و طول دوره وارانتی با فرض سیاست وارانتی تجدید پذیر و توزیع عمر نرمال، ارائه نمودند [۱۴]. کیم و پارک[۸] مدلی دومرحله‌ای با فرض سیاست تعویض رایگان ارائه دادند که به‌صورت یکپارچه تصمیمات قیمت، طول دوره وارانتی پایه و کنترل موجودی قطعات یدکی را مورد بهینه‌سازی قرار می‌دهد [۱۵]. لین و همکاران با رویکرد تئوری کنترل مقادیر قیمت، طول دوره وارانتی پایه و نرخ تولید را مورد بهینه‌سازی قراردادند[۱۶] . چن و همکاران نشان دادند که چگونه استراتژی‌های مختلف قیمت‌گذاری و طول دوره وارانتی پایه می‌تواند بر زنجیره تأمین تأثیرگذار باشد [۱۷]. دارقث و همکاران با ارائه یک مدل ریاضی به بهینه‌سازی قیمت و طول دوره وارانتی پایه با درنظر گرفتن سرویس‌های نگهداری و تعمیرات پرداختند [۸]. افصحی و همکاران با در نظر گرفتن تأثیر فروش قطعات یدکی به محصولات از وارانتی خارج‌شده، با رویکرد مدل‌سازی ریاضی به بهینه‌سازی قیمت محصول، طول دوره وارانتی پایه و کنترل موجودی قطعات یدکی پرداختند [۱۸].

به‌طورکلی می‌توان گفت تحقیقات نسبتاً کمتری در حوزه وارانتی تمدیدشده به نسبت وارانتی پایه در پیشینه تحقیقات حوزه وارانتی وجود دارد. پادمانابهام[۹] مدلی جهت بهینه‌سازی طول دوره وارانتی پایه و طول دوره وارانتی تمدیدشده با فرض بازار انحصاری ارائه دادند[۱۹]. لام و لام[۱۰] با استفاده از تئوری بازی‌ها به یافتن سیاست بهینه وارانتی تمدیدشده پرداختند [۴]. هارتمن و لاکسانا[۱۱] با رویکرد برنامه‌ریزی پویا به بهینه‌سازی استراتژی مشتریان در خرید تمدید وارانتی بعد از به پایان رسیدن وارانتی پایه پرداختند[۲۰]. سو و شن[۱۲] سیاست‌های مختلف تمدید وارانتی (تک بعدی و دو بعدی) را با در نظر گرفتن انواع مختلف تعمیر مورد تحلیل قرار دادند[۶].

علی‌رغم تحقیقات بسیاری که در حوزه بهینه‌سازی سیاست‌های وارانتی صورت گرفته، هیچ تحقیقی مشاهده نمی‌شود که به‌صورت یکپارچه به بهینه‌سازی قیمت محصول، طول دوره وارانتی پایه، طول دوره تمدید وارانتی و قیمت تمدید وارانتی بپردازد. درحالی‌که تصمیمات قیمت و وارانتی پایه کاملاً با تصمیمات تمدید وارانتی در ارتباط است و بر یکدیگر تأثیرگذارند.

در این مقاله هدف ارائه مدلی ریاضی که قیمت محصول و طول دوره وارانتی را در بازه‌های مختلف زمانی چرخه عمر محصول به‌منظور بیشینه‌سازی سود تولیدکننده تعیین کند. تقاضای محصول تابعی از قیمت، طول دوره وارانتی و زمان در نظر گرفته‌شده و تعداد خرابی محصولات تحت وارانتی و از وارانتی خارج‌شده در بازه‌های مختلف زمانی بر اساس نرخ خرابی آن‌ها موردمحاسبه قرار می‌گیرد.

۳- شرح مسئله

در این مسئله هدف بیشینه‌سازی سود تولیدکننده با در نظر گرفتن سطح رضایت مشتریان در تأمین قطعات یدکی است. مؤلفه‌های درآمدی تولیدکننده عبارت‌اند از درآمد حاصل از فروش محصول اصلی، درآمد حاصل از فروش تمدید وارانتی، درآمد حاصل از فروش قطعه یدکی به محصولات از وارانتی خارج‌شده و هزینه‌های تولیدکننده عبارت است از هزینه تولید قطعه یدکی و هزینه انهدام قطعات یدکی خراب. قیمت محصول اصلی، طول دوره وارانتی پایه، طول دوره تمدید وارانتی و قیمت تمدید وارانتی به‌عنوان متغیرهای تصمیم در مدل ارائه‌شده در نظر گرفته‌شده است. تقاضای محصول اصلی تابعی از زمان، طول دوره وارانتی پایه و قیمت محصول است که با طول دوره وارانتی پایه رابطه مستقیم و باقیمت محصول رابطه عکس دارد. احتمال خرید تمدید وارانتی از سوی مشتری تابعی است که با طول دوره تمدید وارانتی رابطه مستقیم و باقیمت آن رابطه عکس دارد. بدین ترتیب هر چه تولیدکننده مدت زمان بیشتری برای تمدید وارانتی ارائه دهد مشتری با احتمال بالاتری تصمیم به خرید تمدید وارانتی می‌نماید. همچنین با رویکردی نوین تعداد خرابی محصولات تحت وارانتی و از وارانتی خارج‌شده در هر دوره زمانی برنامه‌ریزی تولید قطعات یدکی موردمحاسبه قرار می‌گیرد.

۳-۱- فرضیات و نمادگذاری

فرضیات در نظر گرفته‌شده در این تحقیق به‌صورت زیر است:

۱. با توجه به ماهیت محصول، تابع توزیع پایایی محصولات از توزیع نمایی پیروی می‌کند.
۲. تمام شکایات در طول دوره وارانتی پایه و وارانتی تمدیدشده معتبر است.
۳. سیاست وارانتی پایه و وارانتی تمدیدشده، تجدید ناپذیر و با هزینه تعویض رایگان (FRW[۱۳]) در نظر گرفته‌شده است.

همچنین نمادهای مورداستفاده شده در این تحقیق در جدول زیر نشان داده‌شده است:

پارامترها	توضیحات
T	طول چرخه عمر بر اساس دوره‌های برنامه‌ریزی تولید قطعات یدکی
g	تعداد دوره‌هایی که تولیدکننده تضمین می‌کند قطعات یدکی در بازار موجود است
$W^B_{\min}$	حداقل مقدار طول دوره وارانتی پایه

[7] Lin and Shue
[8] kim and park
[9] Padmanabhan
[10] Lam and Lam
[11] Hartman and Laksana
[12] Su and Shen
[13] Free Replacement Warranty

Archive of SID
www.SID.ir

$W_{\max}^{B}$	حداکثر مقدار طول دوره وارانتی پایه
$W_{\min}^{E}$	حداقل مقدار طول دوره وارانتی تمدیدشده
$W_{\max}^{E}$	حداکثر مقدار طول دوره وارانتی تمدیدشده
$pr_{E}^{\min}$	حداقل مقدار قیمت وارانتی تمدیدشده
$pr_{E}^{\max}$	حداکثر مقدار قیمت وارانتی تمدیدشده
$P_{0}^{\min}$	حداقل مقدار قیمت پایه محصول اصلی
$P_{0}^{\max}$	حداکثر مقدار قیمت پایه محصول اصلی
C_t	هزینه تولید محصول در دوره t ام
V_t	قیمت فروش قطعه یدکی در دوره t ام
X_t	مقدار تقاضای قطعه یدکی در دوره t ام
D_t	مقدار تقاضای قطعه یدکی برای محصولات از وارانتی خارج شده در دوره t ام
α	ضریب تابع احتمال خرید وارانتی تمدیدشده
U	
ε	ضریب قیمت در تابع تقاضا
λ	نرخ خرابی محصولات
ρ_w	پارامتر سطح سرویس برای محصولات تحت وارانتی
ρ_{pw}	پارامتر سطح سرویس برای محصولات از وارانتی خارج‌شده
S	حداکثر تقاضای بازار
متغیرهای تصمیم	توضیحات
p_0	قیمت فروش در دوره j ام
w_B	طول دوره وارانتی پایه
w_E	طول دوره وارانتی تمدیدشده
$p\,r_E$	قیمت وارانتی تمدیدشده

در این تحقیق دوره برنامه‌ریزی از دو بخش چرخه عمر محصول و دوره تضمین وجود قطعات یدکی تشکیل‌شده است. هر محصول بعد از اتمام وارانتی پایه بسته به شرایط وارانتی تمدیدشده (قیمت و طول تمدید وارانتی)، تصمیم به تمدید یا عدم تمدید وارانتی می‌گیرند. درصورتی‌که مشتری وارانتی پایه را برای محصول خود تمدید ننماید یا وارانتی تمدیدشده آن به پایان برسد، محصول از وارانتی خارج‌شده به‌حساب می‌آید. بدین ترتیب تولیدکننده می‌تواند از فروش قطعات یدکی به محصولات از وارانتی خارج‌شده در صورت خرابی آن‌ها کسب درآمد کند. در اینجا تولیدکننده باید تخمین مناسبی از تعداد قطعه یدکی موردنیاز برای محصولات تحت وارانتی پایه و تمدیدشده و از وارانتی خارج‌شده داشته باشد.

این دوره برنامه‌ریزی به دوره‌های کوچک‌تری بانام دوره برنامه‌ریزی تولید قطعات یدکی تقسیم می‌شود. هر دوره برنامه‌ریزی تولید قطعات یدکی نیز به دوره‌های کوچک‌تری با عنوان دوره‌های قیمت‌گذاری تقسیم‌شده است. در هر دوره برنامه‌ریزی تولید ابتدا باید محاسبه کرد که چه تعداد از محصولات تولیدشده، تحت وارانتی هستند و چه تعداد از وارانتی خارج‌شده، چراکه در هر دوره زمانی همواره تعدادی محصول به محصولات تحت وارانتی اضافه‌شده و تعدادی هم از وارانتی خارج می‌شوند.

دوره برنامه‌ریزی از $T+g$ دوره برنامه‌ریزی تولید قطعات یدکی تشکیل‌شده است. تولید محصولات تا دوره T انجام می‌شود بعد از اتمام دوره T، تولید کننده تضمین می‌کند که در g دوره بعدی قطعه یدکی محصول در بازار موجود باشد. ولی تا دوره $T + w_B + w_E$ همچنان محصول تحت وارانتی در بازار وجود خواهد داشت همچنین از دوره $T + w_B + w_E$ تا دوره $T+g$ تولیدکننده تعهد دارد که قطعات یدکی را در بازار فراهم نماید. به‌منظور پاسخ به نیاز قطعات یدکی بازار در هر دوره برنامه‌ریزی تولید قطعات یدکی باید تخمین مناسبی از تعداد قطعات یدکی مربوط به محصولات تحت وارانتی و از وارانتی خارج‌شده داشته باشد.مدل‌سازی مسئله

در این بخش مدل ریاضی مسئله بر اساس فرضیات و نمادگذاری معرفی‌شده در بخش ۳ موردبحث قرار می‌گیرد.

۳-۲- تابع هدف

تابع هدف در این تحقیق بیشینه‌سازی سود تولیدکننده در نظر گرفته‌شده بطوریکه از اجزای درآمدی و هزینه‌ای مختلفی تشکیل‌شده است.

$$\max z = \sum_{t=1}^{T}(p_t - C_t).D(p_t, w_B) + \sum_{t=w_B+1}^{T+g} V_t.D_t \qquad (۱)$$
$$+\Lambda(w_E, p\,r_E).\sum_{t=1}^{T} D(p_t, w_B).pr_E - \sum_{t=1}^{T+g} Cs_t.X_t$$

در رابطه ۱ اولین عبارت سود حاصل از فروش محصول اصلی را نشان می‌دهد که از حاصل‌ضرب سود هر محصول در مقدار تولید محصول در بازه‌های مختلف زمانی تشکیل‌شده است. مقدار تولید محصول تابعی از قیمت فروش محصول در آن بازه زمانی و طول دوره وارانتی پایه در نظر گرفته‌شده که باقیمت رابطه عکس و با طول وارانتی پایه رابطه

Archive of SID
www.SID.ir

مستقیم دارد. عبارت دوم درآمد حاصل از فروش قطعه یدکی به محصولات از وارانتی خارج‌شده است. عبارت سوم درآمد حاصل از فروش تمدید وارانتی به مشتریان را نشان می‌دهد که هر مشتری با احتمالی مشخص که تابعی از قیمت و طول تمدید وارانتی است، وارانتی خود را تمدید می‌نماید. درنهایت عبارت پنجم هزینه تولید قطعات یدکی را نشان می‌دهد.

$$S(t)=\begin{cases}\dfrac{U}{\left(1+\varphi e^{-\varepsilon U t}\right)}, & 0\le t\le\eta\\ \dfrac{U}{\left(\varepsilon U\left(t-\eta\right)+\theta\right)}, & \eta\le t\le T\end{cases} \quad (۲)$$

$$\varphi=\frac{U}{D_0}-1$$

$$\theta=1+\varphi e^{-\varepsilon U\eta}$$

$$p_t=p_0-qt \quad (۳)$$

$$D(p_t,w)=S(t)-k_1(p_t-P_{\min})+k_2 w_B \quad (۴)$$

$$\forall k_1>0,\ k_2>0.$$

$$\Theta(w_E,pr_E)=e^{-\alpha\frac{pr_E}{W_E}} \quad (۵)$$

$$\Omega_B^t=D(p_t,w_B).(1-\Lambda(w_E,pr_E)) \quad (۶)$$

$$\Omega_{BE}^t=S(p_t,w_B).\Lambda(w_E,pr_E) \quad (۷)$$

رابطه ۲ تقاضای محصول را بر اساس چرخه عمر محصول محاسبه می‌کند، در این رابطه η زمانی است که تابع تقاضای محصول در دوره بلوغ به بیشترین مقدار خود می‌رسد. بنابراین تقاضا تا η صعودی و بعد از آن نزولی است. رابطه ۳ تغییرات قیمت محصول اصلی را نسبت به زمان نشان می‌دهد که $q>0$ نرخ کاهش قیمت در طول زمان است. رابطه ۴ تقاضای محصول اصلی را در بازه‌های زمانی مختلف نشان می‌دهد. در این رابطه تقاضا باقیمت محصول اصلی رابطه عکس و با طول دوره وارانتی پایه رابطه مستقیم دارد. در این رابطه k_1 ضریب قیمت و k_2 ضریب وارانتی پایه در تابع تقاضا است.

رابطه ۵ تابع احتمال خرید تمدید وارانتی را توسط مشتریان نشان می‌دهد. این تابع با طول دوره وارانتی تمدیدشده رابطه مستقیم و باقیمت آن رابطه عکس دارد. رابطه ۶ تعداد مشتریانی را نشان می‌دهد که وارانتی محصول خود را تمدید می‌نمایند و رابطه ۷ تعداد مشتریانی را محاسبه می‌کند که تمایلی به خرید تمدید وارانتی برای محصول خود ندارند.

۳-۳- وضعیت محصولات

برای محاسبه تعداد خرابی محصولات در هر بازه زمانی، ابتدا نیاز است بدانیم چه تعداد محصول تحت وارانتی و چه تعداد محصول از وارانتی خارج‌شده در هر بازه زمانی وجود دارد. ازآنجایی‌که تعداد محصولات تحت وارانتی و از وارانتی خارج‌شده در بازه‌های مختلف زمانی دائماً در حال تغییر است، نیاز است که وضعیت هر محصول در هر بازه زمانی مشخص شود. در هر بازه زمانی، بر اساس اینکه این دوره در چه زمانی تولیدشده است، می‌تواند وضعیت تحت وارانتی (پایه یا تمدیدشده) یا از وارانتی خارج‌شده را داشته باشد.

با توجه به اینکه تابع پایایی محصول نمایی در نظر گرفته‌شده، می‌توان احتمال خرابی هر محصول را در هر بازه زمانی از رابطه زیر محاسبه نمود.

$$\delta=P(f\le t\,|\,f\ge t-1)=1-e^{-\lambda} \quad (۸)$$

حال تعداد خرابی محصولات تحت وارانتی و از وارانتی خارج‌شده در هر بازه زمانی از توزیع دوجمله‌ای پیروی می‌کند که در ادامه به‌تفصیل به آن پرداخته می‌شود.

۴-۳- تعداد خرابی محصولات تحت وارانتی پایه و تمدیدشده

در اینجا یک متغیر تصادفی تعریف می‌شود با نماد y_{kt}^1 که متغیر تصادفی تعداد خرابی محصولات تحت وارانتی پایه که در دوره k تولیدشده و در دوره t خرابی می‌شوند، است. اگر فاصله زمانی بین دوره k و دوره t که k<t است، کمتر از w_B باشد؛ قطعاً تمامی محصولاتی که در دوره k تولیدشده تحت وارانتی پایه هستند. بنابراین محصولات با این شرایط را وضعیت ۱ می‌نامیم. حال تابع توزیع y_{kt}^1 تابع دوجمله‌ای به‌صورت زیر است:

$$y_{kt}^1\sim b(D(p_t,w_B),\delta) \quad (۹)$$

حال تعداد کل خرابی‌های مربوط به محصولات تحت وارانتی پایه در دوره t به‌صورت زیر محاسبه می‌شود.

$$P(y_{kt}^1\le n_{kt}^1)\ge\rho_w\Rightarrow \quad (۱۰)$$

$$P\left(z<\frac{n_{kt}^1+0.5-D(P_j,w_B).\delta}{\sqrt{D(P_j,w_B).\delta.(1-\delta)}}\right)\ge\rho_w\Rightarrow$$

$$n_{kt}^1=\varphi^{-1}(\rho_w).\sqrt{D(P_j,w_B).\delta.(1-\delta)}+D(P_j,w).\delta-0.5$$

$$\forall k\in\{1,2,\cdots,T\}$$

$$\forall t\in\{k+1,2,\cdots,T+w_B\}$$

$$nwb_t=\sum_{k=1}^{t}n_{kt}^1 \qquad \forall t\in\{1,\ldots,w_B\}. \quad (۱۱)$$

$$N_{w_B}(t)=\sum_{k=t-w_B}^{t}n_{kt}^1 \qquad \forall t\in\{w_B+1,\ldots,T+w_B\}. \quad (۱۲)$$

رابطه ۱۰ حداکثر تعداد خرابی را با سطح سرویس ρ_w برای محصولات تحت وارانتی پایه که در دوره k تولیدشده و در دوره t خرابی می‌شوند را با استفاده از مفهوم تسطیح پیوستگی محاسبه می‌نماید. رابطه ۱۱ و ۱۲ هم حداکثر تعداد کل خرابی‌های محصولات تحت وارانتی پایه را در دوره t محاسبه می‌کند.

w_B+1 اولین دوره‌ای است که تقاضای قطعه یدکی برای محصولات تحت وارانتی تمدیدشده به وجود می‌آید و تا دوره $T+w_B+w_E$ تقاضای قطعه یدکی برای محصولات تحت وارانتی تمدیدشده وجود دارد. متغیر y_{kt}^2 به‌عنوان متغیر تصادفی تعداد خرابی محصولات تحت وارانتی تمدیدشده که در دوره k تولیدشده و در دوره t خرابی می‌شوند، است. رابطه ۱۳ توزیع این متغیر تصادفی را نشان می‌دهد.

Archive of SID
www.SID.ir

$$y_{kt}^{2} \sim b(\Omega_{BE}^{t}, \delta) \quad (۱۳)$$

رابطه ۱۴ حداکثر تعداد خرابی محصولات تحت وارانتی تمدیدشده را محاسبه می‌کند.

$$P(y_{kt}^{2} \le n_{kt}^{2}) \ge \rho_{w} \Rightarrow \quad (۱۴)$$
$$n_{kt}^{2} = \varphi^{-1}(\rho_{w}).\sqrt{\Omega_{BE}^{t}.\delta.(1-\delta)} + \Omega_{BE}^{t}.\delta - 0.5$$
$$\forall k \in \{w_{B}+1,\cdots,T\}$$
$$\forall t \in \{k+1,2,\cdots,T+w_{B}+w_{E}\}$$
$$N_{w_{E}}(t) = \sum_{k=t-w_{B}-w_{E}}^{t} n_{kt}^{2} \quad (۱۵)$$
$$\forall t \in \{w_{B}+1,...,T+w_{B}+w_{E}\}.$$

رابطه ۱۵ حداکثر تعداد خرابی در دوره t در رابطه با محصولاتی که تحت وارانتی تمدیدشده هستند را محاسبه می‌کند.

۳-۵- تعداد خرابی محصولات از وارانتی خارج‌شده

اگر وارانتی پایه محصولی که در دوره اول تولیدشده، تمدید نشود، دوره $w_B + 1$ اولین دوره‌ای است که خرابی مربوط به محصولات از وارانتی خارج‌شده به وجود می‌آید. از دوره $T + w_B + w_E$ به بعد تمامی محصولاتی که در بازار وجود دارند از وارانتی خارج می‌شوند و تا پایان دوره برنامه‌ریزی تولیدکننده می‌بایست تقاضای قطعات یدکی محصولات از وارانتی خارج‌شده را برآورده نماید. متغیر y_{kt}^{3} نیز به‌عنوان متغیر تصادفی حداکثر تعداد خرابی محصولات از وارانتی خارج‌شده برای محصولاتی که وارانتی خود را تمدید نکرده‌اند، تعریف می‌شود.

$$y_{kt}^{3} \sim b(\Omega_{B}^{t}, \delta) \quad (۱۶)$$
$$P(y_{kt}^{3} \le n_{kt}^{3}) \ge \rho_{o} \Rightarrow \quad (۱۷)$$
$$n_{kt}^{3} = \varphi^{-1}(\rho_{w}).\sqrt{\Omega_{B}^{t}.\delta.(1-\delta)} + \Omega_{B}^{t}.\delta - 0.5$$
$$\forall k \in \{w_{B}+1,\cdots,T\}$$
$$\forall t \in \{k+1,2,\cdots,T+w_{B}+w_{E}\}$$
$$nwe_{t} = \sum_{k=t-w_{B}}^{t} n_{kt}^{3} \quad (۱۸)$$
$$\forall t \in \{w_{B}+1,...,T+w_{B}+w_{E}\}.$$

رابطه ۱۶ حداکثر تعداد خرابی برای محصولاتی که وارانتی خود را تمدید نکرده‌اند محاسبه می‌کند. رابطه ۱۷ هم مجموع تعداد خرابی را برای محصولاتی که به‌واسطه عدم تمدید از وارانتی خارج‌شده‌اند را محاسبه می‌نماید.

برای تعداد خرابی محصولاتی که به‌طور حتم از وارانتی خارج‌شده‌اند (بدین معنی که از زمان فروش آن‌ها حداقل $w_B + w_E$ دوره زمانی گذشته باشد)، متغیر تصادفی y_{kt}^{4} تعریف‌شده است که هم توزیع متغیر تصادفی تعداد خرابی‌های محصولات تحت وارانتی پایه است. بدین ترتیب حداکثر تعداد خرابی مربوط به محصولات از وارانتی خارج‌شده به‌صورت زیر محاسبه می‌شود.

$$P(y_{kt}^{4} \le n_{kt}^{4}) \ge \rho_{o} \Rightarrow \quad (۱۹)$$
$$n_{kt}^{4} = \varphi^{-1}(\rho_{w}).\sqrt{D(p_{t},w_{B}).\delta.(1-\delta)} + D(p_{t},w_{B}).\delta - 0.5$$
$$\forall k \in \{w_{B}+w_{E}+1,\cdots,T\}$$
$$\forall t \in \{k+1,2,\cdots,T+g\}$$
$$mo_{t} = \sum_{k=1}^{t-w_{B}+w_{E}} n_{kt}^{4} \quad (۲۰)$$
$$\forall t \in \{w_{B}+w_{E}+1,...,T+w_{B}+w_{E}\}.$$

بدیهی است که بعد از دوره $T + w_B + w_E$ تمامی محصولات از وارانتی خارج می‌شوند، پس از دوره $T + w_B + w_E$ تا دوره $T + g$ به تعداد کل محصولات تولیدشده یعنی $TP = \sum_{t=1}^{T} D(p_t, w_B)$ محصول از وارانتی خارج‌شده وجود دارد. روابط زیر حداکثر تعداد خرابی را برای محصولات از وارانتی خارج‌شده در بازه زمانی ذکرشده محاسبه می‌کند.

$$P(y_{t}^{5} \le n_{t}^{5}) \ge \rho_{o} \Rightarrow \quad (۲۱)$$
$$n_{t}^{5} = \varphi^{-1}(\rho_{w}).\sqrt{TP.\delta.(1-\delta)} + TP.\delta - 0.5$$
$$\forall t \in \{T+w_{B}+w_{E}+1,\cdots,T+g\}$$

بعدازاینکه به‌واسطه روابط فوق تعداد خرابی محصولات تحت وارانتی و از وارانتی خارج‌شده در هر دوره محاسبه شد، تعداد کل خرابی‌ها (برای وضعیت‌های مختلف) برای محصولات تحت وارانتی با رابطه ۲۲ محاسبه می‌شود. همچنین رابطه ۲۳ تعداد کل قطعات یدکی که به محصولات از وارانتی خارج شده به فروش می‌رسد را مورد محاسبه قرار می‌دهد.

$$X_{t} = nwb_{t} + nwe_{t} + mo_{t} + n_{t}^{5} \quad (۲۲)$$
$$\forall t \in \{1,2,\cdots,T+g\}$$
$$D_{t} = mo_{t} + n_{t}^{5} \quad (۲۳)$$
$$\forall t \in \{w_{B}+1,\cdots,T+g\}$$

۳-۶- مدل ریاضی مسئله

در این بخش مدل ریاضی مسئله به همراه محدودیت‌ها موردبررسی قرار می‌گیرد.

$$\max z = \sum_{t=1}^{T}(p_{t}-c_{t}).D(p_{t},w_{B}) + \sum_{t=w_{B}+1}^{T+g} V_{t}.D_{t} \quad (۲۴)$$
$$+\Lambda(\omega_{E}, p\,r_{E}).\sum_{t=1}^{T} D(p_{t},w_{B}).pr_{E} - \sum_{t=1}^{T+g} Cs_{t}.X_{t}$$
$$P_{\min} \le p_{0} \le P_{\max} \quad (۲۵)$$
$$W_{\min}^{B} \le w_{B} \le W_{\max}^{B}, \quad (۲۶)$$
$$W_{\min}^{E} \le w_{E} \le W_{\max}^{E}, \quad (۲۷)$$
$$Pr_{\min}^{E} \le pr_{E} \le Pr_{\max}^{E}, \quad (۲۸)$$

رابطه ۲۱ تابع هدف بیشینه‌سازی سود تولیدکننده است. رابطه ۲۴ تا ۲۸ به ترتیب محدودیت حد بالا و حد پایین برای قیمت اولیه محصولات، وارانتی پایه، وارانتی تمدیدشده و قیمت وارانتی تمدیدشده است.

Archive of SID
www.SID.ir

۴- روش حل

در این تحقیق از دو روش فرا ابتکاری الگوریتم قهرمانی در لیگ ورزشی[۱۴] و الگوریتم ازدحام ذرات توسعه‌یافته برای حل مدل پیشنهادی استفاده‌شده است.

روش حل این مسئله بدین‌صورت است که با استفاده از الگوریتم فرا ابتکاری ازدحام ذرات مقادیر بهینه قیمت و طول دوره وارانتی به‌منظور بیشینه کردن سود تولیدکننده به دست می‌آید. در ادامه ابتدا بررسی الگوریتم‌های فرا ابتکاری پرداخته می‌شود و سپس نحوه نمایش جواب بیان در این الگوریتم‌ها موردبحث قرار می‌گیرد.

۴-۱- الگوریتم قهرمانی در لیگ ورزشی

الگوریتم قهرمانی در لیگ‌های ورزشی، یک الگوریتم جمعیت محور برای جستجوی سراسری در فضای پیوسته، با الهام از مسابقات ورزشی در جهان واقعیت، نخستین بار در سال ۲۰۰۹ توسط دکتر کاشان ارائه شد[۲۱]. در خلال این الگوریتم راه‌حل‌های متفاوتی که می‌توان به یک مسئله داد بر اساس میزان برازندگی‌شان (مقادیر تابع هدفشان)، مقایسه و هرکدام بهبود داده‌شده و نهایتاً راه‌حلی نزدیک به بهینه انتخاب می‌شود.

تعدادی تیم (استعاره از جواب‌های در حال بررسی) در قالب یک لیگ (استعاره از جمعیت جواب‌های شدنی)، طی چند هفته (استعاره از تعداد مراحل ارزیابی در یک تکرار از الگوریتم) به رقابت با یکدیگر پرداخته و دوبه‌دو باهم مسابقه می‌دهند. بر مبنای قدرت بازی (استعاره از میزان برازندگی یا مقدار تابع هدف بردار حل) حاصل از آرایش تیمی (استعاره از کد آن جواب شدنی برای مسئله) گروه‌های برنده و بازنده مشخص می‌شوند (مساوی مجاز نیست) [۲۲]. در هر هفته هر تیم توسط مربی‌اش با فرآیند تحلیل مصنوعی بازی‌های هفته‌ی قبل و با کمک از بهترین آرایش یافت شده تا آن زمان، به آرایش تیمی جدیدی می‌رسد (استعاره از ایجاد جواب‌های شدنی جدید). بدین ترتیب رقابت برای قهرمانی به مدت چندین فصل (استعاره از تعداد تکرارهای الگوریتم) ادامه خواهد یافت. تعداد فصل‌ها (S) و تیم‌ها (L) پارامترهایی قابل تنظیم هستند که تغییر آن‌ها در پاسخ نهایی الگوریتم تأثیر مستقیم دارد.

فرضیاتی که در LCA مبنا قار می‌گیرند عبارت‌اند از:

فرض ۱: تیم قوی تر احتمال برد بیشتری نسبت به تیم ضعیف‌تر داراست، اما تیم ضعیف‌تر، هم چنان، شانس بردن تیم قوی‌تر را دارد.

فرض ۲: احتمال برد یک تیم یا باخت تیم مقابل ازنقطه‌نظر هر دو تیم یکسان است.

فرض ۳: نتیجه‌ی بازی‌ها تنها به‌صورت برد یا باخت بوده و امکان تساوی وجود ندارد.

فرض ۴: تمرکز تیم‌ها بر بازی هفته‌ی آتی خود بوده و تمامی تغییرات در آرایش تیمی بر مبنای وقایع رخداده در هفته‌ی قبل است. آرایش اتخاذ شونده بر مبنای بهترین آرایش تیمی یافت شده تا آن لحظه صورت می‌پذیرد.

در ادامه توضیحات مربوط به الگوریتم LCA در ۳ مرحله تکمیل می‌شود: (۱) ایجاد برنامه بازی‌های لیگ، (۲) نحوه تعیین تیم برنده در یک بازی و (۳) نحوه تغییر آرایش تیمی با استفاده از تحلیل SWOT.

۴-۱-۱- ایجاد برنامه‌ی بازی‌های لیگ

جهت تولید یک برنامه‌ی زمانی برای مسابقات لیگ، ابتدا فرض می‌شود هر دو تیم در طول فصل فقط یک بازی (تک رفتی) باهم انجام دهند. در پایان فصل هر یک از L تیم حاضر L-1 مسابقه انجام خواهد داد که این یعنی آن‌که درمجموع $\frac{L(L-1)}{2}$ بازی در طول هر فصل صورت می‌پذیرد.

۴-۱-۲- تعیین تیم برنده در یک بازی

برنده‌ی یک بازی بر اساس مقایسه‌ی یک عدد تصادفی تولیدشده با مقدار تابعی به دست می‌آید که با میزان قدرت آن تیم رابطه‌ی مستقیم دارد. یعنی شانس برد تیم قوی‌تر بیشتر است ولی درعین‌حال، شانس برنده شدن در بازی با یک تیم قوی‌تر، هم چنان باقی است. آرایش تیمی و میزان قدرت تیم i در هفته‌ی t را به ترتیب با X_i^t و $f(X_i^t)$ نشان می‌دهند. فرض کنید، تیم‌های i و j در هفته‌ی t با یکدیگر مسابقه می‌دهند. در این صورت احتمال برد تیم i در هفته‌ی t که با p_i^t نشان داده می‌شود، از فرمول زیر به دست می‌آید.

$$p_i^t = \frac{f(x_i^t) - f}{f(x_j^t) + f(x_i^t) - 2\widehat{f}} \qquad (۲۹)$$

۴-۱-۳- تغییر در آرایش تیمی

چهار راهبرد مختلف جهت مقابله با تیم حریف، برای هر تیم قابل اتخاذ است، از ترکیب دوتایی از چهار نظرگاه SWOT پدید می‌آیند. این ترکیب‌ها عبارت‌اند از S/T، S/O، W/T و W/O که هر یک معادلات منحصر به خودشان را دارا هستند. در این معادلات i، l، j و k به ترتیب عبارت‌اند از اندیس‌های تیم خودی، تیم حریف در هفته جاری (t+1)، تیم حریف در هفته گذشته (t) و تیمی که در هفته گذشته (t) با حریف کنونی مسابقه داده است (i=1,…,L). آرایش تیم i در هفته t با $X_i^t = (x_{i1}^t, ..., x_{in}^t)$ و بهترین آرایش تیمی به‌دست‌آمده تا هفته‌ی t (حاکی از بهترین مقدار به‌دست‌آمده تابع هدف) با $B_i^t = (b_{i1}^t, ..., b_{in}^t)$ نشان داده می‌شوند. در زیر برای نشان دادن یک مؤلفه از هر بردار بالا از نماد d استفاده‌شده است $(d = 1, ..., n)$.

اگر هر دو تیم i و l در هفته t برنده بازی‌های خود با تیم های j و k باشند، آرایش تیمی i در هفته‌ی t+1 با استراتژی S/T به‌صورت زیر محاسبه می‌شود:

[14] League Championship Algorithm (LCA)

www.SID.ir

$$x_{id}^{t+1} = b_{id}^{t} + y_{id}^{t}(c_1 r_1(x_{id}^{t} - x_{kd}^{t}) + c_1 r_2(x_{id}^{t} - x_{jd}^{t})$$
$$if\ \ f(x_i^t) > f(x_j^t) \cap f(x_i^t) > f(x_k^t) \qquad (۳۰)$$
$$\forall d \in \{1,2,...,n\},$$

اگر در هفته‌ی t، تیم i از j برده باشد و تیم l به k باخته باشد، آرایش تیمی i در هفتی ی t+1 با استراتژی S/O طراحی گردیده و به‌صورت زیر خواهد بود:

$$x_{id}^{t+1} = b_{id}^{t} + y_{id}^{t}(c_2 r_1(x_{kd}^{t} - x_{id}^{t}) + c_1 r_2(x_{id}^{t} - x_{jd}^{t})$$
$$if\ \ f(x_i^t) > f(x_j^t) \cap f(x_k^t) > f(x_l^t) \qquad (۳۱)$$
$$\forall d \in \{1,2,...,n\},$$

اگر در هفته‌ی t، تیم i از j باخته و تیم l به k برده باشند، آرایش تیمی i در هفته‌ی t+1 با استراتژی W/O طراحی گردیده و به‌صورت زیر خواهد بود:

$$x_{id}^{t+1} = b_{id}^{t} + y_{id}^{t}(c_1 r_1(x_{id}^{t} - x_{kd}^{t}) + c_2 r_2(x_{jd}^{t} - x_{id}^{t})$$
$$if\ \ f(x_j^t) > f(x_i^t) \cap f(x_l^t) > f(x_k^t) \qquad (۳۲)$$
$$\forall d \in \{1,2,...,n\},$$

اگر هر دو تیم i و l در هفته t بازنده‌ی بازی‌های خود با تیم های j و k باشند، آرایش تیمی i در هفته‌ی t+1 با استراتژی W/O به‌صورت زیر است:

$$x_{id}^{t+1} = b_{id}^{t} + y_{id}^{t}(c_2 r_1(x_{kd}^{t} - x_{id}^{t}) + c_2 r_2(x_{jd}^{t} - x_{id}^{t})$$
$$if\ \ f(x_j^t) > f(x_i^t) \cap f(x_k^t) > f(x_l^t) \qquad (۳۳)$$
$$\forall d \in \{1,2,...,n\},$$

در معادلات بالا c_1 و c_2 ضرایب ثابت دورکننده و نزدیک کننده، به ترتیب در بازه‌های [0,6] و [0.9,1.1] و r_1 و r_2 اعداد تصادفی یکنواخت در بازه‌ی [0,1] و y_{id}^t مؤلفه‌ی بردار باینری تصادفی است که مشخص می‌سازد dامین عنصر از بردار x_{id}^{t+1} تغییر می‌کند یا خیر. برای همه‌ی تیم‌ها به همین شکل معادله تعریف می‌شود. تعداد یک‌های این بردار باینری از یک توزیع تصادفی هندسی با پارامتر p_c تبعیت می‌کند.

۴-۲- الگوریتم بهینه‌سازی ازدحام ذرات توسعه‌یافته

الگوریتم بهینه‌سازی ازدحام ذرات (PSO) توسط کندی و ابرهایت طی دو مقاله [۲۳]، [۲۴] با الهام از هوش جمعی پرندگان برای مسائل بهینه‌سازی که ماهیت پیوسته بر جواب‌های آن‌ها حاکم است، ارائه شد. در این الگوریتم مانند الگوریتم‌های دیگر، جمعیت اولیه به‌صورت تصادفی ایجاد می‌شود. هر ذره بهترین خاطره مکانی خود را که *pbest* نام دارد و بهترین خاطره مکانی جمعیت *فعلی را که* gbest نام دارد به خاطر می‌سپارد.

در هر مرحله با تغییر هر یک از بردارهای سرعت v_i، هر ذره i به سمت موقعیت‌های متناظر با مقادیر pbest و gbest حرکت می‌کند و اگر به موقعیت‌های بهتری رسید آن را به‌روزرسانی می‌نماید. بردار سرعت v_i در بازه $[-V_{\max}, V_{\max}]$ قرار دارد که در آن $V_{\max}$ به‌وسیله طراح الگوریتم تعیین می‌شود.

در مدل اولیه الگوریتم در هر مرحله بردار سرعت و موقعیت هر ذره i به ترتیب با روابط ۲۹ و ۳۰ به‌روزرسانی می‌شود:

$$v_i^{k+1} \leftarrow w \times v_i^{k} + c_1 \times r_1 \times \left(p_{best}^{k} - x_i^{k}\right) + c_2 \times r_2 \times \left(g_{best}^{k} - x_i^{k}\right) \qquad (۳۴)$$

$$\vec{x}_i \leftarrow \vec{x}_i + \vec{v}_i \qquad (۳۵)$$

در رابطه ۳۴، w پارامتر کنترل سرعت در نظر گرفته می‌شود و c_1 و c_2 مقادیر ثابت شتاب و $\vec{r}_1$ و $\vec{r}_2$ بردار اعداد تصادفی در بازه $[0,1]$ است. همچنین $\vec{p}_i$ بردار بهترین موقعیت به‌دست‌آمده توسط ذره i و p_{best}^{k} بردار بهترین موقعیت به‌دست‌آمده توسط ذره i و g_{best}^{k} بردار بهترین موقعیت به‌دست‌آمده توسط تمام ذرات هستند.

در این تحقیق از الگوریتم ازدحام ذرات توسعه‌یافته است استفاده می‌شود که اولین بار در سال ۲۰۱۷ توسط شفیع الله خان و همکاران معرفی شد[۲۵]. در این رویکرد مقادیر پارامترهایی که به‌صورت ثابت در الگوریتم کلاسیک PSO در نظر گرفته می‌شد به‌صورت پویا تغییر می‌کند. بدین ترتیب پارامتر کنترل سرعت به‌صورت زیر تغییر می‌کند:

$$w_i = 1 - (I - e - \tan(rand()/2)/h \qquad (۳۶)$$

بدین ترتیب هر ذره توانایی جستجوی منحصربه‌فردی پیدا می‌کند.

در رابطه ۳۱، i اندیس iامین ذره و h نشان‌دهنده اندازه جمعیت است. همچنین پارامترهای c_1 و c_2 به‌صورت زیر محاسبه می‌شوند.

$$c_1 = rand \times \exp(1) \qquad (۳۷)$$
$$c_2 = \exp(1) - rand \qquad (۳۸)$$

به‌واسطه رابطه ۳۲ و ۳۳ اگر عدد تصادفی تولیدشده کوچک باشد، مقدار c_1 کوچک و c_2 بزرگ می‌شود بنابراین قدرت واگرایی هر ذره بیشتر می‌شود. همچنین اگر عدد تصادفی تولیدشده بزرگ باشد، الگوریتم به سمت جواب محلی همگرا می‌شود.

۴-۳- روش نمایش جواب

همان‌طور که اشاره شد، متغیرهای تصمیم در این تحقیق عبارت‌اند از: قیمت اولیه محصول اصلی، طول دوره وارانتی پایه، طول دوره وارانتی تمدیدشده و قیمت وارانتی تمدیدشده.

در اینجا مقادیر قیمت محصول اصلی و قیمت وارانتی تمدیدشده به‌عنوان متغیر تصادفی پیوسته و طول دوره وارانتی و طول دوره وارانتی تمدیدشده به‌صورت گسسته در نظر گرفته می‌شود.

p_0	w_B	w_E	pr_E

شکل (۱) نحوه نمایش جواب

۵- مطالعه موردی

به‌منظور مشاهده نحوه اثرگذاری متغیرهای مسئله بر سودآوری تولیدکننده، از داده‌های شرکت گلدیران برای بیشینه‌سازی سود این شرکت در تولید محصول LED استفاده‌شده است.

Archive of SID
www.SID.ir

گلدیران نماینده رسمی لوازم‌خانگی، صوتی و تصویری، موبایل، نمایشگرهای تجاری و صنعتی، دستگاه‌ها و محصولات تهویه خانگی و صنعتی، دستگاه‌ها و محصولات تولید برق خورشیدی و محصولات روشنایی LED شرکت ال‌جی در ایران بوده و علاوه بر ارائه محصول نهایی، راهکارهای تجاری را بنا به سلیقه و نیاز مشتریان ارائه می‌نماید.

این شرکت از ابتدای فعالیت از ۲۰ سال پیش تاکنون همواره تلاش نموده در عرضه کالا و خدمات تکمیلی موردنیاز، خشنودی مستمر مشتری را مدنظر قرار داده و کالاها را باقیمتی مناسب و غیرقابل‌رقابت در شبکه توزیع گسترده خود در سراسر کشور عرضه نماید.

اطلاعات مربوط به مثال موردی در جدول ۱ نمایش داده‌شده است.

جدول(۱): پارامترهای مسئله

$P_0^{\min}$	$P_0^{\max}$	$W_{\min}^{B}$	$W_{\max}^{B}$
۶۰۰	۶۶۰	۱۶	۲۲
ρ_w	ρ_{pw}	$pr_E^{\min}$	$pr_E^{\max}$
۰,۹	۰,۸۵	۹۰	۱۱۰
$W_{\min}^{E}$	$W_{\max}^{E}$	V_0	C_0
۱۰	۱۵	۲۳۰	۵۰۰
α	q	λ	Cs_0
۰,۰۲	۰,۰۱	۰,۰۰۴	۱۸۰

با توجه به اینکه در دنیای واقعی تورم بر قیمت قطعه یدکی، هزینه تولید محصول اصلی و قطعه یدکی تأثیرگذار است، روابط زیر تأثیر تورم را بر این پارامترها نشان می‌دهد.

$$C_t = C_0.(1+\upsilon)^t \qquad \forall j \in \{1,....,T.l\}. \qquad (۳۳)$$

$$Cs_t = Cs_0.(1+\tau)^t \qquad \forall t \in \{1,....,T+g\}. \qquad (۳۴)$$

$$V_t = V_0.(1+\tau)^t \qquad (۳۵)$$

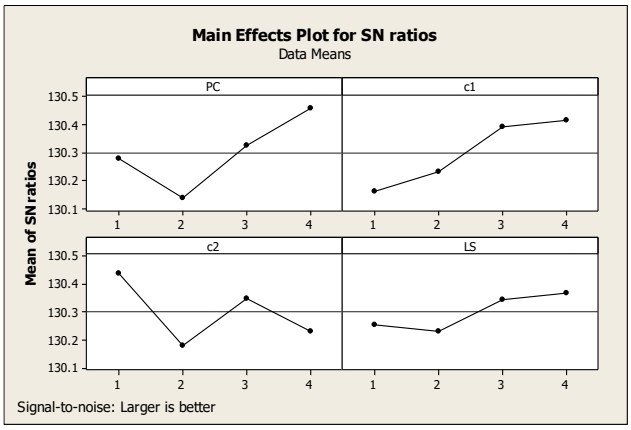
۵-۱-۱- تنظیم پارامترهای الگوریتم قهرمانی در لیگ ورزشی (LCA) با استفاده از طرح تاگوچی

قبل از حل مدل، باید پارامترهای اصلی الگوریتم فر ابتکاری برای مسئله موردنظر مورد تنظیم قرار گیرد. ازاین‌رو در این تحقیق از روش طرح تاگوچی برای دستیابی به بهترین ترکیب پارامترهای الگوریتم مورداستفاده قرار گرفته‌شده است. جدول زیر پارامترها و سطوح هر یک را نشان می‌دهد.

جدول(۲) سطوح مختلف پارامترها برای الگوریتم LCA

پارامترهای الگوریتم	سطح ۱	سطح ۲	سطح ۳	سطح ۴
PC	-۱	۰,۲۵	۰,۶	۰,۹
c_1	۰,۲	۰,۵	۱	۱,۵
c_2	۰,۲	۰,۵	۱	۱,۵
League-Size	۱۰	۲۰	۳۰	۵۰

بر اساس جدول ۲، از طرح L16 استفاده‌شده است. شرایط بهینه آزمایش با محاسبه شاخص سیگنال به نویز به دست می‌آید. شکل زیر تحلیل این شاخص را نشان می‌دهد.



شکل (۲) میانگین مقدار S/N برای سطوح هر فاکتور

بدین ترتیب بر اساس شکل ۱ سطوح منتخب برای الگوریتم LCA عبارت است از: PC=0.9، C_1=1.5، C_2=0.2 و *League-Size*=50.

الگوریتم PSO توسعه یافته که در این تحقیق مورداستفاده قرارگرفته فقط به پارامتر جمعیت اولیه نیاز دارد، ازاین‌رو جمعیت اولیه ۴۰ در نظر گرفته‌شده است. همچنین هر دو الگوریتم به تعداد ۵۰۰۰ جواب را به‌عنوان شرط توقف مورد حل قرار می‌دهند.

با استفاده از الگوریتم پیشنهادی هر مسئله 10 با حل‌شده و مقدار بهترین جواب و میانگین جواب‌ها به همراه مقادیر بهینه متغیرهای تصمیم در جدول ۲ برای مقادیر مختلف T و g نوشته‌شده است.

۵-۲- محاسبه سود و طول دوره وارانتی بهینه برای مقادیر مختلف T و g

جدول ۳ مقدار بهینه طول دوره وارانتی و سود شرکت LG را برای مقادیر مختلف چرخه عمر (T) و بازه‌های زمانی تضمین وجود قطعات یدکی (g) نشان می‌دهد. با توجه به داده‌های شرکت و مراکز تعمیر مجاز نرخ خرابی ۰,۰۷ در نظر گرفته‌شده است. با توجه به اینکه هم‌اکنون شرکت محصولات خود را با دو سال وارانتی به فروش می‌رساند، این تحلیل می‌تواند مفید باشد که اگر چرخه عمر محصولی تغییر کند شرکت باید نسبت به استراتژی قیمت‌گذاری و تعیین طول دوره وارانتی تجدیدنظر نماید.

این مسئله با استفاده از نرم‌افزار متلب و رایانه‌ای با مشخصات Pentium 4 with 8GB RAM and Corei7 3.61GHz CPU مورد حل قرار گرفت

Archive of SID
www.SID.ir

جدول(۳): مقادیر بهینه سود و طول دوره وارانتی

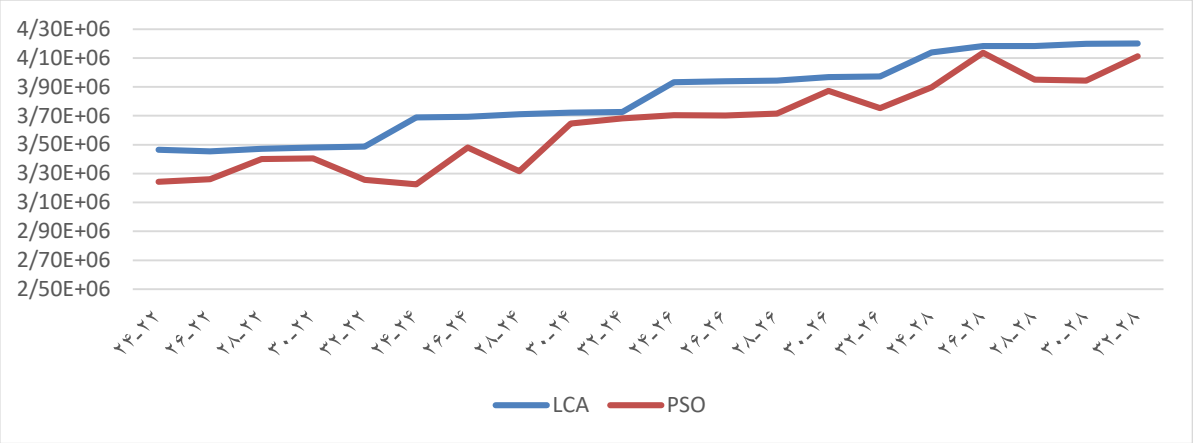
مقادیر بهینه با الگوریتم LCA													
T	g	p_0	w_B	w_E	pr_E	*mean*	*Best sol*	p_0	w_B	w_E	pr_E	*mean*	*Best sol*
۲۲	۲۴	۶۵۹	۲۲	۱۴	۱۰۹	۳۳۲۶۵۱۰	۳۴۶۵۱۱۵	۶۵۹	۲۱	۱۵	۱۱۰	۳۱۴۵۲۷۳	۳۲۴۲۵۵۰
	۲۶	۶۵۸	۲۲	۱۲	۱۰۸	۳۳۱۵۷۹۳	۳۴۵۳۹۵۱	۶۵۹	۲۱	۱۳	۱۰۸	۳۱۶۳۴۷۹	۳۲۶۱۳۱۸
	۲۸	۶۵۷	۲۱	۱۳	۱۰۸	۳۳۳۳۳۷۹	۳۴۷۲۲۷۰	۶۵۸	۲۱	۱۳	۱۰۷	۳۲۹۸۷۶۴	۳۴۰۰۷۸۷
	۳۰	۶۵۶	۲۰	۱۳	۱۰۷	۳۳۴۱۰۹۳	۳۴۸۰۳۰۶	۶۵۷	۲۰	۱۳	۱۰۶	۱۷۰۲۱۹۸	۳۴۰۴۳۹۷
	۳۲	۶۵۶	۲۰	۱۳	۱۰۷	۳۳۸۲۵۵۶	۳۴۸۷۱۷۲	۶۵۷	۱۹	۱۲	۱۰۵	۱۶۲۸۱۷۴	۳۲۵۶۳۴۹
۲۴	۲۴	۶۵۷	۲۲	۱۲	۱۰۶	۳۵۷۸۴۹۰	۳۶۸۹۱۶۵	۶۵۸	۲۱	۱۴	۱۰۷	۱۶۱۲۶۵۶	۳۲۲۵۳۱۳
	۲۶	۶۵۷	۲۱	۱۰	۱۰۵	۳۵۸۲۵۹۹	۳۶۹۳۴۰۱	۶۵۷	۲۱	۱۲	۱۰۵	۱۷۳۹۸۱۸	۳۴۷۹۶۳۶
	۲۸	۶۵۶	۲۰	۹	۱۰۳	۳۵۶۲۲۱۵	۳۷۱۰۶۴۱	۶۵۷	۲۰	۱۱	۱۰۴	۱۶۵۸۶۹۷	۳۳۱۷۳۹۶
	۳۰	۶۵۶	۱۹	۱۰	۱۰۲	۳۴۹۷۵۹۶	۳۷۲۰۸۴۷	۶۵۷	۱۹	۱۱	۱۰۳	۳۵۳۸۰۶۱	۳۶۴۷۴۸۵
	۳۲	۶۵۵	۱۹	۱۰	۱۰۲	۳۵۰۳۶۷۸	۳۷۲۷۳۱۸	۶۵۵	۱۹	۱۱	۱۰۳	۳۴۶۰۰۹۸	۳۶۸۰۹۵۶
۲۶	۲۴	۶۵۷	۲۱	۱۰	۱۰۳	۳۶۹۶۶۹۱	۳۹۳۲۶۵۰	۶۵۷	۲۱	۱۳	۱۰۶	۳۵۵۵۹۹۹	۳۷۰۴۱۶۷
	۲۶	۶۵۶	۲۰	۱۰	۱۰۲	۳۷۰۲۴۹۹	۳۹۳۸۸۲۹	۶۵۶	۲۰	۱۲	۱۰۴	۳۵۵۴۳۵۲	۳۷۰۲۴۵۰
	۲۸	۶۵۴	۱۹	۱۰	۱۰۰	۳۷۰۶۱۶۶	۳۹۴۲۷۳۱	۶۵۵	۱۹	۱۱	۱۰۴	۳۰۸۵۶۷۳	۳۲۱۴۲۴۲
	۳۰	۶۵۴	۱۸	۹	۱۰۰	۳۸۰۹۷۴۰	۳۹۶۸۴۷۹	۶۵۴	۱۹	۱۰	۱۰۱	۳۶۴۰۴۹۶	۳۸۷۲۸۶۹
	۳۲	۶۵۲	۱۸	۹	۹۸	۳۶۹۴۲۱۹	۳۹۷۲۲۷۸	۶۵۳	۱۸	۱۰	۱۰۰	۳۵۲۷۷۱۱	۳۷۵۲۸۸۴
۲۸	۲۴	۶۵۵	۲۰	۱۰	۱۰۰	۳۸۴۹۳۷۶	۴۱۳۹۱۱۴	۶۵۶	۲۰	۱۲	۱۰۳	۳۶۲۴۷۱۰	۳۸۹۷۵۳۸
	۲۶	۶۵۴	۱۹	۹	۱۰۰	۳۸۹۰۰۰۵	۴۱۸۲۸۰۱	۶۵۵	۱۸	۱۱	۱۰۲	۳۸۴۵۶۹۳	۴۱۳۵۱۵۴
	۲۸	۶۵۲	۱۸	۹	۹۷	۴۰۱۵۶۴۳	۴۱۸۲۹۶۲	۶۵۲	۱۸	۱۱	۹۹	۳۶۷۳۷۰۲	۳۹۵۰۲۱۸
	۳۰	۶۵۰	۱۷	۹	۹۷	۳۸۶۲۳۷۳	۴۱۹۸۲۳۱	۶۵۰	۱۷	۱۰	۹۹	۳۶۶۶۹۴۷	۳۹۴۲۹۵۳
	۳۲	۶۵۰	۱۷	۹	۹۶	۴۰۲۴۹۷۷	۴۱۹۹۵۶۴	۶۵۱	۱۶	۱۰	۹۸	۳۵۵۸۲۴۳	۴۱۱۱۰۱۴

مهم‌ترین نتیجه‌ای که از جدول بالا می‌توان گرفت این است که تولیدکننده می‌تواند طول دوره وارانتی را نسبت به بازه برنامه‌ریزی تولید محصول و بازه تأمین قطعات یدکی تغییر دهد درحالی‌که گلدیران برای تمامی محصولات خود طول وارانتی پایه را ۱۸ ماه و طول وارانتی تمدیدشده را ۱۲ ماه ارائه می‌دهد.

همچنین می‌توان نتیجه گرفت در دوره‌های برنامه‌ریزی کوتاه‌تر مناسب است که تولیدکننده قیمت اولیه محصول را بالاتر ارائه دهد و ازآنجایی‌که قیمت بالاتر موجب کاهش تعداد خریداران می‌شود، ارائه طول دوره وارانتی پایه طولانی‌تر توصیه می‌شود. در ضمن پیشنهاد طول دوره وارانتی پایه کوتاه‌تر در بازه زمانی تضمین تأمین قطعات یدکی (g) طولانی‌تر به بهبود سود تولیدکننده کمک می‌نماید.

نمودار زیر کیفیت جواب‌های حاصله از الگوریتم LCA را با الگوریتم PSO توسعه‌یافته مقایسه نموده است.

Archive of SID
www.SID.ir



نمودار (۱) مقایسه عملکرد الگوریتم LCA با PSO توسعه یافته

همان‌طور که در نمودار ۱ نشان داده‌شده، الگوریتم LCA در این مسئله از کیفیت بالاتری نسبت به الگوریتم PSO توسعه‌یافته دارد.

۶- نتیجه و جمع‌بندی

در این تحقیق مسئله یکپارچه‌سازی تصمیمات قیمت‌گذاری محصول به‌صورت پویا، تعیین طول دوره وارانتی پایه، طول دوره وارانتی تمدیدشده و قیمت وارانتی تمدیدشده باهدف بیشینه‌سازی سود تولیدکننده و در نظر گرفتن حداقل سطح رضایت مشتری از تأمین خدمات موردمطالعه قرار گرفت. در مدل ریاضی ارائه‌شده، درآمد تولیدکننده از فروش محصول اصلی، وارانتی تمدیدشده و قطعات یدکی به محصولات از وارانتی خارج‌شده تشکیل می‌شود و هزینه‌ها نیز عبارت‌اند از: هزینه تولید محصول اصلی، هزینه تولید و انهدام قطعات یدکی است. تابع فروش محصولات، تابعی از زمان، قیمت و طول دوره وارانتی پایه در نظر گرفته‌شده است. در هر دوره زمانی از چرخه عمر، بر اساس نرخ خرابی محصول، حد بالای تعداد محصولات خراب‌شده تحت وارانتی پایه و تمدیدشده و از وارانتی خارج‌شده بر اساس ضریب اطمینان کمبود موجودی محاسبه می‌شود. تعداد محصولات خراب‌شده در حقیقت تقاضای قطعات یدکی را تشکیل می‌دهند. همچنین برای حل مدل، از دو روش الگوریتم فرا ابتکاری LCA و PSO توسعه‌یافته استفاده‌شده است.

محصول LED شرکت LG با خدمات پس از فروش گلدیران به‌عنوان مطالعه موردی انتخاب شد. مسئله برای چرخه عمر ۲۲ تا ۲۸ ماه مورد حل قرار گرفت و برای هر چرخه عمر ۵ بازه زمانی مختلف برای تأمین قطعات یدکی نیز برای تحلیل حساسیت در نظر گرفته شد. نتایج این موضوع را نشان می‌دهد که اگر تولیدکننده طول دوره وارانتی پایه و وارانتی تمدیدشده را با توجه به تغییر بازه زمانی تصمیم‌گیری (ترکیب چرخه عمر محصول (T) و دوره زمانی تضمین تأمین قطعات یدکی (g)) تغییر دهد، می‌تواند باعث افزایش حاشیه سود شود. این در حالی است که گلدیران با تمامی محصولات خود طول دوره وارانتی ۱۸ ماه و طول دوره وارانتی تمدیدشده ۱۲ ماه را ارائه می‌دهد.

در نظر گرفتن سطح تعمیر و تعمیر ناقص می‌تواند به‌عنوان مطالعات آتی در نظر گرفته شود به‌طوری‌که محصول بعد از خرابی به‌خوبی نو نشود. همچنین می‌توان چارچوب مسئله را برای محصولات با وارانتی دوبعدی (زمان-کارکرد) مانند خودرو تعریف نمود که این امر می‌تواند بسیار در دنیای واقعی مورد کاربرد واقع شود.

Archive of SID
www.SID.ir

۷- منابع

[1] J. Chu and P. K. Chintagunta, "An Empirical Test of Warranty Theories in the U.S. Computer Server and Automobile Markets," *J. Mark.*, vol. 75, no. 2, pp. 75–92, Mar. 2011.

[2] D. N. . Murthy and I. Djamaludin, "New product warranty: A literature review," *Int. J. Prod. Econ.*, vol. 79, no. 3, pp. 231–260, Oct. 2002.

[3] D. K. Manna, S. Pal, and S. Sinha, "A use-rate based failure model for two-dimensional warranty," *Comput. Ind. Eng.*, vol. 52, no. 2, pp. 229–240, Mar. 2007.

[4] Y. Lam and P. Kwok Wai Lam, "An extended warranty policy with options open to consumers," *Eur. J. Oper. Res.*, vol. 131, no. 3, pp. 514–529, Jun. 2001.

[5] T. I. Matis, R. Jayaraman, and A. Rangan, "Optimal price and pro rata decisions for combined warranty policies with different repair options," *IIE Trans. (Institute Ind. Eng.*, 2008.

[6] C. Su and J. Shen, "Analysis of extended warranty policies with different repair options," *Eng. Fail. Anal.*, vol. 25, pp. 49–62, Oct. 2012.

[7] S. Marshall, R. Arnold, S. Chukova, and Y. Hayakawa, "Warranty cost analysis: Increasing warranty repair times," *Appl. Stoch. Model. Bus. Ind.*, vol. 34, no. 4, pp. 544–561, Jul. 2018.

[8] M. N. Darghouth, D. Ait-kadi, and A. Chelbi, "Joint optimization of design, warranty and price for products sold with maintenance service contracts," *Reliab. Eng. Syst. Saf.*, vol. 165, pp. 197–208, Sep. 2017.

[9] D. N. P. Murthy and W. R. Blischke, "Product warranty management — III: A review of mathematical models," *Eur. J. Oper. Res.*, vol. 63, no. 1, pp. 1–34, Nov. 1992.

[10] D. N. . Murthy, O. Solem, and T. Roren, "Product warranty logistics: Issues and challenges," *Eur. J. Oper. Res.*, vol. 156, no. 1, pp. 110–126, Jul. 2004.

[11] T. S. Glickman and P. D. Berger, "Optimal Price and Protection Period Decisions for a Product Under Warranty," *Manage. Sci.*, vol. 22, no. 12, pp. 1381–1390, Aug. 1976.

[12] M. A. J. Menezes and I. S. Currim, "An approach for determination of warranty length," *Int. J. Res. Mark.*, vol. 9, no. 2, pp. 177–195, May 1992.

[13] P.-C. Lin and L.-Y. Shue, "Application of optimal control theory to product pricing and warranty with free replacement under the influence of basic lifetime distributions," *Comput. Ind. Eng.*, vol. 48, no. 1, pp. 69–82, Jan. 2005.

[14] C.-C. Wu, P.-C. Lin, and C.-Y. Chou, "Determination of price and warranty length for a normal lifetime distributed product," *Int. J. Prod. Econ.*, vol. 102, no. 1, pp. 95–107, Jul. 2006.

[15] B. Kim and S. Park, "Optimal pricing, EOL (end of life) warranty, and spare parts manufacturing strategy amid product transition," *Eur. J. Oper. Res.*, vol. 188, no. 3, pp. 723–745, Aug. 2008.

[16] P.-C. Lin, J. Wang, and S.-S. Chin, "Dynamic optimisation of price, warranty length and production rate," *Int. J. Syst. Sci.*, vol. 40, no. 4, pp. 411–420, Apr. 2009.

[17] X. Chen, L. Li, and M. Zhou, "Manufacturer's pricing strategy for supply chain with warranty period-dependent demand," *Omega*, vol. 40, no. 6, pp. 807–816, Dec. 2012.

[18] M. Afsahi, A. Husseinzadeh Kashan, and B. Ostadi, "Optimizing under and out of warranty products' decisions in the finite planning horizon," *Sharif Univ. Technol.*, vol. 0, no. 0, Aug. 2018.

[19] V. Padmanabhan, "U sage H eterogeneity and E xtended W arranties," *J. Econ. Manag. Strateg.*, vol. 4, no. 1, pp. 33–53, Mar. 1995.

[20] J. C. Hartman and K. Laksana, "Designing and pricing menus of extended warranty contracts," *Nav. Res. Logist.*, vol. 56, no. 3, pp. 199–214, Apr. 2009.

[21] A. Husseinzadeh Kashan, "An efficient algorithm for constrained global optimization and application to mechanical engineering design: League championship algorithm (LCA)," *Comput. Des.*, vol. 43, no. 12, pp. 1769–1792, Dec. 2011.

[22] A. H. Kashan and B. Karimi, "A new algorithm for constrained optimization inspired by the sport league championships," in *IEEE Congress on Evolutionary Computation*, 2010, pp. 1–8.

[23] J. Kennedy and R. Eberhart, "Particle swarm optimization," in *Proceedings of ICNN'95 - International Conference on Neural Networks*, vol. 4, pp. 1942–1948.

[24] R. Eberhart and J. Kennedy, "A new optimizer using particle swarm theory," in *MHS'95. Proceedings of the Sixth International Symposium on Micro Machine and Human Science*, pp. 39–43.

[25] S. Khan, M. Kamran, O. U. Rehman, L. Liu, and S. Yang, "A modified PSO algorithm with dynamic parameters for solving complex engineering design problem," *Int. J. Comput. Math.*, vol. 95, no. 11, pp. 2308–2329, Nov. 2018.

Archive of SID

www.SID.ir