

تخمین کانال MIMO با الگوریتم‌های LMS و RLS بوسیله تجزیه QR

احسان دشتیان^۱، دانشجوی دکتری، علی شهزادی^۲، دانشیار، محمد لاری^۳، استادیار

۱- دانشکده مهندسی برق و کامپیوتر - دانشگاه سمنان - سمنان - ایران - dashtian@semnan.ac.ir

۲- دانشکده مهندسی برق و کامپیوتر - دانشگاه سمنان - سمنان - ایران - shahzadi@semnan.ac.ir

۳- دانشکده مهندسی برق و کامپیوتر - دانشگاه سمنان - سمنان - ایران - m_lari@semnan.ac.ir

چکیده: در سیستم‌های MIMO روش‌های متنوعی برای تخمین کانال وجود دارد که هر کدام نیز دارای عملکردهای متفاوتی هستند. سیستم‌های MIMO مانند یک دستگاه چند معادله و چند مجهول هستند که مجهولات، M سمبل ارسالی از فرستنده و معادلات، N سمبل دریافتی در گیرنده هستند، از این رو از روش‌های مختلف تجزیه ریاضی برای تجزیه ماتریس کانال استفاده می‌شود که تجزیه QR یکی از این روش‌ها می‌باشد. استفاده از تجزیه ماتریس کانال به همراه الگوریتم‌های وقفی مانند LMS و RLS برای سیستم‌های MIMO سادگی و کاهش پیچیدگی را در پی خواهد داشت. در این مقاله با استفاده از دو الگوریتم LMS و RLS کانال MIMO مدل خواهد شد و به جای تخمین مستقیم ماتریس H کانال که پیچیدگی را به همراه دارد، ابتدا Q و بعد R از ماتریس QR تخمین زده می‌شود که همان تخمین ماتریس کانال می‌باشد. نتایج نشان می‌دهد که مدل کردن کانال با الگوریتم‌های وقفی LMS و RLS و استفاده از تجزیه ریاضی QR کاهش خطا در سیستم‌های MIMO را بدست می‌دهد.

واژه‌های کلیدی: تخمین کانال MIMO، کدهای STBC، RLS، LMS، QR.

MIMO Channel Estimation by LMS and RLS Algorithms and QR Decomposition Method

Ehsan Dashtian, Ph.D. Candidate¹, Ali Shahzadi, Associate Professor², Mohammad Lari, Assistant Professor³

1- Faculty of Electrical and Computer Engineering, University of Semnan, Semnan, Iran, Email: dashtian@semnan.ac.ir

2- Faculty of Electrical and Computer Engineering, University of Semnan, Semnan, Iran, Email: shahzadi@semnan.ac.ir

3- Faculty of Electrical and Computer Engineering, University of Semnan, Semnan, Iran, Email: m_lari@semnan.ac.ir

Abstract: Different method are used for channel estimation in MIMO systems, Each of which has different functionality. MIMO systems are like equations with multiple variables, variables are transmitted symbols by transmitter (M) and equations are received symbols in receiver (N). Different mathematical methods are for decomposition of channel matrix, than Q&R Decomposition is one of these methods. Using decomposition for channel matrix with adaptive algorithms such as LMS and RLS in MIMO systems will simplify and reduce complexity. In this paper, the MIMO channel will be modeled by LMS and RLS algorithms and instead directly of estimated the channel matrix H that very complexity, in QR matrix, first estimated Q and then estimated R , that the channel matrix is estimated. According result, in MIMO systems, channel modeling with LMS and RLS adaptive algorithms and applying QR decomposition will result in the error reduction.

Keywords: MIMO Channel Estimation, STBC Code, RLS, LMS, QR

۱- مقدمه

شود. در بخش بعدی به انجام شبیه سازی‌ها و نتایج مقایسه روش‌های
وفقی LMS و RLS خواهیم پرداخت.

۲- مدل سیستم

ابتدا فرضیات یک سیستم MIMO به صورت ریاضی به همراه تجزیه
مشخصه کانال به صورت دو ماتریس Q و R تعریف می‌شود و چون
روش‌های استفاده شده در این مقاله LMS و RLS می‌باشد، اشاره‌ای به
مفاهیم هر کدام از این الگوریتم‌ها انجام خواهد شد.

۲-۱- مدل کانال MIMO

مدل یک کانال MIMO با M آنتن در فرستنده و N آنتن در گیرنده را
می‌توان به صورت (۱) تعریف نمود.

$$y = Hs + z \quad (1)$$

که s سیگنال ارسالی، H ماتریس مشخصه کانال MIMO و y
سیگنال دریافتی می‌باشد. با توجه به تعداد فرستنده‌ها و گیرنده‌ها
ماتریس H را به فرم (۲) می‌توان نوشت.

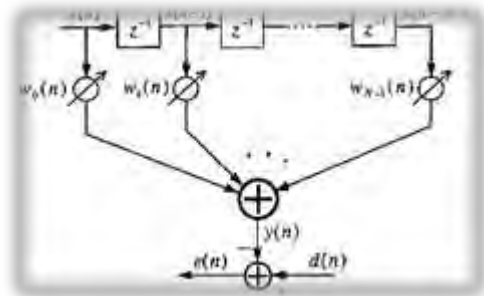
$$H = \begin{bmatrix} h_{11} & h_{12} & \dots & h_{1N_T} \\ h_{21} & h_{22} & \dots & h_{2N_T} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ h_{N_R1} & h_{N_R2} & \dots & h_{N_RN_T} \end{bmatrix} \quad (2)$$

با استفاده از روابط تجزیه Q و R می‌توان هر ماتریس را به دو
ماتریس Q و R تجزیه نمود که ماتریس اول (Q) متعامد و ماتریس
دوم (R) بالا یا پایین مثلثی باشد. اگر ماتریس H، ماتریس مفروض
باشد، می‌توان آنرا به فرم زیر نوشت:

$$H_{m \times n} = Q_{m \times n} R_{n \times n} \quad (3)$$

۲-۲- الگوریتم‌های وفقی LMS و RLS

فیلترهای وفقی به دلیل سادگی پیاده سازی، پایداری قابل توجه و
سرعت همگرایی مناسب، قابل استفاده برای سیگنال‌های تصادفی
می‌باشد. شکل ۱ نشانگر یک فیلتر وفقی عرضی با ضرایب وزنی می‌باشد
که بر اساس ورودی $x(n)$ و خروجی مطلوب $d(n)$ ترسیم شده‌است.



شکل ۱. فیلتر وفقی عرضی با N-Tap [20]

یکی از مهم‌ترین عوامل در سیستم‌های سیار بی سیم که از چند آنتن
در ورودی و چند آنتن در خروجی MIMO استفاده می‌کنند تخمین
دقیق کانال می‌باشد و نقش تعیین کننده‌ای در ارزیابی عملکرد سیستم
دارد [۱-۳]. تخمین کانال زمانی به صورت کامل انجام می‌گیرد که
کانال بدون نویز و تغییر ناپذیر با زمان باشد اما تداخل بین کاربران و
طبیعت متغیر با زمان بودن کانال و تغییرات سریع کانال، تخمین کامل
یک کانال را غیرممکن می‌سازد [۴]. به همین دلیل روش‌های مختلفی
برای تخمین کانال در سیستم‌های MIMO وجود دارد [5-8]. استفاده از
روش‌های وفقی در تخمین کانال، سیستم‌های سیار از جمله روش‌هایی
است که مورد توجه محققین و پژوهشگران قرار گرفته است [9,10]؛
که این روش‌های وفقی در سیستم‌های سیار نسل جدید مانند LTE^۲ و
بالتر نیز برای تخمین کانال استفاده می‌شوند [11]. روش‌های
وفقی LMS^۳، RLS^۴ و... از جمله این روش‌ها است که دلایل انتخاب
آنها سادگی پیاده سازی یا سرعت همگرایی مناسب می‌باشد [12-14].

از طرفی می‌دانیم در سیستم‌های MIMO از کدهای فضا-زمان
بلوکی استفاده می‌شود که پیچیدگی و چالش‌های زیادی برای تخمین
کانال در گیرنده بوجود می‌آورد [15 و ۱] ولی روش‌هایی برای کاهش
این پیچیدگی‌ها یا جستجوی سمبل در کدهای STBC^۵ پیشنهاد شده
است که استفاده از روش تجزیه ماتریس کانال بوسیله QR یکی از آنها
می‌باشد [16-18]. بر اساس یک روش جدید با استفاده از QR^۶،
ماتریس H به فرم دو ماتریس مجزا (Q ماتریس یکانی و R ماتریس
پایین مثلثی) تخمین زده می‌شود، یعنی جایگزین H، ابتدا تخمین
ماتریس R و بعد تخمین ماتریس Q محاسبه می‌شود که در واقع همان
تخمین H می‌باشد و بدون اینکه تخمین با پیچیدگی‌های H روبرو باشد
تخمین کانال بدست می‌آید. این روش ابتدا در [19] برای الگوریتم
LMS و در یک حالت خاص از MIMO مطرح شد. حال در این مقاله
تخمین کانال برای الگوریتم LMS در حالت‌های مختلف MIMO و ایده
گسترش آن برای الگوریتم RLS و مقایسه این دو الگوریتم در تعداد
تکرارهای متفاوت و همچنین SNRهای مختلف انجام شده است. از
طرفی در الگوریتم RLS برای تخمین ماتریس R که مقدمه‌ای برای
محاسبه ماتریس Q می‌باشد از دو روش ریاضی استفاده شده است که
از دیگر ایده‌های این مقاله می‌باشد.

با توجه به مزایای استفاده از تجزیه Q و R برای تخمین کانال و
همچنین کارایی روش‌های وفقی و نیز بالا بودن بار محاسباتی در
تخمین سیستم‌های MIMO، در این مقاله تلاش شده است روشی
عملی برای تخمین وفقی ماتریس Q و R به صورت مستقیم در دو
الگوریتم LMS و RLS با حالت‌های مختلف MIMO ارائه گردد که با
مقایسه این دو الگوریتم به نتایج قابل توجهی دست یافته‌ایم و شاهد
کاهش خطا در تخمین بوده‌ایم. در ادامه ابتدا مدل سیستم MIMO و
الگوریتم‌های LMS و RLS معرفی خواهند شد، در بخش بعد بیان
ریاضی روش پیشنهاد شده مطرح و پارامترهای کانال تخمین زده می

مثلی) باشد، بعد از تخمین برای بررسی صحت تخمین مقدار خطای MSE را برای هر یک محاسبه می‌نمایم.

برای حل مسئله باید مسئله را بصورت برداری تعریف نمایم. بنابراین ماتریس Q و R را بصورت زیر به بردارهای r و q تقسیم می‌کنیم. ملاحظه می‌شود که شرط بالا مثلی بودن R و یکانی بودن Q بصورت زیر بیان شده است [19].

$$Q = \begin{bmatrix} \mathbf{q}_1^T \\ \mathbf{q}_2^T \\ \mathbf{q}_3^T \\ \vdots \\ \mathbf{q}_M^T \end{bmatrix}, \mathbf{q}_i, \mathbf{q}_j^H = \begin{cases} 1 & i = j \\ 0 & i \neq j \end{cases} \quad (9)$$

$$R = \begin{bmatrix} \mathbf{r}_1^T \\ \mathbf{r}_2^T \\ \mathbf{r}_3^T \\ \vdots \\ \mathbf{r}_M^T \end{bmatrix}, \mathbf{r}_i = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ r_{ii} \\ r_{ii+1} \\ r_{ii+2} \\ \vdots \\ r_{iM} \end{bmatrix} \quad (10)$$

۳-۱- تخمین کانال با استفاده از الگوریتم LMS

برای حل این مسئله با روش LMS فرض می‌کنیم ماتریس Q مقادیری اولیه شده است. هرمیتین ماتریس Q را در سیگنال دریافتی ضرب می‌کنیم.

$$Q^H \mathbf{y} = Q^H \mathbf{H} \mathbf{s} + Q^H \mathbf{z} \quad (11)$$

با توجه به خاصیت یکانی ماتریس Q و رابطه $\mathbf{H} = \mathbf{Q} \mathbf{R}$ در رابطه (۱۱) قسمت $Q^H \mathbf{H} \mathbf{s}$ به $\mathbf{R} \mathbf{s}$ تبدیل می‌شود

$$\mathbf{y}' = \mathbf{R} \mathbf{s} + \mathbf{z}' \quad (12)$$

بر اساس مدل اصلی LMS بردارهای $\mathbf{y}' = d(n)$ و $\mathbf{s} = x(n)$ تعریف می‌شوند، در (۱۲) می‌توان روابط LMS که در (۴) و (۵) بیان شد را برای تخمین سطریهای ماتریس R بصورت زیر بیان نمود.

$$\hat{\mathbf{r}}_i^+(k) = \hat{\mathbf{r}}_i(k) + \mu_1 e(k)^* \mathbf{s}(k) \quad (13)$$

$$e(k) = \mathbf{y}'(k) - \hat{\mathbf{r}}_i(k)^H \mathbf{s}(k) \quad (14)$$

در تخمین بدست آمده از (۱۳) و (۱۴) محدودیت بالا مثلی ماتریس R لحاظ نشده است و این محدودیت را می‌توان به صورت زیر نوشت:

$$C_i \mathbf{r}_i = 0 \quad (15)$$

$$C_i = \text{diag}[1 \ 1 \dots 1 \ 0 \ 0 \dots 0] \quad (16)$$

$i-1$

با توجه به ورودی $x(n)$ و خطا $e(n)$ ، ضرایب وزنی الگوریتم LMS به فرم ذیل نوشته می‌شود [20].

$$W(n+1) = W(n) + 2\mu e(n)x(n) \quad (4)$$

که $W(n+1)$ ضرایب وزنی بروزرسانی شده و μ طول گام می‌باشد. با اعمال شرط محدودیت $C^T W = \alpha$ می‌خواهیم بردار ضرایب وزنی را طوری به دست آوریم که مقدار خطا در معیار میانگین مربعات، حداقل باشد. بعد از استفاده از ضرایب لاگرائز در نهایت بروزرسانی به فرم زیر خواهد بود:

$$W(n+1) = W^+(n) + \frac{\alpha^* - C^H W^+(n)}{C^H C} C \quad (5)$$

که در اینجا α یک مقدار اسکالر و C یک بردار ستونی ثابت می‌باشد. در فرم استاندارد الگوریتم حداقل مربعات بازگشتی RLS پارامترهای فیلتر وقتی (ضرایب وزنی) در هر لحظه از زمان $n > 0$ ، به صورت زیر قابل محاسبه می‌باشد [20].

$$\hat{w}(n) = \hat{w}(n-1) + k(n) \hat{e}_{n-1}(n) \quad (6)$$

که $k(n)$ بردار بهره و $\hat{e}_{n-1}(n)$ تخمین خطا است که به صورت زیر بدست می‌آید:

$$\hat{e}_{n-1}(n) = d(n) - \hat{w}^T(n-1)x(n) \quad (7)$$

به وسیله رابطه بازگشتی الگوریتم RLS، $\hat{w}(n)$ بروز رسانی می‌شود. تغییر و بروز رسانی ضرایب وزنی در n امین تکرار از طریق به دست آمدن تخمین خطا $\hat{e}_{n-1}(n)$ و بردار بهره $k(n)$ حاصل می‌شود. که این بردار مانند زیر تعریف شده است:

$$k(n) = \frac{\lambda^{-1} \psi^{-1} \lambda (n-1) x(n)}{1 + \lambda^{-1} x^T(n) \psi^{-1} \lambda (n-1) x(n)} \quad (8)$$

در اینجا λ ضریب فراموشی است و $\psi \lambda(n)$ تابعی است که برای استخراج بردار بهره و روابط پایه در RLS به فرم $\psi \lambda(n) = X(n) \Lambda(n) X^T(n)$ تعریف می‌شود که $\Lambda(n)$ نیز یک ماتریس قطری شامل ضریب فراموشی $1, \lambda, \lambda^2, \dots, \lambda^{n-1}$ می‌باشد.

۳- تخمین به روش تجزیه QR

تخمین کانال با استفاده از تجزیه Q و R بدون اینکه ابتدا H کانال تخمین زده شود، یعنی فقط تخمین دو ماتریس Q و R محاسبه می‌شود و مستقیم به آشکار سازی ارسال می‌گردد. در این مقاله با استفاده از الگوریتم‌های LMS و RLS ماتریس‌های Q و R را برای حالت‌های مختلف MIMO تخمین می‌زنیم. پس در هر الگوریتم و در هر حالتی از MIMO برای تخمین کانال باید هم ماتریس Q و هم ماتریس R تخمین زده شود.

با توجه به روش تجزیه‌ای Q و R باید ماتریس Q تخمین زده شده یکانی باشد و ماتریس R تخمین زده شده بالا مثلی (و یا پایین

$$\mathbf{Q}^H \mathbf{y} = \mathbf{Q}^H \mathbf{Q} \mathbf{R} \mathbf{s} + \mathbf{Q}^H \mathbf{z} \quad (24)$$

مانند قبل بدلیل داشتن خاصیت یکانی در ماتریس Q رابطه زیر حاصل می‌شود. بر اساس مدل اصلی LMS بردارهای d(n) و x(n) بصورت زیر مشخص شده‌اند.

$$\mathbf{y}' = \mathbf{R} \mathbf{s} + \mathbf{z}' \quad (25)$$

همچنین بر اساس رابطه (۲۵) می‌توان روابط اصلی الگوریتم RLS را برای تخمین سطرهای ماتریس R نوشت، برای مرتب سازی این روابط ابتدا رابطه (۸) به صورت زیر نوشته می‌شود:

$$\mathbf{k}(n)^* = \frac{\lambda^{-1} \psi_{\lambda}^{-1*}(k-1) s(k)}{1 - \lambda^{-1} s(k)^H \psi_{\lambda}^{-1*}(k-1) s(k)} \quad (26)$$

روابط (۶) و (۷) که معادلات استاندارد الگوریتم RLS می‌باشند به صورت زیر مدل می‌شود:

$$\hat{\mathbf{r}}_i^+(k-1) = \hat{\mathbf{r}}_i^+(k-1) + \mathbf{k}(n)^* (\mathbf{y}'_i(k) - \mathbf{s}(k)^H \hat{\mathbf{r}}_i(k-1)) \quad (27)$$

در رابطه $\mathbf{k}(n)$ ، رابطه استاندارد $\psi_{\lambda}^{-1*}(k)$ برای RLS و طبق روابط بیان شده در [18] به فرم زیر قابل بازنویسی می‌باشد:

$$\psi_{\lambda}^{-1*}(k) = \lambda^{-1} (\psi_{\lambda}^{-1*}(k-1) - \mathbf{k}(n)^* \mathbf{s}(k)^H \psi_{\lambda}^{-1*}(k-1)) \quad (28)$$

با توجه به شرط بالا مثلثی بودن که برای ماتریس R داریم باید این شرط را به تخمین انجام شده در (۲۷)، اعمال کنیم، محدودیت بالامثلثی بودن را می‌توان بصورت رابطه خطی بیان نمود.

$$C_i \mathbf{r}_i = 0 \quad (29)$$

که در این رابطه، تعریف C_i به صورت زیر می‌باشد.

$$C_i = \text{diag}[1 \ 1 \dots 100 \dots 0] \quad (30)$$

بر اساس محدودیت بدست آمده و با استفاده از ضرایب لاگرانژ [20] می‌توان ضرایب بهینه با محدودیت (۲۹) را بصورت زیر بدست آورد.

$$\hat{\mathbf{r}}_i(k) = \hat{\mathbf{r}}_i^+(k-1) + b_{i_i}(k) \quad (31)$$

که $b_{i_i}(k)$ در روابط لاگرانژ به صورت زیر نوشته می‌شود:

$$b_{i_i} = \arg \min \{ b_{i_i}^H(k) b_{i_i}(k) + \lambda_{i_i}^H(k) C_i \hat{\mathbf{r}}_i(k+1) \} \quad (32)$$

با تبدیل $\hat{\mathbf{r}}_i(k)$ به $\hat{\mathbf{r}}_i^+(k+1)$ در رابطه (۳۱) و جایگذاری آن در (۳۲) داریم:

$$b_{i_i} = \arg \min \{ b_{i_i}^H(k) b_{i_i}(k) + \lambda_{i_i}^H(k) C_i (\hat{\mathbf{r}}_i^+(k) + b_{i_i}(k)) \} \quad (33)$$

که در نتیجه تخمین R و بعد از آن Q بدست می‌آید

$$\hat{\mathbf{R}}(k+1) = \begin{bmatrix} \mathbf{r}_1^T(k+1) \\ \mathbf{r}_2^T(k+1) \\ \mathbf{r}_3^T(k+1) \\ \vdots \\ \mathbf{r}_M^T(k+1) \end{bmatrix}^T \quad (17)$$

حال برای تخمین ماتریس Q، بدلیل اینکه تخمین ماتریس R در مرحله قبلی انجام شده است، ماتریس R بدست آمده در بردار s ضرب می‌شود و ماتریس $\mathbf{v} = \mathbf{R} \mathbf{s}$ حاصل می‌گردد.

$$\mathbf{y} = \mathbf{Q} \mathbf{R} \mathbf{s} + \mathbf{z} \Rightarrow \mathbf{y} = \mathbf{Q} \mathbf{v} + \mathbf{z} \quad (18)$$

$$\mathbf{v}(k+1) = \hat{\mathbf{R}}(k+1) \mathbf{s}(k) \quad (19)$$

حالا رابطه LMS را برای تخمین سطرهای ماتریس Q به شکل زیر می‌نویسیم.

$$\hat{\mathbf{q}}_i(k+1) = \hat{\mathbf{q}}_i(k) + \mu_2 e(k)^* \mathbf{v}(k+1) \quad (20)$$

$$e(k) = \mathbf{y}_i(k) - \hat{\mathbf{q}}_i(k)^H \mathbf{v}(k+1) \quad (21)$$

که در اینجا باید محدودیت یکانی بودن ماتریس Q اعمال شود که با نوشتن به شکل زیر این محدودیت اعمال می‌شود:

$$\begin{cases} \hat{\mathbf{Q}}_i(k)^H \hat{\mathbf{q}}_i(k+1) = 0 \\ \hat{\mathbf{Q}}_i(k) = [\hat{\mathbf{q}}_1 \ \hat{\mathbf{q}}_2 \ \dots \ \hat{\mathbf{q}}_{i-1}] \end{cases} \quad (22)$$

و در نتیجه تخمین Q به صورت زیر بدست آمده است.

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{q}}_i(k) &= (\mathbf{I} - \hat{\mathbf{Q}}_i(k) \\ &\times (\hat{\mathbf{Q}}_i(k)^H \hat{\mathbf{Q}}_i(k))^{-1} \hat{\mathbf{Q}}_i(k)^H) \\ &\times \left[\hat{\mathbf{q}}_i(k) + \mu_2 (\mathbf{y}_i(k) - \hat{\mathbf{q}}_i(k)^H \right. \\ &\left. \times \mathbf{v}(k+1)) \right] \end{aligned} \quad (23)$$

تا اینجا دو ماتریس Q و R که با استفاده از الگوریتم LMS در [19] بدست آمده است را داریم و در بخش بعد که مختص این مقاله است با روش RLS نیز برای هر دو ماتریس این تخمین را انجام می‌دهیم که تخمین ماتریس R با دو روش ریاضی انجام می‌گیرد.

۳-۲- تخمین کانال با استفاده از الگوریتم RLS

در این بخش تخمین دو ماتریس Q و R با استفاده از الگوریتم RLS که ایده اصلی این مقاله است، انجام می‌شود. لازم می‌باشد روابط الگوریتم RLS بر اساس مدل سیستم تعریف شوند. مانند LMS روابط (۱) و (۱۱) نیز در اینجا شروع تخمین می‌باشند. با ضرب \mathbf{Q}^H در رابطه (۱) عبارت Q در ماتریس $\mathbf{H} = \mathbf{Q} \mathbf{R}$ کانال از بین می‌رود که کمک می‌کند تا R تخمین زده شود.

$$\mathbf{s} = \begin{bmatrix} s_1 \\ s_2 \\ s_3 \\ s_4 \\ \vdots \\ s_i \\ s_{i+1} \\ s_{i+2} \\ s_{i+3} \\ \vdots \\ s_M \end{bmatrix} \quad (39)$$

$$\mathbf{R} = \begin{bmatrix} r_{11} & r_{12} & r_{13} & \cdots & r_{1i} & r_{1i+1} & r_{1i+2} & \cdots & r_{1M-1} & r_{1M} \\ 0 & r_{22} & r_{23} & \cdots & r_{2i} & r_{2i+1} & r_{2i+2} & \cdots & r_{2M-1} & r_{2M} \\ 0 & 0 & r_{33} & \cdots & r_{3i} & r_{3i+1} & r_{3i+2} & \cdots & r_{3M-1} & r_{3M} \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & r_{4i} & r_{4i+1} & r_{4i+2} & \cdots & r_{4M-1} & r_{4M} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & r_{ii} & r_{ii+1} & r_{ii+2} & \cdots & r_{iM-1} & r_{iM} \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & r_{i+1i+1} & r_{i+1i+2} & \cdots & r_{i+1M-1} & r_{i+1M} \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & r_{i+2i+2} & \cdots & r_{i+2M-1} & r_{i+2M} \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & r_{i+3M-1} & r_{i+3M} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & r_{MM} \end{bmatrix} \quad (40)$$

بر اساس این ایده ماتریس \mathbf{R}'_i و \mathbf{S}'_i را بشکل زیر تعریف می‌کنیم. بدلیل صفر بودن تعدادی از مقادیر ماتریس R در تخمین هر سطر آن تعدادی از مقادیر بردار S نیز در تخمین بی‌تأثیر خواهند بود. بنابراین خواهیم داشت.

$$\mathbf{r}'_i = [r_{ii} \ r_{ii+1} \ r_{ii+2} \ \cdots \ r_{iM}]^T \quad (41)$$

$$\mathbf{s}'_i = [s_i \ s_{i+1} \ s_{i+2} \ \cdots \ s_M]^T \quad (42)$$

با توجه به این دو بردار، رابطه RLS را برای $\mathbf{r}'_i, \mathbf{s}'_i$ جدید بصورت زیر می‌نویسیم.

$$\mathbf{k}(n)^* = \frac{\lambda^{-1} \psi_{\lambda}^{-1*}(k-1) \mathbf{s}'_i(k)}{1 - \lambda^{-1} \mathbf{s}'_i(k)^H \psi_{\lambda}^{-1*}(k-1) \mathbf{s}'_i(k)} \quad (43)$$

$$\hat{\mathbf{r}}'_i(k) = \hat{\mathbf{r}}'_i(k-1) + \mathbf{k}(n)^* (\mathbf{y}'_i(k)^* - \mathbf{s}'_i(k)^H \hat{\mathbf{r}}'_i(k-1)) \quad (44)$$

$$\psi_{\lambda}^{-1*}(k) = \lambda^{-1} (\psi_{\lambda}^{-1*}(k-1) - \mathbf{k}(n)^* \mathbf{s}'_i(k)^H \psi_{\lambda}^{-1*}(k-1)) \quad (45)$$

بعد از انجام این مراحل، بردارهای سطری ماتریس R مجدداً بصورت زیر بدست می‌آیند.

در (۳۱) هدف این است که $b_{li}(k)$ را بدست آوریم تا تخمین تکمیل شود، دو معادله (۳۴) و (۳۵) در زیر معادلات ضرایب لاگرانژ هستند که مقدار $b_{li}(k)$ را با استفاده از $\lambda_{li}(k)$ بدست می‌آورد.

$$\frac{\Delta}{b_{li}}(G) = b_{li}(k) + C_i \lambda_{li}(k) = 0 \quad (34)$$

$$\Rightarrow b_{li}(k) = -C_i \lambda_{li}(k)$$

9

$$\frac{\partial}{\lambda_{li}}(G) = C_i (\hat{\mathbf{r}}_i^+(k-1) + b_{li}(k)) = 0 \quad (35)$$

$$\Rightarrow C_i b_{li}(k) = -C_i \hat{\mathbf{r}}_i^+(k-1)$$

با توجه به اینکه $(C_i^H = C_i)$ اگر $b_{li}(k)$ را از (۳۴) در (۳۵) قرار دهیم:

$$C_i C_i \lambda_{li}(k) = C_i \hat{\mathbf{r}}_i^+(k) \quad (36)$$

$$\Rightarrow b_{li}(k) = -C_i \hat{\mathbf{r}}_i^+(k-1)$$

حاصل بدست آمده از مسئله لاگرانژ را در رابطه اصلی یعنی (۳۱) قرار می‌دهیم و بعد از ساده کردن مقدار $\hat{\mathbf{r}}_i(k)$ به صورت زیر بدست می‌آید.

$$\hat{\mathbf{r}}_i(k) = \hat{\mathbf{r}}_i^+(k-1) + b_{li}(k) \quad (37)$$

$$\Rightarrow \hat{\mathbf{r}}_i(k) = (\mathbf{I} - C_i) [\hat{\mathbf{r}}_i(k-1) + \mathbf{k}(n)^* (\mathbf{y}'_i(k)^* - \mathbf{s}(k)^H \hat{\mathbf{r}}_i(k-1))] \quad (37)$$

مراحل ذکر شده باید برای تخمین همه سطرهای ماتریس R انجام پذیرد. با سطرهای تخمین زده شده از ماتریس R ماتریس $\hat{\mathbf{R}}$ را تشکیل می‌دهیم.

$$\hat{\mathbf{R}}(k) = \begin{bmatrix} \mathbf{r}_1^T(k) \\ \mathbf{r}_2^T(k) \\ \mathbf{r}_3^T(k) \\ \vdots \\ \mathbf{r}_M^T(k) \end{bmatrix}^T \quad (38)$$

تا اینجا ماتریس R تخمین زده شد، ایده‌ای دیگر علاوه بر روش قبلی برای تخمین ماتریس R وجود دارد و چون ماتریس R بالا مثلثی تعریف می‌گردد، می‌توان الگوریتم RLS را بر اساس مقادیر غیر صفر این ماتریس محاسبه نمود.

با استفاده از رابطه (۵۵) به جای $\hat{\mathbf{q}}_i(k+1)$ در (۵۷) عبارت $\mathbf{v}_{2i}(k) + \hat{\mathbf{q}}_i^+(k)$ را قرار می‌دهیم.

$$\mathbf{v}_{2i} = \arg \min \left\{ \mathbf{v}_{2i}^H(k) \mathbf{v}_{2i}(k) + \lambda_{2i}^H(k) \hat{\mathbf{Q}}_i(k)^H (\hat{\mathbf{q}}_i^+(k) + \mathbf{v}_{2i}(k)) \right\} \quad (58)$$

$$\nabla_{\mathbf{v}_{2i}}(G) = \mathbf{v}_{2i}(k) + \hat{\mathbf{Q}}_i(k) \lambda_{1i}(k) = 0 \Rightarrow \mathbf{v}_{2i}(k) = -\hat{\mathbf{Q}}_i(k) \lambda_{2i}(k) \quad (59)$$

$$\frac{\partial}{\partial \lambda_{2i}}(G) = \hat{\mathbf{Q}}_i(k)^H (\hat{\mathbf{q}}_i^+(k) + \mathbf{v}_{2i}(k)) = 0 \Rightarrow \hat{\mathbf{q}}_i^+(k) = -\mathbf{v}_{2i}(k) \quad (60)$$

$$\hat{\mathbf{q}}_i^+(k) = \hat{\mathbf{Q}}_i(k) \lambda_{2i}(k) \Rightarrow \lambda_{2i}(k) = (\hat{\mathbf{Q}}_i(k)^H \hat{\mathbf{Q}}_i(k))^{-1} \hat{\mathbf{Q}}_i(k)^H \hat{\mathbf{q}}_i^+(k) \quad (61)$$

$$\mathbf{v}_{2i}(k) = -\hat{\mathbf{Q}}_i(k) (\hat{\mathbf{Q}}_i(k)^H \hat{\mathbf{Q}}_i(k))^{-1} \times \hat{\mathbf{Q}}_i(k)^H \hat{\mathbf{q}}_i^+(k) \quad (62)$$

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{q}}_i(k) &= \hat{\mathbf{q}}_i^+(k-1) + \mathbf{v}_{2i}(k) \\ &= (\mathbf{I} - \hat{\mathbf{Q}}_i(k) (\hat{\mathbf{Q}}_i(k)^H \hat{\mathbf{Q}}_i(k))^{-1} \hat{\mathbf{Q}}_i(k)^H) [\hat{\mathbf{q}}_i(k-1) \\ &\quad + \mathbf{k}(n)^* (\mathbf{y}_i(k)^* - \mathbf{t}(k)^H \hat{\mathbf{q}}_i(k-1))] \end{aligned} \quad (63)$$

که در اینجا ماتریس $\hat{\mathbf{Q}}_i(k)$ نیز تخمین زده شد.

۴- شبیه‌سازی‌ها

در این مقاله بر اساس تخمین انجام شده، شبیه‌سازی‌ها برای MIMO در حالت‌های 2×2 ، 4×4 و 8×8 با مدولاسیون 16-QAM به دست آمده است، همچنین این تخمین برای الگوریتم‌های LMS و RLS در سه حالت MIMO محاسبه گردیده است. در انتها مقایسه‌ای برای هر دو الگوریتم LMS و RLS با تعداد تکرارهای مختلف صورت گرفته و رفتار هر دو الگوریتم بر اساس روش تخمین ارائه شده، ارزیابی شده است.

با توجه به تخمین انجام شده همیشه ماتریس R که محاسبه می‌شود بالا مثلثی است و فقط باید یکانی بودن ماتریس Q و خطای تخمین H=QR بررسی گردد، برای بدست آوردن میزان خطای تخمین مقدار NMSE بدست آمده، با استفاده از الگوریتم مونت کارلو شبیه‌سازی شده است.

برای بررسی یکانی بودن ماتریس Q بر اساس رابطه زیر عمل نمودیم:

$$NMSE = \left\| (\mathbf{Q}^H \times \mathbf{Q}) - \text{Daig}([1 \ 1 \ 1 \ \dots \ 1]) \right\|_F \quad (64)$$

یعنی ماتریس تخمین زده شده Q را در \mathbf{Q}^H ضرب کرده و مقدار خطای MSE آن را با ماتریس قطری $\text{Daig}([1 \ 1 \ 1 \ \dots \ 1])$ محاسبه نمودیم و نرمالیزه MSE را بدست می‌آوریم.

$$\hat{\mathbf{r}}_i(k) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & \hat{\mathbf{r}}_i'(k)^T \end{bmatrix}^T \quad (46)$$

و حالا ماتریس R را بصورت زیر بدست می‌آوریم.

$$\hat{\mathbf{R}}(k+1) = \begin{bmatrix} \mathbf{r}_1^T(k) \\ \mathbf{r}_2^T(k) \\ \mathbf{r}_3^T(k) \\ \vdots \\ \mathbf{r}_M^T(k) \end{bmatrix}^T \quad (47)$$

در مرحله بعد می‌خواهیم ماتریس Q را تخمین بزنیم. برای این منظور بدلیل اینکه تخمین ماتریس R در مرحله قبلی محاسبه شده است، ماتریس R بدست آمده را در بردار s ضرب می‌کنیم که ماتریس t حاصل می‌گردد. در اینجا t را به عنوان داده‌های آموزشی در نظر می‌گیریم.

$$\mathbf{y} = \mathbf{Q} \mathbf{R} \mathbf{s} + \mathbf{z} \quad (48)$$

$$\mathbf{y} = \mathbf{Q} \mathbf{R} \mathbf{s} + \mathbf{z}, \quad \mathbf{t} = \mathbf{R} \mathbf{s} \quad (49)$$

$$\mathbf{y} = \mathbf{Q} \mathbf{t} + \mathbf{z} \quad (50)$$

$$\mathbf{t}(k+1) = \hat{\mathbf{R}}(k+1) \mathbf{s}(k) \quad (51)$$

حالا رابطه RLS را برای تخمین سطرهای ماتریس Q بشکل زیر می‌نویسیم.

$$\mathbf{k}(k)^* = \frac{\lambda^{-1} \psi_{\lambda}^{-1*}(k-1) \mathbf{t}(k)}{1 - \lambda^{-1} \mathbf{t}(k)^H \psi_{\lambda}^{-1*}(k-1) \mathbf{t}(k)} \quad (52)$$

$$\hat{\mathbf{q}}_i(k) = \hat{\mathbf{q}}_i(k-1) + \mathbf{k}(n)^* (\mathbf{y}_i(k)^* - \mathbf{t}(k)^H \hat{\mathbf{q}}_i(k-1)) \quad (53)$$

$$\begin{aligned} \psi_{\lambda}^{-1*}(k) &= \lambda^{-1} (\psi_{\lambda}^{-1*}(k-1) \\ &\quad - \mathbf{k}(n)^* \mathbf{t}(k)^H \psi_{\lambda}^{-1*}(k-1)) \end{aligned} \quad (54)$$

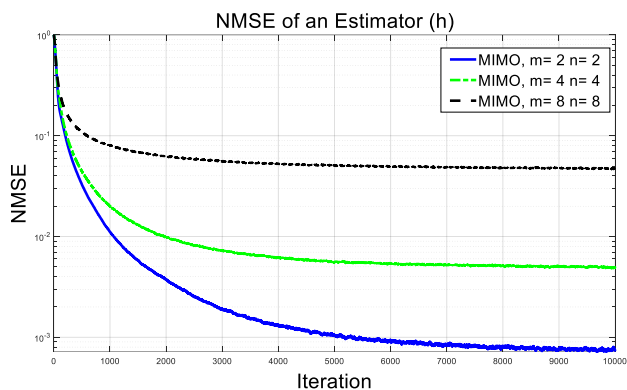
در اینجا نیز مشابه الگوریتم LMS بدون اعمال شرط یکانی بودن، ماتریس Q یکانی می‌شود. حتی در شبیه‌سازی‌ها محدودیت یکانی بودن بشکل زیر اعمال شده‌اند.

$$\hat{\mathbf{q}}_i(k) = \hat{\mathbf{q}}_i^+(k-1) + \mathbf{v}_{2i}(k) \quad (55)$$

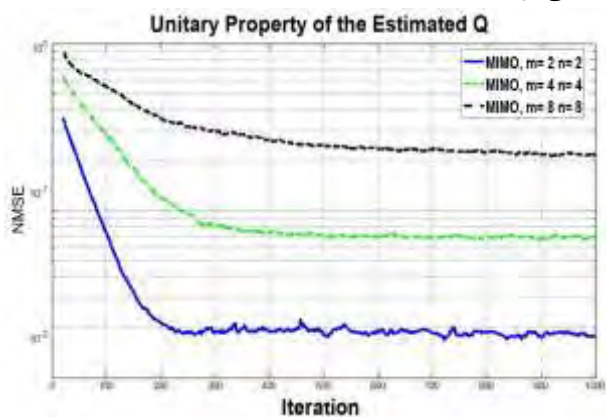
$$\text{Constrain} \Rightarrow \begin{cases} \hat{\mathbf{Q}}_i(k)^H \hat{\mathbf{q}}_i(k+1) = 0 \\ \hat{\mathbf{Q}}_i(k) = [\hat{\mathbf{q}}_1 \ \hat{\mathbf{q}}_2 \ \dots \ \hat{\mathbf{q}}_{i-1}] \end{cases} \quad (56)$$

$$\mathbf{v}_{2i} = \arg \min \left\{ \mathbf{v}_{2i}^H(k) \mathbf{v}_{2i}(k) + \lambda_{2i}^H(k) \hat{\mathbf{Q}}_i(k)^H \hat{\mathbf{q}}_i(k+1) \right\} \quad (57)$$

$$\hat{\mathbf{q}}_i(k) = \hat{\mathbf{q}}_i^+(k-1) + \mathbf{v}_{2i}(k)$$



شکل ۳. میانگین مربعات خطای نرمالیزه شده تخمین H بر حسب تعداد تکرار در الگوریتم LMS و حالت‌های 2×2 ، 4×4 و 8×8 حال شرایط را برای تخمین بوسیله الگوریتم RLS در نظر می‌گیریم که در شکل ۴ یکسانی بودن ماتریس Q در حالت $SNR=20dB$ و تعداد تکرار تا ۱۰۰۰، در MIMO‌های متفاوت نشان داده می‌شود.



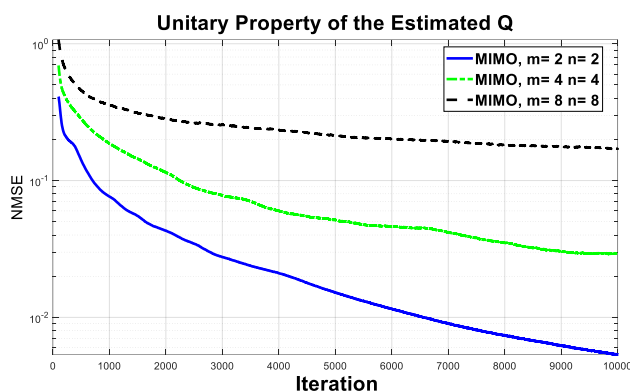
شکل ۴. تخمین یکسانی بودن ماتریس Q بر حسب تعداد تکرار در الگوریتم RLS و حالت‌های MIMO 2×2 ، 4×4 و 8×8 در حالی که MIMO به صورت 2×2 باشد با تعداد ۲۲۰ تکرار مقدار NMSE حدوداً ۰/۰۱ می‌باشد ولی خطای واقعی و نرمالیزه نشده حدود ۰/۰۰۰۰۳ مقدار دارد. شکل ۵ نیز در الگوریتم RLS میانگین مربعات خطای نرمالیزه تخمین H کانال را برای حالت‌های MIMO فرض شده، بر حسب تعداد تکرار نشان می‌دهد.

در جدول ۱ فرضیات و مقادیر استفاده شده در شبیه‌سازی‌ها نشان داده شده است.

جدول ۱: فرضیات و مقادیر شبیه‌سازی

مقدار	پارامتر
$2 \times 2 - 4 \times 4 - 8 \times 8$	MIMO
3000	طول مونت کارلو
16-QAM	مدولاسیون
۰/۹۵	λ_{RLS} ضریب فراموشی
۰/۰۲ و ۰/۰۱	μ_{LMS} طول گام
نویز گوسی سفید جمع‌شونده	نویز
محوشوندگی تخت	نوع کانال

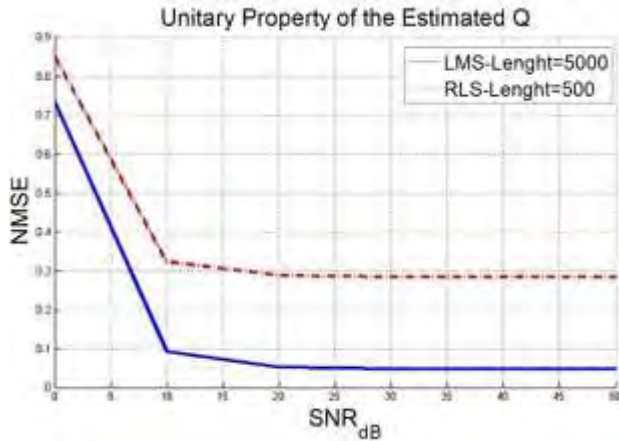
در شکل ۲ ماتریس Q تخمین زده می‌شود و برای الگوریتم LMS، مقدار خطای NMSE در حالت‌های مختلف MIMO دیده می‌شود. تعداد تکرار برای LMS تا ۱۰۰۰۰ در نظر گرفته شده است و مقدار $SNR=20dB$ در نظر گرفته شده است.



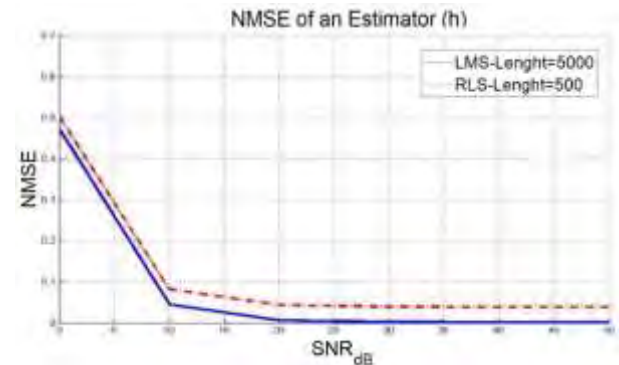
شکل ۲. تخمین یکسانی بودن ماتریس Q بر حسب تعداد تکرار در الگوریتم LMS و حالت‌های MIMO 2×2 ، 4×4 و 8×8 در حالی که MIMO به صورت 4×4 باشد با تعداد ۲۱۵۰ تکرار مقدار NMSE حدوداً ۰/۱ می‌باشد ولی خطای واقعی و نرمالیزه نشده حدود ۰/۰۰۲۵ مقدار دارد. همچنین در شکل ۳ برای درستی تخمین H در الگوریتم LMS، مقدار NMSE در شرایطی که برای تخمین Q بیان شد، دیده می‌شود که خطای بیشتر در حالتی است که بیشترین فرستنده و گیرنده را داریم.

مقادیری که همگرایی در آن انجام می پذیرد برای هر دو الگوریتم یکسان است و تنها تفاوت آنها در زمان همگرایی است.

شکل های ۸ و ۹ مقدار خطای MSE را بر حسب SNR در هر دو الگوریتم به تصویر کشیده است که تعداد تکرار برای الگوریتم LMS ۵۰۰۰ و در الگوریتم RLS ۵۰۰، در نظر گرفته شده است.



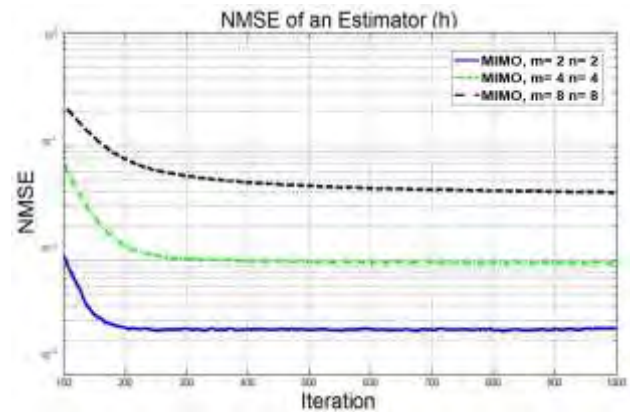
شکل ۸. بررسی یکانی بودن ماتریس Q تخمین زده شده بر حسب SNR در دو الگوریتم LMS با ۵۰۰۰ تکرار و RLS با ۵۰۰ تکرار



شکل ۹. میانگین مربعات خطای نرمالیزه شده برای تخمین H بر حسب SNR در دو الگوریتم LMS با ۵۰۰۰ تکرار و RLS با ۵۰۰ تکرار
اگر زمان همگرایی های دو الگوریتم را مقایسه کنیم در RLS همگرایی سریعتر از LMS اتفاق افتاده است. که دلیل این مطلب این است که الگوریتم RLS بر اساس کمینه سازی میانگین مربعات تا k مرحله قبلی خود عمل می کند و بدلیل داشتن این اطلاعات می توان گفت که توانسته است تا حدودی ماتریس R را بدست آورد و در تعداد مراحل خیلی کمتری به مقادیر بهینه برسد.

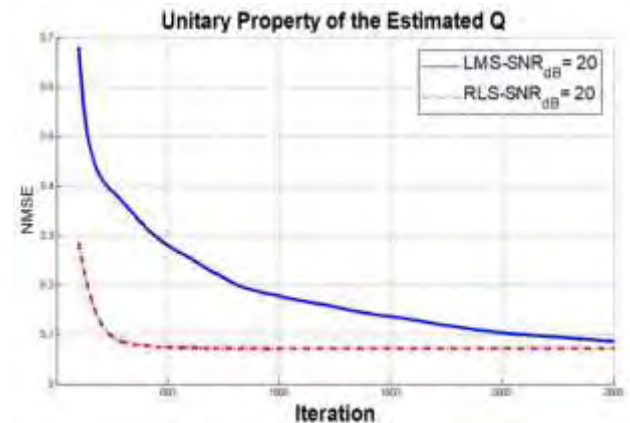
۵- نتیجه

با استفاده از روش های LMS و RLS کانال مخابراتی MIMO تخمین زده شد و روشی عملی برای تخمین ماتریس های Q و R به صورت مستقیم ارائه گردید. در اینجا تجزیه R و Q در سریع و ساده بودن تخمین مشخصه کانال H کمک میکند و از تخمین مستقیم کانال که دارای پیچیدگی می باشد جلوگیری می شود.



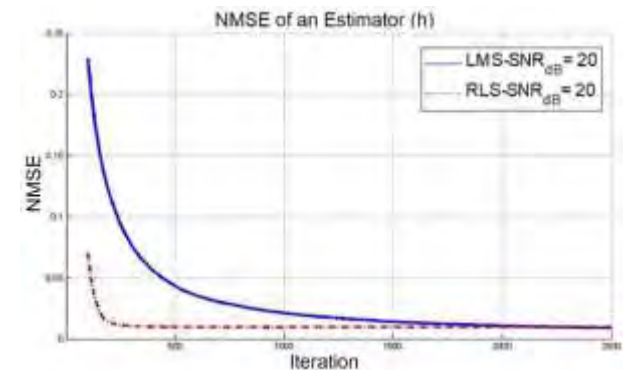
شکل ۵. میانگین مربعات خطای نرمالیزه شده برای تخمین H بر حسب تعداد تکرار در الگوریتم RLS و حالت های MIMO 2×2 ، 4×4 و 8×8

در این قسمت نتایج حاصل از الگوریتم LMS و RLS را برای MIMO در حالت 4×4 با یکدیگر مقایسه می کنیم. شکل ۶ تخمین Q را برای هر دو الگوریتم نشان می دهد. مقدار $SNR=20dB$ می باشد و میزان خطا بر حسب تعداد تکرار تا ۲۵۰۰ شبیه سازی شده است.



شکل ۶. بررسی یکانی بودن ماتریس Q تخمین زده شده بر حسب تکرار در دو الگوریتم LMS و RLS و $SNR=20dB$

بعد از تخمین Q نوبت به تخمین H می رسد که در شکل ۷ این تخمین برای هر دو الگوریتم LMS و RLS مقایسه شده است.



شکل ۷. میانگین مربعات خطای نرمالیزه شده برای تخمین H بر حسب تکرار در دو الگوریتم LMS و RLS و $SNR=20dB$

- [10] S. Sun, and T. S. Rappaport. "Millimeter wave MIMO channel estimation based on adaptive compressed sensing." IEEE International Conference on Communications Workshops (ICC Workshops), 2017.
- [11] L. Ge, et al. "Compression-based lmmse channel estimation with adaptive sparsity for massive MIMO in 5G systems." IEEE Systems Journal, vol. 13, no. 4, pp. 3847-3857, 2019.
- [12] R. Md. Masud. "Performance comparison of LMS and RLS channel estimation algorithms for 4G MIMO OFDM systems." 14th International Conference on Computer and Information Technology (ICCIIT), 2011.
- [13] S. A. Ghauri, and M. F. Sohail. "System identification using LMS, NLMS and RLS." IEEE Student Conference on Research and Development, 2013.

[۱۴] بهزاد مظفری تازه‌کند؛ محمدعلی طینی «جداسازی کور سیگنال‌های منبع بر اساس تابع خود همبستگی غیرخطی با استفاده از الگوریتم

LMS»، مجله مهندسی برق دانشگاه تبریز، ۱، 40، ۳۵-۴۴، ۱۳۸۹.

[15] T. Lo, and V. Tarokh. "Space-time block coding-from a physical perspective." IEEE Wireless Communications and Networking Conference (Cat. No. 99TH8466). vol. 1, 1999.

[16] Liu, Tsung-Hsien, et al. "Block-wise QR-decomposition for the layered and hybrid alamouti STBC MIMO systems: Algorithms and hardware architectures." IEEE Transactions on Signal Processing, vol. 62, no. 18, pp. 4737-4747, 2014.

[17] D. Cescato, and H. Bölcskei. "Algorithms for interpolation-based QR decomposition in MIMO-OFDM systems." IEEE Transactions on Signal Processing, vol. 59, no. 4, pp. 1719-1733, 2011.

[18] G. Golub, and F. Uhlig. "The QR algorithm: 50 years later its genesis by John Francis and Vera Kublanovskaya and subsequent developments." IMA Journal of Numerical Analysis, drp012, 2009.

[۱۹] احسان دشتیان؛ مجید اخوت؛ حمید آرزومند، «تخمین کانال MIMO با استفاده از QRD و الگوریتم وفقی LMS»، مجله مهندسی برق دانشگاه

تبریز، ۲، 48، 609-616، ۱۳۹۷.

[20] B. Farhang-Boroujeny, Adaptive filters: theory and applications. John Wiley & Sons, 1999.

زیرنویس‌ها

Recursive Least Square ^۴
Space Time Block Code ^۵
QR Decomposition ^۶

Multiple Input Multiple Output ^۱
Long Term Evolution ^۲
Least Mean Square ^۳

برای این تخمین که براساس داده‌های آموزشی در یافتی در گیرنده‌ها انجام شد در مقایسه LMS و RLS با یکدیگر در شرایط یکسان، مشاهده می‌شود که همگرایی الگوریتم RLS سریعتر از LMS صورت می‌گیرد، اما پیچیدگی محاسبات در الگوریتم RLS بیشتر از الگوریتم LMS می‌باشد. البته در هر دو روش افزایش تعداد تکرار و SNR، منجر به کاهش خطا می‌شود.

مراجع

- [1] S. M. Alamouti, "A Simple Transmit Diversity Technique for Wireless Communications," IEEE J. Sel. Areas Commun, vol. 16, no. 8, pp. 1451- 1458, 1998.
- [2] M. Cicerone, O. Simeone, and U. Spagnolini. "Channel estimation for MIMO-OFDM systems by modal analysis/filtering." IEEE Trans. on Commun, vol. 54, no. 11, pp.: 2062-2074, 2006.
- [3] P. Volker, et al. "How often channel estimation is needed in MIMO systems." IEEE Global Telecommunications Conference (IEEE Cat. No. 03CH37489). vol. 2, 2003.
- [4] K. Yamaguchi, et al. "Channel prediction techniques for a multi-user MIMO system in time-varying environments." IEICE Trans. on Commun., vol. 97, no. 12, pp. 2747-2755, 2014.
- [5] N. Honma, "Method of MIMO channel estimation between parasitic antenna arrays." IEEE transactions on antennas and propagation, vol. 61, no. 5, pp. 2792-2800, 2013.
- [6] P. Pasangi, M. Atashbar, and M. Mohassel Feghhi. "Blind downlink channel estimation of multi-user multi-cell massive MIMO system in presence of the pilot contamination." AEU-International Journal of Electronics and Communications, vol. 117, pp. 153099, 2020.
- [7] N. Shalavi, M. Atashbar, and M. Mohassel Feghhi. "Downlink channel estimation of FDD based massive MIMO using spatial partial-common sparsity modeling." Physical Communication, vol. 42, pp. 101138, 2020.
- [8] P. Pasangi, M. Atashbar, and M. Mohassel Feghhi. "Blind downlink channel estimation for TDD-based multiuser massive MIMO in the presence of nonlinear HPA." ETRI Journal, vol. 41, no. 4, pp. 426-436, 2019.
- [9] Z. Gao, et al. "Spatially common sparsity based adaptive channel estimation and feedback for FDD massive MIMO." IEEE Transactions on Signal Processing, vol. 63, no. 23, pp. 6169-6183, 2015.