

## تخمین شار گرمایی وابسته به زمان با توجه به توزیع دمای یک نقطه در یک هندسه نامنظم با استفاده از روش معکوس

دانشجوی کارشناسی ارشد، دانشگاه آزاد اسلامی واحد شاهرود، شاهرود، ایران  
 دانشیار، گروه مکانیک، دانشگاه آزاد اسلامی واحد شاهرود، شاهرود، ایران  
 استادیار، گروه مکانیک، دانشگاه آزاد اسلامی واحد شاهرود، شاهرود، ایران  
 استادیار، گروه مکانیک، دانشگاه آزاد اسلامی واحد شاهرود، شاهرود، ایران

محمدرضا افتخاری نیا  
 محمدمحمدیون\*  
 قباد شفیعی ثابت  
 حمید محمدیون

### چکیده

در این تحقیق روش گرادیان مزدوج با مساله الحاقی برای حل مسئله انتقال گرمایی معکوس و تخمین شار گرمایی وابسته به زمان با استفاده از توزیع دمای یک نقطه در یک هندسه نامنظم، مورد استفاده قرار گرفته است. همچنین تاثیر داده‌های نویزدار بر روی جواب نهایی مساله بررسی شده است. معادلات حاکم با استفاده از روش تفاضل محدود حل شده‌اند. برای حل این مساله روش‌های مختصات عمومی و B.F.C مورد استفاده قرار گرفته‌اند. در این روش ناحیه نامنظم در صفحه فیزیکی  $(r, z)$  به یک مستطیل در صفحه محاسباتی  $(\xi, \eta)$  تبدیل می‌شود. فرمول‌بندی ارائه شده کلی است و می‌تواند برای حل مسائل رسانش گرمایی معکوس روی هر ناحیه‌ای که قابل تبدیل به یک مستطیل باشد به کار گرفته شود. نتایج به دست آمده دقت بالای روش ارائه شده را نشان می‌دهند. همچنین حتی اگر داده‌های ورودی دارای نویز باشند روش ارائه شده از پایداری خوبی برخوردار است. مساله در حالت متقارن محوری حل شده است. از جمله کاربردهای این مدل می‌توان به کاربرد آن در طراحی سیستم‌های محافظ حرارتی اشاره کرد.

**واژه‌های کلیدی:** روش گرادیان مزدوج، شار گرمایی وابسته به زمان، داده‌های نویزدار، متقارن محوری، هندسه نامنظم، روش مختصات عمومی.

## Estimation of the Time-dependent Heat Flux using the Temperature Distribution at a Point in a Non Homogenous Geometry by Inverse Method

M. R. Eftekharinia  
 M. Mohammadiun  
 Gh. Shafee Sabet  
 H. Mohammadiun

Department of Mechanical Engineering, Shahrood Branch, Islamic Azad University, Shahrood, Iran  
 Department of Mechanical Engineering, Shahrood Branch, Islamic Azad University, Shahrood, Iran  
 Department of Mechanical Engineering, Shahrood Branch, Islamic Azad University, Shahrood, Iran  
 Department of Mechanical Engineering, Shahrood Branch, Islamic Azad University, Shahrood, Iran

### Abstract

In this paper, the conjugate gradient method, coupled with the adjoint problem, is used in order to solve the inverse heat conduction problem and estimation of the time-dependent heat flux, using temperature distribution at a point in a non homogenous geometry. Also, the effect of noisy data on the final solution is studied. The numerical solution of the governing equations is obtained by employing a finite-difference technique. For solving this problem, the general coordinate method and body fitted coordinate method are used. The irregular region in the physical domain  $(r, z)$  is transformed into a rectangle in the computational domain  $(\xi, \eta)$ . The present formulation is general and can be applied to the solution of boundary inverse heat conduction problems over any region that can be mapped into a rectangle. The obtained results show the good accuracy of the presented method. Also, the solutions have good stability even if the input data includes noise. The problem is solved in an axisymmetric case. Applications of this model is in the thermal protect systems (t.p.s.).

**Keywords:** Conjugate gradient method, Time-dependent heat flux, Noisy data, Axisymmetric, non homogenous geometry, General coordinate method.

می‌شوند [۲]. حل مسائل معکوس خیلی مشکل‌تر از حل مسائل مستقیم است که به ناپایداری حل مربوط می‌شود و این مسائل از نظر ریاضی مسائل بدخیم نامیده می‌شوند. در دهه‌های اخیر با پیشرفت کامپیوترها، روش‌های معکوس معنی کلی‌تری از حل مسائل انتقال حرارت پیدا کرده‌اند. به عنوان مثال مهم‌ترین کاربردهای حل مسائل رسانش گرمایی معکوس، شامل کنترل فرایند خنک‌کاری اجزاء الکتریکی، تخمین سرعت جریان جت خنک‌کننده در فرایند ماشین‌کاری یا سخت‌کاری، تعیین شرایط در فصل مشترک قالب و مذاب در فرایندهای ریخته‌گری و نوردکاری [۳]، تخمین شار گرمایی در سطح دیواری که در معرض آتش قرار گرفته یا درون سطح یک

### ۱- مقدمه

مسائل رسانش گرمایی مستقیم به تعیین دما در نقاط داخلی یک ناحیه، زمانی که شرایط اولیه و مرزی، خواص ترموفیزیکی، گرمایی تولید شده یا شار گرمایی مشخص هستند مربوط می‌شود [۱]. در مقایسه با مسائل مستقیم، مسائل رسانش گرمایی معکوس (IHCP) به صورت تخمین شرایط اولیه و مرزی، خواص مواد، جملات چشمه یا چاه و معادلات حاکم با توجه به توزیع دمای اندازه‌گیری شده در یک یا چند نقطه داخل جسم، تعریف

لویی [۲۲] یک روش هیبریدی را برای شناسایی هم‌زمان رسانایی گرمایی و ظرفیت گرمایی در یک مساله رسانش گرمای معکوس ارائه داد. روش او ترکیبی از روش‌های الگوریتم ژنتیک و لونیبرگ مارکوات بود.

محمدیون و همکاران [۲۳] شار گرمایی مجهول وابسته به زمان را با استفاده از توزیع دمایی یک نقطه تخمین زدند. آن‌ها برای حل معادلات حاکم از روش تفاضل محدود استفاده کردند.

تای و همکاران [۲۴] یک روش رسانش گرمای معکوس را برای تخمین زدن تغییرات زمانی و مکانی شار گرمایی در فرآیند سوراخ‌کاری یک سطح به‌کار بردند. آن‌ها از دماهای اندازه‌گیری شده توسط ترموکوپل‌هایی که داخل جسم قرار داده شده بودند، استفاده کردند و معادلات حاکم را با استفاده از روش اجزای محدود حل کردند.

رحیمی و همکاران [۲۵] توان منبع حرارتی وابسته به زمان را با استفاده از توزیع دمایی یک نقطه در یک سیستم سه لایه تخمین زدند. آن‌ها از روش‌های تفاضل محدود و حجم محدود برای حل معادلات حاکم استفاده کردند.

محمدیون و همکاران [۲۶] روش تخمین متوالی تابع را برای شناسایی شار گرمایی در مرزهای تصعید شونده مواد تجزیه‌پذیر به‌کار بردند. آن‌ها یک مساله معکوس را برای پیش‌بینی شرایط گرمایی در سطح حل کردند.

محمدیون و همکاران [۲۷] روش تخمین متوالی تابع را برای سطوح فداشونده به‌کار بردند. آن‌ها از یک روش معکوس برای محاسبه شار گرمایی در فصل مشترک متحرک استفاده کردند.

وو و همکاران [۲۸] الگوریتم معکوسی را بر مبنای روش گرادیان مزدوج برای حل مساله رسانش گرمای هذلولوی و تخمین شار گرمایی مجهول بر روی یک استوانه بی‌نهایت با استفاده از دماهای اندازه‌گیری شده داخل جسم به‌کار بردند.

در این تحقیق از روش گرادیان مزدوج با مسئله الحاقی برای حل مسئله رسانش گرمای معکوس تعیین شار گرمایی مرزی وابسته به زمان با توجه به توزیع دمایی داده شده در یک نقطه در یک هندسه نامنظم استفاده شده است. مساله در حالت متقارن محوری، حل شده است. برای حل مساله از روش مختصات عمومی و روش B.F.C (Body Fitted Coordinate Method) استفاده شده است. معادلات حاکم با استفاده از روش تفاضل محدود حل شده‌اند. حساسیت مساله نسبت به داده‌های نویزدار، مورد بررسی قرار گرفته است. نتایج به‌دست آمده نشان می‌دهند که روش حاضر از پایداری خوبی نسبت به داده‌های نویزدار برخوردار است.

## ۲- فرمول‌بندی مسئله

### ۲-۱- مساله مستقیم

هندسه مساله در شکل (۱) نشان داده شده است. همان‌طور که در شکل مشخص است شار گرمایی مجهول روی مرز بالایی اعمال شده است. مرز سمت راست در معرض شار گرمایی ثابت  $q_0$  قرار دارد و دو مرز دیگر عایق در نظر گرفته شده‌اند. هدف محاسبه گرمایی مجهول  $q(t)$  در مدت زمان  $0 \leq t \leq t_f$  با توجه به توزیع دمایی داده شده

محفظه احتراق [۴] و همچنین در سطوحی که فداشوندگی اتفاق می‌افتد یا در سطوحی که فرایند ذوب اتفاق می‌افتد [۵] می‌شود. از کاربردهای دیگر IHCP می‌توان به پیش‌بینی دمای دیواره داخلی یک راکتور، تعیین رسانایی گرمایی و شرایط سطح خارجی یک فضاپیما که در فاز برگشت قرار دارد و مدل‌سازی توزیع دما یا شار گرمایی در فصل مشترک ابزار و قطعه کار در ماشین برش [۶] و همچنین در کنترل خنک‌کاری اشاره کرد [۷].

روش‌های مختلفی برای حل مسائل رسانش گرمای معکوس وجود دارد. بعضی از این روش‌ها در این‌جا فهرست می‌شوند. به عنوان مثال، روش حل دقیق، معکوس انتگرال دوهمال، روش تبدیل لاپلاس، روش حجم کنترل، استفاده از معادله هلمهولتز، روش تفاضل محدود، تقریب اجزاء محدود، روش فیلترسازی دیجیتال، روش تنظیم تیخنوف، روش تنظیم تکرار الیفانف، روش گرادیان مزدوج [۸] و روش‌های دیگر. در این تحقیق از روش گرادیان مزدوج با مساله الحاقی که روشی بسیار قدرتمند در حل مسائل رسانش گرمای معکوس است، استفاده شده است. در این روش عمل تنظیم در طول پروسه تکرار صورت می‌گیرد و بنابراین، تعیین شرایط تنظیم بهینه، مورد نیاز نیست [۴].

جیانگ و همکاران [۹] شار گرمایی مرزی وابسته به زمان که روی یک میله اعمال می‌شد را با استفاده از روش گرادیان مزدوج با مساله الحاقی به‌دست آوردند و از روش تنظیم تیخنوف مرتبه صفر برای پایدار کردن حل معکوس استفاده کردند. آن‌ها از روش تفاضل محدود برای حل مساله مورد نظر خود استفاده کردند.

سان گویا چن و همکاران [۱۴] با استفاده از روش معکوس، توزیع دما و شار گرمایی را در فرایند سخت‌کاری به‌دست آوردند. آن‌ها از روش گرادیان مزدوج برای بهبود تخمین دما و شار گرمایی برای یک مساله دو بعدی در مختصات استوانه‌ای استفاده کردند و با استفاده از روش اجزاء محدود، معادلات حاکم را حل کردند.

پلاتوفسکی و کرین [۱۸] استفاده از مدل‌های رسانش گرمای معکوس به منظور تخمین شار گرمایی گذرا در الکترواسلگی که مجدد ذوب می‌شود را مورد بررسی قرار دادند. آن‌ها در تحقیق خود سه روش انتقال گرمای معکوس را جهت امکان‌کاربرد در صنعت مورد بررسی قرار دادند.

سو و همکاران [۱۹] مسئله معکوس جهت تخمین شار گرمایی دیواره در مسئله میعان فیلم روی یک سطح عمودی را مورد بررسی قرار دادند. روش معکوس آن‌ها اطلاعات مقدماتی خاصی در مورد فرم تابعی مقادیر مجهول را نیاز ندارد.

خنیکی و کریمیان [۲۰] در تحقیق خود شار گرمایی جذب شده توسط سطح ماهواره را با استفاده از داده‌های دمایی تعیین کردند. آن‌ها در کار خود یک حسگر شار گرمایی ساده برای بررسی محدودیت‌های احتمالی پیشنهاد کردند. همچنین با استفاده از داده‌های دما یک حل معکوس از معادله انرژی ارائه کردند که حرارت جذب شده توسط سطح ماهواره را محاسبه کنند.

بک و همکاران [۲۱] مطالعاتی را جهت تخمین شار گرمایی وارد بر سطح یک جسم، با استفاده از روش معکوس، ارائه دادند. آن‌ها از دماهای اندازه‌گیری شده داخل جسم برای محاسبات خود استفاده کردند.

$$\frac{\partial^2 T}{\partial z^2} = \xi_{zz} \left( \frac{\partial T}{\partial \xi} \right) + \xi_z^2 \left( \frac{\partial^2 T}{\partial \xi^2} \right) + 2\eta_z \xi_z \left( \frac{\partial^2 T}{\partial \eta \partial \xi} \right) + \eta_{zz} \left( \frac{\partial T}{\partial \eta} \right) + \eta_z^2 \left( \frac{\partial^2 T}{\partial \eta^2} \right) \quad (5)$$

با جمع روابط (۴) و (۵) داریم:

$$\frac{\partial^2 T}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial r^2} = (\xi_{rr} + \xi_{zz}) \left( \frac{\partial T}{\partial \xi} \right) + (\eta_{rr} + \eta_{zz}) \left( \frac{\partial T}{\partial \eta} \right) + \xi_r^2 \left( \frac{\partial^2 T}{\partial \xi^2} \right) + 2\eta_r \xi_r \left( \frac{\partial^2 T}{\partial \eta \partial \xi} \right) + \eta_r^2 \left( \frac{\partial^2 T}{\partial \eta^2} \right) + \xi_z^2 \left( \frac{\partial^2 T}{\partial \xi^2} \right) + 2\eta_z \xi_z \left( \frac{\partial^2 T}{\partial \eta \partial \xi} \right) + \eta_z^2 \left( \frac{\partial^2 T}{\partial \eta^2} \right) \quad (6)$$

$$\xi_{rr} + \xi_{zz} = \frac{1}{|J|^2} \left[ \left( \frac{\partial r}{\partial \eta} \right)^2 + \left( \frac{\partial z}{\partial \eta} \right)^2 \right] \left( \frac{\partial^2 r}{\partial \xi^2} \frac{\partial z}{\partial \eta} - \frac{\partial^2 z}{\partial \xi^2} \frac{\partial r}{\partial \eta} \right) - \frac{2}{|J|^2} \left( \frac{\partial z}{\partial \xi} \frac{\partial z}{\partial \eta} + \frac{\partial r}{\partial \xi} \frac{\partial r}{\partial \eta} \right) \left( \frac{\partial^2 r}{\partial \xi \partial \eta} \frac{\partial z}{\partial \eta} - \frac{\partial^2 z}{\partial \xi \partial \eta} \frac{\partial r}{\partial \eta} \right) + \frac{1}{|J|^2} \left[ \left( \frac{\partial z}{\partial \eta} \right)^2 + \left( \frac{\partial r}{\partial \eta} \right)^2 \right] \left( \frac{\partial^2 r}{\partial \eta^2} \frac{\partial z}{\partial \eta} - \frac{\partial^2 z}{\partial \eta^2} \frac{\partial r}{\partial \eta} \right) \quad (7)$$

$$\eta_{rr} + \eta_{zz} = \frac{1}{|J|^2} \left[ \left( \frac{\partial r}{\partial \eta} \right)^2 + \left( \frac{\partial z}{\partial \eta} \right)^2 \right] \left( \frac{\partial^2 z}{\partial \xi^2} \frac{\partial r}{\partial \xi} - \frac{\partial^2 r}{\partial \xi^2} \frac{\partial z}{\partial \xi} \right) - \frac{2}{|J|^2} \left( \frac{\partial z}{\partial \xi} \frac{\partial z}{\partial \eta} + \frac{\partial r}{\partial \xi} \frac{\partial r}{\partial \eta} \right) \left( \frac{\partial^2 z}{\partial \xi \partial \eta} \frac{\partial r}{\partial \xi} - \frac{\partial^2 r}{\partial \xi \partial \eta} \frac{\partial z}{\partial \xi} \right) + \frac{1}{|J|^2} \left[ \left( \frac{\partial z}{\partial \xi} \right)^2 + \left( \frac{\partial r}{\partial \xi} \right)^2 \right] \left( \frac{\partial^2 z}{\partial \xi^2} \frac{\partial r}{\partial \xi} - \frac{\partial^2 r}{\partial \xi^2} \frac{\partial z}{\partial \xi} \right) \quad (8)$$

در روابط فوق، J جاکوبی تبدیل نامیده می‌شود و به صورت زیر محاسبه می‌گردد:

$$J = z_\xi r_\eta - r_\xi z_\eta \quad (9)$$

### ۳-۲- شرایط مرزی

شرایط مرزی مساله در حالت کلی به صورت زیر می‌باشد:

$$\frac{\partial T}{\partial n} = \frac{q}{k} \quad (10)$$

که در بعضی از مرزها (مرز پایین و مرز سمت چپ) صفر می‌باشد. در روابط فوق n بردار عمود بر سطح می‌باشد و Γ فاصله عمودی از محور Z است. متغیرهای  $\eta, \xi$  به ترتیب محورهای افقی و عمودی در صفحه محاسباتی هستند.

مشتق عمودی T در امتداد خطوط  $\xi$  ثابت و  $\eta$  ثابت با استفاده از روابط زیر به دست می‌آید [۱۶ و ۱۷]:

$$\frac{\partial T}{\partial n} \Big|_{\xi=c} = \frac{1}{J\alpha^{1/2}} (\alpha T_\xi - \beta T_\eta) \quad (11)$$

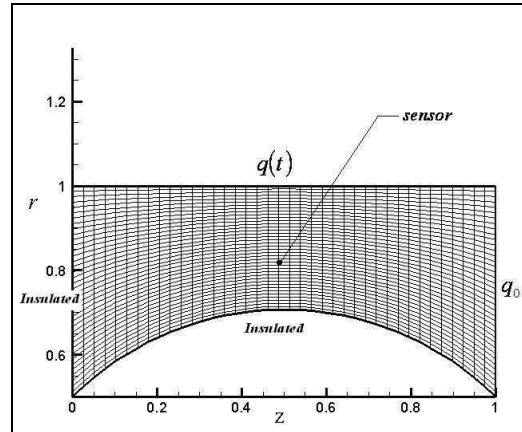
$$\frac{\partial T}{\partial n} \Big|_{\eta=c} = \frac{1}{J\gamma^{1/2}} (-\beta T_\xi + \gamma T_\eta) \quad (12)$$

که در روابط فوق  $\alpha, \beta$  و  $\gamma$  به صورت زیر محاسبه می‌شوند:

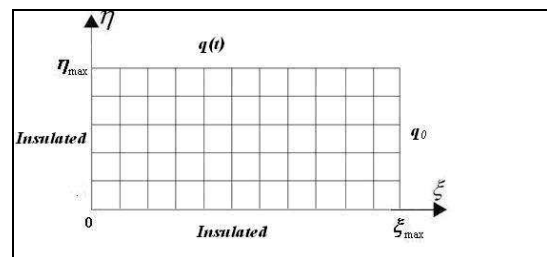
$$\alpha = z_\eta^2 + r_\eta^2 \quad (13)$$

$$\beta = z_\xi z_\eta + r_\xi r_\eta \quad (14)$$

در یک نقطه می‌باشد داده های ورودی می‌توانند دارای نویز باشند. در تدوین کد مربوط به محاسبه توزیع دما، از روش مختصات عمومی استفاده شده است. در این روش، محاسبات در صفحه محاسباتی که به شکل یک مستطیل و دارای شبکه ای هموار است انجام می‌شود و سپس نتایج در صفحه فیزیکی که معمولاً دارای پیچیدگی بیشتری می‌باشد به نمایش در می‌آید. صفحه محاسباتی و شرایط مرزی مربوطه در شکل (۲) نمایش داده شده‌اند.



شکل ۱- هندسه مساله و موقعیت حسگر



شکل ۲- هندسه مساله در صفحه محاسباتی

### ۳- معادلات حاکم

معادله حاکم معادله انتقال گرما در دستگاه مختصات استوانه ای با فرض تقارن محوری می باشد که به صورت زیر توصیف شده است:

$$\frac{\partial^2 T}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial T}{\partial r} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} = \frac{\rho C_p}{k} \frac{\partial T}{\partial t} \quad (1)$$

### ۳-۱- تبدیل معادله حاکم از صفحه فیزیکی به صفحه محاسباتی

با استفاده از روابط زیر تمامی مشتقات جزئی مرتبه اول و مرتبه دوم متغیر وابسته T از فضای فیزیکی به فضای محاسباتی منتقل می‌شود.

$$\frac{\partial T}{\partial r} = \frac{\partial T}{\partial \xi} \frac{\partial \xi}{\partial r} + \frac{\partial T}{\partial \eta} \frac{\partial \eta}{\partial r} \quad (2)$$

$$\frac{\partial T}{\partial z} = \frac{\partial T}{\partial \xi} \frac{\partial \xi}{\partial z} + \frac{\partial T}{\partial \eta} \frac{\partial \eta}{\partial z} \quad (3)$$

$$\frac{\partial^2 T}{\partial r^2} = \xi_{rr} \left( \frac{\partial T}{\partial \xi} \right) + \xi_r^2 \left( \frac{\partial^2 T}{\partial \xi^2} \right) + 2\eta_r \xi_r \left( \frac{\partial^2 T}{\partial \eta \partial \xi} \right) + \eta_{rr} \left( \frac{\partial T}{\partial \eta} \right) + \eta_r^2 \left( \frac{\partial^2 T}{\partial \eta^2} \right) \quad (4)$$

شرایط مرزی در صفحه محاسباتی به صورت زیر نمایش داده می‌شوند:

$$\frac{1}{J\alpha^{1/2}}(\alpha\lambda_\xi - \beta\lambda_\eta) = 0 \quad \xi = 0, \xi = \xi_{\max}, t > 0 \quad (24)$$

$$\frac{1}{J\gamma^{1/2}}(-\beta\lambda_\xi + \gamma\lambda_\eta) = 0 \quad \eta = 0, \eta = \eta_{\max}, t > 0 \quad (25)$$

اندازه گام بهینه توسط مسأله حساسیت به دست می‌آید [۱۱، ۱۵].

#### ۴-۲- مسأله حساسیت

برای به دست آوردن معادله حساسیت فرض می‌شود، زمانی که  $q(t)$  به اندازه  $\Delta q(t)$  تغییر می‌کند،  $T(r, z, t)$  به اندازه  $\Delta T(r, z, t)$  تغییر می‌کند. بنابراین در مسئله مستقیم  $T(r, z, t)$  با  $[T(r, z, t) + \Delta T(r, z, t)]$  و  $q(t)$  با  $[q(t) + \Delta q(t)]$  تعویض می‌شود و حاصل از مسئله مستقیم کم شده و به این ترتیب معادله حاکم بر مسئله حساسیت به دست می‌آید. این معادله به صورت زیر می‌باشند:

$$\frac{\partial^2 \Delta T}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \Delta T}{\partial r} + \frac{\partial^2 \Delta T}{\partial z^2} = \frac{\rho C_p}{k} \frac{\partial \Delta T}{\partial t} \quad (26)$$

#### ۴-۲-۱- شرایط مرزی

شرایط مرزی و اولیه برای حل معادله فوق به صورت زیر می‌باشند:

$$K \frac{\partial \Delta T}{\partial n} = \Delta q \quad \text{روی مرز بالا} \quad (27)$$

$$\frac{\partial \Delta T}{\partial n} = 0 \quad \text{other boundary, } t > 0 \quad (28)$$

$$\Delta T(r, z, 0) = 0 \quad t = 0 \quad (29)$$

شرایط مرزی در صفحه محاسباتی به صورت زیر نمایش داده می‌شوند:

$$\frac{1}{J\alpha^{1/2}}(\alpha\Delta T_\xi - \beta\Delta T_\eta) = 0 \quad \xi = 0, \xi = \xi_{\max}, t > 0 \quad (30)$$

$$\frac{1}{J\gamma^{1/2}}(-\beta\Delta T_\xi + \gamma\Delta T_\eta) = 0 \quad \eta = 0, t > 0 \quad (31)$$

$$\frac{1}{J\gamma^{1/2}}(-\beta\Delta T_\xi + \gamma\Delta T_\eta) = \Delta q(t) \quad \eta = \eta_{\max}, t > 0 \quad (32)$$

در روابط فوق  $\Delta T$  بیانگر دمایی حساسیت است.

تابع مجهول  $q(t)$  به وسیله حداقل کردن تابع  $S[q(t)]$  (معادله ۲۰) تخمین زده می‌شود. معادله تکراری برای تخمین  $q(t)$  به صورت زیر است [۱۰، ۱۲، ۱۵]:

$$q^{k+1}(t) = q^k(t) - \beta^k d^k(t) \quad (33)$$

که  $k$  تعداد تکرارهاست.  $d^k(t)$  (جهت جستجو) به صورت زیر تعیین می‌شود [۱۰، ۱۲، ۱۵]:

$$d^k(t) = \nabla S[q^k(t)] + \gamma^k d^{k-1}(t) \quad (34)$$

ضریب پیوستگی  $\gamma^k$  را می‌توان با استفاده از فرمول زیر محاسبه کرد: [۱۱، ۱۳، ۱۵]

$$\gamma^k = \frac{\int_0^{t_f} \{ \nabla S[q^k(t)] \}^2 dt}{\int_0^{t_f} \{ \nabla S[q^{k-1}(t)] \}^2 dt} \quad (35)$$

$$\gamma = z_\xi^2 + r_\xi^2 \quad (15)$$

بنابراین شرایط مرزی در صفحه محاسباتی به صورت زیر نمایش داده می‌شوند:

$$\xi = 0, t > 0 \quad \frac{1}{J\alpha^{1/2}}(\alpha T_\xi - \beta T_\eta) = 0 \quad (16)$$

$$\xi = \xi_{\max}, t > 0 \quad \frac{k}{J\alpha^{1/2}}(\alpha T_\xi - \beta T_\eta) = q_0 \quad (17)$$

$$\frac{1}{J\gamma^{1/2}}(-\beta T_\xi + \gamma T_\eta) = 0 \quad \eta = 0, t > 0 \quad (18)$$

$$\frac{k}{J\gamma^{1/2}}(-\beta T_\xi + \gamma T_\eta) = q(t) \quad (19)$$

مطابق شکل (۱) جسمی از جنس فولاد که مشخصات آن به شکل

$$\left( \rho = 7800 \frac{kg}{m^3}, C_p = 500 \frac{J}{kg.k}, k = 20 \frac{w}{mk} \right)$$

می‌گیریم، دمایی اولیه  $300^\circ k$  است، شبکه مورد استفاده در حل مسأله و موقعیت حسگر در شکل ۱ نشان داده شده است.

#### ۴-۲-۱- مسأله معکوس

مسئله معکوس شامل تخمین تغییرات زمانی شار گرمایی با استفاده از دماهای گذرای خوانده شده از روی یک حسگر است. مسئله معکوس باید به صورتی حل شود که رابطه (۲۰) حداقل شود.

$$S[q(t)] = \frac{1}{2} \int_0^{t_f} \sum_{m=1}^{NS} [T(\xi_m, \eta_m, t; q) - Y_m(t)]^2 dt \quad (20)$$

در رابطه فوق،  $T(\xi_m, \eta_m, t; q)$  و  $Y_m(t)$  به ترتیب دماهای تخمین زده شده و اندازه گیری شده هستند و NS، تعداد حسگرهاست که در مسئله حاضر ۱ در نظر گرفته شده است. رابطه فوق را می‌توان با استفاده از روش گرادیان مزدوج که روشی مبتنی بر تکرار است، کمینه کرد. در این الگوریتم تکراری، جهت جستجو با گرادیان تابع خطا مرتبط است و با استفاده از مسأله الحاقی تعیین می‌شود [۱۰، ۱۱، ۱۵]:

#### ۴-۱-۱- مسأله الحاقی

رابطه الحاقی برای تعیین ضریب لاگرانژ  $\lambda(r, z, t)$  به صورت زیر می‌باشد:

$$\frac{\partial^2 \lambda}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \lambda}{\partial r} + \frac{\partial^2 \lambda}{\partial z^2} + \sum_{m=1}^{NS} [T(\xi_m, \eta_m, t; q) - Y_m(t)] \delta(\eta - \eta_m) \delta(\xi - \xi_m) = \frac{\rho C_p}{k} \frac{\partial \lambda}{\partial t} \quad (21)$$

که نقاط  $(\xi_m, \eta_m)$  موقعیت حسگرها را نشان می‌دهد. در رابطه فوق پارامتر  $\lambda$  دمایی الحاقی و  $\delta$  تابع دلتای دیراک می‌باشد.

#### ۴-۱-۱-۱- شرایط مرزی

شرایط مرزی برای حل معادله فوق به صورت زیر می‌باشد:

$$\frac{\partial \lambda}{\partial n} = 0 \quad (22)$$

$$\lambda(r, z, t_f) = 0 \quad t = t_f \quad (23)$$

۸- محاسبه  $q^{k+1}(t)$  با توجه به مشخص شدن  $\beta^k$  و  $d^k(t)$  و برگشتن به مرحله ۱ (معادله (۳۳)).

### ۶- نتایج

برای گسسته سازی معادلات حاکم از روش تفاضل محدود و از یک شبکه  $40 \times 40$  استفاده نموده ایم. زمان نهایی ۱۰ ثانیه در نظر گرفته شده و گام زمانی مورد استفاده در حل مسئله  $\Delta t = 0.01$  اختیار شده است. در کار حاضر با اندازه گیری دما، تنها در یک نقطه، شار گرمایی مرزی را تخمین می‌زنیم و حساسیت مسئله نسبت به داده های نویزدار مورد بررسی قرار گرفته است. داده های نویزدار با رابطه (۳۹) ایجاد می‌شوند. برای تابع پله‌ای که مشکل‌ترین تابع از نظر پوشش با روش‌های معکوس است پایداری روش نسبت به نویزهای مختلف و مقیاس‌های  $\sigma = 0.01T_{max}$ ،  $\sigma = 0.02T_{max}$  و  $\sigma = 0.03T_{max}$  مورد بررسی قرار گرفته است و در بقیه موارد  $\sigma = 0.03T_{max}$  در نظر گرفته شده است. برای حل مساله از زمان نهایی  $t_f = 12s$  استفاده شده است تا اثرات ناشی از صفر شدن تابع گرادیان در زمان نهایی قابل چشم‌پوشی باشد. حدس اولیه برای تابع مجهول صفر در نظر گرفته شده است.

$$Y(t_i) = Y_{ex}(t_i) + \omega \sigma \quad (39)$$

که در رابطه فوق  $\sigma$  انحراف معیار خطاهای اندازه گیری و  $\omega$  متغیری تصادفی با توزیع نرمال، میانگین صفر و انحراف معیار واحد است. در کار حاضر  $2.576 \leq \omega \leq -2.576$  در نظر گرفته شده است. همچنین زمانی که از داده‌های نویزدار استفاده می‌کنیم مقدار  $\mathcal{E} = \sigma^2 t_f$  در نظر گرفته شده است که  $t_f$  زمان نهایی است. به منظور بررسی دقت روش مورد استفاده، توابع پله‌ای و سینوسی - کسینوسی به صورت‌های زیر برای  $q(t)$  در نظر گرفته شده است:

$$q(t) = \begin{cases} 10^7 & \text{for } 4 < t < 8 \\ 0 & \text{for } t \leq 4 \text{ and } t \geq 8 \end{cases} \quad (40)$$

$$q(t) = 10^7 \sin(0.1t) + 10^7 \cos(2t) \quad (41)$$

در شکل‌های ۳ و ۴ توابع فوق با توابع محاسبه شده با استفاده از روش معکوس مقایسه شده‌اند سپس حل معکوس با داده های نویزدار ارائه شده است. تاثیر داده‌های نویز دار را در شکل‌های ۵ و ۶ در مقایسه با داده‌های بدون نویز (شکل‌های ۳ و ۴ می‌توان مشاهده کرد.

که  $\gamma^0 = 0$  فرض می‌شود. برای محاسبه  $\nabla S[q^k(t)]$  از رابطه زیر استفاده می‌شود:

$$\nabla S[q(t)] = \lambda(\xi, \eta_{max}, t) \quad (36)$$

تساوی فوق به محل تابع مجهول بستگی دارد.  $\beta^k$  (اندازه گام بهینه) با حداقل کرن تابع  $S[q^{k+1}(t)]$  نسبت به  $\beta^k$  به صورت زیر به دست می‌آید [۱۱، ۱۳، ۱۵]:

$$\beta^k = \frac{\int_{t=0}^{t_f} \sum_{m=1}^{NS} [T(\xi_m, \eta_m, t; q^k) - Y_s(t)] \Delta T(\xi_m, \eta_m, t; d^k) dt}{\int_{t=0}^{t_f} \sum_{m=1}^{NS} [\Delta T(\xi_m, \eta_m, t; d^k)]^2 dt} \quad (37)$$

در رابطه فوق  $\Delta T(\xi_m, \eta_m, t; d^k)$  از حل مسئله حساسیت با قرار دادن  $d^k(t) = \Delta q^k(t)$  به دست می‌آید. با بررسی معادله (۳۶) مشخص می‌شود که معادله گرادیان در زمان نهایی ( $t_f$ ) برابر با صفر می‌شود بنابراین حدس اولیه مورد استفاده برای  $q(t)$  در  $t = t_f$  با پروسه تکرار در روش گرادیان مزدوج هرگز تغییر نمی‌کند. اگر حدس اولیه خیلی از حل دقیق دور باشد، تابع تخمین زده شده در همسایگی  $t_f$  می‌تواند از حل دقیق منحرف شود. این اشکال به آسانی و با به کار بردن یک زمان نهایی بزرگتر پوشش داده می‌شود. بنابر این تاثیرات حدس اولیه در زمان واقعی مساله قابل توجه نیست. روش تکراری ارائه شده در بالا آنقدر ادامه می‌یابد تا با توجه به معیار توقف انتخاب شده، دقت مورد نظر به دست آید. معیار توقف به وسیله معادله زیر بیان می‌شود:

$$S[q(t)] \leq \mathcal{E} \quad (38)$$

در رابطه فوق  $S[q(t)]$  با توجه به معادله (۲۰) به دست می‌آید. دقت  $\mathcal{E}$  باید طوری انتخاب شود که اگر داده های اندازه گیری شده دارای خطا بود، جواب به دست آمده دقت کافی را داشته باشد.

### ۵- الگوریتم حل

ابتدا یک حدس اولیه مثل  $q^0(t)$  برای تابع  $q(t)$  انتخاب شده و  $k = 0$  قرار می‌گیرد سپس مراحل زیر به ترتیب انجام می‌شوند:

۱- حل مساله مستقیم و محاسبه  $T(z, r, t)$  بر مبنای  $q^k(t)$  (معادلات (۱) تا (۱۹)).

۲- بررسی معیار توقف و ادامه حل مساله در صورت عدم دستیابی به دقت مورد نظر (معادله (۳۸)).

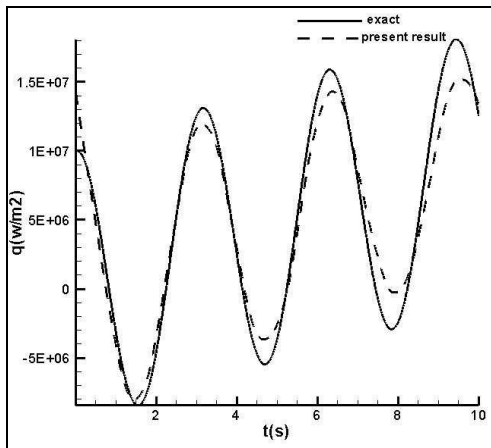
۳- حل معادله الحاقی و محاسبه  $\lambda(\xi_{max}, \eta, t)$  با دانستن  $T(\xi_m, \eta_m, t)$  و دمای اندازه گیری شده یعنی  $Y_m(t)$  (معادلات (۲۱) تا (۲۵)).

۴- محاسبه  $\nabla S[q^k(t)]$  بعد از مشخص شدن  $\lambda(\xi_{max}, \eta, t)$  (معادله (۳۶)).

۵- محاسبه  $\gamma^k$  با استفاده از معادله (۳۵) و  $d^k(t)$  با استفاده از معادله (۳۴) بعد از مشخص شدن  $\nabla S[q^k(t)]$ .

۶- قرار دادن  $d^k(t) = \Delta q^k(t)$  و حل مسئله حساسیت برای به دست آوردن  $\Delta T(\xi_m, \eta_m, t; d^k)$  (معادلات (۲۶) تا (۳۲)).

۷- محاسبه  $\beta^k$  با توجه به مشخص شدن  $\Delta T(\xi_m, \eta_m, t; d^k)$  (معادله (۳۷)).



شکل ۶- شار گرمایی محاسبه شده با استفاده از داده های نویزدار و شار گرمایی دقیق که به صورت تابع سینوسی-کسینوسی می باشد

مطابق جداول (۱)، (۲)، (۳) و (۴) خطای RMS برای توابع مختلف محاسبه شده است و تاثیر  $q_0$  بر روی جواب های به دست آمده مورد بررسی قرار گرفته است.

جدول ۱- خطای RMS برای توابع مختلف در نظر گرفته شده برای

$$\text{شار گرمایی } (q_0 = 10^5 \frac{W}{m^2})$$

تابع	خطای RMS
پله ای	0.484
سینوسی - کسینوسی	0.151

جدول ۲- خطای RMS برای توابع مختلف در نظر گرفته شده برای

$$\text{شار گرمایی } (q_0 = 10^6 \frac{W}{m^2})$$

تابع	خطای RMS
پله ای	0.489
سینوسی - کسینوسی	0.158

جدول ۳- خطای RMS برای توابع مختلف در نظر گرفته شده برای

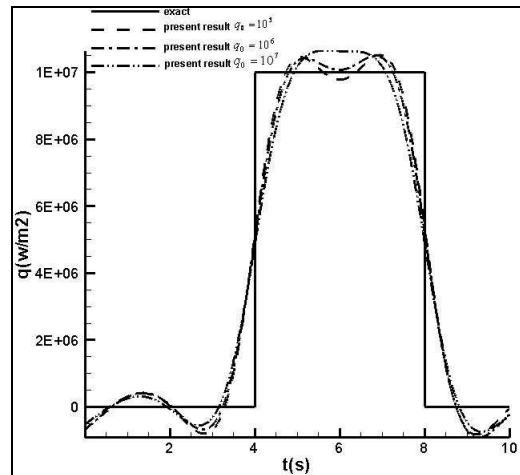
$$\text{شار گرمایی } (q_0 = 10^7 \frac{W}{m^2})$$

تابع	خطای RMS
پله ای	0.502
سینوسی - کسینوسی	0.167

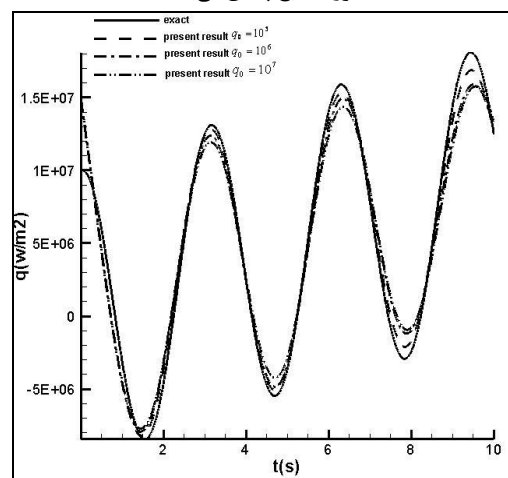
جدول ۴- خطای RMS برای توابع مختلف در نظر گرفته شده برای

$$\text{شار گرمایی با داده های نویزدار } (q_0 = 10^5 \frac{W}{m^2})$$

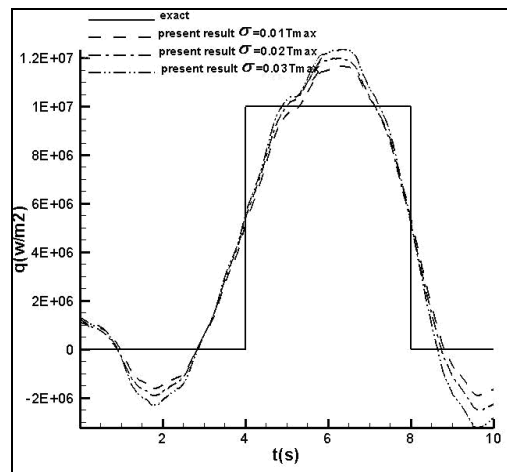
تابع	خطای RMS
پله ای $\sigma = 0.01T_{max}$	0.541
پله ای $\sigma = 0.02T_{max}$	0.552
پله ای $\sigma = 0.03T_{max}$	0.566
سینوسی - کسینوسی	0.184



شکل ۳- شار گرمایی محاسبه شده و شار گرمایی دقیق که به صورت تابع پله ای می باشد



شکل ۴- شار گرمایی محاسبه شده و شار گرمایی دقیق که به صورت تابع سینوسی-کسینوسی می باشد



شکل ۵- شار گرمایی محاسبه شده با استفاده از داده های نویزدار و شار گرمایی دقیق که به صورت تابع پله ای می باشد

condition estimation on a rotating cylinder", International Journal of Heat and Mass Transfer. 52, 210-221, 2009.

[4] Golbahar Haghighi, M.R, Eghtesad, M, Malekzadeh, P, Neculescu, D.S., Three-dimensional inverse transient heat transfer analysis of thick functionally graded plates, Energy Conversion and Management. 50, 450-457, 2009.

[5] Su J., Neto A., Two dimensional inverse heat conduction problem of source strength estimation in cylindrical rods, Applied Mathematical Modeling. 25, 861- 872, 2001.

[6] Hsu P.T., Estimating the boundary condition in a 3D inverse hyperbolic heat conduction problem, Applied Mathematics and Computation. 177, PP. 453- 464, 2006.

[7] Shi J., Wang J., Inverse problem of estimating space and time dependent hot surface heat flux in transient transpiration cooling process, International Journal of Thermal Sciences. 48, PP. 1398-1404, 2009.

[8] Ling X., Atluri S.N., Stability analysis for inverse heat conduction problems, Computer Modeling in Engineering & Sciences. 13 (3), PP. 219-228 Tech Science Press, 2006.

[9] Jiang B.H., Nguyen T.H., Prud'homme M., Control of the boundary heat flux during the heating process of a solid material, International Communications in Heat and Mass Transfer. 32, 728-738, 2005.

[10] Jarny Y., Ozisik M.N., Bardou J.P., A general optimization method using adjoint equation for solving multidimensional inverse heat conduction, Journal of Heat and Mass Transfer. 34, PP. 2911- 2919, 1991.

[11] Daniel J.W., Approximate Minimization of Functionals, Prentice-Hall Inc, Englewood Cliffs, 1971.

[12] Ozisik, M.N "Heat Conduction", second ed. Wiley, New York, 1993.

[13] Alifanov, O.M "Inverse Heat Transfer Problems", Springer-Verlag, New York, 1994.

[14] Chen S.G., Weng C.I., Lin J., Inverse estimation of transient temperature distribution in the end quenching test, Journal of Materials Processing Technology, 86, 257-263, 1999.

[15] Chen S.G., Weng C.I., Lin J., Inverse estimation of transient temperature distribution in the end quenching test, Journal of Materials Processing Technology, 86, 257-263, 1999.

[16] Ozisik M.N., Orlando R.B., Inverse Heat Transfer, Taylor & Francis, New York, 2000.

[17] Goldman A., Kao Y.C., Numerical Solution to a Two-dimensional Conduction Problem Using Rectangular and Cylindrical Body-Fitted Coordinate System", J. Heat Transfer, 103, PP. 753-758, 1981.

[18] Ushikawa S., Takeda R., Use of Boundary-fitted Coordinates Transformation for Unsteady Heat Conduction Problems in Multi connected Regions with Arbitrarily Shaped Boundary, J. Heat Transfer, 107, 494-498, 1985.

[19] Plotkowski A., Krane M. M., Use of Inverse Heat Conduction Models for Estimation of Transient Surface Heat Flux in Electrosag Remelting, J. Heat Transfer, 137(3), 2014.

[20] Hsu P. T., Wang S. G., Li T. Y., An inverse problem approach for estimating the wall heat flux in film wise condensation on a vertical surface with variable heat flux and body force convection", Applied Mathematical Modeling, 24, 235-245, 2000.

[21] Khaniki H. B., Karimian S. M. H., Determining the heat flux absorbed by satellite surfaces with temperature data, Journal of Mechanical Science and Technology, 28, 2393-2398, 2014.

[22] Beck J., Black well, B, Clair, C. St Inverse Heat Conduction, J. Wiley, New York, 1985.

[23] Liu F. B., A hybrid method for the inverse heat transfer of estimating fluid thermal conductivity and heat capacity, International Journal of Thermal Sciences, 50 (5), 718-724, 2011.

[24] Mohammadiun M., Rahimi A.B., Khazaei I., Estimation of the time-dependent heat flux using temperature distribution at a point by conjugate gradient method, International Journal of Thermal Sciences, 50, 2443-2450, 2011.

[25] Tai B. L., Stephenson D. A., Shih A. J., An Inverse Heat Transfer Method for Determining Work piece Temperature in Minimum Quantity Lubrication Deep Hole Drilling, Journal of Manufacturing Science and Engineering, 134 (2), 2012.

خطای RMS با استفاده از رابطه زیر محاسبه شده است:

$$e_{RMS} = \sqrt{\frac{1}{I} \sum_{i=1}^I [G_{est}(t_i) - G_{ex}(t_i)]^2} \quad (42)$$

که در روابط فوق  $G_{est}(t_i)$  تابع تخمین زده شده در زمان  $t_i$ ،  $G_{ex}(t_i)$  تابع دقیق در زمان  $t_i$  و  $I$  تعداد اندازه‌گیری‌ها می‌باشد. خطای RMS مقیاسی است که تفاوت بین مقادیر تخمین زده شده و مقادیر واقعی را در کل تابع نشان می‌دهد. با توجه به نتایج مشخص می‌شود که خطای RMS در تابع پله‌ای بیشترین مقدار را دارد که به علت ناپیوستگی تابع می‌باشد. با توجه به نمودارها و جداول فوق و خطاهای محاسبه شده، مشخص می‌شود که روش ارائه شده از دقت قابل قبولی برخوردار می‌باشد.

## ۷- نتیجه گیری

در تحقیق حاضر، روش مختصات عمومی در حل مسئله معکوس متقارن محوری به‌منظور تخمین شار گرمایی وابسته به زمان، با توجه به توزیع دمای اندازه‌گیری شده در یک نقطه در یک هندسه نامنظم استفاده شده است. با بررسی معادله گرادیان مشخص شد که این معادله در زمان نهایی ( $t_f$ ) برابر با صفر می‌شود بنابراین حدس اولیه مورد استفاده برای تابع مجهول که در این تحقیق صفر در نظر گرفته شده است در  $t = t_f$  با فرآیند تکرار در روش گرادیان مزدوج هرگز تغییر نمی‌کند و اگر حدس اولیه خیلی از حل دقیق دور باشد، تابع تخمین زده شده در همسایگی  $t_f$  می‌تواند از حل دقیق منحرف شود. این اشکال با به‌کار بردن یک زمان نهایی بزرگتر پوشش داده شد. برای مثال‌های مختلف خطای RMS محاسبه گردید و مشخص شد که این خطا در تابع پله‌ای بیشترین مقدار را دارد و علت آن وجود ناپیوستگی و نقاط تیز در تابع پله‌ای می‌باشد. تابع پله‌ای مشکل‌ترین تابع از نظر پوشش با روش‌های معکوس است و معمولاً آن‌را برای مقایسه دقت الگوریتم‌ها و روش‌های مختلف حل مسائل معکوس انتخاب می‌کنند. روش ارائه شده در این تحقیق یک روش کلی است و می‌تواند برای حل مسائل رسانایی گرمایی معکوس دوبعدی و متقارن محوری به‌کار گرفته شود. با توجه به مثال‌های بررسی شده و با مقایسه شار گرمایی به دست آمده با شار گرمایی دقیق و با توجه به این نکته که در روش به‌کار گرفته شده نیازی به اطلاعات قبلی در مورد شکل تابع مجهول نیست و از پایداری نسبتاً خوبی نسبت به داده های نویزدار برخوردار است به این نتیجه می‌رسیم که این روش، روش مناسبی برای تخمین شار گرمایی مجهول وابسته به زمان می‌باشد.

## ۸- مراجع

[1] Huang C. H, Wang P., A Three-dimensional inverse heat conduction problem in estimating surface heat flux by conjugate gradient method, International Journal of Heat and Mass Transfer. PP. 3387-3403, 1999.

[2] Shiguemori E. H., Harter F. P., Campos Velho H. F., Dasilva J. D. S., Estimation of boundary condition in conduction heat transfer by neural networks, Tendências em Matemática Aplicada e Computacional 3, 189-195, 2002.

[3] Volle, F, Maillet, D, Gradeck, M, Kouachi, A, Lebouché, M "Practical application of inverse heat conduction for wall

- [26] Rahimi A.B., Mohammadiun M., Estimation of the Strength of the Time-dependent Heat Source Using Temperature Distribution at a Point in a Three Layer System, International Journal of Engineering, 25, PP. 343-351, 2012.
- [27] Mohammadiun H., Molavi H., Talesh Bahrami, H.R., Mohammadiun, M., Real-Time Evaluation of Severe Heat Load Over Moving Interface of Decomposing Composites, Journal of Heat Transfer, 134, 2012.
- [28] Mohammadiun M., Molavi H., Talesh Bahrami H.R., Mohammadiun H., Application of Sequential Function Specification Method in Heat Flux Monitoring of Receding Solid Surfaces, Heat Transfer Engineering, 35(10), PP. 933-941, 2014.
- [29] Wu T. S., Lee H. L., Chang W. J., Yang Y. C., An inverse hyperbolic heat conduction problem in estimating pulse heat flux with a dual-phase-lag model, International Communications in Heat and Mass Transfer, 60, PP. 1-8, 2015.