

## تحلیل اثر دما بر رفتار دینامیکی غیرخطی چرخ عکس‌العملی ماهواره با استفاده از روش اغتشاشات

دانشیار، گروه مهندسی مکانیک، مجتمع دانشگاهی هوافضا، دانشگاه صنعتی مالک اشتر، تهران، ایران  
 دانشجوی دکتری، مهندسی هوافضا، مجتمع دانشگاهی هوافضا، دانشگاه صنعتی مالک اشتر، تهران، ایران  
 دانشیار، گروه مهندسی مکانیک، مجتمع دانشگاهی هوافضا، دانشگاه صنعتی مالک اشتر، تهران، ایران

مرتضی شهروی\*  
 علیرضا آقالاری  
 سعید شکراللهی

### چکیده

در این مقاله رفتار ارتعاش غیرخطی عملگر چرخ عکس‌العملی ماهواره با مدل روتور انعطاف‌پذیر/ دیسک صلب و یاتاقان، تحت تغییرات دما بررسی شده است. برای مدل کردن روتور از نظریه تیر تیموشنکو استفاده شده و رفتار یاتاقانها با استفاده از فنر غیرخطی/ دمپر مدل شده است. در این مدل تمام پارامترهای مربوط به تیر تیموشنکو، خاصیت ژيروسکوپی و نیروهای حاصل از نابالانسی دیسک در نظر گرفته شده است. با توجه به اینکه یاتاقانها اجازه افزایش یا کاهش طول در اثر تغییرات دما را به روتور نمی‌دهند لذا تغییرات دما در سیستم به صورت یک نیروی محوری ثابت ظاهر می‌شود. برای حل معادلات غیرخطی از روش معیارهای چندگانه به صورت مستقیم استفاده شده و پاسخ فرکانسی سیستم استخراج شده است. شبیه‌سازی عددی بر مبنای مقادیر کمی مدل‌های واقعی انجام شده و رفتار دینامیکی سیستم در قالب نمودارهای زمانی و فرکانسی و نیز اثرات کمی تغییرات دما نشان داده شده است. نتایج حاصل نشان می‌دهد که تغییرات دما تاثیر بسزایی در رفتار دینامیکی غیرخطی سیستم دارد.

واژه‌های کلیدی: چرخ عکس‌العملی، رفتار دینامیکی، نوسانات دما، نابالانسی، اثرات ژيروسکوپی.

## Analysis of Temperature Effects on Nonlinear Dynamical Behavior of Satellite Reaction Wheels Using Multiple Scale Method

M. Shahravi  
 A. R. Aghalari  
 S. Shokrollahi

Department of Aerospace Engineering, Maleke-Ashtar University of technology, Tehran, Iran  
 Department of Aerospace Engineering, Maleke-Ashtar University of technology, Tehran, Iran  
 Department of Aerospace Engineering, Maleke-Ashtar University of technology, Tehran, Iran

### Abstract

Nonlinear vibration analysis of the reaction wheel based on rotating shaft/disk model with elastic bearings which subjected to temperature changes is investigated. The rotating shaft has been modeled by the Timoshenko beam theory and elastic bearing model consists of a nonlinear spring and linear damping characteristics. Gyroscopic effects and disk imbalance forces, as well as the couplings associated with the shear deformation have been considered in the equation of motion. Temperature changes (increase or decrease) is appeared in system as an axially load when the supports of the rotor do not allow the shaft to move in axial direction. The method of multiple scales has been applied directly to solve nonlinear mathematical model and hence obtain the nonlinear dynamic response of the rotor system. Numerical simulations are based on a real reaction wheel parameters. The resonant curves have been plotted in time and frequency domain and discussed w/wo temperature changes. It has been shown that temperature changes significantly affects the dynamic behavior of the rotor system leading to resonant hard spring type curves.

**Keywords:** Reaction wheel, Dynamic behavior, Temperature, Gyroscopic effect.

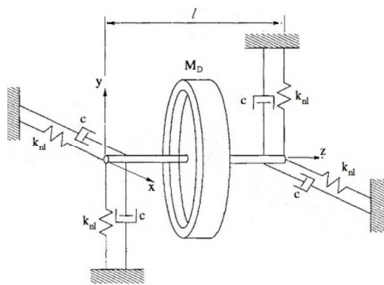
اغتشاشات ماهواره‌ها و راه‌حلهای کنترل و کاهش آنها از اوایل ۱۹۷۰ با پروژه HST آغاز گردید [۳]. این مطالعات در چهار دسته کلی زیر ادامه یافته است: (۱) مدلسازی تحلیل اغتشاشات چرخ عکس‌العملی [۴-۱۲] (۲) اندازه‌گیری اغتشاشات چرخ عکس‌العملی و استفاده از آن برای تخمین برخی پارامترهای مدل تحلیلی [۶-۱۴] (۳) مدلسازی اندرکنش اغتشاشات چرخ عکس‌العملی و سازه ماهواره [۱۶-۱۷] (۴) کاهش اغتشاشات چرخ عکس‌العملی با استفاده از روشهای کنترلی فعال و غیرفعال [۱۸-۱۹].

مسترسون و همکارانش مدل‌های تحلیلی و تجربی برای چرخ عکس‌العملی ارائه نمودند که در آن نابالانسیهای استاتیکی و دینامیکی به عنوان مهمترین عامل ایجاد اغتشاشات در نظر گرفته شده بودند [۹]. آقالاری و همکاران با اندازه‌گیری اغتشاشات چرخ عکس‌العملی نمونه آزمایشگاهی، مدل‌های تحلیلی و تجربی برای اغتشاشات ارائه نمودند. همچنین در یک کار دیگر، با توسعه مدل، مدل‌های تحلیلی و تجربی کاملتری برای اغتشاشات چرخ عکس‌العملی ارائه دادند. در این کارها نیز

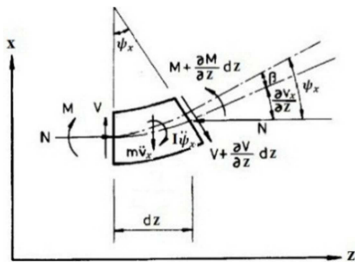
### ۱- مقدمه

کارایی ماهواره‌های تصویربرداری جهت انجام ماموریت بستگی زیادی به میزان ثبات و پایداری در وضعیت موردنظر دارد. در عملیات تصویربرداری با قدرت تفکیک بالا ارتعاشات بسیار کوچک می‌توانند تاثیر منفی در کیفیت تصاویر داشته باشند [۱]. یکی از منابع اصلی ایجاد ارتعاشات مضر، چرخ‌های عکس‌العملی می‌باشند [۲]. بنابراین بررسی دقیق رفتار این عملگرها در شرایط کاری مختلف جهت پیش‌بینی تاثیر آنها بر روی پلتفرم ماهواره و عملکرد آن و نیز توسعه راهکارهایی برای کنترل ارتعاشات ناخواسته امری ضروری می‌باشد. نوسانات شدید دما یکی از مشخصه‌های اصلی محیط کاری ماهواره‌ها می‌باشد که می‌تواند منجر به تغییر در مشخصات دینامیکی در چرخ عکس‌العملی گردد.

مطالعات زیادی بر روی مدل‌های تحلیلی اغتشاشات چرخ عکس‌العملی، اندازه‌گیری آنها و تاثیر آنها بر روی کارایی تجهیزات حساس ماهواره‌ها انجام شده است. این مطالعات با تحقیق بر روی انواع



شکل ۱- طرحواره مدل روتور/ دیسک پیوسته



شکل ۲- دیاگرام آزاد المان تیر تیموشنکو

با نوشتن معادلات تعادل برای سیستم بالا خواهیم داشت:

$$\frac{\partial V}{\partial z} = -m \frac{\partial^2 v_x}{\partial t^2} \quad (1)$$

$$\frac{\partial M}{\partial z} = V + \rho I \dot{\psi}_x - N \frac{\partial v_x}{\partial z} + M_{gyro} \quad (2)$$

که در رابطه بالا

$$M_{gyro} = I \Omega \frac{\partial \psi_x}{\partial t} \quad (3)$$

با توجه به شکل ۲ همچنین می‌توان نوشت:

$$V(z, t) = \kappa A G \beta + N \frac{\partial v_x}{\partial z} \quad (4)$$

$$M(z, t) = E I \frac{\partial \psi_x}{\partial z} \quad (5)$$

که در رابطه بالا:

$$\beta = \psi_x - \frac{\partial v_x}{\partial z} \quad (6)$$

با جایگذاری روابط (۴،۵) در روابط (۱،۲) خواهیم داشت:

$$\rho A \frac{\partial^2 v_x}{\partial t^2} - \kappa G A \left( \frac{\partial^2 v_x}{\partial z^2} - \frac{\partial \psi_x}{\partial z} \right) + N \frac{\partial^2 v_x}{\partial z^2} = 0 \quad (7)$$

$$\rho I \frac{\partial^2 \psi_x}{\partial t^2} - \Omega J_z \frac{\partial \psi_y}{\partial t} - E I \frac{\partial^2 \psi_x}{\partial z^2} - \kappa G A \left( \frac{\partial v_x}{\partial z} - \psi_x \right) = 0 \quad (8)$$

مدل ارائه شده در شکل ۱ دارای چهار درجه آزادی  $v_x, v_y, \psi_x$  و  $\psi_y$

می‌باشد. با در نظر گرفتن تغییر متغیر مختلط به صورت زیر:

$$v = v_x + i v_y, \quad \psi = \psi_x + i \psi_y \quad (9)$$

معادلات حرکت (۷،۸) به صورت زیر نوشته می‌شود.

$$\rho A \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} - \kappa G A \left( \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} - \frac{\partial \psi}{\partial z} \right) + N \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} = 0 \quad (10)$$

$$\rho I \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} - i \Omega J_z \frac{\partial \psi}{\partial t} - E I \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} - \kappa G A \left( \frac{\partial v}{\partial z} - \psi \right) = 0 \quad (11)$$

روابط بین جابجایی، گشتاور و نیروی برشی در هر مقطع از سیستم

در فضای مختلط به صورت زیر نوشته می‌شود:

$$M(z, t) = M_x(z, t) + i M_y(z, t) = E I \frac{\partial \psi}{\partial z} \quad (12)$$

$$V(z, t) = V_x(z, t) + i V_y(z, t) = \kappa G A \left( \frac{\partial v}{\partial z} - \psi(z, t) \right)$$

مدل مینا برای چرخ عکس‌العملی به صورت دیسک/ روتور صلب در نظر گرفته شده است [۱۱-۱۲]. الیاس و همکاران با استفاده از تکنیکهای اندازه‌گیری جرم دینامیکی یک روش برای آنالیز کوپلینگ اغتشاشات چرخ عکس‌العملی و سازه ماهواره ارائه دادند [۱۶-۱۷]. تانیواکی و اوکامی روشی برای اندازه‌گیری اغتشاشات فرکانس پایین چرخهای عکس‌العملی/مومنتوم که تشخیص آنها سخت می‌باشد ابداع نمودند [۱۵]. ژانگ یک سیستم اندازه‌گیری که متشکل از یک جسم لرزان و دو شتاب‌سنج بسیار حساس می‌باشد برای اندازه‌گیری اغتشاشات چرخهای عکس‌العملی/مومنتوم با مکانیزم گیردار ارائه نمود [۷]. لی و همکارانش به منظور شناسایی عیوب یاتاقانهای موجود در چرخ عکس‌العملی، با استفاده از تاسیسات اندازه‌گیری موجود در ESTEC، اغتشاشات چرخ عکس‌العملی Bradford را اندازه‌گیری نمودند. آنها همچنین با ترکیب مدل‌های تحلیلی و تجربی، یک مدل کامل برای چرخ عکس‌العملی مذکور ارائه دادند. در این مدل انعطاف‌پذیری محفظه چرخ عکس‌العملی نیز در نظر گرفته شده است [۱۳، ۱۰].

با توجه به گران بودن پروژهای فضایی و در دسترس نبودن زیرسیستمها پس از پرتاب، مطالعه و بررسی زیرسیستمها قبل از پرتاب در شرایط کاری مختلف که در فضا در معرض آنها قرار گیرند از اهمیت بسیار بالایی برخوردار می‌باشد. تغییرات دمایی شدید و تند نیز یکی از ویژگیهای ذاتی فضا می‌باشد که تمامی زیرسیستمهای ماهواره در معرض آن قرار دارند. چرخهای عکس‌العملی یکی از زیرسیستمهای مهم بخش کنترل وضعیت می‌باشد که حتما رفتار دینامیکی آن تحت اثر عامل دما باید مورد بررسی قرار گیرد. مدل مینا برای چرخ عکس‌العملی در این مقاله ترکیب دیسک صلب/ روتور الاستیک پیوسته با دو تکیه‌گاه الاستیک غیرخطی در طرفین است. با توجه به طول محور از تئوری تیموشینکو برای مدل‌سازی ارتعاشات عرضی استفاده شده است. خاصیت ژيروسکپی و نیروهای حاصل از نابالانسی و تمام ترمهای مربوط به تیر تیموشنکو در نظر گرفته شده است. با توجه به عدم امکان افزایش یا کاهش طول روتور ناشی از تغییرات دما (در راستای z)، تغییرات دما (افزایش یا کاهش) به صورت یک نیروی محوری ثابت در نظر گرفته می‌شود. برای حل تحلیلی معادلات از روش معیارهای چندگانه به صورت مستقیم استفاده شده است. چرخ عکس‌العملی نمونه [۹] انتخاب شده، پاسخ فرکانسی سیستم استخراج و تاثیر دما در رفتار ارتعاشی سیستم مورد مطالعه قرار گرفته است.

## ۲- توسعه مدل دینامیکی

چرخ عکس‌العملی از یک روتور انعطاف‌پذیر و یک دیسک صلب واقع در وسط روتور تشکیل شده است که از دو طرف بر روی یاتاقانها قرار گرفته‌اند. در شکل ۱ شماتیک سیستم دیسک / روتور پیوسته نمایش داده شده است.

همانگونه که قبلاً ذکر شد برای مدل‌سازی روتور از نظریه تیر تیموشنکو استفاده می‌شود. در شکل ۲ المان تیر تیموشنکو که در معرض تغییرات دما قرار دارد در صفحه xz نمایش داده شده است. تغییرات دما منجر به ایجاد یک نیروی محوری ثابت در المان تیر شده است.

$$\bar{V}^*(0.5, t) = -\frac{1}{2} M_D \frac{\partial^2 v^*(0.5, t^*)}{\partial t^{*2}} + \frac{1}{2} f^* \Omega^{*2} e^{i\Omega^* t^*} + N \frac{\partial v}{\partial z} \quad (29)$$

که در روابط بالا:

$$S = \frac{E\alpha\Delta T}{\kappa G}, L = \frac{J_z}{\rho I}, P = \frac{E}{\kappa G}, F = \frac{Al^2}{I}, H = \frac{l^2 SA}{I}$$

$$\bar{M}^* = \frac{l}{\kappa GI} M^* = P \frac{\partial \psi^*(z^*, t^*)}{\partial z^*}, K_1^* = \frac{k_1 l^3}{\kappa GI}$$

$$C^* = \frac{cl^2}{I\sqrt{\kappa G\rho}}, K_2^* = \frac{k_2 l^5}{\kappa GI}, M_D^* = \frac{M_D l}{\rho I}, f^* = \frac{M_D e}{\rho I}$$

$$\bar{V}^* = \frac{l^2}{\kappa GI} V^* = F \left( \frac{\partial v^*(z^*, t^*)}{\partial z^*} - \psi^*(z^*, t^*) \right) + H \frac{\partial v^*(z^*, t^*)}{\partial z^*} \quad (30)$$

### ۳- تحلیل به روش معیارهای چندگانه

روش معیارهای چندگانه یکی از روشهای موثر در تحلیل سیستمهای غیرخطی ضعیف می‌باشد [۲۰]. در این مقاله روش مذکور به صورت مستقیم برای تحلیل سیستم دیسک / روتور پیوسته مورد استفاده قرار می‌گیرد. در این روش جابجایی‌های  $v^*$  و  $\psi^*$  به صورت زیر بسط داده می‌شوند.

$$v^*(z^*, T_0, T_2) = \varepsilon v_1(z^*, T_0, T_2) + \varepsilon^3 v_3(z^*, T_0, T_2) \quad (31)$$

$$\psi^*(z^*, T_0, T_2) = \varepsilon \psi_1(z^*, T_0, T_2) + \varepsilon^3 \psi_3(z^*, T_0, T_2) \quad (32)$$

با توجه به اینکه تشدید اصلی به ازاء یک تحریک کوچک نیز رخ می‌دهد و به دلیل تجمع عوامل غیرخطی، این عوامل در  $\varepsilon$  که مقدار بسیار کوچکی می‌باشد ضرب می‌شوند. بنابراین می‌توان نوشت:

$$C^* = \varepsilon^2 C_\varepsilon, f^* = \varepsilon^3 f_\varepsilon, \Omega^* = \omega_n^* + \varepsilon^2 \sigma \quad (33)$$

با جایگذاری مشتقات زمانی  $v^*$  و  $\psi^*$  در معادلات حرکت (۲۶، ۲۷) و شرایط مرزی (۲۸، ۲۹) و در نهایت برابر قرار دادن ضرایب توانهای یکسان  $\varepsilon$  در دو طرف روابط حاصل، معادلات زیر استخراج می‌شود:

$$\frac{\partial^2 v_1}{\partial T_0^2} + \frac{\partial \psi_1}{\partial z^*} + (S-1) \frac{\partial^2 v_1}{\partial z^{*2}} = 0 \quad (34)$$

$$\frac{\partial^2 \psi_1}{\partial T_0^2} - i\omega_n^* L \frac{\partial \psi_1}{\partial T_0} - P \frac{\partial^2 \psi_1}{\partial z^{*2}} + F(\psi_1 - \frac{\partial v_1}{\partial z^*}) = 0 \quad (35)$$

با شرایط مرزی:

$$P \frac{\partial \psi_1(0, T_0, T_2)}{\partial z^*} = 0$$

$$F \left( \frac{\partial v_1(0, T_0, T_2)}{\partial z^*} - \psi_1(0, T_0, T_2) \right) + H \frac{\partial v_1(0, T_0, T_2)}{\partial z^*} - K_1^* v_1(0, T_0, T_2) = 0 \quad (36)$$

$$\psi_1(0.5, T_0, T_2) = 0$$

$$F \left( \frac{\partial v_1(0.5, T_0, T_2)}{\partial z^*} - \psi_1(0.5, T_0, T_2) \right) + H \frac{\partial v_1(0.5, T_0, T_2)}{\partial z^*} + \frac{M_D^* \partial^2 v_1(0.5, T_0, T_2)}{2 \partial T_0^2} = 0 \quad (37)$$

و با برابر قرار دادن ضرایب توانهای یکسان  $\varepsilon^3$  می‌توان نوشت:

$$\frac{\partial^2 v_3}{\partial T_0^2} + \frac{\partial \psi_3}{\partial z^*} + (S-1) \frac{\partial^2 v_3}{\partial z^{*2}} = -2 \frac{\partial^2 v_1}{\partial T_2 \partial T_0} \quad (38)$$

$$\frac{\partial^2 \psi_3}{\partial T_0^2} - i\omega_n^* L \frac{\partial \psi_3}{\partial T_0} - P \frac{\partial^2 \psi_3}{\partial z^{*2}} + F \left( \psi_3 - \frac{\partial v_3}{\partial z^*} \right)$$

$$+ N \frac{\partial v}{\partial z} \quad (13)$$

همانطور که قبلاً نیز ذکر شد پاتاقانها با استفاده از فنر غیرخطی- دمپر خطی مدل شده است. بنابراین نیروی حاصل از آنها را می‌توان به شکل زیر بیان نمود:

$$F = F_x + iF_y \quad (14)$$

که در آن:

$$F_x = k_1 v_x + k_2 v_x^3 + c v_x \quad (15)$$

$$F_y = k_1 v_y + k_2 v_y^3 + c v_y \quad (16)$$

با دسته‌بندی نیروهای فوق به دو دسته خطی و غیرخطی می‌توان نوشت:

$$F_l = F_{xl} + iF_{yl} = k_1 v + c v \quad (17)$$

$$F_{nl} = F_{xnl} + iF_{ynl} = k_2 (v_x^3 + i v_y^3) = k_2 \left( \frac{3}{4} v^2 \bar{v} + \frac{1}{4} \bar{v}^3 \right) \quad (18)$$

با توجه به متقارن بودن، نصف سیستم در نظر گرفته می‌شود. بر اساس روابط (۱۲، ۱۳)، شرایط مرزی را می‌توان به شکل زیر نوشت:

$$M(0, t) = 0, V(0, t) = F_l(0, t) + F_{nl}(0, t) \quad (19)$$

$$\psi(l/2, t) = 0, V(l/2, t) = (-M_D \ddot{\psi}(l/2, t) + M_D e \Omega^2 \exp(i\Omega t))/2 \quad (20)$$

جهت بی‌بعدسازی پارامترها، تغییر متغیرهای زیر را در نظر می‌گیریم:

$$z^* = z/l, t^* = \sqrt{\frac{\kappa G}{\rho l^2}} t, v^* = v/l$$

$$\psi^* = \psi, \Omega^* = \sqrt{\frac{\kappa G}{\rho l^2}} \Omega \quad (21)$$

پس از جایگذاری روابط (۲۱) در روابط بین جابجایی، گشتاور و نیروی برشی داریم:

$$M^*(z^*, t^*) = \frac{EI}{l} \frac{\partial \psi^*(z^*, t^*)}{\partial z^*} \quad (22)$$

$$V^*(z^*, t^*) = \kappa GA \left( \frac{\partial v^*(z^*, t^*)}{\partial z^*} - \psi^*(z^*, t^*) \right) + N \frac{\partial v^*}{\partial z^*} \quad (23)$$

نیروی محوری ایجاد شده در روتور حاصل از تنشهای حرارتی را می‌توان به شکل زیر نوشت:

$$N = \delta A \quad (24)$$

با جایگزین کردن روابط تنش - کرنش و روابط مربوط به تغییر دما، برای نیروی محوری می‌توان نوشت:

$$N = E\alpha\Delta T A \quad (25)$$

پس از جایگذاری روابط (۲۱) و (۲۵) در معادلات حرکت (۱۰، ۱۱) و شرایط مرزی (۱۹، ۲۰) خواهیم داشت:

$$\frac{\partial^2 v^*}{\partial t^{*2}} + \frac{\partial \psi^*}{\partial z^*} + (S-1) \frac{\partial^2 v^*}{\partial z^{*2}} = 0 \quad (26)$$

$$\frac{\partial^2 \psi^*}{\partial t^{*2}} - i\Omega^* L \frac{\partial \psi^*}{\partial t^*} - P \frac{\partial^2 \psi^*}{\partial z^{*2}} + F \left( \psi^* - \frac{\partial v^*}{\partial z^*} \right) = 0 \quad (27)$$

با شرایط مرزی:

$$\bar{M}^*(0, t^*) = 0$$

$$\bar{V}^*(0, t^*) = K_1^* v^*(0, t^*) + C^* \frac{\partial^2 v^*(0, t^*)}{\partial t^{*2}} + K_2^* \left[ \frac{3}{4} v^{*2}(0, t^*) \bar{v}^*(0, t^*) + \frac{1}{4} \bar{v}^{*3}(0, t^*) \right]$$

$$\psi^*(0.5, t) = 0 \quad (28)$$

می توان شکل موده های ارتعاش آزاد سیستم [B] را به دست آورد. با توجه به معادلات (۳۸،۳۹)، فرض می کنیم جواب به شکل زیر باشد:

$$v_3(z^*, T_2) = \varphi_v(z^*, T_2) e^{i\omega_n^* T_0} \quad (51)$$

$$\psi_3(z^*, T_2) = \varphi_\psi(z^*, T_2) e^{i\omega_n^* T_0} \quad (52)$$

با جایگذاری در معادلات حرکت (۳۸،۳۹) و همچنین شرایط مرزی مربوطه (۴۰،۴۱) خواهیم داشت:

$$-\omega_n^{*2} \varphi_v + \frac{\partial \varphi_\psi}{\partial z^*} + (S-1) \frac{\partial^2 \varphi_v}{\partial z^{*2}} = -2i\omega_n^* X_v \frac{\partial G(T_2)}{\partial T_2} \quad (53)$$

$$\omega_n^{*2} (L-1) \varphi_\psi - P \frac{\partial^2 \varphi_\psi}{\partial z^{*2}} + F \left( \varphi_\psi - \frac{\partial \varphi_v}{\partial z^*} \right) = -i\omega_n^* (2-L) X_\psi \frac{\partial G(T_2)}{\partial T_2} - L\omega_n^* \sigma X_\psi G(T_2) \quad (54)$$

با شرایط مرزی در  $z^* = 0$ :

$$P \frac{\partial \varphi_\psi}{\partial z^*} = 0$$

$$F \left( \frac{\partial \varphi_v}{\partial z^*} - \varphi_\psi \right) + H \frac{\partial \varphi_v}{\partial z^*} - K_1^* \varphi_v = C_\varepsilon i\omega_n^* G(T_2) X_v + \frac{3}{4} K_2^* \bar{G}(T_2) G^2(T_2) X_v^3 \quad (55)$$

و در  $z^* = 0.5$ :

$$\varphi_\psi = 0$$

$$F \left( \frac{\partial \varphi_v}{\partial z^*} - \varphi_\psi \right) + H \frac{\partial \varphi_v}{\partial z^*} - \frac{M_D^*}{2} \omega_n^{*2} \varphi_v = -M_D^* i\omega_n^* X_v \frac{\partial G(T_2)}{\partial T_2} + \frac{1}{2} f_\varepsilon \omega_n^{*2} \exp(i\sigma T_2) \quad (56)$$

همانطور که ملاحظه می شود معادلات (۳۸،۳۹) غیر همگن می باشند. معادلات مذکور زمانی دارای حل غیربدیهی می باشد که شرایط حل پذیری را ارضا نمایند [۲۱]. بر این اساس طرفین بخش همگن معادلات (۳۸،۳۹) را در  $\hat{v}(z^*)$  و  $\hat{\psi}(z^*)$  ضرب کرده، سپس معادلات را جمع و در طول روتور انتگرال می گیریم. خواهیم داشت:

$$(S-1)\hat{v}'' + F\hat{\psi}' - \omega_n^{*2}\hat{v} = 0 \quad (57)$$

$$-P\hat{\psi}'' + \hat{\psi}(\omega_n^{*2}(L-1) + F) - \hat{v}' = 0 \quad (58)$$

با شرایط مرزی در  $z^* = 0$ :

$$\left(1 + \frac{F(S-1)}{F+H}\right)\hat{v} + P\hat{\psi}' = 0$$

$$F[(S-1)\hat{v}' + F\hat{\psi}] - \frac{F}{F+H}K_1^*(S-1)\hat{v} = 0 \quad (59)$$

و در  $z^* = 0.5$ :

$$\hat{\psi} = 0$$

$$F[(1-S)\hat{v}' - F\hat{\psi}] + \frac{F(S-1)}{2(F+H)}M_D^*\omega_n^{*2}\hat{v} = 0 \quad (60)$$

معادلات (۵۷،۵۸)، معادلات الحاقی و روابط (۶۰،۵۹) شرایط مرزی معادلات الحاقی مربوط به بخش همگن معادلات (۳۸،۳۹) می باشد. با مقایسه معادلات (۳۸،۳۹) با معادلات الحاقی (۵۸،۵۷) و شرایط مرزی (۴۰،۴۱) با شرایط مرزی معادلات الحاقی (۵۹،۶۰) می توان دریافت که بخش همگن معادلات (۳۸،۳۹) متشکل از دو معادله خود-الحاقی می باشد. با در نظر گرفتن بخش غیرهمگن معادلات (۳۸،۳۹) و تکرار مراحل بالا شرایط حل پذیری معادلات مذکور به صورت زیر تعیین می شود:

$$\int_0^{0.5} F[-2i\omega_n^* \frac{\partial G(T_2)}{\partial T_2} \hat{v} X_v - L\omega_n^* \sigma G(T_2) \hat{\psi} X_\psi - i\omega_n^* (2-L) \frac{\partial G(T_2)}{\partial T_2} \hat{\psi} X_\psi] dz^* = \frac{F}{F+H}$$

$$= -2 \frac{\partial^2 \psi_1}{\partial T_2 \partial T_0} - iL \left( \omega_n^* \frac{\partial \psi_1}{\partial T_2} + \sigma \frac{\partial \psi_1}{\partial T_0} \right) \quad (39)$$

با شرایط مرزی:

$$P \frac{\partial \psi_3(0, T_0, T_2)}{\partial z^*} = 0$$

$$F \left( \frac{\partial v_3(0, T_0, T_2)}{\partial z^*} - \psi_3(0, T_0, T_2) \right) - K_1^* v_3(0, T_0, T_2) + H \frac{\partial v_3(0, T_0, T_2)}{\partial z^*} = C_\varepsilon \frac{\partial v_1(0, T_0, T_2)}{\partial T_0} + K_2^* \times \left( \frac{3}{4} v_1^2(0, T_0, T_2) \bar{v}_1(0, T_0, T_2) + \frac{1}{4} \bar{v}_1^3(0, T_0, T_2) \right) \quad (40)$$

$$\psi_3(0.5, T_0, T_2) = 0$$

$$F \left( \frac{\partial v_3(0.5, T_0, T_2)}{\partial z^*} - \psi_3(0.5, T_0, T_2) \right) + H \frac{\partial v_3(0.5, T_0, T_2)}{\partial z^*} + \frac{M_D^*}{2} \frac{\partial^2 v_3(0.5, T_0, T_2)}{\partial T_0^2} = -M_D^* \frac{\partial^2 v_1(0.5, T_0, T_2)}{\partial T_2 \partial T_0} + \frac{1}{2} f_\varepsilon \omega_n^{*2} e^{i\omega_n^* T_0} e^{i\sigma T_2} \quad (41)$$

با توجه به خطی بودن دسته معادلات (۳۸،۳۹) به همراه شرایط مرزیشان، جواب را به صورت زیر می توان نوشت:

$$v_1 = G(T_2) e^{i\omega_n^* T_0} X_v(z^*) \quad (42)$$

$$\psi_1 = G(T_2) e^{i\omega_n^* T_0} X_\psi(z^*) \quad (43)$$

با جایگذاری روابط (۴۲،۴۳) در معادلات حرکت (۳۴،۳۵) و پس از دکوپله

کردن معادلات حاصل خواهیم داشت:

$$U_1 \frac{d^4 X_v}{dz^{*4}} + U_2 \frac{d^2 X_v}{dz^{*2}} + U_3 X_v = 0 \quad (44)$$

$$U_1 \frac{d^4 X_\psi}{dz^{*4}} + U_2 \frac{d^2 X_\psi}{dz^{*2}} + U_3 X_\psi = 0 \quad (45)$$

که در معادلات بالا  $U_1$ ،  $U_2$  و  $U_3$  ضرایب ثابت می باشند. در صورتیکه  $-U_2 - \sqrt{U_2^2 - 4U_1 U_3} > 0$  باشد، جواب معادلات (۴۴،۴۵) به صورت زیر می باشد:

$$X_v = B_1 \cosh(r_1 z^*) + B_2 \sinh(r_1 z^*) + B_3 \cos(r_2 z^*) + B_4 \sin(r_2 z^*) \quad (46)$$

$$X_\psi = B_1' \cosh(r_1 z^*) + B_2' \sinh(r_1 z^*) + B_3' \cos(r_2 z^*) + B_4' \sin(r_2 z^*) \quad (47)$$

که  $T_1$  و  $T_2$  ریشه های معادله مشخصه روابط (۴۴،۴۵) می باشند. با توجه به برابر بودن ضرایب در معادلات (۴۴،۴۵)، ثوابت  $B_1$  تا  $B_4$  و  $B_1'$  تا  $B_4'$  مستقل از هم نیستند. با جایگذاری روابط (۴۷،۴۶) در معادله (۳۴)، رابطه بین ثوابت بالا به صورت زیر حاصل می شود:

$$B_1' = c_1 B_2, B_2' = c_1 B_1, B_3' = -c_2 B_4, B_4' = c_2 B_3 \quad (48)$$

که در روابط بالا:

$$c_1 = \frac{\omega_n^{*2} + r_1^2(1-S)}{r_1}, \quad c_2 = \frac{\omega_n^{*2} + r_2^2(S-1)}{r_2} \quad (49)$$

با جایگذاری روابط (۴۷،۴۶) در شرایط مرزی (۳۶،۳۷) جهت ارضاء شرایط مرزی، ماتریس  $D$  حاصل می شود که با صفر قرار دادن دترمینان ماتریس مذکور و حل آن، فرکانسهای طبیعی  $\omega_n^*$  به دست می آید. همچنین با توجه به رابطه:

$$[D]_{4 \times 4} \cdot [B]_{4 \times 1} = \vec{0} \quad (50)$$

$$E_4 = \frac{3}{32} \frac{F}{F+H} (S-1) K_2^* X_v^4(0) \quad (70)$$

با استفاده از روابط (۶۷،۶۶) و با فرض  $C_\varepsilon = f_\varepsilon = 0$  می‌توان فرکانسهای طبیعی غیرخطی سیستم را محاسبه نمود.

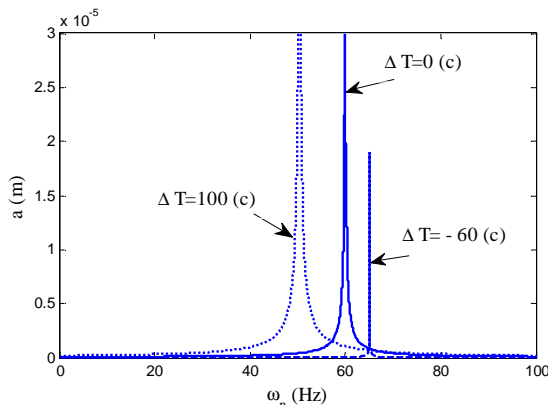
#### ۴- شبیه‌سازی

در این بخش تحلیلهای عددی بر مبنای مقادیر عددی جدول ۱ به عنوان نمونه‌ای برای شبیه‌سازیهای کامپیوتری ارائه شده است.

جدول ۱- مشخصات فیزیکی مدل چرخ عکس‌العملی [۹]

$l$ (m)	$r$ (m)	$M_D$ (kg)	$k_1$ (N/m)	$c$ (Ns/m)	$\rho$ (kg/m <sup>3</sup> )
۱۰۷۴	۰/۰۰۳	۱۰/۶	۲۱۷e۶	۵۰۶۷	۷۸۰۰

در شکل ۳ نمودار پاسخ فرکانسی سیستم با یاتاقانهای خطی برای دماهای مختلف نمایش داده شده است. همانگونه که مشاهده می‌شود افزایش دما باعث کاهش فرکانس طبیعی سیستم می‌گردد. با افزایش دما، شافت تمایل به افزایش طول دارد. با توجه به عدم امکان افزایش طول، نیروی محوری فشاری از تکیه‌گاهها (دو طرف) به شافت اعمال می‌شود که باعث نرمی سازه‌ای شده و فرکانس طبیعی کاهش می‌یابد. با افزایش بیش از حد دما فرکانس طبیعی سیستم به صفر نزدیکتر شده و سیستم به سمت ناپایداری پیش خواهد رفت.



شکل ۳- نمودار تاثیر دما در پاسخ فرکانسی سیستم (مدل خطی)

در شکل ۴ تاثیر دامنه نوسان و افزایش دما در فرکانس طبیعی غیرخطی سیستم در دماهای متفاوت نمایش داده شده است. همانگونه که مشاهده می‌شود کاهش دما باعث افزایش فرکانس طبیعی غیرخطی می‌گردد و این تاثیر در دماهای پایینتر بیشتر است. مشابه حالت بالا با کاهش دما، شافت تمایل به کاهش طول دارد. با توجه به عدم امکان کاهش طول، نیروی محوری کششی از تکیه‌گاهها (دو طرف) به شافت اعمال می‌شود که باعث سفتی سازه‌ای شده و فرکانس طبیعی افزایش می‌یابد. کاهش دما علاوه بر آن مشاهده می‌شود که فرکانس طبیعی غیرخطی برخلاف فرکانس طبیعی خطی سیستم، بستگی به دامنه نوسان دارد. با افزایش دامنه نوسان فرکانس طبیعی غیرخطی سیستم افزایش می‌یابد و این افزایش در دماهای پایینتر بیشتر است.

$$\begin{aligned} & (-M_D^* (S-1) i \omega_n^* \frac{\partial G}{\partial T_2} \hat{v}(0.5) X_v(0.5) + \frac{S-1}{2} \\ & f_\varepsilon \omega_n^{*2} \hat{v}(0.5) e^{i \sigma T_2} - (S-1) C_\varepsilon i \omega_n^* G(T_2) \\ & \hat{v}(0) X_v(0) - \frac{3}{4} (S-1) K_2^* \bar{G}(T_2) G^2(T_2) \\ & \hat{v}(0) X_v^3(0)) \end{aligned} \quad (61)$$

با توجه به یکی بودن شرایط مرزی (۴۰،۴۱) با شرایط مرزی (۵۹،۶۰) می‌توان جواب  $\hat{v}(z^*)$  و  $\hat{\psi}(z^*)$  را به صورت زیر فرض کرد:

$$\begin{aligned} \hat{v} &= \hat{G}(T_2) e^{i \omega_n^* T_0} X_v(z^*) \\ \hat{\psi} &= \hat{G}(T_2) e^{i \omega_n^* T_0} X_\psi(z^*) \end{aligned} \quad (62)$$

با جایگذاری روابط بالا در شرایط حل‌پذیری (۶۱) می‌توان نوشت:

$$\begin{aligned} -i \omega_n^* \frac{\partial G(T_2)}{\partial T_2} a_1 - \omega_n^* \sigma G(T_2) a_2 &= \frac{F}{F+H} (-M_D^* \\ (S-1) i \omega_n^* \frac{\partial G(T_2)}{\partial T_2} X_v^2(0.5) + \frac{S-1}{2} f_\varepsilon \omega_n^{*2} X_v(0.5) \\ e^{i \sigma T_2} - (S-1) C_\varepsilon i \omega_n^* G(T_2) X_v^2(0) - \frac{3}{4} (S-1) \\ K_2^* \bar{G}(T_2) G^2(T_2) X_v^4(0)) \end{aligned} \quad (63)$$

که در رابطه بالا:

$$\begin{aligned} a_1 &= \int_0^{0.5} F (2X_v^2(z^*) + (2-L)X_\psi^2(z^*)) dz^* \\ a_2 &= \int_0^{0.5} FLX_\psi^2(z^*) dz^* \end{aligned} \quad (64)$$

فرض می‌کنیم:

$$G(T_2) = \frac{1}{2} b(T_2) \exp(i\theta(T_2)) \quad (65)$$

با جایگذاری رابطه (۶۵) در رابطه (۶۳) و برابر هم قرار دادن جملات

حقیقی و موهومی خواهیم داشت:

$$\begin{aligned} & \left( -\omega_n^* a_1 + \frac{F}{F+H} M_D^* (S-1) \omega_n^* X_v^2(0.5) \right) b' \\ &= \frac{F}{F+H} ((1-S) C_\varepsilon \omega_n^* b X_v^2(0) + (S-1) f_\varepsilon \omega_n^{*2} \\ & X_v(0.5) \sin \gamma) \end{aligned} \quad (66)$$

$$\begin{aligned} & \left( \omega_n^* b a_1 - \frac{F}{F+H} M_D^* (S-1) \omega_n^* b X_v^2(0.5) \right) \gamma' \\ &= \left[ \omega_n^* b a_1 - \frac{F}{F+H} M_D^* (S-1) \omega_n^* b X_v^2(0.5) \right. \\ & \left. - \omega_n^* b a_2 \right] \sigma - \frac{F}{F+H} ((S-1) f_\varepsilon \omega_n^{*2} X_v(0.5) \cos \gamma \\ & + \frac{3}{16} (S-1) K_2^* b^3 X_v^4(0)) \end{aligned} \quad (67)$$

که در رابطه بالا:

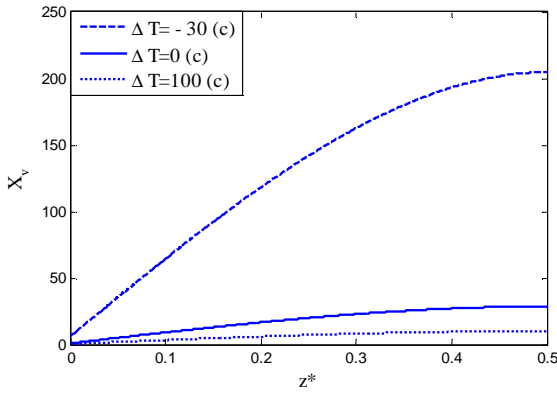
$$\gamma = \sigma T_2 - \theta \quad (68)$$

پاسخ یکتواخت سیستم (به صورت حرکت تناوبی) زمانی اتفاق می‌افتد که  $\gamma' = b' = 0$  در این صورت از روابط (۶۷،۶۶) خواهیم داشت:

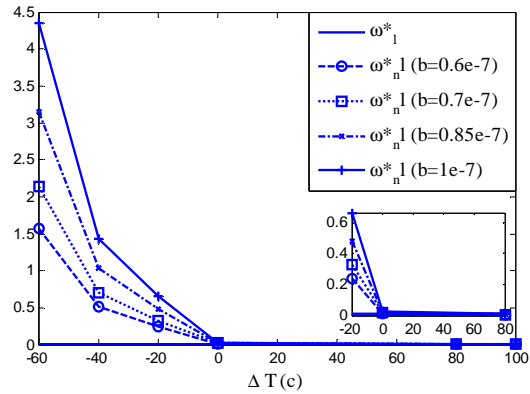
$$4E_3^2 b^2 \sigma^2 + 8E_3 E_4 b^4 \sigma + 4E_4^2 b^6 + E_1^2 b^2 - E_2^2 = 0 \quad (69)$$

که در رابطه بالا:

$$\begin{aligned} E_1 &= \frac{F}{F+H} (1-S) C_\varepsilon \omega_n^* X_v^2(0) \\ E_2 &= \frac{F}{F+H} (S-1) f_\varepsilon \omega_n^{*2} X_v(0.5) \\ E_3 &= \frac{1}{2} \left( \omega_n^* a_1 - \frac{F}{F+H} M_D^* (S-1) \omega_n^* X_v^2(0.5) \right. \\ & \left. - \omega_n^* a_2 \right) \end{aligned}$$

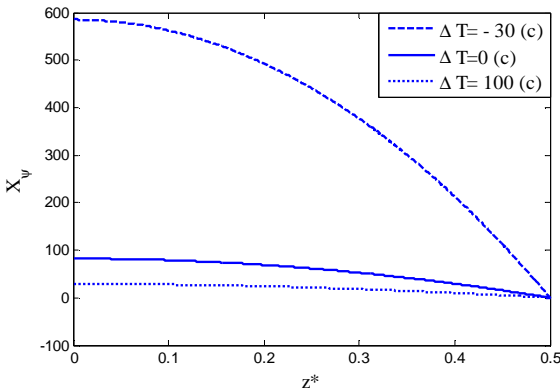


شکل ۷- نمودار شکل مود طبیعی  $X_v$

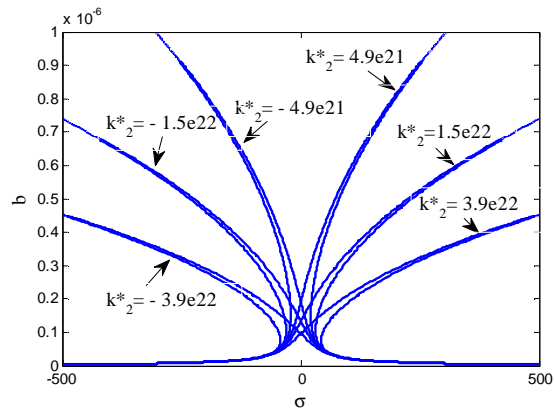


شکل ۴- نمودار تغییرات فرکانسی در اثر تغییرات دما

( $\epsilon = 0.1, K_2^* > 0$ )

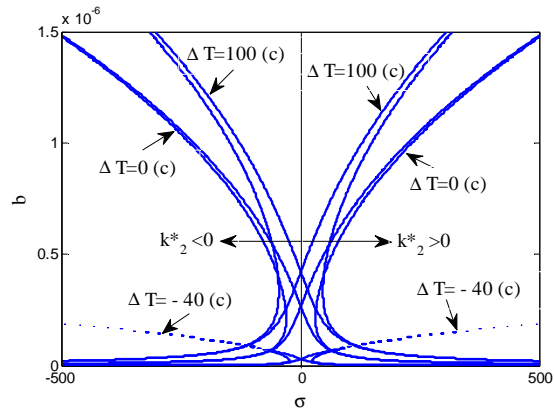


شکل ۸- نمودار شکل مود طبیعی  $X_\psi$

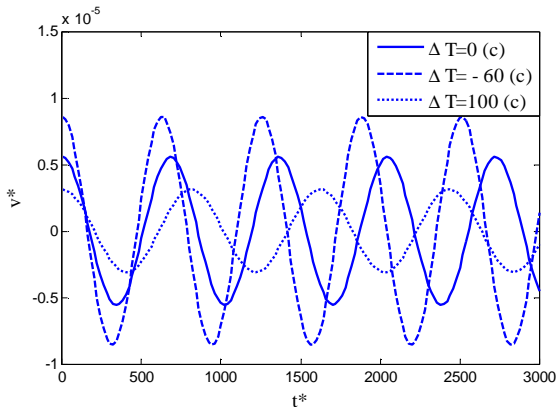


شکل ۵- نمودار تاثیر تغییرات سفتی (غیرخطی) بر پاسخ فرکانسی

در شکل‌های ۷ و ۸ تاثیر تغییر دما در شکل مودهای طبیعی  $X_v$  و  $X_\psi$  نمایش داده شده است. شکل مودهای طبیعی سیستم با حل معادله  $(\Delta^0)$  و با فرض  $B_1 = 0.5$  رسم شده‌اند. همانگونه که مشاهده می‌شود شرایط مرزی در نظر گرفته شده در هر دو درجه آزادی ارضاء شده است. در شکل‌های ۹ تا ۱۲ نمودارهای پاسخ زمانی حرکت یکنواخت سیستم در دو راستای  $v^*$  و  $\psi^*$  در محل یاتاقان و محل دیسک نمایش داده شده است. همانگونه که در هر دو نمودار هم مشاهده می‌شود افزایش دما باعث کاهش فرکانس ارتعاشی و نیز دامنه ارتعاشی گردیده است.



شکل ۶- نمودار پاسخ فرکانسی سیستم به ازاء تغییرات دما



شکل ۹- نمودار پاسخ زمانی حرکت یکنواخت سیستم در راستای  $v^*$  ( $z^* = 0.5, \sigma = 0$ )

در شکل‌های ۵ و ۶ به ترتیب نمودار تاثیر میزان سفتی مدل و نوسانات دما در پاسخ فرکانسی سیستم نمایش داده شده است. همانگونه که در شکل ۵ مشاهده می‌شود افزایش سفتی منجر به ایجاد رفتار سخت‌شوندگی در سیستم شده است. شکل ۶ نیز نشان می‌دهد که در صورتیکه سیستم سخت‌شونده باشد افزایش دما باعث کاهش سخت‌شوندگی سیستم می‌گردد و در صورتیکه سیستم نرم‌شونده باشد برعکس حالت بالا اتفاق افتاده و افزایش دما باعث افزایش سخت‌شوندگی سیستم می‌گردد.



از تغییرات شدید دما به صورت همزمان برای اولین بار در این مقاله به صورت تحلیلی مورد بررسی قرار گرفته است. این مرتبه از دقت در مدلسازی با توجه به حساسیت کاربرد در حوزه‌هایی همچون عملگرهای کنترل سمت ماهواره مورد نیاز می‌باشد. نتایج حاصل از این تحقیق برای پیکربندی چرخ عکس‌عملی با روتور کناری و با اعمال اثرات کوپلینگ الکترومغناطیس موتور نیز قابل تعمیم و کاربرد است.

### ۶- فهرست علائم

نیروی برشی	$V$
گشتاور	$M$
گشتاور ژيروسکپی	$M_{gyro}$
جابجایی در راستای $x$	$v_x$
جابجایی برشی در راستای $x$	$\psi_x$
ممان اینرسی هندسی	$I$
جرم	$m$
مدول الاستیسیته	$E$
مدول برشی	$G$
سطح مقطع	$A$
ممان اینرسی جرمی قطبی	$J_z$
نیروی محوری	$N$
دما	$T$
نیرو در راستای $x$	$F_x$
سختی خطی یا تاقان	$k_1$
سختی غیرخطی یا تاقان	$k_2$
طول روتور	$l$
ضریب میرایی یا تاقان	$c$
جرم دیسک	$M_D$

### علائم یونانی

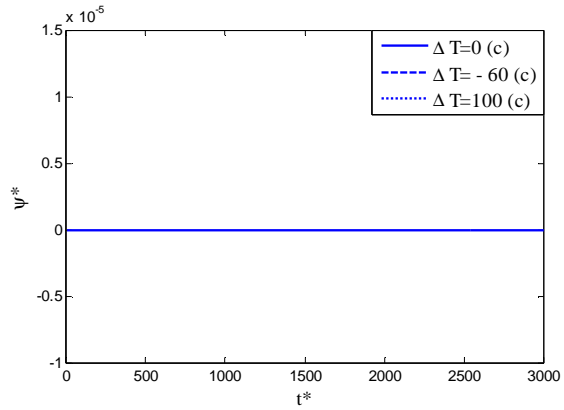
چگالی ( $\text{kgm}^{-3}$ )	$\rho$
سرعت چرخش سیستم ( $\text{rads}^{-1}$ )	$\Omega$
فرکانس طبیعی	$\omega_n$
ضریب برشی	$\kappa$
زاویه ناشی از تغییر شکل برشی	$\beta$
تنش	$\hat{\sigma}$
ضریب انبساط گرمایی	$\alpha$
پارامتر تنظیم	$\sigma$

### زیر نویس‌ها

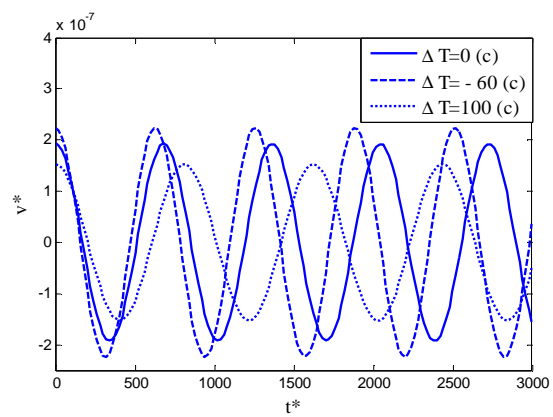
ژيروسکپی	gyro
خطی	l
غیرخطی	nl

### ۷- مراجع

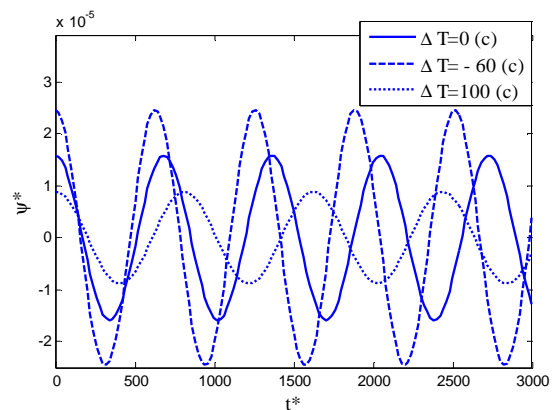
[1] Narayan S., Nair P., Ghosal A., Dynamic interaction of rotating momentum wheels with spacecraft elements. Journal of Sound and Vibration, Vol. 315, pp. 970-984, 2008.



شکل ۱۰- نمودار پاسخ زمانی حرکت یکنواخت سیستم در راستای  $\psi^*$  ( $z^* = 0.5, \sigma = 0$ )



شکل ۱۱- نمودار پاسخ زمانی حرکت یکنواخت سیستم در راستای  $v^*$  ( $z^* = 0, \sigma = 0$ )



شکل ۱۲- نمودار پاسخ زمانی حرکت یکنواخت سیستم در راستای  $\psi^*$  ( $z^* = 0, \sigma = 0$ )

### ۵- نتیجه‌گیری

اعوجاج نمودارهای پاسخ فرکانسی سیستم بیانگر چگونگی تاثیر دینامیک غیرخطی در رفتار ارتعاشی سیستم است. کاهش دما در حالت  $K_2^* > 0$  موجب بروز رفتار سخت‌شوندگی در دینامیک سیستم و تغییرات فرکانس طبیعی خطی و غیرخطی و همچنین دامنه ارتعاشات می‌گردد. تجمیع اثرات اینرسی دورانی و تغییر شکل‌های برشی (تیر ضخیم)، نیروهای ناشی از نابالانسی و خاصیت ژيروسکپی دوران روتور همراه با اثرات ناشی

- [2] Kamesh D., Pandiyan R., Ghosal A., Modeling, design and analysis of low frequency platform for attenuating micro-vibration in spacecraft. *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 329, pp. 3431–3450, 2010.
- [3] Bely P. Y., Lupie O. L., Hershey J. L., The line-of-sight jitter of the Hubble Space Telescope, *Space Astronomical Telescopes and Instruments II*, Orlando, USA, 1993.
- [4] Bialke B., Microvibration disturbance fundamentals for rotating mechanisms, 34th AAS Guidance and Control Conference, Breckenridge, USA, 2011.
- [5] Hahn R., Seiler R., Simulating and analysing the microvibration signature of reaction wheels for future non-intrusive health monitoring methods, *Proceedings 14th European Space Mechanisms & Tribology Symposium*, Konstanz, Germany, 2011.
- [6] Kim D., Oh S., Yong K., Yang K., Micro-vibration model and parameter estimation method of a reaction wheel assembly. *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 333, pp. 4214–4231, 2014.
- [7] Zhang Z., Development and validation of microvibration models for a satellite reaction wheel assembly, Ph.D. dissertation, University of Southampton, 2013.
- [8] Kim D., Oh S., Yong K., Yang K., Numerical study on a reaction wheel and wheel-disturbance modeling. *Journal of the Korean Society for Aeronautical and Space Sciences*, Vol. 38, pp. 702–708, 2010.
- [9] Masterson R. A., Development and validation of empirical and analytical reaction wheel disturbance models, M.Sc. Thesis, University of MIT, 1999.
- [10] Le M. P., Ellenbroek M. H. M., Seiler R., van Put P., Cottaar E. J. E., A full disturbance model for reaction wheels, 34th *Computers and Information in Engineering Conference*, New York, USA, 2014.
- [۱۱] آقلاری ع.، ایرانزاد م.، مهدی آبادی م.، اندازه‌گیری اغتشاشات چرخ عکس‌العملی آزمایشگاهی و مدلسازی آنها. هیجدهمین کنفرانس بین‌المللی مکانیک، تهران، ایران، ۱۳۸۹.
- [۱۲] آقلاری ع.، ایرانزاد م.، مدلسازی کامل اغتشاشات چرخ عکس‌العملی و پیاده‌سازی روی یک نمونه آزمایشگاهی. *مجله علمی-پژوهشی علوم و فناوری فضایی*، د. ع. ش. ۱، ص. ۹۱–۷۹، ۱۳۹۲.
- [13] Le M. P., Van der Heide E., Seiler R., Cottaar E. J. E., Detection and diagnosis of ball bearing imperfections in reaction wheels by micro-vibration test, 12th *European Conference on Spacecraft Structures, Materials & Environmental Testing*, Netherlands, 2014.
- [14] Liebold F., Wiegand S., Käso R., Reaction wheel disturbance characterization by analysis of micro-vibration measurements. *Applied Mechanics and Materials*, Vol. 232, pp. 445–449, 2012.
- [15] Taniwaki S., Ohkami Y., Experimental and numerical analysis of reaction wheel disturbances. *JSME International Journal Series C Mechanical systems, Machine Elements and Manufacturing*, vol. 46, pp. 519–526, 2003.
- [16] Elias L. M., Miller D. W., A structurally coupled disturbance analysis method using dynamic mass measurement techniques with application to spacecraft reaction wheel systems, Ph.D. dissertation, MIT, 2001.
- [17] Elias L. M., Dekens F. G., Basdogan I., Neville T. A., Methodology for modeling the mechanical interaction between a Reaction wheel and a flexible structure, *Interferometry in space*, Waikoloa, USA, 2003.
- [18] Kamesh D., Pandiyan R., Ghosal A., Passive vibration isolation of reaction wheel disturbances using a low frequency flexible space platform. *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 331, pp. 1310–1330, 2012.
- [19] Zhou W., Li D., Design and analysis of an intelligent vibration isolation platform for reaction/momentum wheel assemblies. *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 331, pp. 2984–3005, 2012.
- [20] Nayfeh A. H., Mook D. T., *Nonlinear oscillations*. New York, John Wiley & Sons, 2008.
- [21] Nayfeh A. H., *Introduction to perturbation techniques*. New York, John Wiley & Sons, 2011.