

بررسی اثر گرما بر فرکانس نانو صفحه دایره‌ای با ساختار درجه بندی شده بر اساس نظریه تنش کوپل اصلاح شده

مجید قدیری*

خسایار قربانی

محمد مهین زارع

استادیار، گروه مهندسی مکانیک، دانشگاه بین المللی امام خمینی (ره)، قزوین، ایران

دانشجو، گروه مهندسی مکانیک، دانشگاه بین المللی امام خمینی (ره)، قزوین، ایران

دانشجو، گروه مهندسی مکانیک، دانشگاه بین المللی امام خمینی (ره)، قزوین، ایران

چکیده

در این پژوهش اثر گرما بر فرکانس طبیعی حاصل از ارتعاش آزاد یک نانو صفحه‌ی دایره‌ای متقارن نازک مورد بررسی قرار می‌گیرد. توزیع گرما به صورت یکنواخت در نظر گرفته شده و خواص مواد در راستای ضخامت صفحه تغییر می‌کند. از نظریه تنش کوپل اصلاح شده به منظور اعمال اثر اندازه استفاده شده و معادلات حاکم بر حرکت و شرایط مرزی با استفاده از اصل هامیلتون و بر اساس نظریه کلاسیک صفحه به دست آمده و به صورت تحلیلی با استفاده از توابع بسل برای شرط مرزی کاملاً مهار شده و تکیه گاه ساده حل می‌شوند. نتایج حاصله نشان می‌دهد که افزایش تغییرات دما، نسبت ضخامت به پارامتر اثر اندازه، توان توزیع ماده و نسبت شعاع به ضخامت منجر به کاهش فرکانس طبیعی سیستم در هر دو شرط مرزی می‌شود. اثر افزایش نسبت ضخامت به پارامتر اثر اندازه بر روی فرکانس طبیعی صفحه در شرایط مرزی کاملاً مهار شده بیشتر از شرایط مرزی تکیه گاه ساده است ولی در هر دو شرط مرزی در نسبت های بالاتر این اثر کاهش می‌یابد. اثر افزایش تغییرات دما بر روی فرکانس‌های طبیعی در شرایط مرزی تکیه گاه ساده نسبت به شرایط مرزی کاملاً مهار شده بیشتر است به گونه‌ای که تغییرات دماهای پایین تری منجر به رفتار غیر خطی صفحه می‌شود.

واژه‌های کلیدی: ارتعاش آزاد، نانو صفحه ی دایره ای با ساختار مواد درجه بندی شده، اثر گرما، تنش کوپل اصلاح شده.

Thermal Effect on the Natural Frequency of FGM Nano Circular Plate Based on Modified Couple Stress Theory

M. Ghadiri

Kh. Ghorbani

M. Mahin Zare

Department of engineering, Imam Khomeini International University, Qazvin, Iran

Department of engineering, Imam Khomeini International University, Qazvin, Iran

Department of engineering, Imam Khomeini International University, Qazvin, Iran

Abstract

In this research, thermal effect on the natural frequency of axisymmetric free vibration of a thin nano circular plate made of functionally graded material will be studied. Thermal distribution has been assumed uniform and properties of the materials are changing through the thickness of the plate. The modified couple stress theory has been used for considering the length scale parameter and the governing equation of motion and boundary conditions are obtained using the Hamilton's principle and based on the classical plate theory. The analytical solution for the clamped and simply supported boundary conditions are established utilizing the Bessel functions. The results show that by increasing the temperature changes, ratio of the thickness to length scale parameter, ratio of radius to thickness and power-law index, the natural frequency decreases at both boundary conditions. The effect of increasing ratio of the thickness to length scale parameter in clamped boundary condition is more than simply supported boundary condition but for higher ratios, this effect decreases at both boundary conditions. The effect of increasing temperature changes in simply supported boundary condition is more than clamped boundary condition such a way that the lower temperature changes lead to the nonlinear behavior of the plate.

Keywords: Free vibration, FGM nano circular plate, Thermal effect, Modified couple stress.

در ابعاد بالاتر هستند. این ویژگی که با توجه به ابعاد ساختار در آن به وجود آمده است اثر اندازه نامیده می‌شود. این خواص سبب شده‌است این ساختارها گزینه های بسیار مناسبی برای استفاده در صنایع مختلف از جمله هوا فضا به منظور استفاده در هواپیماها و راکت‌ها باشند. یکی از مهمترین ویژگی‌هایی که در هر ساختار باید به آن توجه شود و مورد بررسی قرار گیرد، فرکانس‌های طبیعی و رفتار ارتعاشاتی آن ساختار و تأثیر عوامل مختلف بر آن است. فرکانس طبیعی یک ویژگی ذاتی در هر ساختار است که در طراحی‌ها باید به عنوان یک عامل اصلی در کنار عوامل دیگر مانند خستگی مورد توجه قرار گیرد زیرا در صورتی که ساختار تحت بارهای اعمالی به آن در فرکانس‌های طبیعی خود شروع به نوسان کند تغییر شکل‌های بزرگ را تجربه

۱- مقدمه

علم و فناوری نانو را می‌توان مطالعه، تغییر و تولید ساختارها با در اختیار گرفتن کنترل در ابعاد مولکولی و اتمی توصیف کرد. در نتیجه این علم یک رشته جدید نیست بلکه نگرشی جدید در تمامی رشته های علمی است.

از ساختارهای در ابعاد نانو (میکرو) می‌توان به نانوسیم‌ها، نانوتیرها، نانوصفحه‌ها و نانولوله‌ها اشاره کرد که بخش اصلی تشکیل دهنده‌ی نانو سیستم‌ها و یا نانو تجهیزات هستند. بررسی‌های صورت گرفته بر روی این ساختارها نشان می‌دهد که این ساختارها دارای سفتی و استحکام بالا و در عین حال وزن پایین نسبت به ساختارهای

با ساختار درجه بندی شده با استفاده از نظریه‌ی تنش کوپل شده بر مبنای نظریه‌ی برشی مرتبه‌ی سوم توسط کیم و ردی [۸] بررسی شده است. لی و همکاران [۹] روابط بین فرکانس بار کمانش و خیز یک صفحه‌ی نازک همگن و با ساختار درجه بندی شده را مطالعه کرده‌اند. ردی و بری [۱۰] نظریه‌های غیر خطی خمش یک صفحه‌ی دایره‌ای با ساختار درجه بندی شده و دارای شرایط تقارن محوری را بر مبنای نظریه تنش کوپل اصلاح شده ارائه کرده‌اند. اصغری و اخلاقی [۱۱] رفتار یک استوانه‌ی دایره‌ای ضخیم با ساختار درجه بندی شده در دو راستای شعاعی و طولی و تحت تأثیر بارهای مکانیکی و حرارتی پایدار را به روش المان محدود بخش بندی شده به منظور مدل کردن تغییرات خواص مواد بررسی کرده اند که بهینه سازی توزیع کسر حجمی آن توسط اصغری [۱۲] ارائه شده است. کسرهای حجمی مواد تشکیل دهنده در تعداد محدود نقاط طراحی به عنوان متغیرهای طراحی در نظر گرفته شده است. مدل‌های مختلفی به منظور نشان دادن توزیع مواد بین دو سطح ماده معرفی شده‌اند که از میان آن‌ها می‌توان به مدل ردی، مدل تانیگاوا و مدل موری-تاناکا اشاره کرد [۱۳]. در این پژوهش از مدل ردی بدین منظور استفاده شده‌است. مدل ردی تابع توزیع زیر را که به قانون توانی معروف است، ارائه می‌کند.

$$V(z) = \left(\frac{1}{2} + \frac{z}{h}\right)^n \quad (1)$$

در این رابطه $V(z)$ کسر حجمی مواد تشکیل دهنده، n شاخص گرادیان ماده، Z مولفه‌ی در راستای دو سطح و h فاصله بین دو سطح می‌باشد که مبدا مختصات وسط صفحه در نظر گرفته گرفته شده - است $\left(-\frac{h}{2} \leq Z \leq \frac{h}{2}\right)$. اگر خواص مربوط به سطح سرامیک را با P_c و خواص مربوط به سطح فلز را با P_m نشان دهیم، خواص بین دو سطح به صورت زیر تغییر می‌کند.

$$P = (P_c - P_m) V(z) + P_m \quad (2)$$

خاصیت P می‌تواند مدول الاستیسیته E ، ضریب انبساط گرمایی α و ضریب پواسون ν باشد. در این پژوهش سطح زیرین صفحه فلز خالص و سطح بالایی سرامیک خالص می‌باشد و از این رو خواص صفحه به صورت زیر تعریف می‌شود.

$$E = (E_c - E_m) V(z) + E_m \quad (3)$$

$$\alpha = (\alpha_c - \alpha_m) V(z) + \alpha_m \quad (4)$$

۲-۱- تنش کوپل اصلاح شده^۲

با توجه به کاربردهای گسترده‌ی تیرها در سیستم های نانو و میکرو بسیاری از محقق تلاش کرده‌اند تا نظریه‌های جدیدی را ارائه دهند که پارامتر اثر اندازه را در نظر بگیرند. آزمایش‌های تجربی بسیاری به منظور یافتن سازگارترین نظریه انجام شده و اثبات شده‌است که نظریه‌های منطبق بر مکانیک پیوسته کلاسیک را نمی‌توان برای ساختارهای در ابعاد نانو و میکرو با توجه به اثر اندازه که در آن‌ها تعریف می‌شود به کار برد [۱۴]-[۱۶]. بدین منظور نظریه‌های پیوستگی مرتبه‌ی بالا مانند نظریه‌ی میکروپولار نظریه‌ی گرادیان کرنش، نظریه‌ی تنش کوپل شده و نظریه‌ی تنش کوپل اصلاح شده

می‌کند که منجر به شکست آن می‌شود و می‌تواند خسارات جبران ناپذیری را به کل مجموعه وارد کند.

۱-۱- مواد با ساختار درجه بندی شده^۱ (FGM)

با توجه به گستردگی کاربرد مواد با خواص متضاد مانند استحکام بالا به همراه سبک بودن و یا سخت بودن در کنار انعطاف پذیری، دسته‌ای از مواد تحت عنوان مواد پیشرفته معرفی شدند که مواد با ساختار درجه بندی شده جز این دسته از مواد می‌باشد.

مواد با ساختار درجه بندی شده موادی با ریز ساختارهای غیر همگن هستند که خواص مکانیکی آن‌ها به طور ملایم و پیوسته از یک سطح به سطح دیگر تغییر می‌کند. این خاصیت ویژه به وسیله‌ی تغییر یکنواخت در نسبت حجمی مواد تشکیل دهنده آن‌ها به وجود می‌آید. این مواد از پرکاربردترین مواد در صنعت به ویژه استفاده در محیط‌هایی با دمای بسیار بالا به شمار می‌روند. این مواد نخستین بار در سال ۱۹۸۴ در آزمایشگاه هوا فضای نینو در کشور ژاپن مطرح گردید [۱]. نوع رایج این مواد از ترکیب سرامیک و فلز حاصل می‌گردد. در این حالت یکی از سطوح قطعه سرامیک خالص و سطح مقابل آن فلز خالص می‌باشد و جنس ماده موجود بین دو سطح ترکیبی از این دو ماده است. نسبت این ترکیب در راستای بین دو صفحه متغیر بوده و چگالی ذرات از سطحی به سطح دیگر توسط یک تابع معین که می‌تواند خطی یا غیر خطی باشد، تغییر می‌کند. مولفه‌ی سرامیکی جسم به دلیل رسانایی گرمایی پایین باعث مقاومت در برابر دماهای بالا می‌گردد و مولفه‌ی فلزی باعث جلوگیری از رشد ترک و شکست ماده در اثر تنش‌های حرارتی بالا می‌گردد. پیوستگی تغییرات ریز ساختاری مزیت این ماده نسبت به مواد مرکب لایه‌ای می‌باشد.

از جمله کاربردهای این مواد می‌توان استفاده در راکتورهای هسته‌ای، صنایع شیمیایی، مهندسی پزشکی و سایر فناوری‌های نوین مانند موتورهای سرامیکی و پوشش در برابر خوردگی و حرارت را اشاره کرد.

انصاری و همکاران [۲] کمانش، خمش و ارتعاشات آزاد وابسته به اندازه یک میکرو صفحه دایره‌ای و حلقوی با ساختار درجه بندی شده را بر اساس نظریه‌ی الاستیسیته‌ی گرادیان کرنش اصلاح شده مورد بررسی قرار داده‌اند. چنگ و باترا [۳] تغییر شکل ترموالاستیک سه بعدی را برای یک صفحه‌ی بیضوی با ساختار درجه بندی شده مطالعه کرده‌اند. حسینی هاشمی و همکاران [۴] ارتعاشات صفحه‌ی حلقوی ضخیم با لایه‌های پیزوالکتریک و با ساختار درجه بندی شده را برای شرایط مرزی مختلف به صورت تحلیلی بررسی کرده‌اند. در مطالعه‌ی دیگر حسینی هاشمی و همکاران [۵] ارتعاشات یک قطاع دایره‌ای با ساختار درجه بندی شده شعاعی با ضخامت متغیر قرار گرفته بر روی بسترالاستیک را ارائه کرده‌اند. پسا کمانش گرمایی یک قطاع دایره‌ای با ساختار درجه بندی شده توسط کیانی و اسلامی [۶] ارائه شده‌است. علاوه بر این آن‌ها پاسخ تحلیلی کمانش گرمایی یک صفحه‌ی حلقوی با ساختار درجه بندی شده تعبیه شده بر یک بسترالاستیک را نیز ارائه کرده‌اند [۷]. حل دقیق کمانش، خمش و ارتعاش یک صفحه‌ی دایره‌ای

^۲ Modified couple stress theory

^۱ Functionally Graded Material

بستر الاستیک، منطبق بر نظریه‌ی صفحه‌ی میندیلین توسط دین داک [۲۹] نشان داده شده‌است. دانگ و همکاران [۳۰] با در نظر گرفتن اثر حرارت، پیش‌ش غیر خطی پسا کمانش و کمانش یک پوسته‌ی استوانه‌ای با ساختار درجه بندی شده سخت شده غیر متعارف را ارائه کرده‌است. گوپتا و کومار [۳۱] اثر حرارت در تحلیل ارتعاش یک صفحه‌ی مستطیلی غیر همگن ویسکو الاستیک دارای تغییر ضخامت خطی را نشان داده‌اند. قدیری و همکاران [۳۲] اثر گرما بر ارتعاشات آزاد و کمانش یک نانوصفحه‌ی دایره‌ای با ساختار درجه بندی شده را به روش عددی بررسی کرده‌اند. جوشی و همکاران [۳۳] یک پاسخ تحلیلی برای ارتعاش آزاد یک صفحه‌ی مستطیلی دارای شکاف را در محیط گرمایی ارائه کرده‌اند. لانه [۳۴] کمانش حرارتی یک صفحه‌ی مستطیلی نسبتاً ضخیم با ساختار درجه بندی شده را در شرایط مرزی تکیه گاه ساده بررسی کرده‌است. پس کمانش غیر خطی و خمش یک صفحه‌ی دایره‌ای تحت بارهای حرارتی و مکانیکی توسط ما و وانگ [۳۵] ارائه شده‌است. نجف زاده و حیدری [۳۶] کمانش حرارتی صفحه‌های دایره‌ای با ساختار درجه بندی شده را منطبق بر نظریه‌ی تغییر شکل برشی مرتبه سوم بررسی کرده‌اند. آن‌ها همچنین پاسخ تحلیلی کمانش صفحات دایره‌ای با ساختار درجه بندی شده تحت تراکم شعاعی را منطبق بر نظریه‌ی تغییر شکل برشی مرتبه‌ی سوم ارائه کرده‌اند [۳۷]. تانگ [۳۸] با در نظر گرفتن خواص وابسته به دما، پس کمانش ترمومکانیکی و حرارتی صفحات با ساختار درجه بندی شده را در یک بستر الاستیک بررسی کرده‌است. نجفی و همکاران [۳۹]–[۴۱] ارتعاشات غیر خطی تیر، صفحه و پنل‌های مضاعف خمیده‌ی با ساختار درجه بندی شده را بر روی بستر الاستیک وینکلر- پاسترناک و تحت تأثیر ضربه غیر مرکزی سرعت کم و در محیط گرمایی بررسی کرده‌اند. آن‌ها از نظریه تغییر شکل برشی مرتبه‌ی بالای ردی برای مدلسازی ساختارها استفاده کرده‌اند.

در این پژوهش به بررسی اثر گرما بر فرکانس طبیعی یک نانو صفحه‌ی دایره‌ای با ساختار مواد درجه بندی شده و دارای تقارن محوری، منطبق بر نظریه کلاسیک صفحه و با در نظر گرفتن نظریه تنش کوپل اصلاح شده به منظور اعمال اثر اندازه که در ساختارهای میکرو و نانو وارد می شود، پرداخته می‌شود. معادلات حاکم بر حرکت صفحه و شرایط مرزی با استفاده از اصل هامیلتون به دست آمده و به صورت تحلیلی با استفاده از توابع بسل برای شرایط مرزی کاملاً مهار شده و تکیه گاه ساده حل می‌گردد.

۲- استخراج معادلات حرکت صفحه و شرایط مرزی

۲-۱- میدان جابجایی

با در نظر گرفتن صفحه‌ی دایره‌ای با شعاع a و ضخامت h در مختصات قطبی (r, θ, z) ، میدان جابجایی منطبق بر نظریه کلاسیک در شرایط تقارن محوری به صورت زیر تعریف می‌شود.

$$u_r(r, z, t) = u_0 - z \frac{\partial w}{\partial r} \quad (5)$$

$$u_\theta(r, z, t) = 0 \quad (6)$$

$$u_z(r, z, t) = w(r, t) \quad (7)$$

در این روابط w جابجایی عرضی صفحه، $\frac{\partial w}{\partial r}$ دوران سطح مقطع عمود بر سطح میانی صفحه حول مختصه‌ی شعاعی r و u_0 جابجایی

مطرح شدند. این نظریه‌ها پارامتر اثر اندازه را در نظر گرفته و توانایی اعمال اثر اندازه را دارند [۱۷]. نظریه‌ی تنش کوپل شده یکی از نظریه‌های الاستیسیته‌ی مرتبه‌ی بالا است که در دهه‌ی ۱۹۶۰ میلادی توسط توپین [۱۴]، میندیلین و تیرشتن [۱۶] و کویتز [۱۵] مطرح و اصلاح شد. این نظریه شامل دو پارامتر اندازه و دو ثابت لامه می‌باشد. یکی از مهمترین نقاط قوت این نظریه در نظر گرفتن دو پارامتر اضافی در برابر چهار پارامتر اضافی نظریه‌ی میکروپولار و پنج پارامتر اضافی نظریه‌ی گرادین کرنش است [۱۷]. با توجه به مشکل بودن تعیین پارامترهای اندازه، در سال ۲۰۰۲ یانگ و چنگ [۱۸] نظریه تنش کوپل اصلاح شده را ارائه دادند که در این نظریه تنها یک پارامتر اندازه وارد می‌شود. مزیت دیگر این نظریه نسبت به نظریه‌ی تنش کوپل شده تنها در نظر گرفتن بخش متقارن ماتریس تنش کوپل شده است [۱۹].

نظریه‌ی تنش کوپل اصلاح شده یکی از قویترین نظریه‌ها در این حوزه می‌باشد که به محققین در مطالعه‌ی رفتار ساختارهای در ابعاد میکرو کمک می‌کند. محققین از این ویژگی به منظور استخراج معادلات حاکم بر حرکت وابسته به اندازه و شرایط مرزی مربوطه برای میکرو ساختارها مانند میکرو تیرها، میکرو صفحه‌ها و میکرو پوسته‌ها استفاده می‌کنند.

اصغری و همکاران [۲۰] [۲۱] مدل وابسته به اندازه یک تیر را منطبق بر نظریه‌های تیر اوبلر- برنولی و تیر تیموشینکو ارائه کرده‌اند که رفتار استاتیکی و ارتعاشی یک میکرو تیر با ساختار درجه بندی شده را نشان می‌دهد. سلامت طلب و همکاران [۲۲] مدل یک میکرو تیر را منطبق بر نظریه‌ی تغییر شکل برشی مرتبه‌ی سوم و در نظر گرفتن نظریه‌ی تنش کوپل اصلاح شده به منظور تحلیل ارتعاش آزاد میکرو تیرها ارائه کرده‌اند. ارتعاشات غیر خطی یک میکرو صفحه مستطیلی منطبق بر نظریه‌ی تغییر شکل برشی مرتبه‌ی اول با اعمال نظریه‌ی تنش کوپل اصلاح شده توسط انصاری و همکاران [۲۳] ارائه شده‌است. جمعه زاده و همکاران [۲۴] ارتعاشات وابسته به اندازه یک میکرو صفحه‌ی مستطیلی و دایره‌ای را با نظریه‌ی تنش کوپل اصلاح شده مطالعه کرده‌اند. کی و همکاران [۲۵] کمانش، خمش و ارتعاش وابسته به اندازه یک میکرو صفحه دایره‌ای حلقوی را براساس نظریه‌ی تنش کوپل اصلاح شده بررسی کرده‌اند. اثر حرارت بر یک میکروتیر وابسته به اندازه با ساختار درجه بندی شده بر اساس نظریه تنش کوپل اصلاح شده توسط ناطقی و سلامت طلب [۲۶] ارائه شده‌است. وانگ و همکاران [۲۷] ارتعاشات بزرگ وابسته به اندازه را برای ارتعاش آزاد یک میکرو صفحه دایره‌ای با در نظر گرفتن نظریه تنش کوپل اصلاح شده، بررسی کرده‌اند. همچنین وانگ و همکاران [۲۸] خمش غیر خطی وابسته به اندازه یک میکرو صفحه‌ی دایره‌ای را با نظریه‌ی تنش کوپل اصلاح شده مطالعه کرده‌اند. روابط مربوط به این نظریه و چگونگی اعمال آن‌ها در بخش استخراج معادله حاکم بر حرکت آمده‌است.

۳-۱- اثر گرما

همان‌گونه که در بخش مواد درجه بندی شده اشاره شد، یکی از مهمترین ویژگی‌های این ساختارها پایداری حرارتی آن‌ها می‌باشد در نتیجه اثر بارهای گرمایی بر روی رفتار مواد با این ساختار نیز باید مورد بررسی قرار گیرد. ارتعاشات غیر خطی صفحات ضخیم با ساختار درجه بندی شده تحت تأثیر بارهای مکانیکی و حرارتی و قرار گرفته بر روی

$$M_{rr} = - \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_{rr} z dz = K_1 \frac{\partial^2 w}{\partial r^2} + K_2 \frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial r} \quad (18)$$

$$M_{\theta\theta} = - \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_{\theta\theta} z dz = K_1 \frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial r} + K_2 \frac{\partial^2 w}{\partial r^2} \quad (19)$$

$$\Omega_{r\theta} = \int_{-h/2}^{h/2} m_{r\theta} dz = l^2 K_3 \left[-\frac{\partial^2 w}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial r} \right] \quad (20)$$

ضرایب K_i عبارت اند از:

$$\{K_1, K_2\} = \int_{-h/2}^{h/2} \left(\frac{E(z)}{1-\nu^2(z)} \right) z^2 \{1, \nu(z)\} dz \quad (21)$$

$$K_3 = \int_{-h/2}^{h/2} \left(\frac{E(z)}{2(1+\nu(z))} \right) dz \quad (22)$$

۲-۳- انرژی جنبشی

انرژی جنبشی سیستم به صورت زیر تعریف می‌شود.

$$T = \frac{1}{2} \int_V \rho(z) \left[\left(\frac{\partial u_z}{\partial t} \right)^2 \right] z dA = \frac{1}{2} \int_A \left[I \left(-\frac{\partial^2 w}{\partial r \partial t} \right)^2 \right] dA \quad (23)$$

که

$$I = \int_{-h/2}^{h/2} \rho(z) z^2 dz \quad (24)$$

۲-۴- کار نیروهای خارجی

نیروهای خارجی عمل کننده روی جسم شامل نیروی عرضی f که در واحد سطح اعمال می‌شود و اثر حرارت که به صورت نیروی داخلی در راستای شعاع صفحه وارد می‌شود، می‌باشد. بار گرمایی با N_{rr} نمایش داده می‌شود و انواع آن در ادامه خواهد آمد. اثر گرما می‌تواند به صورت تنش در عبارت انرژی کرنشی نیز وارد شود. کار این نیروها به صورت زیر تعریف می‌شود.

$$H = -\frac{1}{2} \int_A N_{rr} \left(\frac{\partial w}{\partial r} \right)^2 dA + \int_A f w dA \quad (25)$$

علامت منفی وارد شده در عبارت مربوط به اثر گرما بدین علت است که این اثر به صورت نیروی داخلی عمل می‌کند. رابطه بار گرمایی به صورت زیر تعریف می‌گردد [7].

$$N_{rr} = - \int_{-h/2}^{h/2} \frac{E(z) \alpha(z) (T - T_0)}{1-\nu(z)} dz \quad (26)$$

در این رابطه α ضریب انبساط گرمایی، T_0 دمای مرجع و T توزیع دما در راستای ضخامت می‌باشد که در پژوهش حاضر به صورت زیر یکنواخت در نظر گرفته می‌شود.

$$T = T_0 + \Delta T \quad (27)$$

۲-۵- استخراج معادلات و شرایط مرزی مربوطه

به منظور استخراج معادلات حاکم بر حرکت و شرایط مرزی مربوطه از اصل همیلتون استفاده می‌شود. این اصل بیان می‌کند که

شعاعی صفحه میانی می‌باشند. با توجه به این که در پژوهش حاضر تنها پدیده خمش در نظر گرفته شده است، از عبارت u_0 صرف نظر می‌گردد.

۲-۲- انرژی کرنشی

مطابق نظریه‌ی تنش کوپل اصلاح شده انرژی کرنشی از رابطه‌ی زیر به دست می‌آید [10].

$$U = \frac{1}{2} \int_V (\sigma : \varepsilon + m : \chi) dV \quad (8)$$

در این رابطه σ تانسور تنش کوشی (کلاسیک)، ε تانسور کرنش خطی، m بخش انحراف یافته تانسور تنش کوپل شده و χ بخش متقارن تانسور پیچشی است. این تانسورها به صورت زیر تعریف می‌شوند.

$$\sigma_{ij} = \lambda tr(\varepsilon_{ij}) \delta_{ij} + 2\mu \varepsilon_{ij} \quad (9)$$

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} [\nabla u_i + (\nabla u)^T] = \frac{1}{2} (u_{i,j} + u_{j,i}) \quad (10)$$

$$m_{ij} = 2l^2 \mu \chi_{ij} \quad (11)$$

$$\chi_{ij} = \frac{1}{2} [\nabla \phi + (\nabla \phi)^T] = \frac{1}{2} (\phi_{i,j} + \phi_{j,i}) \quad (12)$$

که λ و μ ثوابت لامه، δ_{ij} دلتای کرونیگر، u بردار جابجایی، l پارامتر اثر اندازه ماده و ϕ بردار چرخش می‌باشد که به صورت زیر تعریف می‌شود.

$$\phi = \frac{1}{2} \text{curl } u \quad (13)$$

با توجه به میدان جابجایی مولفه‌های غیر صفر تانسورهای ε و χ به صورت زیر به دست می‌آیند.

$$\varepsilon_{rr} = -z \frac{\partial^2 w}{\partial r^2}, \quad \varepsilon_{\theta\theta} = -\frac{z}{r} \frac{\partial w}{\partial r} \quad (14)$$

$$\chi_{r\theta} = \frac{1}{4} \left(\frac{\partial \phi}{\partial r} - \frac{\partial^2 w}{\partial r^2} \right) - \frac{1}{4r} \left(\phi - \frac{\partial w}{\partial r} \right) \quad (15)$$

با جایگذاری معادلات (9) تا (15) در معادله‌ی (8) رابطه‌ی انرژی کرنشی را می‌توان به صورت زیر استخراج کرد.

$$U = \frac{1}{2} \int_A \int_{-h/2}^{h/2} \left[\sigma_{rr} \left(-z \frac{\partial^2 w}{\partial r^2} \right) + \sigma_{\theta\theta} \left(-\frac{z}{r} \frac{\partial w}{\partial r} \right) + m_{r\theta} \left[-\frac{\partial^2 w}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial r} \right] \right] dz dA \quad (16)$$

با توجه به رابطه‌ی تنش-کرنش برای یک ماده ایزوتروپیک در شرایط تنش صفحه‌ای، رابطه‌ی انرژی کرنشی به صورت زیر به دست می‌آید.

$$= \frac{1}{2} \int_A \left\{ M_{rr} \frac{\partial^2 w}{\partial r^2} + M_{\theta\theta} \frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial r} + \Omega_{r\theta} \left[-\frac{\partial^2 w}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial r} \right] \right\} dA \quad (17)$$

که در آن

$$N = r \left[K_1 \left(\frac{\partial^3 w}{\partial r^3} + \frac{1}{r} \frac{\partial^2 w}{\partial r^2} - \frac{1}{r^2} \frac{\partial w}{\partial r} \right) + K_3 l^2 \left(\frac{\partial^3 w}{\partial r^3} - \frac{1}{r} \frac{\partial^2 w}{\partial r^2} - \frac{1}{r^2} \frac{\partial w}{\partial r} \right) - N_{rr} \frac{\partial w}{\partial r} \right] \quad (36)$$

$$M = r \left(K_1 \frac{\partial^2 w}{\partial r^2} + K_2 \frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial r} - l^2 K_3 - l^2 K_3 \left[-\frac{\partial^2 w}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial r} \right] \right) \quad (37)$$

لازم به ذکر است با توجه به این که صفحه‌ی مورد بررسی دایره‌ی کامل است در مرکز دایره ($r = 0$) مرزی وجود ندارد و شرایط مرزی برای آن تعریف نمی‌شود. تأثیر مرکز دایره در حل معادله دیفرانسیل وارد می‌شود.

۳- پاسخ ارتعاش آزاد ($f = 0$)

معادله‌ی (۳۳) را به صورت زیر باز نویسی می‌کنیم.

$$-K(\nabla^2)^2 w + N_{rr} \nabla^2 w = I \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} \quad (38)$$

که

$$\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \quad (39)$$

$$K = K_1 + K_3 l^2 \quad (40)$$

جواب معادله را می‌توان به شکل زیر هارمونیک در نظر گرفت.

$$w(r, t) = W(r) e^{i\omega t} \quad (41)$$

که ω فرکانس طبیعی نوسان و $W(r)$ دامنه‌ی نوسان در راستای ضخامت (مختصات Z) می‌باشد. با جایگذاری معادله‌ی (۴۱) در معادله (۳۸) داریم:

$$\nabla^4 W - \frac{N_{rr}}{K} \nabla^2 W - \frac{\omega^2 I}{K} W = 0 \quad (42)$$

معادله (۴۲) به صورت زیر قابل تجزیه است [۴۲]:

$$\left(\nabla^2 + \lambda_1^2 \right) \left(\nabla^2 - \lambda_2^2 \right) W = 0 \quad (43)$$

که در آن

$$\lambda_1^2 = \frac{N_{rr}}{2K} \left[\left(1 + \frac{4I\omega^2 K}{N_{rr}^2} \right)^2 - 1 \right]$$

$$\lambda_2^2 = \frac{N_{rr}}{2K} \left[\left(1 + \frac{4I\omega^2 K}{N_{rr}^2} \right)^2 + 1 \right] \quad (44)$$

$$\lambda_2^2 - \lambda_1^2 = \frac{N_{rr}}{K}, \quad \lambda_2^2 \lambda_1^2 = \frac{I\omega^2}{K}$$

معادله‌ی (۴۳) را می‌توان به صورت دو معادله‌ی مستقل به شکل زیر در نظر گرفت.

$$\frac{d^2 W_1}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{dW_1}{dr} - \left(0 + \lambda_1^2 \right) W_1 = 0 \quad (45)$$

پیشرفت یک سیستم مکانیکی در زمان به گونه‌ای است که انتگرال اختلاف بین انرژی‌های سیستم که لاگرانژین نامیده می‌شود، نسبت به زمان ثابت است. این اصل، نوع خاص اصل حساب تغییرات می‌باشد که برای مسائل مکانیکی مورد استفاده قرار می‌گیرد. با استخراج روابط مربوط به انرژی پتانسیل، انرژی جنبشی و کار نیروهای خارجی و سپس تشکیل رابطه لاگرانژ، با استفاده از اصل همپلتون که رابطه‌ی آن به صورت زیر می‌باشد، معادلات حاکم بر حرکت و شرایط مرزی مربوطه به دست می‌آیند.

$$\delta \int_{t_1}^{t_2} (T - U + H) dt = 0 \quad (28)$$

در این رابطه T انرژی جنبشی، U انرژی پتانسیل و H کار نیروهای خارجی است که روابط آن‌ها در قسمت قبل به دست آمده است.

با جایگذاری معادلات (۱۷)، (۲۳) و (۲۵) در معادله‌ی (۲۸) و محاسبه‌ی تغییرات آن‌ها، اصل همپلتون به صورت زیر نتیجه می‌شود.

$$\int_0^t \int_0^a \left(-\frac{\partial^2}{\partial r^2} (rM_{rr} - r\Omega_{r\theta}) + \frac{\partial}{\partial r} (M_{\theta\theta} + \Omega_{r\theta}) - Ir \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} - \frac{\partial}{\partial r} \left(rN_{rr} \frac{\partial w}{\partial r} \right) + rF \right) \delta w + \left(-\frac{\partial}{\partial r} (rM_{rr} - r\Omega_{r\theta}) - M_{\theta\theta} - \Omega_{r\theta} + rN_{rr} \frac{\partial w}{\partial r} \right) \delta w \Big|_0^a - (rM_{rr} - r\Omega_{r\theta}) \frac{\partial \delta w}{\partial r} \Big|_0^a dt = 0 \quad (29)$$

مطابق قضیه‌ی اساسی حساب تغییرات داریم:

$$-\frac{\partial^2}{\partial r^2} (rM_{rr} - r\Omega_{r\theta}) + \frac{\partial}{\partial r} (M_{\theta\theta} + \Omega_{r\theta}) \quad (30)$$

$$-Ir \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} - \frac{\partial}{\partial r} \left(rN_{rr} \frac{\partial w}{\partial r} \right) + rF = 0$$

$$\left(-\frac{\partial}{\partial r} (rM_{rr} - r\Omega_{r\theta}) - M_{\theta\theta} - \Omega_{r\theta} - rN_{rr} \frac{\partial w}{\partial r} \right) \delta w \Big|_0^a = 0 \quad (31)$$

$$(rM_{rr} - r\Omega_{r\theta}) \frac{\partial \delta w}{\partial r} \Big|_0^a = 0 \quad (32)$$

معادله‌ی (۳۰) معادله‌ی حرکت و معادلات (۳۱) و (۳۲) نشان دهنده‌ی تمامی شرایط مرزی حاکم بر مسأله هستند.

با جایگذاری معادلات (۱۸)، (۱۹) و (۲۰) در معادلات (۳۰)، (۳۱) و (۳۲) معادله‌ی حاکم بر حرکت و شرایط مرزی بر حسب مولفه‌های جابجایی به صورت زیر بیان می‌شوند.

$$-\left(K_1 + K_3 l^2 \right) \left(\frac{\partial^4 w}{\partial r^4} + \frac{2}{r} \frac{\partial^3 w}{\partial r^3} - \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 w}{\partial r^2} + \frac{1}{r^3} \frac{\partial w}{\partial r} \right) \quad (33)$$

$$+ \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(rN_{rr} \frac{\partial w}{\partial r} \right) + f = I \frac{\partial^2 w}{\partial t^2}$$

$$N \delta w = 0 \quad \text{در} \quad r = a \quad (34)$$

$$M \frac{\partial \delta w}{\partial r} = 0 \quad \text{در} \quad r = a \quad (35)$$

که در آن

ثابت در نظر گرفته شده است) و در تمامی بخش‌ها مقدار $17/6\mu$ به عنوان پارامتر اثر اندازه اتخاذ شده است ($l=17/6\mu$) [۴۳].

جدول ۱- خواص مواد

ویژگی	فلز (آلومینیوم Al)	سرامیک (آلومینا Al_2O_3)
چگالی ρ (Kg/m^3)	۲۷۰	۳۹۰۰
مدول یانگ E (GPa)	۷۰	۳۸۰
ضریب انبساط گرمایی α (K^{-1})	23×10^{-6}	$7/4 \times 10^{-6}$

به منظور اعتبار سنجی نتایج، نتایج را با حذف اثر اندازه ($l=0$)، اثر ساختار ماده درجه بندی شده ($n=0$) و اثر حرارت ($\Delta T=0$) به دست آورده و با نتایج مرجع [۴۲] و [۴۴] مقایسه می‌کنیم. مرجع [۴۲] نتایج را به روش تحلیلی و مرجع [۴۴] نتایج را به روش عددی به دست آورده‌اند. این نتایج در جدول ۲ برای شرط مرزی کاملاً مهار شده و در جدول ۳ برای شرط مرزی تکیه گاه ساده ارائه شده است. این مقایسه صحت و دقت نتایج را به خوبی نشان می‌دهد.

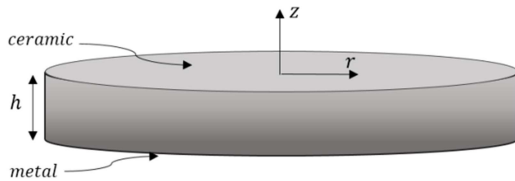
$$\omega = \left(\frac{\rho_c h^2 a^2}{D} \right) \omega^2, \quad D = \frac{E_c h^3}{12(1-\nu^2)} \quad (56)$$

جدول ۲- نتایج به دست آمده برای شرط مرزی کاملاً مهار شده

مرجع [۴۲]	مرجع [۴۴]	نتایج حاضر	ω
۱۰,۲۱۶۰	۱۰,۲۱۵۸	۱۰,۲۱۵۸	۱
۳۹,۷۷۱۰	۳۹,۷۷۱۱	۳۹,۷۷۱۱	۲
۸۹,۱۰۴۰	۸۹,۱۰۴۱	۸۹,۱۰۴۱	۳
۱۵۸,۱۸۳۰	۱۵۸,۱۸۴۲	۱۵۸,۱۸۴۲	۴
۲۴۷,۰۰۵	۲۴۷,۰۰۶۴	۲۴۷,۰۰۶۴	۵

جدول ۳- نتایج به دست آمده برای شرط مرزی تکیه گاه ساده

مرجع [۴۲]	مرجع [۴۴]	نتایج حاضر	ω
۴,۹۷۷	۴,۹۳۵	۴,۹۳۵	۱
۲۹,۷۲۰	۲۹,۷۲۰	۲۹,۷۲۰	۲
۷۴,۲۰۰	۷۴,۱۵۶	۷۴,۱۵۶	۳
۱۳۸,۳۴۰	۱۳۸,۳۱۸	۱۳۸,۳۱۸	۴



شکل ۱- هندسه صفحه

در جدول ۴ پنج فرکانس بی بعد اول صفحه برای مقادیر مختلف نسبت ضخامت به پارامتر اثر اندازه، بدون در نظر گرفتن اثر گرما و شرایط $20 = a/h$ و $n=2$ برای شرط مرزی کاملاً مهار شده آمده است. با توجه به مقادیر جدول با افزایش نسبت ضخامت به پارامتر اثر اندازه فرکانس کاهش می‌یابد. این کاهش در شکل ۲ که تغییرات

$$\frac{d^2 W_2}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{dW_2}{dr} - (0 - \lambda_2^2) W_2 = 0 \quad (46)$$

معادله‌ی (۴۵) معادله‌ی بسل پیراسته از مرتبه‌ی صفر و پارامتر λ_1 و معادله‌ی (۴۶) معادله‌ی بسل پیراسته از مرتبه‌ی صفر و پارامتر λ_2 هستند که به ترتیب دارای پاسخ زیر هستند.

$$W_1 = A J_0(\lambda_1 r) + B Y_0(\lambda_1 r) \quad (47)$$

$$W_2 = C I_0(\lambda_2 r) + D K_0(\lambda_2 r) \quad (48)$$

که J_0, Y_0, I_0 و K_0 به ترتیب توابع بسل و بسل پیراسته نوع اول و دوم از مرتبه‌ی صفر می‌باشند. جواب کلی معادله (۴۲) برابر است با مجموع معادلات (۴۷) و (۴۸).

$$W = A J_0(\lambda_1 r) + B Y_0(\lambda_1 r) + C I_0(\lambda_2 r) + D K_0(\lambda_2 r) \quad (49)$$

توابع بسل و بسل پیراسته نوع دوم Y_0 و K_0 دارای نقطه‌ی تکیه صفر می‌باشند به همین علت به منظور جلوگیری از تکیه‌ی در مرکز دایره ($r=0$) ضرایب B و D باید صفر باشد (اثر مرکز دایره در حل معادله دیفرانسیل).

• شرط مرزی کاملاً مهار شده

در این شرط مرزی خیز و شیب در شعاع بیرونی ($r=a$) صفر است. در نتیجه:

$$W|_a = 0 \Rightarrow A J_0(\lambda_1 a) + C I_0(\lambda_2 a) = 0 \quad (50)$$

$$\left. \frac{dW}{dr} \right|_a = 0 \Rightarrow A J'_0(\lambda_1 a) + C I'_0(\lambda_2 a) = 0 \quad (51)$$

با توجه به مجموع معادلات (۵۱) و (۵۰)، معادله مشخصه‌ی زیر حاصل می‌شود.

$$J_0(\lambda_1 a) I'_0(\lambda_2 a) - I_0(\lambda_2 a) J'_0(\lambda_1 a) = 0 \quad (52)$$

• شرط مرزی تکیه گاه ساده

در این شرط مرزی خیز و گشتاور در شعاع بیرونی ($r=a$) صفر است. معادله مشخصه‌ی حاصل از این شرط مرزی به صورت زیر به دست می‌آید.

$$J_0(\lambda_1 a) M_2 - I_0(\lambda_2 a) M_1 = 0 \quad (53)$$

که در آن M_1 و M_2 عبارت اند از:

$$M_1 = a K_1 J_0''(\lambda_1 a) + K_2 J_0'(\lambda_1 a) + a K_3 l^2 J_0''(\lambda_1 a) - K_3 l^2 J_0'(\lambda_1 a) \quad (54)$$

$$M_2 = a K_1 I_0''(\lambda_2 a) + K_2 I_0'(\lambda_2 a) + a K_3 l^2 I_0''(\lambda_2 a) - K_3 l^2 I_0'(\lambda_2 a) \quad (55)$$

۴- استخراج نتایج

صفحه‌ی مورد بررسی در این پژوهش ترکیب سرامیک و فلز می‌باشد به طوری که سطح زیرین صفحه فلز خالص و سطح بالایی آن سرامیک خالص می‌باشد و فضای بین دو سطح را ترکیب این دو ماده تشکیل می‌دهد (شکل ۱). در این ساختار آلومینیوم (Al) به عنوان فلز و آلومینا (Al_2O_3) به عنوان سرامیک در نظر گرفته شده است که ویژگی‌های آن‌ها در جدول ۱ آمده است. مقدار ضریب پواسون ثابت و $0/3$ در نظر گرفته شده است (با توجه به کوچک بودن مقادیر ضرایب پواسون دو ماده و نزدیک بودن مقادیر آن‌ها به هم، ضریب پواسون را

گرما بر فرکانس طبیعی اول صفحه برای مقادیر مختلف شعاع به ضخامت و شرایط اندازه $h/l = 2$ و $n = 2$ برای شرایط مرزی کاملاً مهار شده در شکل ۵ آمده‌است. با توجه به این شکل با افزایش نسبت شعاع به ضخامت و افزایش دما فرکانس کاهش می‌یابد. در این بخش فرکانس به صورت $h/l = 2$ در نظر گرفته شده‌است زیرا تغییرات در فرکانس بی بعد به خوبی قابل مشاهده نیست.

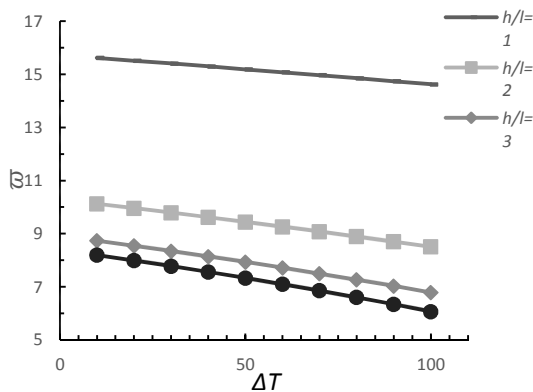
در جدول ۵ سه فرکانس بی بعد اول صفحه برای مقادیر مختلف نسبت ضخامت به پارامتر اثر اندازه، بدون در نظر گرفتن اثر گرما و شرایط $h/l = 2$ و $n = 5$ برای شرایط مرزی تکیه گاه ساده آمده است. با توجه به مقادیر جدول با افزایش نسبت ضخامت به پارامتر اثر اندازه فرکانس کاهش می‌یابد. این کاهش در شکل ۶ که تغییرات فرکانس طبیعی بی بعد اول صفحه را بر حسب نسبت ضخامت به پارامتر اثر اندازه و مقادیر مختلف توان توزیع ماده، بدون در نظر گرفتن اثر گرما و $h/l = 2$ نشان می‌دهد، به خوبی دیده می‌شود. مطابق شکل تغییرات در نسبت های ضخامت به پارامتر اثر اندازه پایین با شدت بیشتری رخ می‌دهد در صورتی که برای نسبت های بالاتر تغییرات کمتر است. رفتار مشابهی که برای شرایط مرزی کاملاً مهار شده نیز شاهد آن بودیم. با مقایسه‌ی شکل های ۲ و ۶ مشاهده می‌شود که تأثیر تغییرات نسبت ضخامت به پارامتر اثر اندازه برای نسبت‌های

فرکانس طبیعی بی بعد اول صفحه را بر حسب نسبت ضخامت به پارامتر اثر اندازه و مقادیر مختلف توان توزیع ماده، بدون در نظر گرفتن اثر حرارت $a/h = 20$ نشان می‌دهد، به خوبی دیده می‌شود.

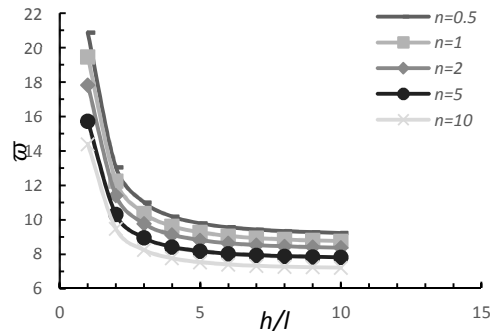
مطابق شکل ۲ تغییرات فرکانس در نسبت‌های ضخامت به پارامتر اثر اندازه پایین با شدت بیشتری رخ می‌دهد در صورتی که برای نسبت های بالاتر تغییرات کمتر است. همچنین با توجه به شکل ۲ می‌توان نتیجه گرفت که با افزایش توان توزیع ماده فرکانس کاهش می‌یابد که علت این امر افزایش توزیع فلز در بستر سرامیک در اثر افزایش توان توزیع ماده است که باعث می‌شود از سفتی ماده کاسته شده و در نتیجه فرکانس آن کاهش یابد. در شکل ۳ اثر حرارت بر فرکانس طبیعی بی بعد اول صفحه برای مقادیر مختلف نسبت ضخامت به پارامتر اثر اندازه و برای شرایط $h/l = 2$ و $n = 5$ و شرایط مرزی کاملاً مهار شده نشان داده شده‌است. مطابق شکل با افزایش دما فرکانس طبیعی به صورت خطی کاهش می‌یابد. دلیل این کاهش نرم شدن ساختار ماده با توجه به افزایش دما می‌باشد. روند کاهش فرکانس در اثر افزایش نسبت ضخامت به پارامتر اثر اندازه در شکل ۳ نیز قابل مشاهده است. شکل ۴ اثر گرما بر فرکانس طبیعی بی بعد اول صفحه را برای مقادیر مختلف توان توزیع ماده و شرایط $h/l = 2$ و $a/h = 20$ و شرایط مرزی کاملاً مهار شده نشان می‌دهد. مطابق شکل با افزایش دما و توان توزیع ماده مقدار فرکانس کاهش می‌یابد. اثر

جدول ۴- پنج فرکانس بی بعد اول صفحه برای مقادیر مختلف نسبت ضخامت به پارامتر اثر اندازه برای شرایط مرزی کاملاً مهار شده

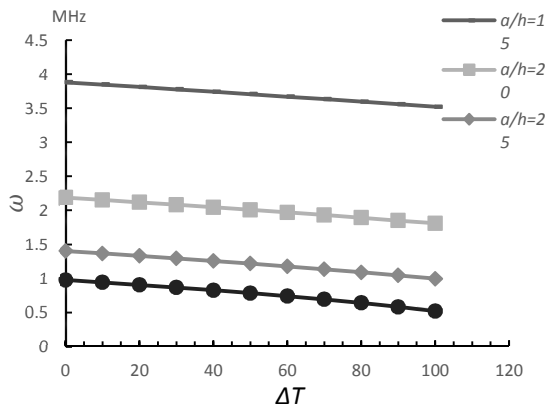
h/l						ω
h/l=6	h/l=5	h/l=4	h/l=3	h/l=2	h/l=1	
7,6033	8,7802	9,0967	9,7456	11,3980	17,8484	1
33,4934	34,1820	35,4145	37,9408	44,3732	69,4853	2
75,0394	76,5820	79,3433	85,0033	99,4149	155,6765	3
133,2160	135,9540	140,8861	150,9042	176,4886	276,3683	4
208,0177	212,2937	219,9483	235,6378	275,5890	431,5523	5



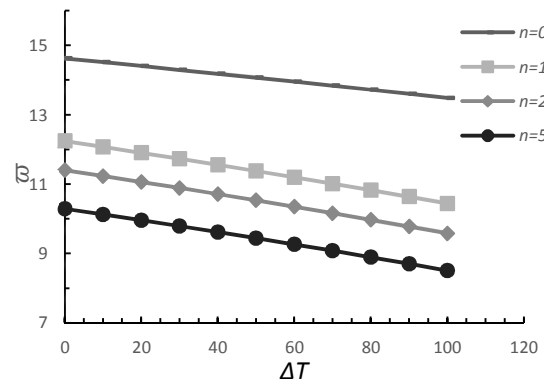
شکل ۳- تغییرات فرکانس بی بعد اول بر حسب تغییرات دما - شرط مرزی کاملاً مهار شده



شکل ۲- تغییرات فرکانس بی بعد اول صفحه بر حسب تغییرات نسبت ضخامت به پارامتر اثر اندازه - شرط مرزی کاملاً مهار شده



شکل ۵- تغییرات فرکانس اول (MHz) بر حسب تغییرات دما - شرط مرزی کاملاً مهار شده



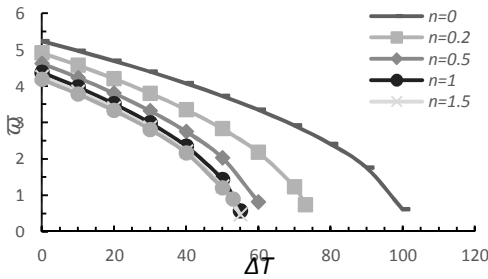
شکل ۴- تغییرات فرکانس بی بعد اول صفحه بر حسب تغییرات دما - شرط مرزی کاملاً مهار شده

توان توزیع ماده تأثیر قابل توجهی در شروع رفتار غیر خطی سیستم می‌گذارد. اثر گرما بر فرکانس طبیعی اول صفحه برای مقادیر مختلف نسبت شعاع به ضخامت و شرایط $h/l = 2$ و توان توزیع ماده $n = 0.5$ برای شرایط مرزی تکیه گاه ساده در شکل ۹ آمده است. با توجه به این شکل با افزایش نسبت شعاع به ضخامت و افزایش دما فرکانس کاهش می‌یابد. در این بخش فرکانس به صورت با بعد در نظر گرفته شده است زیرا تغییرات در فرکانس بی بعد در نسبت های پایین به خوبی قابل مشاهده نیست. همچنان که از این شکل مشهود است افزایش نسبت شعاع به ضخامت نیز منجر به کاهش فرکانس طبیعی سیستم می‌شود و در شرایط وجود توزیع دما، مانند شکل ۸ تأثیر قابل توجهی در شروع رفتار غیر خطی می‌گذارد. با مقایسه‌ی شکل های مربوط به تغییرات فرکانس بر حسب تغییرات توزیع دما برای شرایط مرزی کاملاً مهار شده و تکیه گاه ساده مشاهده می‌شود که تأثیر افزایش دما در شرایط مرزی تکیه گاه ساده بیشتر است و رفتار سیستم در این شرط مرزی در تغییرات دماهای پایین‌تری غیر خطی می‌شود. با مقایسه‌ی شکل‌های مربوط به تغییرات فرکانس بر حسب تغییرات توزیع دما برای شرایط مرزی کاملاً مهار شده و تکیه گاه ساده مشاهده می‌شود که تأثیر افزایش دما در شرایط مرزی تکیه گاه ساده بیشتر است و رفتار سیستم در این شرط مرزی در تغییرات دماهای پایین‌تری غیر خطی می‌شود.

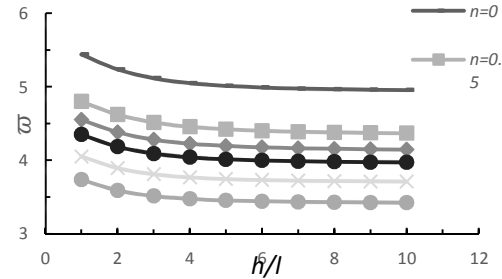
پایین در شرایط مرزی کاملاً مهار شده بیشتر است ولی با افزایش این نسبت در هر دو شرط مرزی تأثیر آن بسیار کم می‌شود. کاهش فرکانس طبیعی سیستم در اثر افزایش توان توزیع ماده برای شرط مرزی تکیه گاه ساده در شکل ۶ نیز قابل مشاهده است. در شکل ۷ اثر گرما بر فرکانس طبیعی بی بعد اول صفحه برای مقادیر مختلف نسبت ضخامت به پارامتر اثر اندازه و $a/h = 20$ و توان توزیع ماده $n = 0.5$ برای شرایط مرزی تکیه گاه ساده نشان داده شده است. مطابق شکل با افزایش دما فرکانس طبیعی کاهش می‌یابد. با توجه به این شکل افزایش توزیع دما تأثیر قابل توجهی بر روی فرکانس‌های طبیعی سیستم می‌گذارد به گونه‌ای که در توزیع دماهای پایین (زیر ۷۰ کلوین) رفتار سیستم غیر خطی می‌شود. با مقایسه‌ی این شکل با شکل ۳، مربوط به شرایط مرزی کاملاً مهار شده، تأثیر افزایش توزیع دما برای شرایط مرزی تکیه گاه ساده نسبت به شرایط مرزی کاملاً مهار شده بیشتر است. شکل ۸ اثر گرما بر فرکانس طبیعی بی بعد اول صفحه را برای مقادیر مختلف توان توزیع ماده و شرایط $h/l = 2$ و $a/h = 20$ برای شرایط مرزی تکیه گاه ساده نشان می‌دهد. مطابق شکل با افزایش دما و توان توزیع ماده مقدار فرکانس کاهش می‌یابد. اثر تغییرات توان توزیع ماده بر فرکانس‌های طبیعی سیستم در شرایط توزیع دماهای مختلف در این شکل نیز مشاهده می‌شود. با توجه به این شکل افزایش

جدول ۵- سه فرکانس بی بعد اول صفحه برای مقادیر مختلف نسبت ضخامت به پارامتر اثر اندازه برای شرایط مرزی تکیه گاه ساده

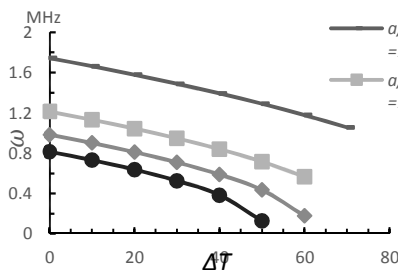
h/l					ω
۳	۲/۵	۲	۱/۵	۱	
۴,۴۲۳۱	۴,۴۵۶۹	۴,۵۱۶۲	۴,۶۲۴۷	۴,۸۰۰۵	۱
۳۱,۳۹۲۷	۳۳,۴۱۸۸	۳۶,۸۵۳۵	۴۳,۳۴۵۱	۵۸,۰۰۱۹	۲
۷۹,۱۹۲۱	۸۴,۵۲۶۹	۹۳,۶۴۵۲	۱۱۰,۷۴۷۴	۱۴۹,۱۶۱۸	۳



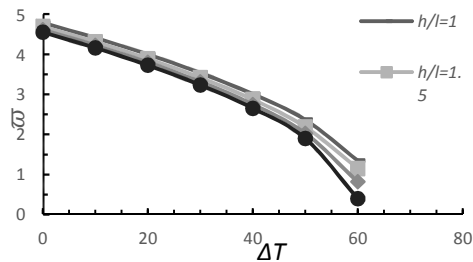
شکل ۸- تغییرات فرکانس بی بعد اول بر حسب تغییرات دما برای توان های مختلف توزیع ماده - شرط مرزی تکیه گاه ساده



شکل ۶- تغییرات فرکانس بی بعد اول بر حسب تغییرات نسبت ضخامت به پارامتر اثر اندازه - شرط مرزی تکیه گاه ساده



شکل ۹- تغییرات فرکانس اول (MHz) بر حسب تغییرات دما برای نسبت های مختلف شعاع به ضخامت - شرط مرزی تکیه گاه ساده



شکل ۷- تغییرات فرکانس بی بعد اول بر حسب تغییرات دما برای نسبت های متفاوت ضخامت به پارامتر اثر اندازه - شرط مرزی تکیه گاه ساده

اعمال پارامتر اثر اندازه منجر به کاهش فرکانس طبیعی سیستم می گردد به گونه ای که هرچه نسبت ضخامت به پارامتر اثر اندازه پایین باشد این تأثیر با شدت بیشتری رخ می دهد و هرچه این نسبت بیشتر می شود تغییرات فرکانس کمتر می شود.

۵- نتیجه گیری

در پژوهش حاضر اثر گرما بر روی فرکانس طبیعی یک نانو صفحه-ی دایره ای با ساختار مواد درجه بندی شده مورد بررسی قرار گرفته است. اثر اندازه که در ساختارهای نانو/ میکرو وارد می شود با استفاده از نظریه ی تنش کوپل اصلاح شده وارد شده و از نظریه ی کلاسیک صفحه و اصل هامیلتون به منظور استخراج معادلات حاکم بر حرکت صفحه استفاده شده است. معادلات استخراج شده به صورت تحلیلی با استفاده از توابع بسل حل گردیده و پاسخ آن ها برای شرط مرزی کاملاً مهار شده و تکیه گاه ساده ارائه شده است. با توجه به نتایج استخراج شده افزایش نسبت ضخامت به پارامتر اثر اندازه منجر به کاهش فرکانس طبیعی می شود. این کاهش در شرایط مرزی کاملاً مهار شده با شدت بیشتری شروع می شود ولی در هر دو شرط مرزی تأثیر آن کاهش می یابد و ناچیز می شود. افزایش توان توزیع ماده منجر به کاهش فرکانس در هر دو شرط مرزی می شود زیرا در ساختار در نظر گرفته شده افزایش توان توزیع فلز در بستر سرامیک را به همراه دارد که این امر منجر به کاهش فرکانس طبیعی سیستم می گردد. از این نتیجه و نتیجه حاصل از اثر نسبت ضخامت به پارامتر اثر اندازه می توان در تعیین ابعاد هندسی نانو / میکرو صفحه با توجه به اهداف مورد نظر استفاده کرد زیرا پارامتر اثر اندازه از ویژگی های ساختاری ماده می باشد. اعمال گرما در هر دو شرط مرزی منجر به کاهش فرکانس طبیعی سیستم می گردد ولی این کاهش در شرایط مرزی تکیه گاه ساده بیشتر است به گونه ای که در این شرط مرزی شروع رفتار غیر خطی در توزیع دماهای پایین تری رخ می دهد.

۶- مراجع

- [1] Koizumi M., FGM activities in Japan, *Compos. Part B Eng.*, Vol. 28, No. 1-2, pp. 1-4, 1997.
- [2] Ansari R., Gholami R., Shojaei M. F., Mohammadi V., and S. Sahmani, "Bending, buckling and free vibration analysis of size-dependent functionally graded circular/annular microplates based on the modified strain gradient elasticity theory, *Eur. J. Mech.*, Vol. 49, pp. 251-267, 2015.
- [3] Cheng Z.-Q. and Batra R. C., Three-dimensional thermoelastic deformations of a functionally graded elliptic plate, *Compos. Part B Eng.*, Vol. 31, No. 2, pp. 97-106, 2000.
- [4] Hosseini Hashemi S., Es'haghi M. and Karimi M., Closed-form vibration analysis of thick annular functionally graded plates with integrated piezoelectric layers, *Int. J. Mech. Sci.*, Vol. 52, No. 3, pp. 410-428, 2010.
- [5] Hosseini-Hashemi S., Taher H. R. D. and Akhavan H., Vibration analysis of radially FGM sectorial plates of variable thickness on elastic foundations, *Compos. Struct.*, Vol. 92, No. 7, pp. 1734-1743, 2010.
- [6] Kiani Y. and Eslami M. R., Thermal Postbuckling of Imperfect Circular Functionally Graded Material Plates: Examination of Voigt, Mori--Tanaka, and Self-Consistent Schemes, *J. Press. Vessel Technol.*, Vol. 137, No. 2, p. 21201, 2015.
- [7] Y. Kiani and M. R. Eslami, "An exact solution for thermal buckling of annular FGM plates on an elastic medium," *Compos. Part B Eng.*, vol. 45, no. 1, pp. 101-110, 2013.
- [8] Kim J. and Reddy J. N., Analytical solutions for bending, vibration, and buckling of FGM plates using a

- [27] Wang Y.-G., Lin W.-H. and Liu N., Large amplitude free vibration of size-dependent circular microplates based on the modified couple stress theory," *Int. J. Mech. Sci.*, vol. 71, pp. 51–57, 2013.
- [28] Wang Y.-G., Lin W.-H. and Zhou C.-L., Nonlinear bending of size-dependent circular microplates based on the modified couple stress theory," *Arch. Appl. Mech.*, vol. 84, no. 3, pp. 391–400, 2014.
- [29] Dinh Duc N., Hong Cong P. and Pham D., Nonlinear vibration of thick FGM plates on elastic foundation subjected to thermal and mechanical loads using the first-order shear deformation plate theory, *Cogent Eng.*, Vol. 2, No. 1, p. 1045222, 2015.
- [30] Van Dung D. and others, Nonlinear torsional buckling and postbuckling of eccentrically stiffened FGM cylindrical shells in thermal environment, *Compos. Part B Eng.*, Vol. 69, pp. 378–388, 2015.
- [31] Gupta A. K. and Kumar L., Thermal effect on vibration of non-homogenous visco-elastic rectangular plate of linearly varying thickness, *Meccanica*, Vol. 43, No. 1, pp. 47–54, 2008.
- [32] Ghadiri M., Mahinzare M., Shafiei N., and Ghorbani K., On size-dependent thermal buckling and free vibration of circular FG Microplates in thermal environments," *Microsyst. Technol.*, no. 2015, 2017.
- [33] V Joshi P., Jain N. K. and Ramtekkar G. D., Effect of thermal environment on free vibration of cracked rectangular plate: An analytical approach, *Thin-Walled Struct.*, Vol. 91, pp. 38–49, 2015.
- [34] Lanhe W., Thermal buckling of a simply supported moderately thick rectangular FGM plate, *Compos. Struct.*, vol. 64, no. 2, pp. 211–218, 2004.
- [35] Ma L. S. and Wang T. J., Nonlinear bending and post-buckling of a functionally graded circular plate under mechanical and thermal loadings, *Int. J. Solids Struct.*, Vol. 40, No. 13, pp. 3311–3330, 2003.
- [36] Najafizadeh M. M. and Heydari H. R., Thermal buckling of functionally graded circular plates based on higher order shear deformation plate theory, *Eur. J. Mech.*, Vol. 23, No. 6, pp. 1085–1100, 2004.
- [37] Najafizadeh M. M. and Heydari H. R., An exact solution for buckling of functionally graded circular plates based on higher order shear deformation plate theory under uniform radial compression," *Int. J. Mech. Sci.*, Vol. 50, No. 3, pp. 603–612, 2008.
- [38] Van Tung H., Thermal and thermomechanical postbuckling of FGM sandwich plates resting on elastic foundations with tangential edge constraints and temperature dependent properties, *Compos. Struct.*, vol. 131, pp. 1028–1039, 2015.
- [39] Najafi F., Shojaeefard M. H. and Googarchin H. S., Nonlinear dynamic response of FGM beams with Winkler–Pasternak foundation subject to noncentral low velocity impact in thermal field, *Compos. Struct.*, Vol. 167, pp. 132–143, 2017.
- [40] Najafi F., Shojaeefard M. H. and Googarchin H. S., Nonlinear low-velocity impact response of functionally graded plate with nonlinear three-parameter elastic foundation in thermal field, *Compos. Part B Eng.*, Vol. 107, pp. 123–140, 2016.
- [41] Najafi F., Shojaeefard M. H. and Googarchin H. S., Low-velocity impact response of functionally graded doubly curved panels with Winkler–Pasternak elastic foundation: An analytical approach, *Compos. Struct.*, Vol. 162, pp. 351–364, 2017.
- [42] W. Leissa A., *vibration of plates*. Washington D.C.: NASA, 1969.
- [43] Lam D. C. C., Yang F., Chong A. C. M., Wang J. and Tong P., Experiments and theory in strain gradient elasticity, *J. Mech. Phys. Solids*, Vol. 51, No. 8, pp. 1477–1508, 2003.
- [44] Yalcin H. S., Arikoglu A. and Ozkol I., Free vibration analysis of circular plates by differential transformation method, *Appl. Math. Comput.*, Vol. 212, No. 2, pp. 377–386, 2009.
- [9] Li S.-R., Wang X. and Batra R. C., Correspondence Relations Between Deflection, Buckling Load, and Frequencies of Thin Functionally Graded Material Plates and Those of Corresponding Homogeneous Plates, *J. Appl. Mech.*, Vol. 82, No. 11, p. 111006, 2015.
- [10] Reddy J. N. and Berry J., Nonlinear theories of axisymmetric bending of functionally graded circular plates with modified couple stress, *Compos. Struct.*, Vol. 94, No. 12, pp. 3664–3668, 2012.
- [11] Asgari M. and Akhlaghi M., Thermo-mechanical analysis of 2D-FGM thick hollow cylinder using graded finite elements," *Adv. Struct. Eng.*, Vol. 14, No. 6, pp. 1059–1073, 2011.
- [12] Asgari M., Material distribution optimization of 2D heterogeneous cylinder under thermo-mechanical loading, *Struct. Eng. Mech.*, Vol. 53, No. 4, pp. 703–723, 2015.
- [۱۳] محمد مهدی نجفی زاده و شهروز یوسف زاده، کمانش حرارتی ورق مستطیل شکل FGM بر اساس تئوری مرتبه‌ی اول تغییر شکل برشی صفحات، مهندسی مکانیک ایران، سال ششم، شماره اول، صفحات ۷۵–۱۰۰، سال ۱۳۸۳.
- [14] Toupin R. A., Elastic materials with couple-stresses, *Arch. Ration. Mech. Anal.*, Vol. 11, No. 1, pp. 385–414, 1962.
- [15] Koiter W. T., Couple-stresses in the theory of elasticity, I & II, 1969.
- [16] Mindlin R. D. and Tiersten H. F., Effects of couple-stresses in linear elasticity, *Arch. Ration. Mech. Anal.*, Vol. 11, No. 1, pp. 415–448, 1962.
- [17] Mohammad Abadi M. and Daneshmehr a. R., An investigation of modified couple stress theory in buckling analysis of micro composite laminated Euler-Bernoulli and Timoshenko beams, *Int. J. Eng. Sci.*, Vol. 75, pp. 40–53, 2014.
- [18] Yang F., Chong A. C. M., Lam D. C. C. and Tong P., Couple stress based strain gradient theory for elasticity, *Int. J. Solids Struct.*, Vol. 39, No. 10, pp. 2731–2743, 2002.
- [19] Ma H. M., Gao X. L. and Reddy J. N., A microstructure-dependent Timoshenko beam model based on a modified couple stress theory," *J. Mech. Phys. Solids*, vol. 56, no. 12, pp. 3379–3391, 2008.
- [20] Asghari M., Ahmadian M. T., Kahrobaiyan M. H. and Rahaeifard M., On the size-dependent behavior of functionally graded micro-beams, *Mater. Des.*, Vol. 31, No. 5, pp. 2324–2329, 2010.
- [21] Asghari M., Rahaeifard M., Kahrobaiyan M. H. and Ahmadian M. T., The modified couple stress functionally graded Timoshenko beam formulation," *Mater. Des.*, Vol. 32, No. 3, pp. 1435–1443, 2011.
- [22] Salamat-talab M., Nateghi A. and Torabi J., Static and dynamic analysis of third-order shear deformation FG micro beam based on modified couple stress theory, *Int. J. Mech. Sci.*, Vol. 57, No. 1, pp. 63–73, 2012.
- [23] Ansari R., Shojaei M. F., Mohammadi V., Gholami R., and Darabi M. A., Nonlinear vibrations of functionally graded Mindlin microplates based on the modified couple stress theory, *Compos. Struct.*, Vol. 114, pp. 124–134, 2014.
- [24] Jomehzadeh E., Noori H. R. and Saidi A. R., The size-dependent vibration analysis of micro-plates based on a modified couple stress theory, *Phys. E Low-dimensional Syst. Nanostructures*, Vol. 43, No. 4, pp. 877–883, 2011.
- [25] Ke L.-L., Yang J., Kitipornchai S. and Bradford M. A., Bending, buckling and vibration of size-dependent functionally graded annular microplates, *Compos. Struct.*, Vol. 94, No. 11, pp. 3250–3257, 2012.
- [26] Nateghi A. and Salamat-talab M., Thermal effect on size dependent behavior of functionally graded microbeams based on modified couple stress theory,"