

## تحلیل ارتعاشات آزاد پوسته جدار نازک چند لایه با هسته مدرج تابعی و لایه های حسگر و عملگر پیزوالکتریک

کارشناس ارشد، دانشکده مهندسی مکانیک، دانشگاه کاشان، کاشان، ایران  
استادیار، دانشکده مهندسی مکانیک، دانشگاه کاشان، کاشان، ایران

رضا کروبى

محسن ایرانی رهقی\*

### چکیده

در این مقاله یک روش تحلیلی به منظور تحلیل ارتعاشات آزاد یک پوسته استوانه ای ساندویچی از جنس مواد مدرج تابعی که توسط دو لایه پیزوالکتریک احاطه شده است، ارائه می شود. لایه های پیزوالکتریک که در درون و بیرون پوسته مرکزی قرار گرفته اند، به عنوان حسگر و محرک جهت کنترل ارتعاشات پوسته مورد استفاده قرار می گیرند. یکی از نوآوری های این مقاله در این است که لایه های پیزوالکتریک نیز به صورت مواد مدرج تابعی در نظر گرفته شده اند. برای مدل سازی سیستم از نظریه برشی مرتبه اول استفاده شده است. ابتدا با در نظر گرفتن جملات ون-کارمن، معادلات حرکت سیستم به صورت غیر خطی، با استفاده از اصل هامیلتون استخراج شده اند. معادلات حرکت سیستم به صورت معادلات با مشتقات جزئی است که با استفاده از روش ناویر به معادلات دیفرانسیل معمولی تبدیل شده اند. سپس با توجه به اینکه جابجایی های سیستم کوچک است و لذا می توان از جملات شامل توان های بالای جابجایی صرف نظر کرد، معادلات حرکت سیستم خطی سازی شده اند. در انتها شبیه سازی در نرم افزار MATLAB صورت گرفته است و نتایج مورد بررسی قرار گرفته اند. نتایج حاصل از این بررسی نشان می دهد که با افزایش ضریب ناهمگنی مربوط به پوسته مرکزی، فرکانس های طبیعی سیستم کاهش می یابد. همچنین افزایش ضخامت پوسته مرکزی، سبب افزایش فرکانس های طبیعی سیستم خواهد شد.  
واژه های کلیدی: ارتعاشات، پوسته استوانه ای، مواد مدرج تابعی، مواد پیزوالکتریک.

## Free Vibration Analysis of Sandwich Cylindrical Shells with Functionally Graded Core and Sensor and Actuator Piezoelectric Layers

R. Karroubi  
M. Irani Rahaghi

Department of Solid Mechanics, Faculty of Mechanical Engineering, University of Kashan, Kashan, Iran  
Department of Solid Mechanics, Faculty of Mechanical Engineering, University of Kashan, Kashan, Iran

### Abstract

An analytical method for free vibration analysis of a cylindrical FG shell integrated by two thin piezoelectric layers is presented in this paper. The piezoelectric layers on inner and outer surfaces of the core could be considered as sensor and actuator used in controlling the characteristic vibration of the system. One of the innovations of this paper is that the piezoelectric layers considered as functionally graded materials. The First order shear deformation theory is used in order to model the electromechanical system. Nonlinear Equations of motion are derived by considering Von Karman nonlinear strain-displacement relations using Hamilton's principle. The equations of motion are discretized by Navier method. Numerical simulation after linearization is performed to investigate the effect of different parameters of structure on the characteristic vibration of the system. Results of this study show that natural frequency of system would decrease by increasing FGM index of the core. Also increasing the thickness of core cause increasing the natural frequency of system.

**Keywords:** Vibration, Cylindrical shell, FGM, functionally graded piezoelectric material (FGP).

گذشته مقایسه کرد. لام و کیان [۲] یک روش تحلیلی برای بررسی ارتعاشات یک پوسته ضخیم چند لایه کامپوزیتی متقارن ارائه کردند. آن ها برای مدل سازی از نظریه برشی مرتبه اول استفاده کردند. همچنین تاثیر تغییر پارامترهای  $H/R$  و  $L/R$  بر روی فرکانس های طبیعی بررسی شده است. وانگ و ردگپ [۳] روشی برای بدست آوردن معادله ارتعاشی یک پوسته ارتوتروپیک ارائه کردند. معادلات با استفاده از روش مربعات دیفرانسیل<sup>۲</sup> حل شده و فرکانس های طبیعی سیستم و شکل مودها محاسبه شده اند. در انتها نتایج با نمونه های مشابه مقایسه شده است. کورپا و همکاران [۴] ارتعاشات ورق های جدار نازک چند لایه کامپوزیتی را بر اساس نظریه برشی مرتبه اول<sup>۳</sup> بررسی کردند. روش پیشنهاد شده بر اساس نظریه توابع  $R$ <sup>۴</sup> و روش های حساب تغییرات می

### ۱- مقدمه

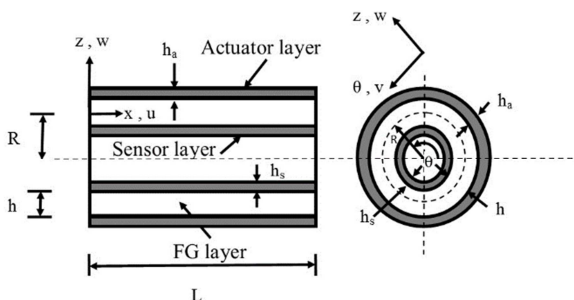
ورق ها و پوسته ها کاربردهای زیادی در سازه های مختلف از جمله در سازه های هوافضایی دارند که تحت بارهای دینامیکی زیادی قرار می گیرند. به منظور بهبود خواص سازه ها می توان از مواد هوشمند استفاده کرد. مواد مدرج تابعی مواد غیر همگنی هستند که خواص به صورت پیوسته و تدریجی در آن ها تغییر می کند. ارتعاشات پوسته ها توسط محققان بسیاری مورد مطالعه قرار گرفته است که از جمله می توان به موارد زیر اشاره کرد:

شو [۱] روش مربعات دیفرانسیل عمومی<sup>۱</sup> را برای بررسی ارتعاشات آزاد پوسته های مخروطی ایزوتروپ به کار برد. وی فرکانس های طبیعی سیستم را با چهار شرط مرزی مختلف بدست آورد و نتایج را با کارهای

<sup>2</sup> DQM  
<sup>3</sup> FSDT  
<sup>4</sup> RFM

<sup>1</sup> GDQ

شعاع صفحه میانی به ترتیب با  $L$  و  $R$  نمایش داده می‌شوند. ضخامت پوسته مرکزی با  $h$  ضخامت لایه‌های حسگر و محرک به ترتیب با  $h_a$  و  $h_s$  نشان داده می‌شوند.



شکل ۱- طرحواره سیستم و دستگاه مختصات

بر اساس نظریه برشی مرتبه اول، جابجایی نقطه  $(x, \theta, Z)$  به صورت رابطه (۱) تعریف می‌شود:

$$\begin{aligned} u_1(x, \theta, z, t) &= u(x, \theta, t) + z\varphi_x(x, \theta, t) \\ v_1(x, \theta, z, t) &= v(x, \theta, t) + z\varphi_\theta(x, \theta, t) \end{aligned} \quad (1)$$

$$w_1(x, \theta, z, t) = w(x, \theta, t)$$

که در آن  $(u, v, w)$  جابجایی صفحه میانی در راستای  $(x, \theta, Z)$  و  $\varphi_\theta$  چرخش بردار نرمال صفحه میانی حول محورهای  $x$  و  $\theta$  است. کرنش‌های محوری و برشی با در نظر گرفتن جملات ون-کارمن مطابق روابط (۲) تعریف می‌شوند:

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_\theta \\ \gamma_{x\theta} \\ \gamma_{\theta z} \\ \gamma_{xz} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \varepsilon_x^{(0)} \\ \varepsilon_\theta^{(0)} \\ \gamma_{x\theta}^{(0)} \\ \gamma_{\theta z}^{(0)} \\ \gamma_{xz}^{(0)} \end{Bmatrix} + z \begin{Bmatrix} K_x \\ K_\theta \\ K_{x\theta} \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

$$\begin{aligned} \varepsilon_x^{(0)} &= \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 & \gamma_{xz}^{(0)} &= \varphi_x + \frac{\partial w}{\partial x} \\ \varepsilon_\theta^{(0)} &= \frac{1}{R} \left( \frac{\partial v}{\partial \theta} + w \right) + \frac{1}{2} \left( \frac{1}{R} \frac{\partial w}{\partial \theta} \right)^2 & \gamma_{\theta z}^{(0)} &= \varphi_\theta + \frac{1}{R} \frac{\partial w}{\partial \theta} \end{aligned}$$

$$(2)$$

$$\begin{aligned} K_x &= \frac{\partial \varphi_x}{\partial x} & \gamma_{x\theta}^{(0)} &= \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{1}{R} \frac{\partial u}{\partial \theta} + \frac{1}{R} \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial w}{\partial \theta} \\ K_{x\theta} &= \frac{\partial \varphi_\theta}{\partial x} + \frac{1}{R} \frac{\partial \varphi_x}{\partial \theta} & K_\theta &= \frac{1}{R} \frac{\partial \varphi_\theta}{\partial x} \end{aligned}$$

پوسته‌ها از مواد مدرج تابعی می‌باشند که به صورت نمایی در راستای ضخامت در نظر گرفته شده‌اند و خواص لایه‌ها به صورت روابط (۳) می‌باشند [۸ و ۹]:

$$\begin{aligned} E_f(z) &= (E_c - E_m) \left( \frac{1}{2} + \frac{z}{h} \right)^{g_f} + E_m \\ \rho_f(z) &= (\rho_c - \rho_m) \left( \frac{1}{2} + \frac{z}{h} \right)^{g_f} + \rho_m \\ w_i &= w_b^i \left( \frac{z}{h/2} \right)^{g_i} \quad i = a, s \end{aligned} \quad (3)$$

که در آن  $f, a$  و  $s$  به ترتیب معرف پوسته مرکزی، لایه محرک و لایه حسگر است. اندیس  $c$  و  $m$  به ترتیب برای سرامیک و فلز به کار برده می‌شود که دو عنصر تشکیل دهنده مواد مدرج تابعی‌اند. در روابط (۳) دو رابطه اول مربوط به لایه مرکزی و رابطه سوم مرتبط با لایه‌های پیزوالکتریک ساخته شده از مواد مدرج تابعی است.  $w_b^i$  معرف مدول یانگ و چگالی لایه‌های پیزوالکتریک می‌باشد. در رابطه (۳) توان‌های  $g_f$  و  $g_i$  سبب ناهمگنی ماده می‌شود. لذا به این پارامترهای توانی، ضریب ناهمگنی مواد مدرج تابعی گویند.

باشد. در انتها تاثیر پارامترهای هندسی، لایه‌های مختلف و شرایط مرزی بر روی پاسخ دینامیکی سیستم مورد بررسی قرار گرفته است. شنگ و وانگ [۵] کنترل ارتعاشات غیر خطی پوسته استوانه‌ای مواد مدرج تابعی به همراه دو لایه نازک پیزوالکتریک بر اساس نظریه ون-کارمن و با استفاده از اصل هامیلتون بررسی کردند. آن‌ها از کنترل پسخورد مشتقی در کار خود بهره بردند. معادلات دیفرانسیل با مشتقات جزئی کوپله با استفاده از بسط سری و روش گالرکین گسسته شده و سپس با استفاده از روش رانج-کوتا معادلات حل شده است. کومار و همکاران [۶] ارتعاشات آزاد پوسته ساندویچی کامپوزیتی را با استفاده از مدل المان محدود دو بعدی و بر اساس نظریه زیگزاگ<sup>۱</sup> بررسی کردند. نتایج عددی نشان می‌دهد که مدل المان محدود دو بعدی به کار رفته از دقت بالاتری نسبت به مدل های المان محدود بر اساس نظریه‌های مرتبه اول و بالاتر برخوردار است. عصایی و حسینی [۷] ارتعاشات اجباری پوسته‌های استوانه‌ای جدار نازک کامپوزیتی را با استفاده از یکی از روش های المان محدود<sup>۲</sup> بررسی کردند. آن‌ها از نظریه خمشی کلاسیک استفاده کردند و تحت نیروها، شرایط مرزی و اثرات دمپینگ مختلف، فرکانس‌های طبیعی و پاسخ زمانی سیستم را بدست آوردند. به منظور صحت سنجی، نتایج با روش معمول المان محدود با استفاده از نرم افزار Ansys مقایسه شده‌اند.

در این مقاله یک روش تحلیلی به منظور بررسی ارتعاشات آزاد یک پوسته استوانه‌ای از جنس مواد مدرج تابعی که توسط دو لایه پیزوالکتریک ساخته شده از مواد مدرج تابعی احاطه شده ارائه می‌شود. برای مدل‌سازی سیستم از نظریه برشی مرتبه اول استفاده شده است. معادلات حرکت سیستم با در نظر گرفتن جملات ون-کارمن به صورت غیر خطی بر اساس اصل هامیلتون استخراج شده‌اند. سپس خطی سازی معادلات صورت گرفته و فرکانس‌های طبیعی سیستم محاسبه شده‌اند. نقش لایه های پیزوالکتریک که در درون و بیرون پوسته مرکزی قرار گرفته‌اند، به عنوان حسگر و محرک جهت کنترل ارتعاشات پوسته می‌باشد. معادلات حرکت سیستم به صورت معادلات با مشتقات جزئی است که با استفاده از روش ناور به معادلات دیفرانسیل معمولی تبدیل شده‌اند. در انتها شبیه‌سازی در نرم افزار MATLAB صورت گرفته و نتایج مورد بررسی قرار گرفته‌اند. نتایج حاصل از این بررسی نشان می‌دهد که با افزایش ضریب غیر همگنی ماده مدرج تابعی مربوط به پوسته مرکزی، فرکانس‌های طبیعی سیستم کاهش می‌یابد. همچنین افزایش ضخامت پوسته مرکزی سبب افزایش فرکانس‌های طبیعی سیستم خواهد شد.

## ۲- مدل‌سازی سیستم

سیستم مورد مطالعه مطابق شکل ۱ در نظر گرفته شده است. پوسته مرکزی یک پوسته مدرج تابعی است و لایه‌های درونی و بیرونی پیزوالکتریک ساخته شده از مواد مدرج تابعی می‌باشند که به ترتیب به عنوان حسگر<sup>۳</sup> و محرک<sup>۴</sup> نامگذاری شده‌اند. دستگاه مختصات  $(x, \theta, Z)$  مطابق شکل در صفحه میانی پوسته مرکزی قرار گرفته است. طول و

<sup>1</sup> HOZT

<sup>2</sup> Spline FSM

<sup>3</sup> Sensor

<sup>4</sup> Actuator

که در آن  $H$ ،  $K$  و  $V_N$  به ترتیب انرژی جنبشی کل سیستم شامل پوسته مرکزی و پوسته‌های پیزوالکتریک محرک و حسگر که همگی از جنس مواد مدرج تابعی‌اند، انرژی پتانسیل کل سیستم و کار نیروهای خارجی می‌باشد.

با توجه به اینکه موضوع مورد مطالعه در این پژوهش ارتعاشات آزاد و تحلیل فرکانسی سیستم می‌باشد، لذا عبارت کار خارجی در نظر گرفته نمی‌شود.

اکنون معادلات حرکت سیستم به صورت غیر خطی بدست آمده است. جملات غیر خطی شامل توان‌های دوم و سوم از جابجایی سیستم هستند و با توجه به اینکه مقادیر جابجایی سیستم کوچک است، توان‌های دوم و سوم آن‌ها بسیار کوچک و قابل صرفه نظر کردن است. با صرف نظر کردن از جملات غیر خطی، معادلات حرکت سیستم به صورت رابطه (۱۱) می‌باشد:

$$M \ddot{X} + K'X = 0 \quad (11)$$

$$M' = \begin{bmatrix} I_1 & 0 & 0 & I_2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & I_1 & 0 & 0 & I_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & I_1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ I_2 & 0 & 0 & I_3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & I_2 & 0 & 0 & I_3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad X' = \begin{bmatrix} u \\ v \\ w \\ \varphi_x \\ \psi_a \\ \psi_s \end{bmatrix}$$

$$K' = \begin{bmatrix} K_{11} & K_{12} & K_{13} & K_{14} & K_{15} & K_{16} & K_{17} \\ K_{21} & K_{22} & K_{23} & K_{24} & K_{25} & K_{26} & K_{27} \\ K_{31} & K_{32} & K_{33} & K_{34} & K_{35} & K_{36} & K_{37} \\ K_{41} & K_{42} & K_{43} & K_{44} & K_{45} & K_{46} & K_{47} \\ K_{51} & K_{52} & K_{53} & K_{54} & K_{55} & K_{56} & K_{57} \\ K_{61} & K_{62} & K_{63} & K_{64} & K_{65} & K_{66} & 0 \\ K_{71} & K_{72} & K_{73} & K_{74} & K_{75} & 0 & K_{77} \end{bmatrix}$$

ضرایب  $K_{ij}$  و  $I_i$  در پیوست ارائه شده است. همان گونه که مشاهده می‌شود معادلات حرکت سیستم که به صورت رابطه (۱۱) بدست آمد، یک دستگاه معادلات دیفرانسیل با مشتقات جزئی کوپله است. دو انتهای سیستم به صورت تکیه گاه‌های ساده در نظر گرفته شده است و لذا می‌توان پاسخ معادلات حرکت سیستم را با استفاده از حل ناویبر به صورت رابطه (۱۲) بسط داد [۵]:

با توجه به تنش صفحه‌ای در ورق‌های جدار نازک، تنش عمودی در راستای ضخامت برابر با صفر است. با در نظر گرفتن این نکته که در لایه‌های پیزوالکتریک میدان الکتریکی و جابجایی الکتریکی نیز اثر گذار است، روابط تنش - کرنش به صورت روابط (۴) می‌باشد [۵]:

$$\sigma_f = c_f(z)\varepsilon$$

$$\sigma_i = c_i\varepsilon - e_i E_i \quad D_i = e_i^T \varepsilon + \xi_i E_i \quad i = a, s$$

$$E_i = [E_x^i \ E_\theta^i \ E_z^i]^T \quad D_i = [D_x^i \ D_\theta^i \ D_z^i]^T \quad i = a, s$$

$$\sigma_i = [\sigma_x^i \ \sigma_\theta^i \ \sigma_{xz}^i \ \sigma_{\theta z}^i \ \sigma_{xz}^i]^T \quad i = f, a, s$$

$$c_i = \begin{bmatrix} Q_{11i} & Q_{12i} & 0 & 0 & 0 \\ Q_{12i} & Q_{22i} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & Q_{66i} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & Q_{44i} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & Q_{55i} \end{bmatrix} \quad i = f, a, s \quad (4)$$

$$e_i = \begin{bmatrix} 0 & 0 & e_{31i} \\ 0 & 0 & e_{32i} \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & e_{24i} & 0 \\ e_{15i} & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \xi_i = \begin{bmatrix} \xi_{11i} & 0 & 0 \\ 0 & \xi_{22i} & 0 \\ 0 & 0 & \xi_{33i} \end{bmatrix} \quad i = a, s$$

بردار میدان الکتریکی به صورت منفی گرادیان پتانسیل الکتریکی تعریف می‌شود:

$$\begin{Bmatrix} E_a \\ E_s \end{Bmatrix} = - \begin{Bmatrix} \nabla \varphi_a \\ \nabla \varphi_s \end{Bmatrix} \quad (5)$$

پتانسیل‌های الکتریکی به وجود آمده در قبال تغییر شکل الاستیک در لایه‌های پیزوالکتریک مطابق آنچه که فرناندس [۱۰] بیان کرده است، به صورت روابط (۶) - (۹) می‌باشد:

$$\varphi_a = 2 \frac{z_a}{h_a} U(x, \theta, t) + \left[ z_a^2 - \left(\frac{h_a}{2}\right)^2 \right] \psi_a(x, \theta, t) \quad (6)$$

که در آن  $U(x, \theta, t)$  پتانسیل الکتریکی اعمالی،  $\psi_a$  میدان الکتریکی صفحه‌ای ایجاد شده در قبال تغییر شکل لایه محرک و  $Z_a$  ضخامت نسبت به صفحه میانی لایه محرک می‌باشد:

$$z_a = z - \frac{h+h_a}{2} \quad (7)$$

هنگامی که پتانسیل اعمالی خارجی برابر با صفر باشد ( $U=0$ )، لایه پیزوالکتریک را می‌توان به عنوان حسگر در نظر گرفت و لذا پتانسیل الکتریکی به وجود آمده در قبال تغییر شکل الاستیک در لایه حسگر به صورت رابطه (۸) تعریف می‌شود:

$$\varphi_s = \left[ z_s^2 - \left(\frac{h_s}{2}\right)^2 \right] \psi_s(x, \theta, t) \quad (8)$$

که در آن  $\psi_s$  میدان الکتریکی صفحه‌ای ایجاد شده در قبال تغییر شکل لایه حسگر و  $Z_s$  ضخامت نسبت به صفحه میانی لایه حسگر می‌باشد:

$$z_s = z + \frac{h+h_s}{2} \quad (9)$$

به منظور استخراج معادلات حرکت سیستم از اصل هامیلتون<sup>۱</sup> استفاده می‌شود [۱۱]:

$$\int_0^t (\delta K - \delta H - \delta V_N) dt = 0$$

$$K_i = \frac{1}{2} \int \rho_i \left[ \left(\frac{\partial u_i}{\partial t}\right)^2 + \left(\frac{\partial v_i}{\partial t}\right)^2 + \left(\frac{\partial w_i}{\partial t}\right)^2 \right] dV \quad i = f, a, s \quad (10)$$

$$H_f = \frac{1}{2} \int \sigma_{if} \varepsilon_{if} dV \quad H_a = \frac{1}{2} \int (\sigma_{ia} \varepsilon_{ia} - D_i E_i) dV$$

$$H_s = \frac{1}{2} \int (\sigma_{is} \varepsilon_{is} - D_i E_i) dV$$

<sup>1</sup> Hamilton's principle

۳-۱- صحت سنجی نتایج

برای بررسی صحت روش به کار رفته در این پژوهش، ابتدا معادلات به دست آمده برای یک پوسته استوانه ای تک لایه ایزوتروپ که در دو انتها تحت شرط مرزی ساده است، ساده سازی می شود. بدین جهت ضخامت لایه های پیزوالکتریک را برابر با صفر در نظر گرفته و همچنین دانسیته و مدول یانگ نیز عددی ثابت در نظر گرفته می شود. سپس نتایج حاصل از این پژوهش با نتایج موجود در مقالات مقایسه می شوند.

پارامتر فرکانسی به صورت  $f = \omega R \sqrt{(1-\nu^2)\rho/E}$  تعریف شده و همچنین مقادیر ثابت مطابق زیر لحاظ می شوند:

$$L/R = 20, h/R = 0.002, \nu = 0.3, m = 1, n = 1$$

بر مبنای مقادیر فوق، پارامتر فرکانسی با نتایج ارائه شده در مراجع در جدول ۱ مقایسه شده است:

جدول ۱- نتایج حاصل برای پارامتر فرکانسی  $f$  و نتایج منتشر شده

پژوهش حاضر	لم [۱۳]	مارکس [۱۲] (حل سه بعدی)	مارکس [۱۲] (نظریه فلاگ)
۰/۰۱۶۱۰۶۵	۰/۰۱۶۱۰۱۱	۰/۰۱۶۱۰۱۱	۰/۰۱۶۳۵۱۸

۳-۲- بررسی فرکانس های پوسته چند لایه مدرج تابعی

پس از صحت سنجی روش به کار رفته در این پژوهش، اکنون فرکانس های طبیعی پوسته استوانه ای ساندویچی تشکیل شده از هسته مدرج تابعی (FGM) با لایه های پیزوالکتریک مدرج تابعی (FGPM) مورد بررسی قرار می گیرد.

پارامترهای هندسی سیستم در جدول ۲ و خواص مواد در جدول ۳ آورده شده است. هر دو لایه پیزوالکتریک (حسگر و محرک) به صورت هم جنس از ماده PZT-4 در نظر گرفته شده است. به منظور کاهش پارامترهای مؤثر ضریب ناهمگنی لایه های پیزوالکتریک یکسان در نظر گرفته شده است. [۱۴-۱۶].

جدول ۲- پارامترهای هندسی به کار رفته در شبیه سازی

مقدار	واحد	کمیت
۱	m	شعاع (R)
۲	m	طول (L)
۰/۱۰	m	ضخامت پوسته مرکزی (h)
۰/۱۰۰	m	ضخامت لایه محرک ( $h_d$ )
۰/۱۰۰	m	ضخامت لایه حسگر ( $h_s$ )

جدول ۳- خواص مکانیکی مواد تشکیل دهنده سیستم

مقدار	واحد	کمیت
۴۲۰	Gpa	مدول یانگ سرامیک ( $E_c$ )
۷۰	Gpa	مدول یانگ فلز ( $E_m$ )
۸۹۰۰	Kg/m <sup>3</sup>	چگالی سرامیک ( $\rho_c$ )
۲۱۰۰	Kg/m <sup>3</sup>	چگالی فلز ( $\rho_m$ )
۰/۳	---	نسبت پواسون ( $\nu$ )

$$\begin{aligned}
 u &= \sum_{m=0}^H \sum_{n=0}^I u_{mn}(t) \cos(\lambda_m x) \cos(n\theta) \\
 v &= \sum_{m=0}^H \sum_{n=0}^I v_{mn}(t) \sin(\lambda_m x) \sin(n\theta) \\
 w &= \sum_{m=0}^H \sum_{n=0}^I w_{mn}(t) \sin(\lambda_m x) \cos(n\theta) \\
 \varphi_x &= \sum_{m=0}^H \sum_{n=0}^I \varphi_{xmn}(t) \cos(\lambda_m x) \cos(n\theta) \\
 \varphi_\theta &= \sum_{m=0}^H \sum_{n=0}^I \varphi_{\theta mn}(t) \sin(\lambda_m x) \sin(n\theta) \\
 \psi_a &= \sum_{m=0}^H \sum_{n=0}^I \psi_{amn}(t) \sin(\lambda_m x) \cos(n\theta) \\
 \psi_s &= \sum_{m=0}^H \sum_{n=0}^I \psi_{smn}(t) \sin(\lambda_m x) \cos(n\theta)
 \end{aligned} \tag{۱۲}$$

که در آن  $\lambda_m = \frac{m\pi}{L}$  است و  $m$  عدد نیم موج محوری و  $n$  عدد موج شعاعی می باشد. با جایگذاری روابط (۱۲) در روابط (۱۱) معادلات دیفرانسیل با مشتقات جزئی به معادلات دیفرانسیل معمولی به صورت روابط (۱۳) تبدیل می شود:

$$\begin{aligned}
 M\ddot{X} + KX &= 0 \\
 M &= M'
 \end{aligned}$$

$$K = \begin{bmatrix} T_{11} & T_{12} & T_{13} & T_{14} & T_{15} & T_{16} & T_{17} \\ T_{21} & T_{22} & T_{23} & T_{24} & T_{25} & T_{26} & T_{27} \\ T_{31} & T_{32} & T_{33} & T_{34} & T_{35} & T_{36} & T_{37} \\ T_{41} & T_{42} & T_{43} & T_{44} & T_{45} & T_{46} & T_{47} \\ T_{51} & T_{52} & T_{53} & T_{54} & T_{55} & T_{56} & T_{57} \\ T_{61} & T_{62} & T_{63} & T_{64} & T_{65} & T_{66} & 0 \\ T_{71} & T_{72} & T_{73} & T_{74} & T_{75} & 0 & T_{77} \end{bmatrix} X = \begin{bmatrix} u_{mn} \\ v_{mn} \\ w_{mn} \\ \varphi_{xmn} \\ \varphi_{\theta mn} \\ \psi_{amn} \\ \psi_{smn} \end{bmatrix} \tag{۱۳}$$

ضرایب  $T_{ij}$  در روابط (۱۳) با جایگذاری روابط (۱۲) در ضرایب  $K_{ij}$  که در پیوست ارائه شده است، بدست می آید که به دلیل حجم بالای روابط از آوردن آنها صرف نظر شده است. دو معادله آخر در رابطه (۱۳) به صورت معادلات جبری می باشند که با حل آنها می توان  $\psi_{smn}$  و  $\psi_{amn}$  را به صورت معادلات (۱۴) به دست آورد:

$$\begin{aligned}
 \psi_{amn} &= \frac{-1}{T_{66}} [T_{61}u_{mn} + T_{62}v_{mn} + T_{63}w_{mn} + T_{64}\varphi_{xmn} + T_{65}\varphi_{\theta mn}] \\
 \psi_{smn} &= \frac{-1}{T_{77}} [T_{71}u_{mn} + T_{72}v_{mn} + T_{73}w_{mn} + T_{74}\varphi_{xmn} + T_{75}\varphi_{\theta mn}]
 \end{aligned} \tag{۱۴}$$

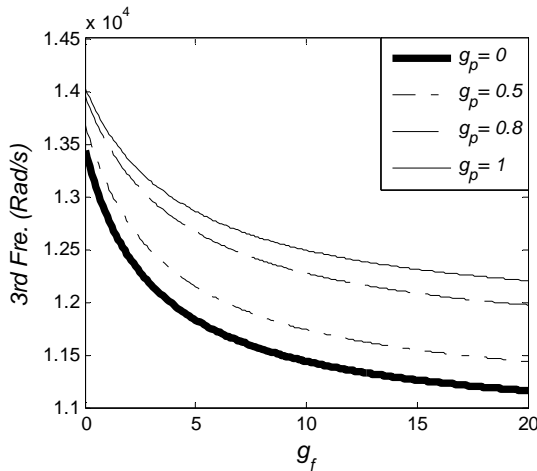
اکنون معادلات حرکت سیستم به صورت یک سیستم ارتعاشی استاندارد تبدیل شده است. برای بدست آوردن فرکانس های طبیعی سیستم از ماتریس دینامیکی ( $D$ ) مطابق رابطه (۱۵) استفاده می شود:

$$D = M^{-1}K \quad \omega_i = \sqrt{\text{Eigen value}(D)} \tag{۱۵}$$

فرکانس های طبیعی سیستم برابر با جذر مقادیر ویژه ماتریس دینامیکی سیستم خواهند بود.

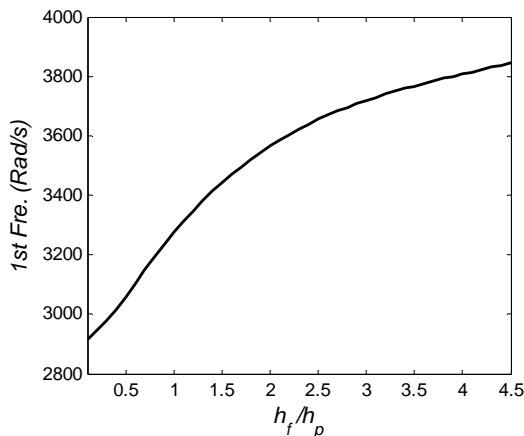
۳- شبیه سازی عددی

به منظور محاسبه فرکانس های طبیعی سیستم، محاسبات در نرم افزار MATLAB انجام گرفته است. ابتدا به صحت سنجی پژوهش حاضر پرداخته می شود:



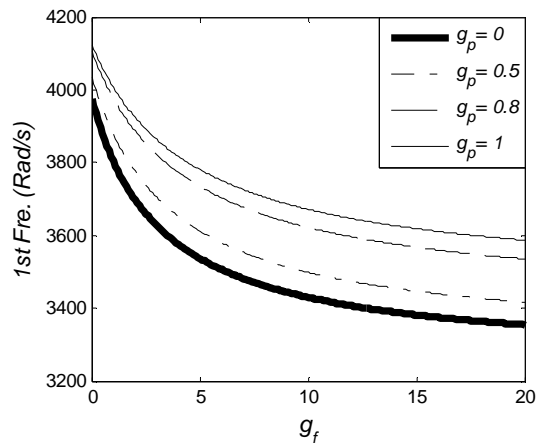
شکل ۴- تاثیر ضریب ناهمگنی مواد مدرج تابعی بر سومین فرکانس طبیعی سیستم

یکی از پارامترهای هندسی که می‌تواند بر فرکانس طبیعی سیستم اثرگذار باشد، ضخامت پوسته‌ها است. در شکل‌های ۵-۷ به بررسی تاثیر نسبت ضخامت پوسته مرکزی به پوسته‌های پیزوالکتریک ( $h_f/h_p$ ) پرداخته شده است. به منظور بررسی اهمیت ضخامت لایه‌های مختلف نسبت به یکدیگر، مجموع ضخامت کل سازه ثابت در نظر گرفته شده و با تغییر نسبت ضخامت‌ها، فرکانس طبیعی مورد مطالعه قرار گرفته است. همچنین ضخامت دو لایه پیزوالکتریک برابر در نظر گرفته شده است و با  $h_p$  نشان داده شده است. آنچنان که از شکل‌های ۵-۷ برمی‌آید، با افزایش ضخامت لایه مرکزی نسبت به لایه‌های پیزوالکتریک هر سه فرکانس طبیعی اول سیستم افزایش می‌یابد. دلیل این افزایش در فرکانس طبیعی سیستم، افزایش میزان سفتی سازه است.

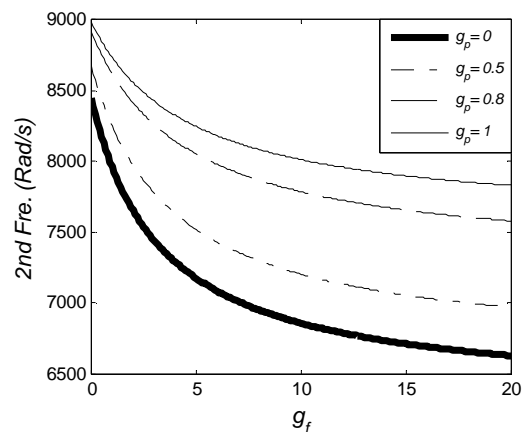


شکل ۵- تاثیر نسبت ضخامت پوسته مرکزی به ضخامت لایه‌های پیزوالکتریک ( $h_f/h_p$ ) بر اولین فرکانس طبیعی سیستم

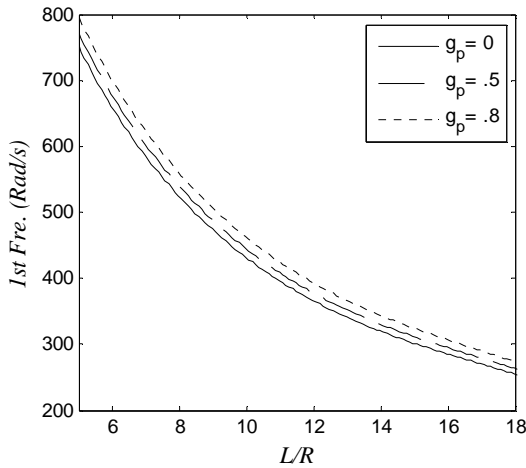
پس از معرفی خواص مواد و پارامترهای هندسی، اکنون به بررسی تاثیر پارامترهای مختلف بر روی فرکانس طبیعی سیستم پرداخته می‌شود. شکل‌های ۲-۴ تاثیر ضریب ناهمگنی پوسته‌های مدرج تابعی را بر روی سه فرکانس طبیعی اول سیستم نشان می‌دهد. ضریب ناهمگنی پوسته مرکزی با  $g_f$  و ضریب ناهمگنی پوسته‌های پیزوالکتریک با  $g_p$  نشان داده شده است. آنچنان که مشاهده می‌شود با افزایش ضریب ناهمگنی پوسته مرکزی فرکانس طبیعی سیستم کاهش می‌یابد که این امر به سبب افزایش میزان جرم سیستم در مقایسه با فنریت آن می‌باشد. همچنین آنچنان که از نمودارها برمی‌آید، افزایش ضریب ناهمگنی پوسته‌های پیزوالکتریک موجب رشد فرکانس طبیعی سیستم به جهت افزایش سفتی خمشی سیستم خواهد شد.



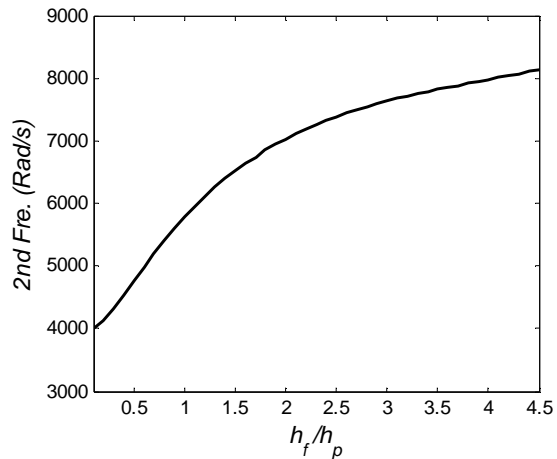
شکل ۲- تاثیر ضریب ناهمگنی مواد مدرج تابعی بر اولین فرکانس طبیعی سیستم



شکل ۳- تاثیر ضریب ناهمگنی مواد مدرج تابعی بر دومین فرکانس طبیعی سیستم



شکل ۸- تاثیر نسبت  $(L/R)$  بر فرکانس طبیعی سیستم



شکل ۶- تاثیر نسبت ضخامت پوسته مرکزی به ضخامت لایه‌های پیزوالکتریک  $(h_f/h_p)$  بر دومین فرکانس طبیعی سیستم

#### ۴- نتایج

در این مقاله، پژوهشی در زمینه ارتعاشات آزاد یک پوسته ساندویچی سه لایه با پوسته مرکزی از جنس مواد مدرج تابعی و دو لایه پیزوالکتریک ساخته شده از مواد مدرج تابعی، که در دو سمت درونی و برونی پوسته مرکزی قرار گرفته‌اند، انجام پذیرفته است. به منظور توصیف میدان جابجایی، نظریه برشی مرتبه اول مورد استفاده قرار گرفته است. با در نظر گرفتن جملات ون-کارمن معادلات به صورت غیر خطی با استفاده از اصل هامیلتون و محاسبه انرژی جنبشی و انرژی پتانسیل، به دست آمده است. سپس خطی سازی معادلات صورت گرفته و با استفاده از روش ناویر معادلات به صورت فرم استاندارد یک سیستم ارتعاشی ارائه شده است. نهایتاً فرکانس‌های طبیعی سیستم بدست آمده است و تاثیر پارامترهای مختلف بر فرکانس طبیعی سیستم مورد مطالعه قرار گرفته است. نتایج مهم بدست آمده از این پژوهش عبارتند از:

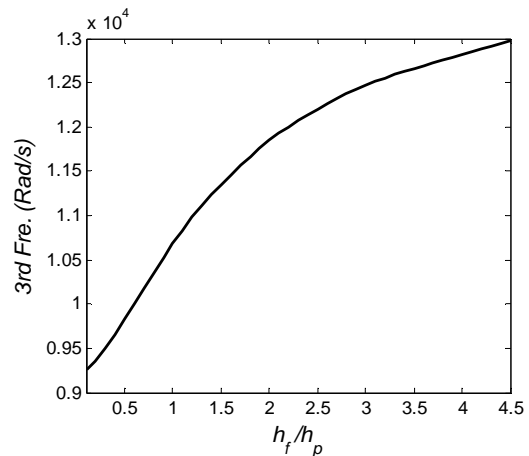
۱. بررسی صورت گرفته بر روی ضریب ناهمگنی لایه‌های مدرج تابعی، نشان می‌دهد که افزایش ضریب ناهمگنی پوسته مرکزی سبب کاهش فرکانس طبیعی سیستم به دلیل افزایش جرم نسبت به سفتی و برعکس، افزایش ضریب ناهمگنی مربوط به لایه‌های پیزوالکتریک، موجب افزایش فرکانس طبیعی سیستم خواهد شد.
۲. پارامترهای هندسی مسئله تاثیر قابل توجهی بر رفتار ارتعاشی سیستم دارند. با افزایش نسبت ضخامت لایه مرکزی به ضخامت لایه‌های پیزوالکتریک  $(h_f/h_p)$ ، فرکانس طبیعی سیستم رشد کرده و با افزایش نسبت طول سیلندر به شعاع آن  $(L/R)$ ، فرکانس طبیعی کاهش می‌یابد.

#### ۵- نمادها

$D$	جابجایی الکتریکی
$e$	ضریب تاثیر پیزوالکتریک ( $\text{Cm}^{-2}$ )
$E$	میدان الکتریکی
$g_f$	ضریب ناهمگنی پوسته مرکزی
$g_p$	ضریب ناهمگنی پوسته‌های پیزوالکتریک

#### علایم یونانی

از دیگر پارامترهای هندسی که بر فرکانس طبیعی سیستم اثرگذار است، نسبت طول سیلندر به شعاع آن می‌باشد. شکل ۸ نحوه تغییرات فرکانس طبیعی سیستم با تغییر نسبت طول سیلندر به شعاع آن را برای چهار ضریب ناهمگنی مرتبط با لایه‌های پیزوالکتریک نشان می‌دهد. همان گونه که در شکل ۸ مشاهده می‌شود، افزایش نسبت  $(L/R)$  سبب کاهش فرکانس طبیعی می‌شود. این بدان جهت است که افزایش نسبت طول سیلندر به شعاع آن، سبب افزایش میزان انعطافپذیری سیستم خواهد شد.



شکل ۷- تاثیر نسبت ضخامت پوسته مرکزی به ضخامت لایه‌های پیزوالکتریک  $(h_f/h_p)$  بر سومین فرکانس طبیعی سیستم

$$K_{45} = -\frac{C_{12} + C_{66}}{R} \frac{\partial^2}{\partial x \partial \theta}$$

$$K_{46} = \left[ e_{15a} \int_{h/2}^{h/2+h_a} P(z_a) dz - 2e_{31a} \int_{h/2}^{h/2+h_a} z_a z dz \right] \frac{\partial}{\partial x}$$

$$K_{47} = \left[ e_{15s} \int_{h/2-h_s}^{-h/2} P(z_s) dz - 2e_{31s} \int_{h/2-h_s}^{-h/2} z_s z dz \right] \frac{\partial}{\partial x}$$

$$K_{51} = -\frac{B_{12} + B_{66}}{R} \frac{\partial^2}{\partial x \partial \theta} \quad K_{52} = -B_{66} \frac{\partial^2}{\partial x^2} - \frac{1}{R^2} B_{22} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2}$$

$$K_{53} = \frac{A_{44}}{R} \frac{\partial}{\partial \theta} - \frac{B_{22}}{R^2} \frac{\partial}{\partial \theta} \quad K_{54} = -\frac{C_{12} + C_{66}}{R} \frac{\partial^2}{\partial x \partial \theta}$$

$$K_{55} = -C_{66} \frac{\partial^2}{\partial x^2} - \frac{1}{R^2} C_{22} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} + A_{44}$$

$$K_{56} = \left[ e_{24a} \int_{h/2}^{h/2+h_a} \frac{P(z_a)}{R+z} dz - \frac{2e_{32a}}{R} \int_{h/2}^{h/2+h_a} z_a z dz \right] \frac{\partial}{\partial \theta}$$

$$K_{57} = \left[ e_{24s} \int_{h/2-h_s}^{-h/2} \frac{P(z_s)}{R+z} dz - \frac{2e_{32s}}{R} \int_{h/2-h_s}^{-h/2} z_s z dz \right] \frac{\partial}{\partial \theta}$$

$$K_{61} = -2e_{31a} \int_{h/2}^{h/2+h_a} z_a dz \frac{\partial}{\partial x} \quad K_{62} = \frac{-2e_{32a}}{R} \int_{h/2}^{h/2+h_a} z_a dz \frac{\partial}{\partial \theta}$$

$$K_{63} = \frac{e_{24a}}{R} \int_{h/2}^{h/2+h_a} \frac{P(z_a)}{R+z} dz \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} + e_{15a} \int_{h/2}^{h/2+h_a} P(z_a) dz \frac{\partial^2}{\partial x^2} - \frac{2e_{32a}}{R} \int_{h/2}^{h/2+h_a} z_a dz$$

$$K_{64} = \left[ e_{15a} \int_{h/2}^{h/2+h_a} P(z_a) dz - 2e_{31a} \int_{h/2}^{h/2+h_a} z_a z dz \right] \frac{\partial}{\partial x}$$

$$K_{65} = \left[ e_{24a} \int_{h/2}^{h/2+h_a} \frac{P(z_a)}{R+z} dz - \frac{2e_{32a}}{R} \int_{h/2}^{h/2+h_a} z_a z dz \right] \frac{\partial}{\partial \theta}$$

$$K_{66} = -\xi_{11a} \int_{h/2}^{h/2+h_a} P(z_a)^2 dz \frac{\partial^2}{\partial x^2} - \xi_{22a} \int_{h/2}^{h/2+h_a} \frac{P(z_a)^2}{(R+z)^2} dz \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} + 4\xi_{33a} \int_{h/2}^{h/2+h_a} z_a^2 dz$$

$$K_{71} = -2e_{31s} \int_{h/2-h_s}^{-h/2} z_s dz \frac{\partial}{\partial x} \quad K_{72} = \frac{-2e_{32s}}{R} \int_{h/2-h_s}^{-h/2} z_s dz \frac{\partial}{\partial \theta}$$

$$K_{73} = \frac{e_{24s}}{R} \int_{h/2-h_s}^{-h/2} \frac{P(z_s)}{R+z} dz \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} + e_{15s} \int_{h/2-h_s}^{-h/2} P(z_s) dz \frac{\partial^2}{\partial x^2} - \frac{2e_{32s}}{R} \int_{h/2-h_s}^{-h/2} z_s dz$$

$$K_{74} = \left[ e_{15s} \int_{h/2-h_s}^{-h/2} P(z_s) dz - 2e_{31s} \int_{h/2-h_s}^{-h/2} z_s z dz \right] \frac{\partial}{\partial x}$$

$$K_{75} = \left[ e_{24s} \int_{h/2-h_s}^{-h/2} \frac{P(z_s)}{R+z} dz - \frac{2e_{32s}}{R} \int_{h/2-h_s}^{-h/2} z_s z dz \right] \frac{\partial}{\partial \theta}$$

$$K_{77} = -\xi_{11s} \int_{h/2-h_s}^{-h/2} P(z_s)^2 dz \frac{\partial^2}{\partial x^2} - \xi_{22s} \int_{h/2-h_s}^{-h/2} \frac{P(z_s)^2}{(R+z)^2} dz \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} + 4\xi_{33s} \int_{h/2-h_s}^{-h/2} z_s^2 dz$$

۷- مراجع

- [1] Shu C., An efficient approach for free vibration analysis of conical shells, Int. J. Mech. ScL, Vol. 38, N. 8-9, pp. 935-949, 1995.
- [2] Lam K.Y., Qian W., Free vibration of symmetric angle-ply hick laminated composite cylindrical shells, Composites: Part B, Vol. 31, N. 4, pp. 345-354, 2000.
- [3] Wang X.H., Redekop D., Natural frequencies and mode shapes of an orthotropic thin shell of revolution, Thin-Walled Structures, Vol. 43, N. 5, pp. 735-750, 2005.
- [4] Kurpa L., Shmatko T., Timchenko G., Free vibration analysis of laminated shallow shells with complex shape using the R-

ثابت دی الکتریک ( $Fm^{-1}$ )  $\xi$

چگالی ( $kgm^{-3}$ )  $\rho$

نسبت پواسون  $\nu$

زیر نویس ها

پوسته مرکزی  $f$

لایه پیزوالکتریک بیرونی ( محرک )  $a$

لایه پیزوالکتریک درونی ( حسگر )  $s$

۶- پیوست

$$(I_1^f, I_2^f, I_3^f) = \int_{-h/2}^{h/2} \rho_f(z) (1, z, z^2) dz$$

$$(I_1^a, I_2^a, I_3^a) = \int_{h/2}^{h/2+h_a} \rho_a(z) (1, z, z^2) dz$$

$$(I_1^s, I_2^s, I_3^s) = \int_{-h/2}^{-h/2-h_s} \rho_s(z) (1, z, z^2) dz$$

$$(I_1, I_2, I_3) = \left( \sum_{i=1}^3 I_1^i, \sum_{i=1}^3 I_2^i, \sum_{i=1}^3 I_3^i \right) \quad i = f, a, s$$

$$(A_{ij}^f, B_{ij}^f, C_{ij}^f) = \int_{-h/2}^{h/2} Q_{ijf}(z) (1, z, z^2) dz$$

$$(A_{ij}^a, B_{ij}^a, C_{ij}^a) = \int_{h/2}^{h/2+h_a} Q_{ija}(z) (1, z, z^2) dz$$

$$(A_{ij}^s, B_{ij}^s, C_{ij}^s) = \int_{-h/2}^{-h/2-h_s} Q_{ijs}(z) (1, z, z^2) dz$$

$$(A_{ij}, B_{ij}, C_{ij}) = \left( \sum_{i=1}^3 A_{ij}^i, \sum_{i=1}^3 B_{ij}^i, \sum_{i=1}^3 C_{ij}^i \right) \quad i = f, a, s$$

$$P(z_a) = z_a^2 - \left(\frac{h_a}{2}\right)^2 \quad P(z_s) = z_s^2 - \left(\frac{h_s}{2}\right)^2$$

$$K_{11} = -A_{11} \frac{\partial^2}{\partial x^2} - \frac{1}{R^2} A_{66} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} \quad K_{12} = -\frac{A_{12} + A_{66}}{R} \frac{\partial^2}{\partial x \partial \theta}$$

$$K_{13} = -\frac{A_{12}}{R} \frac{\partial}{\partial x} \quad K_{14} = -B_{11} \frac{\partial^2}{\partial x^2} - \frac{1}{R^2} B_{66} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2}$$

$$K_{15} = -\frac{B_{12} + B_{66}}{R} \frac{\partial^2}{\partial x \partial \theta} \quad K_{16} = -2e_{31a} \int_{h/2}^{h/2+h_a} z_a dz \frac{\partial}{\partial x}$$

$$K_{17} = -2e_{31s} \int_{h/2-h_s}^{-h/2} z_s dz \frac{\partial}{\partial x} \quad K_{21} = -\frac{A_{12} + A_{66}}{R} \frac{\partial^2}{\partial x \partial \theta}$$

$$K_{22} = -A_{66} \frac{\partial^2}{\partial x^2} - \frac{1}{R^2} A_{22} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} \quad K_{23} = -\frac{A_{22}}{R^2} \frac{\partial}{\partial \theta}$$

$$K_{24} = -\frac{B_{12} + B_{66}}{R} \frac{\partial^2}{\partial x \partial \theta} \quad K_{25} = -B_{66} \frac{\partial^2}{\partial x^2} - \frac{1}{R^2} B_{22} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2}$$

$$K_{26} = \frac{-2e_{32a}}{R} \int_{h/2}^{h/2+h_a} z_a dz \frac{\partial}{\partial \theta} \quad K_{27} = \frac{-2e_{32s}}{R} \int_{h/2-h_s}^{-h/2} z_s dz \frac{\partial}{\partial \theta}$$

$$K_{31} = -\frac{A_{21}}{R} \frac{\partial}{\partial x} \quad K_{32} = \frac{A_{22}}{R^2} \frac{\partial}{\partial \theta}$$

$$K_{33} = -A_{55} \frac{\partial^2}{\partial x^2} - \frac{1}{R^2} A_{44} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} + \frac{A_{22}}{R^2} \quad K_{34} = -A_{55} \frac{\partial}{\partial x} + \frac{B_{21}}{R} \frac{\partial}{\partial x}$$

$$K_{35} = -\frac{A_{44}}{R} \frac{\partial}{\partial \theta} + \frac{B_{22}}{R^2} \frac{\partial}{\partial \theta}$$

$$K_{36} = \frac{-e_{24a}}{R} \int_{h/2}^{h/2+h_a} \frac{P(z_a)}{R+z} dz \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} - e_{15a} \int_{h/2}^{h/2+h_a} P(z_a) dz \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{2e_{32a}}{R} \int_{h/2}^{h/2+h_a} z_a dz$$

$$K_{37} = \frac{-e_{24s}}{R} \int_{h/2-h_s}^{-h/2} \frac{P(z_s)}{R+z} dz \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} - e_{15s} \int_{h/2-h_s}^{-h/2} P(z_s) dz \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{2e_{32s}}{R} \int_{h/2-h_s}^{-h/2} z_s dz$$

$$K_{41} = -B_{11} \frac{\partial^2}{\partial x^2} - \frac{1}{R^2} B_{66} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} \quad K_{42} = -\frac{B_{12} + B_{66}}{R} \frac{\partial^2}{\partial x \partial \theta}$$

$$K_{43} = A_{55} \frac{\partial}{\partial x} + \frac{B_{12}}{R} \frac{\partial}{\partial x} \quad K_{44} = -C_{11} \frac{\partial^2}{\partial x^2} - \frac{1}{R^2} C_{66} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} + A_{44}$$



- functions method, Composite Structures, Vol. 93, N. 1, pp. 225–233, 2010.
- [5] Sheng G.G., Wang X., Nonlinear vibration control of functionally graded laminated cylindrical shells, Composites: Part B, Vol. 52, N. 2, pp.1–10, 2013.
- [6] Kumar A., Chakrabarti A., Bhargava P., Vibration of laminated composites and sandwich shells based on higher order zigzag theory, Engineering Structures, Vol. 56, N. 2, pp. 880–888, 2013.
- [7] Assaee H., Hasani H., Forced vibration analysis of composite cylindrical shells using spline finite strip method Forced vibration analysis of composite cylindrical shells using spline finite strip method, Thin-Walled Structures, Vol. 97, N. 3, pp. 207–214, 2015.
- [8] Ebrahimi F., Rastgo A., An analytical study on the free vibration of smart circular thin FGM plate based on classical plate theory, Thin-Walled Structures, Vol. 46, N. 12, pp. 1402–1408, 2008.
- [9] Ghorbanpour A., Bakhtiari R., Mohammadmehr M., Mozdianfard M.R., Electromagnetomechanical responses of a radially polarized rotating functionally graded piezoelectric shaft, Turkish J. Eng. Env. Sci. Vol. 36, N. 12, pp. 33 – 44, 2010.
- [10] Fernandes A., Pouget J., Structural response of composite plates equipped with piezoelectric actuators, Computers and Structures, Vol. 84, N. 22-23, pp. 1459–70, 2006.
- [11] Ghorbanpour Arani A., Shajari A.R., Amir S., Loghman A., Electro-thermo-mechanical nonlinear nonlocal vibration and instability of embedded micro-tube reinforced by BNNT, conveying fluid, Physica E, Vol. 45, N. 4, pp. 109–121, 2012.
- [12] Markus S., *The mechanics of vibrations of cylindrical shells.* In Studies in Applied Mechanics, 17, Amsterdam, Elsevier, 1988
- [13] Hua Li, Lam K.Y., Ng T.Y., *Rotating Shell Dynamics,* Studies in Applied Mechanics, 50, United Kingdom, Elsevier, 2005
- [14] Yan X., Jinxi L., Decay rate of saint-venant end effects for plane deformations of piezoelectric piezomagnetic sandwich structures, Acta Mechanica Solida Sinica, Vol. 23, N. 5, pp. 407–419, 2010.
- [15] Rahimi G.H., Arefi M., M.J Khoshgoftar, Application and analysis of functionally graded piezoelectrical rotating cylinder as mechanical sensor subjected to pressure and thermal loads, Applied Mathematics and Mechanics (English Edition), Vol. 32, N. 8, pp. 997-1008, 2011.
- [16] [16] Khoshgoftar M.J., Arani A.G., Arefi M., Thermoelastic analysis of a thick walled cylinder made of functionally graded piezoelectric material, Smart Materials and Structures, Vol. 18, N. 3, pp. 115-122, 2009.