Archive of SID

مجله مهندسی مکانیک، شماره پیاپی ۸۳، جلد ۴۸، شماره ۲، تابستان ۱۳۹۷، صفحه ۳۴۹-۳۵۸

اصلاح مدل رتبه‌کاستهٔ تجزیه متعامد بهینه جهت شبیه‌سازی جریان ناپایای لایه‌ای تراکم‌ناپذیر با جایگزینی عبارت فشار بر حسب مودهای میدان سرعت

محمدکاظم مؤیدی استادیار، آزمایشگاه پژوهشی دینامیک سیالات محاسباتی، بخش مهندسی مکانیک، دانشگاه قم، قم، ایران

چکیده

در این پژوهش از روش تجزیه متعامد بهینه به منظور توسعهٔ یک الگوی رتبه‌کاستهٔ جهت شبیه‌سازی میدان جریان ناپایای تراکم‌ناپذیر استفاده شده‌است. معادلات حاکم بر دینامیک جریان پس از تصویرسازی در راستای مودهای پرانرژی‌تر، یک سامانهٔ دینامیکی رتبه‌کاسته ایجاد می‌کنند. معمولا این الگو با بهره‌گیری از نمایه‌های میدان سرعت ایجاد شده لذا مدل‌سازی عبارت فشار در معادلهٔ اندازه حرکت از اهمیت خاصی در صحت و پایداری الگوی حاصل برخوردار می‌باشد. دو روند برای این منظور وجود دارد که یکی مبتنی بر حذف عبارت فشار با وجود شرایط مرزی همگن و دیگری جایگزین نمودن عبارت فشار به نحوی شایسته در معادلهٔ اندازه حرکت می‌باشد. روشی که دراین پژوهش به‌کار رفته، استفاده از نمایه‌های فشار به‌صورت مستقیم و بهره‌گیری از ضرایب مودال میدان سرعت برای میدان فشار می‌باشد. نتایج حاصل از الگو رتبه‌کاستهٔ پیشنهادی با شبیه‌سازی‌های حاصل از حل عددی مستقیم مقایسه شده‌اند. از آنجا که تنها دلیل ناپایداری الگوهای رتبه‌کاستهٔ عدم جایگزینی عبارت فشار نیست، لذا پاسخ الگو دینامیکی رتبه‌کاسته حاصل به‌طور کامل بر داده‌های حل عددی مستقیم منطبق نشده ولی در مقایسه با الگوهای رتبه‌کاستهٔ کلاسیک از دقت بالاتری برخوردار می‌باشد.

واژه‌های کلیدی: جریان تراکم‌ناپذیر، جریان ناپایا، روش تجزیه متعامد بهینه، الگوی رتبه‌کاسته، مودهای فشار، تصویرسازی گالرکین.

Calibration of Reduced Order POD Model of Unsteady Incompressible Laminar Flow Using Pressure Representation as a Function of Velocity Field Modes

M. K. Moayyedi CFD Research Laboratory, Department of Mechanical Engineering, University of Qom, Qom, Iran

Abstract

In this study, the proper orthogonal decomposition has been used to develop a reduced order model of the unsteady incompressible flows. After projection of governing equations along high level energy modes, a low-dimensional dynamical system is constructed. Usually, this model is developed using velocity field modes therefore pressure term representation in momentum equation will have an important role for stability and accuracy of outcome reduced order model. Two approaches are available for pressure term deputation, the first is based on elimination of pressure term due to homogenous condition on control volume boundaries and the second used appropriately method for pressure term representation in momentum equation. The method, which is used in this research, is based on using pressure snapshots and velocity field modal coefficients for calculation pressure field modes. The obtained results from proposed model have been compared with related DNS results. Because the instability behavior of reduced order model is not only related to pressure term modeling therefore response of low-dimensional dynamical system is not exactly verified with DNS data. But the outcome results from proposed model have higher accuracy than classic reduced order models.

Keywords: Incompressible Flow, Unsteady Flow, Proper Orthogonal Decomposition, Reduced Order Model, Pressure Modes, Galerkin Projection.

۱- مقدمه

روش تجزیه متعامد بهینه کاربردهای گسترده‌ای شامل توسعه مدل‌های رتبه‌کاسته، پردازش تصاویر و بازسازی داده‌ها و ساختارها دارد. این روش با محاسبهٔ یک مجموعه از بردارهای پایه که می‌توانند ساختارهای پر انرژی سیستم را تسخیر کنند، آغاز شده و در صورت انتقال معادلات حاکم به فضای برداری تشکیل شده از این بردارهای پایه می‌توان دینامیک حاکم بر میدان را با تعداد ابعاد کمتری و با دقتی مناسب بازسازی نمود.

در یک تعریف کلی، روش تجزیه متعامد بهینه یک دستگاه مختصات nبعدی متعامد ایجاد می‌کند که نسبت به همه دستگاه‌های مختصات متعامد دیگری که برای توصیف یک دسته‌نمایه از میدانی مفروض می‌توانند مورد استفاده قرار گیرند، تقریب بهتری را ارائه می‌کند. بنابراین می‌توان سامانه‌های دینامیکی با ابعاد بالا را با الگویی رتبه‌کاسته توصیف کرد که مدل حاصل با تعداد محدودی از جملات معلوم و از دیدگاه بازیافت انرژی موجود در مودها بهینه باشد. تاریخچه‌ای بر روش تجزیه متعامد بهینه و تشریح روش‌های انجام آن را می‌توان به‌طور کامل در مقالهٔ اسمیت پیدا کرد [۱]. این روش ابتدا توسط کارهونن - لوو و سپس کوسامبی به عنوان روشی جهت تحلیل داده‌های آماری که دارای نوعی الگو[1] بودند مطرح شد[۲]. سپس لاملی پیشنهاد کرد که از روش تجزیه متعامد بهینه می‌توان برای استخراج ساختارهای مقیاس بزرگ[2] در جریان‌های آشفته استفاده کرد[۳]. لیکن در اواخر دهه هشتاد میلادی به‌تدریج کاربردهای روش تجزیه متعامد بهینه و به‌ویژه با مطرح شدن روش نمایه توسط

[1] Pattern
[2] Large scale

* نویسنده مکاتبه کننده، آدرس پست الکترونیکی: mk.moayyedi@qom.ac.ir

تاریخ دریافت: ۹۵/۰۵/۲۶
تاریخ پذیرش: ۹۶/۰۲/۰۱

www.SID.ir

Archive of SID

سیُرویش افزونی یافت[۴]، این روش به‌عنوان ابزاری کارآمد برای ایجاد مدل‌های رتبه‌کاسته از سامانه‌های دینامیکی پیچیده‌ای که داده‌هایی از تجربه و یا حل‌های عددی مستقیم دارند، مورد توجه قرار گرفت.

استفاده از این روش به منظور مدل‌سازی رتبه‌کاستهٔ جریان‌های ناپایا، با تکیه بر قوانین کامل بقاء، در دههٔ اخیر مورد توجه بسیاری قرار گرفته، لیکن مشکلاتی نیز در توسعهٔ این مدل‌ها وجود داشته‌است. از جمله مسائلی که بسیاری از کارهای پژوهشی با آن مواجه بوده‌اند، ناتوانی سامانهٔ دینامیکی در پیش‌بینی دقیق تغییرات زمانی میدان جریان می‌باشد. این موضوع می‌تواند ناشی از دلایلی از جمله نبودن رابطهٔ صریح بین میدان فشار و میدان سرعت (برای جریان‌های تراکم ناپذیر) پس از بازسازی مدل رتبه‌کاسته بر پایهٔ مودهای میدان سرعت، انتخاب نامناسب نمایه‌ها، دقّت پایین حل عددی و ناتوانی مدل رتبه‌کاسته در کاهش سطح انرژی مودهای با اعداد موج بالا که به نوعی معرف ساختارهای مقیاس کوچک[1] میدان هستند، باشد. از اینرو روش‌هایی جهت افزایش دقّت مدل‌های رتبه‌کاستهٔ مبتنی بر روش تجزیه متعامد بهینه پیشنهاد شده‌است. از جمله می‌توان به روش فاویر اشاره کرد که با استفاده از حل یک مسالهٔ بهینه‌سازی و ترکیب آن با معادلات حاکم به جوابهایی مناسبی دست یافت. همچنین با استفاده از حل همزمان مسئلهٔ بهینه‌سازی و یک مسئلهٔ الحاقی[2] پاسخ زمانی سامانه‌های دینامیکی حاکم بر مسائلی که فیزیک پیچیده‌تری دارند را نیز دقیق‌تر بدست آورد[۵]. کاپلت از چند روش مختلف که همگی بر اساس حل یک مسئلهٔ بهینه‌سازی بودند به منظور بهبود پاسخ سامانهٔ دینامیکی حاکم برای مسائل دو و سه‌بعدی موردنظر استفاده کرد[۶]. نوآک از یک جمله اصلاح به منظور افزایش دقّت سامانهٔ دینامیکی و به عنوان جایگزینی برای جمله فشار حذف‌شده در معادلهٔ سامانهٔ دینامیکی استفاده کرد[۷]. گالتی نیز از روش‌های بهینه‌سازی برای بهبود دقت مدل‌های رتبه‌کاسته به منظور استفاده در مسائل کنترل جریان بهره برد[۸]. مؤیدی و همکارانش با استفاده از یک حل یک مسئله بهینه‌سازی و محاسبه ضرایب مربوط به عبارت خطی به بهبود نتایج مدل رتبه‌کاسته در پیش‌بینی رفتار جریان تراکم‌ناپذیر پرداختند. نتایج حاصل از پژوهش آنها حاکی از پایداری مناسب روش در پیش-بینی تغییرات زمانی ضرایب مودال سیستم دینامیکی میدان جریان می‌باشد[۹]. ثابت‌قدم و همکارانش یک مدل بهینه‌سازی را پیشنهاد دادند که با محاسبهٔ ضرایب عبارت خطی سیستم دینامیکی و با حذف جملات کم اثر، سرعت حل مسئله بهینه‌سازی را افزایش می‌داد. مدل توسعه‌یافته برای شبیه‌سازی جریان تراکم‌ناپذیر استفاده شده و نتایج حاصل از آن دقت بالایی در پیش‌بینی دینامیک میدان جریان داشت[۱۰]. استانکیویژ و همکارانش مدل رتبه‌کاستهٔ بهینه‌سازی‌شده را با استفاده از روش الگوریتم ژنتیک توسعه دادند. این مدل برای شبیه-سازی جریان تراکم‌ناپذیر بکار گرفته شد. برای افزایش دقت مدل رتبه-کاسته عبارات خطی و غیرخطی را به مدل رتبه‌کاسته افزوده و با استفاده از روش الگوریتم ژنتیک آنها را محاسبه کردند[۱۱]. کوردیر و همکارانش در سال ۲۰۰۹ پژوهشی را در خصوص بهبود دقت مدل‌های رتبه‌کاسته انجام داده و در آن با استفاده از روش منظم‌سازی تیخونوف[3] عملکرد این مدل‌ها را در پیش‌بینی رفتار جریان‌های تراکم‌ناپذیر افزایش دادند. نتایج پژوهش آنها نشان داد که با بهره‌گیری از این روش مشکل ناپایداری مدل‌های رتبه‌کاسته، که بیشتر مربوط به اثرات مرتبط با جمله خطی در مدل می‌شود، حل شده و پایداری بالاتری در رفتار الگوی رتبه‌کاسته دیده می‌شود[۱۲]. در این پژوهش، از روش POD برای مدل‌سازی رتبه‌کاستهٔ جریان ناپایای تراکم‌ناپذیر استفاده شده‌است. دو روش برای اصلاح مدل رتبه‌کاسته در نظر گرفته‌شده که در روش اول از اصلاح اثر وجود گرادیان فشار روی مرزهای میدان و به منظور جبران اثر جمله فشار استفاده‌شده و در روش دوم از ترکیب روش تجزیه متعامد بهینه همراه با حل یک مسئلهٔ بهینه‌سازی با استفاده از تکنیکی سریع و تقریبی مستقیم به منظور محاسبهٔ ضرایب جمله اصلاح بهره برده شده‌است.

۲- روش تجزیه متعامد بهینه - نمایه

لاملی تعریفی از ساختارهای متجانس[4] را به‌صورت توابعی از متغیرهای مکانی ارائه کرد که بیشینه انرژی را دارا هستند بدین ترتیب این ساختارهای متجانس عبارت زیر را بیشینه می‌کنند:

$$\frac{\left\langle \left(\mathbf{u}(x,t),\phi(x)\right)^2 \right\rangle}{\left\langle \phi(x),\phi(x) \right\rangle}, \qquad (۱)$$

در این عبارت، (f,g) نمایشگر ضرب داخلی در فضای $\mathbf{L^2}$ به‌صورت زیر می‌باشد:

$$(f,g)=\int_{\Omega} f\,g\,d\Omega$$

برای محاسبهٔ توابع ویژهٔ POD از یک رابطهٔ جداسازی زمانی دیگر استفاده می‌شود که ارتباطی مستقیم و نزدیک با روش نمایهٔ سیرُویش دارد و به عنوان یک روش جهت محاسبهٔ مودهای POD استفاده می‌شود. برای استفاده از روش POD- نمایه نیاز به یک دسته nتایی از داده‌های میدان اغتشاشی به‌صورت $\mathbf{u_n}(x)$ بوده که این نمایه‌ها می‌توانند از نتایج شبیه‌سازی در زمان‌های متفاوت یا به ازای تغییر پارامترهای دیگر، به شکل زیر بدست آیند:

$$\mathbf{u}_n(x) = \mathbf{u}_n(x,\delta^n). \qquad (۲)$$

مودهای POD توابع ویژهٔ ماتریس زیر می‌باشند:

$$K(x,x') = \left\langle \mathbf{u}(x,t),\mathbf{u}^*(x',t) \right\rangle, \qquad (۳)$$

در این پژوهش از روش تجزیهٔ مقادیر تکین جهت حل مسألهٔ مقدار ویژهٔ فوق استفاده شده‌است. همان‌طور که اشاره شد مودهای POD دارای خاصیت تعامد هستند، یعنی در رابطهٔ زیر صدق می‌کنند:

$$\left(\phi^i,\phi^j\right)=\begin{cases}1 & i=j\\ 0 & i\neq j\end{cases}. \qquad (۴)$$

[1] Small Scales
[2] Adjoint
[3] Thikhonov Regularization
[4] Coherent Structures

www.SID.ir

Archive of SID

۳- مدل رتبه‌کاسته توسعه‌یافته با روش تجزیه متعامد بهینه- گالرکین

معادلات حاکم بر دینامیک جریان تراکم‌ناپذیر شامل معادلات پیوستگی و اندازه حرکت بوده که این معادلات در فرم برداری و بی‌بعد بصورت زیر می‌باشند:

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = 0,$$
$$\partial_t \mathbf{u} + (\mathbf{u} \cdot \nabla)\mathbf{u} = -\nabla p + \mathrm{Re}^{-1}(\nabla^2 \mathbf{u}). \quad (۵)$$

بردارهای سرعت را می‌توان به‌صورت حاصل‌جمع یک بخش متوسط‌گیری‌شده زمانی و یک بخش اغتشاشی[1] نوشت:

$$\mathbf{u} = \overline{\mathbf{u}} + \mathbf{u}' \quad (۶)$$

با جایگذاری رابطهٔ (۶) در معادلهٔ پیوستگی و با این شرط که مودهای جریان در معادلهٔ پیوستگی جریان تراکم‌ناپذیر صدق کنند، معادلات حاکم بر دینامیک جریان تراکم‌ناپذیر به معادلات اندازه حرکت کاهش خواهد یافت. بخش متوسط میدان سرعت به‌صورت یک میانگین از تغییرات زمانی بردارهای سرعت در نظر گرفته‌شده و جمله اغتشاشی با استفاده از بسط مودهای POD به‌صورت زیر نوشته می‌شود:

$$\mathbf{u}'(\vec{x},t) = \sum_{i=1}^{N} \Phi^i(\vec{x})\ \mathbf{a}^i(t), \quad (۷)$$

به‌طوریکه:

$$\Phi^i(\vec{x}) = \begin{bmatrix} \phi_i^u(\vec{x}) & 0 \\ 0 & \phi_i^v(\vec{x}) \end{bmatrix} \quad , \quad \mathbf{a}^i(t) = \begin{bmatrix} a^i(t) \\ b^i(t) \end{bmatrix}$$

۴- تصویرسازی گالرکین و معادلهٔ سیستم دینامیکی

با تصویرسازی معادلات پیوستگی و اندازه حرکت در زیرفضای مودهای POD و با فرض اینکه مشتق زمانی مقادیر بخش متوسط‌گیری شده صفر باشد، یک دسته معادلهٔ دیفرانسیلی مرتبهٔ اول برای ضرایب مودال بدست می‌آید که سامانهٔ دینامیکی نامیده شده و معادلهٔ آن به‌صورت زیر می‌باشد:

$$\frac{d\mathbf{a}^k}{dt} + A_{kij}\,\mathbf{a}^i\mathbf{a}^j + B_{ki}\,\mathbf{a}^i + C_k = 0, \quad (۸)$$

معادلهٔ (۸) به منظور محاسبهٔ تغییرات زمانی ضرایب مودال حل شده تا ضرایب حاصل برای بازسازی میدان جریان با استفاده از رابطهٔ (۷) بکار روند.

۵- بازسازی سیستم دینامیکی رتبه‌کاسته

به منظور محاسبهٔ تعداد مودهای موردنیاز جهت ایجاد الگوی رتبه‌کاسته معیاری بر اساس اختلاف سطح انرژی مودهای میدان استفاده شده‌است (شکل ۵). معیاری موردنظردر این پژوهش دستیابی به سطح انرژی ۹۹/۹٪ بوده که بر این اساس، N_r حاصل، تعداد مودهای مناسب برای ایجاد مدل رتبه‌کاسته را نشان می‌دهد [۹].

۶- ناپایداری مدل رتبه‌کاسته

مدل‌های رتبه‌کاستهٔ استاندارد، که از تصویرسازی معادلات اندازه حرکت جریان تراکم‌ناپذیر در راستای مودهای میدان جریان حاصل می‌شوند، ممکن است دقّت بالایی در پیش‌بینی تغییرات زمانی میدان جریان نداشته باشند. این موضوع می‌تواند ناشی از دلایلی مانند، عدم وجود رابطه‌ای مستقیم بین میدان سرعت و فشار و در نتیجه تقریب حذف اثرات جمله فشار، دقت نامناسب مودهای محاسبه‌شده (برقرارنبودن معادلهٔ پیوستگی توسط مودهای میدان سرعت)، ناپایداری‌های ناشی از حذف مودهای با اعداد موج بالا، و دقّت پایین نمایه‌های ورودی که در نتیجه معادلات بقاء به‌طور کامل برقرار نخواهند بود. روش‌های گوناگونی برای جبران این خطاها پیشنهاد شده و قابل طرح می‌باشد. از جمله اصلاح روش محاسبه مودهای میدان، اصلاح فرضیات بکار رفته به منظور توسعهٔ سیستم دینامیکی و استفاده از روش‌های جبران‌ساز به منظور اصلاح خطای ناشی از رفتار سیستم دینامیکی[۱۰].

۷- بازسازی سیستم دینامیکی رتبه‌کاسته

الگوهای رتبه‌کاسته حاصل از تصویرسازی معادلات اندازه حرکت در راستای مودهای POD به دلایل مختلفی پیش‌بینی دقیقی از دینامیک میدان جریان ندارند. روش‌های مختلفی برای جبران این خطاها پیشنهاد شده‌است. اگر مودهای POD در معادلهٔ پیوستگی صدق نکنند، آنگاه اثر بقای جرم در معادلهٔ الگوی رتبه‌کاسته حذف شده و این سبب بروز ناپایداری در پاسخ آن خواهد شد. جمله فشار پس از تصویرسازی معادلات اندازه حرکت و بر اساس تئوری گاوس به شکل زیر تجزیه خواهد شد:

$$\left(\nabla p, \phi^k\right) = -\left(\nabla.\phi^k, p\right)_\Omega + \left(p, \phi^k\right)_\Gamma \quad (۹)$$

بخش اول اثر تغییرات میدان فشار در نقاط داخلی حجم کنترل مفروض و عبارت دوم اثر توزیع فشار روی مرزهای میدان جریان می‌باشد. اگر مودهای میدان جریان بقایی باشند آنگاه در معادلهٔ پیوستگی صدق کرده، بدین معنی که :

$$\left(\nabla.\phi^k, p\right)_\Omega = 0, \quad (۱۰)$$

در این‌صورت عبارت اول در معادلهٔ (۹) حذف شده و نتیجه به شکل زیر خواهد شد:

$$\left(\nabla p, \phi^k\right) = \left(p, \phi^k\right)_\Gamma \quad (۱۱)$$

وجود شرایط مرزی همگن روی مرزهای میدان جریان می‌تواند سبب حذف اثر عبارت سمت راست معادلهٔ فوق شود. این بدین معنی است که یا مقدار فشار روی مرزهای صفر بوده (فشار نسبی) و یا توزیع آن به نحوی است که حاصل‌ضرب داخلی عبارت سمت راست معادلهٔ (۱۱) صفر شود. لیکن ویژگی‌های فیزیکی و محاسباتی موجود در برخی مسائل ممکن است سبب عدم احراز شرایط ذکرشده در خصوص عبارت فشار شده و در نتیجه این جمله از معادلهٔ سیستم دینامیکی (ضرایب معادلهٔ (۸)) قابل حذف نیست. این مطلب می‌تواند به این دلیل باشد که مودهای جریان معادلهٔ پیوستگی را ارضاء نکرده و یا توزیع فشار روی مرزهای میدان به‌گونه‌ای است که اثرات آن قابل صرفنظر نمی‌باشد. بنابراین در این شرایط می‌بایست جمله فشار به نحوی

[1] Fluctuation

www.SID.ir

Archive of SID

محاسبه یا جایگزین شود، در غیر این‌صورت بقای موجود در معادلات اندازه حرکت از بین رفته و منجر به ایجاد ناپایداری در رفتار سیستم دینامیکی حاکم بر مسئله می‌شود. روشی که در این پژوهش پیشنهاد شده اعمال اثر عبارت فشار بصورت مستقیم در معادلهٔ سامانهٔ دینامیکی بر حسب ضرایب میدان سرعت به‌صورت زیر می‌باشد:

$$p(\vec{x},t)=\sum_{i=1}^{N}\mathbf{a}^i(t)\ \Psi^i(\vec{x}), \qquad (۱۲)$$

در نتیجه معادلهٔ سیستم دینامیکی رتبه‌کاسته (رابطهٔ ۸) به‌صورت زیر اصلاح می‌شود:

$$\frac{d\mathbf{a}^k}{dt}+A_{kij}\,\mathbf{a}^i\mathbf{a}^j+\left(B_{ki}+B^p_{ki}\right)\mathbf{a}^i+C_k=0, \qquad (۱۳)$$

در رابطهٔ فوق B^p_{ki}، ضریب اثر عبارت فشار بوده که به هر دو معادلهٔ اندازه حرکت اضافه شده و از روابط زیر بدست می‌آید:

$$B^p_{ki}=\begin{bmatrix}\left(\frac{\partial\Psi^i}{\partial x},\phi^k_u\right) & 0\\ 0 & \left(\frac{\partial\Psi^i}{\partial y},\phi^k_v\right)\end{bmatrix} \qquad (۱۴)$$

روشن است که آرایه‌های ماتریس فوق مقدار عبارت فشار در معادلات اندازه حرکت در راستاهای افقی و عمودی می‌باشند. نکتهٔ اساسی در خصوص روش بکاررفته در این پژوهش بهره‌بردن از بیان عبارت فشار بر حسب ضرایب مودال میدان سرعت (رابطهٔ ۱۳) و ایجاد یک ارتباط مستقیم بین این دو کمیت مهم در میدان‌های جریان تراکم‌ناپذیر می‌باشد. ذکر این نکته ضروری است هر چند این روش دقت الگوی رتبه‌کاسته را در مقایسه با الگوی کلاسیک افزایش داده لیکن به‌دلیل اینکه پاره‌ای از خطاها ناشی از علل دیگری است لذا داده‌های حاصل از این الگو همگرایی کامل با داده‌های حل عددی مستقیم ندارند.

۸- اصلاح الگوی رتبه‌کاسته با استفاده از مدل خطی جبران‌ساز گذرا

مدل رتبه‌کاستهٔ اصلاح‌شده، علیرغم بازسازی اثر مودهای غیربقایی، به دلایل دیگری از جمله ناپایداری‌های ذاتی موجود در این مدل‌ها، جایگزین نشدن اثر جمله فشار روی مرزها، حذف مودهای با اعداد موج بالا و ...، باز هم دقّت بالایی در پیش‌بینی تغییرات زمانی میدان جریان ندارد، به منظور بهبود پیش‌بینی زمانی مدل رتبه‌کاسته یک جمله خطی به‌صورت زیر به معادلهٔ سامانهٔ دینامیکی اضافه می‌شود:

$$\frac{d\mathbf{a}^k}{dt}+A_{kij}\,\mathbf{a}^i\mathbf{a}^j+\left(B_{ki}+B^p_{ki}+B'_{ki}\right)\mathbf{a}^i+C_k=0, \qquad (۱۵)$$

جمله اضافه شدهٔ فوق، جمله اصلاح نامیده شده و به منظور افزایش دقّت سامانهٔ دینامیکی بکار می‌رود. این جمله می‌تواند مانند یک عبارت استهلاکی در معادلهٔ سیستم دینامیکی عمل کرده و اثرات مودهای پرانرژی را، که گاهی سامانهٔ دینامیکی توانایی کاهش سطح انرژی آنها را ندارد، کمتر کند. این موضوع می‌تواند ناشی از این باشد که سیستم دینامیکی به اندازهٔ کافی دارای استهلاک نبوده و این افزودگی در سطح انرژی مودها باعث واگرایی در پاسخ حاصل از مدل می‌شود. در این شرایط جمله اصلاح همچون عبارت استهلاک مصنوعی در معادلهٔ حاکم بر مدل عمل کرده و سبب می‌شود که سیستم دینامیکی رفتار واقعی مسئله را پیش‌بینی کند[۹].

۹- جداسازی معادلهٔ مدل رتبه‌کاسته و محاسبهٔ ضرایب مدل

مشتقات وابسته به ضرایب مدل رتبه‌کاسته (معادلهٔ (۸)، (۱۵)) با روش تفاضل مرکزی مرتبه دوم محاسبه شده و برای انتگرال‌گیری زمانی معادلات سیستم دینامیکی، روش رانگ-کوتای چهار مرحله‌ای مرتبهٔ چهارم صریح به کار رفته‌است. مطالعه پیرامون گام زمانی نشان می‌دهد که مقدار بکاررفته (مساوی با گام زمانی استفاده‌شده برای تولید نمایه‌های ورودی) برای این مسئله به اندازهٔ کافی کوچک بوده و سیستم دینامیکی رفتار پایداری را نشان می‌دهد.

۱۰- نتایج

در این قسمت به ارائه و بررسی نتایج پژوهش پرداخته می‌شود. دو مسئلهٔ مورد بررسی قرار گرفته که در مسئلهٔ اول معادلهٔ برگرز لزج مورد بحث بوده و مسئلهٔ بعدی به بررسی جریان تراکم‌ناپذیر ناپایا حول یک سیلندر مربع‌شکل در عدد رینولدز ۱۰۰ می‌پردازد. به منظور بررسی صحت نتایج حاصل از مدل رتبه‌کاسته، داده‌های حاصل با نتایج شبیه‌سازی عددی مستقیم مقایسه شده‌اند[۱۳].

۱۰-۱- معادلهٔ برگرز لزج

برای تحلیل معادلهٔ برگرز لزج یک‌بعدی یک دسته ۱۰۰تایی از حل میدان جریان شامل مقادیر سرعت در زمان‌های مختلف و با گام‌های زمانی مساوی در نظر گرفته شده‌است. برای تحلیل عددی این مسئله معادلهٔ برگرز لزج یک بعدی:

$$\partial_t\mathbf{u}+(\mathbf{u}\cdot\nabla)\mathbf{u}=\mathrm{Re}^{-1}(\nabla^2\mathbf{u}),\quad 0<x<L \qquad (۱۶)$$

با شرط اولیهٔ:

$$\mathbf{u}(x,0)=\sin(\pi x) \qquad (۱۷)$$

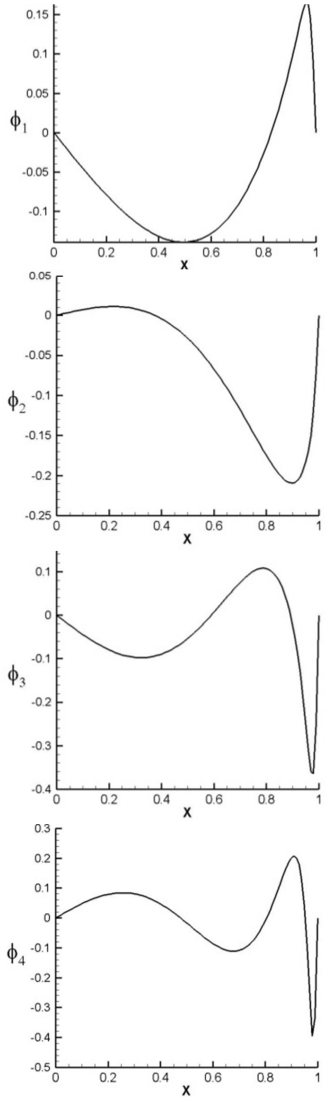
و شرایط مرزی:

$$\mathbf{u}(0,t)=\mathbf{u}(L,t)=0.3\times\sin(\pi t) \qquad (۱۸)$$

در عدد رینولدز ۱۰۰ حل شده و نتایج حاصل برای یک بازهٔ زمانی معادل ۱ واحد به عنوان ورودی برای بازسازی سیستم دینامیکی رتبه‌کاسته استفاده شده‌است. روشن است تفاوت اساسی معادلهٔ برگرز لزج و معادلهٔ ناویر-استوکس عدم وجود عبارت فشار در این رابطه می‌باشد. در نتیجه انتظار می‌رود دقت نتایج حاصل از مدل رتبه‌کاسته معادلهٔ برگرز لزج در مقایسه با مدل مرتبط با معادلات ناویر-استوکس بسیار بالاتر باشد. با استفاده از ماتریس نمایه‌ها، مسئله مقدار ویژهٔ معادل حل شده و مقادیر و بردارهای ویژه بدست می‌آیند. شکل **۱** توزیع چهار مود پرانرژی‌تر نشان داده که در شکل **۲** توزیع انرژی نسبی آنها نمایش داده شده‌است.

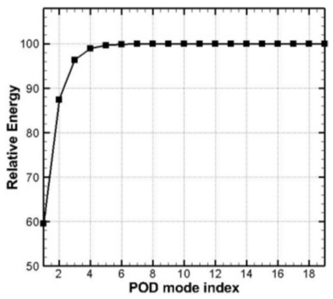
www.SID.ir

Archive of SID

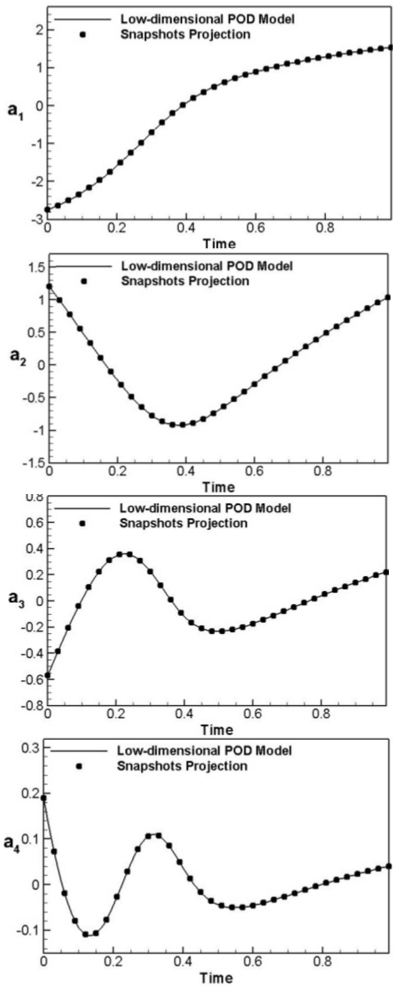


شکل۱- توزیع چهار مود پرانرژی‌تر دسته نمایهٔ حاصل از حل معادلهٔ برگرز لزج در عدد رینولدز ۱۰۰

همانطور که در شکل **۲** مشاهده می‌شود ۸ مود اول می‌توانند معیار بازسازی مدل رتبه‌کاسته را برای مسئله موردنظر ارضاء کنند. در شکل **۳** تغییرات زمانی چهار ضریب مودال اول (مربوط به ۴ مود پرانرژی‌تر) برای مدل رتبه‌کاسته معادلهٔ برگرز لزج مشاهده می‌شود. در این شکل مقایسه‌ای بین نتایج حاصل از مدل با نتایج حاصل از حل دقیق انجام شده‌است.



شکل۲- انرژی نسبی مودهای POD دسته نمایه معادلهٔ برگرز لزج در عدد رینولدز ۱۰۰



شکل۳-تغییرات زمانی چهار ضریب مودال پر انرژی‌تر معادلهٔ برگرز لزج در عدد رینولدز ۱۰۰، خطوط پیوسته انتگرال‌گیری از الگوی رتبه‌کاستهٔ و نقاط حاصل از شبیه‌سازی عددی مستقیم

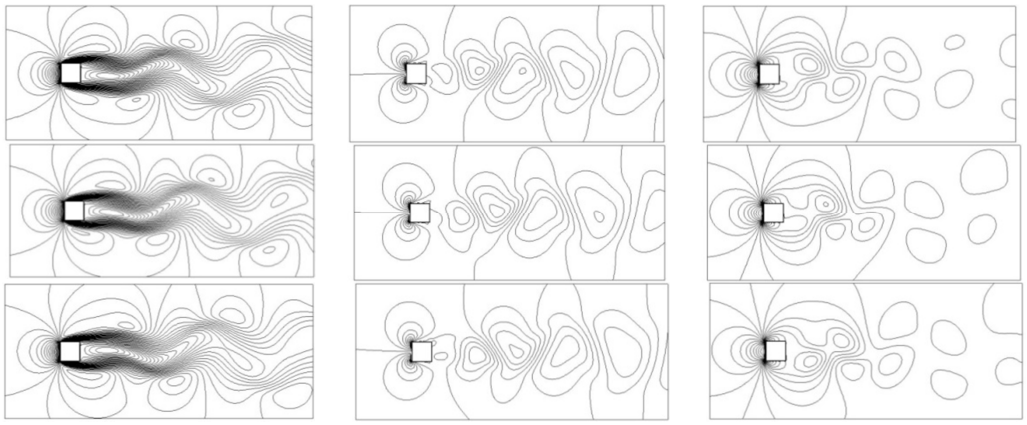
همانطور که در این شکل دیده می‌شود نتایج مدل استاندارد از دقت بسیار بالایی در مقایسه با داده‌های حاصل از حل دقیق برخوردار می‌باشد. از آنجایی که عبارت فشار در معادلهٔ برگرز لزج وجود نداشته در نتیجه انتظار می‌رود مشکل مورد بحث در معادلهٔ ناویر-استوکس که همان جفت‌شدگی بین میدان سرعت و فشار است، در مدل مربوط به این معادله ظاهر نشود. لذا همانطور که مشاهده می‌شود نتایج حاصل از مدل رتبه‌کاسته بدون اصلاحات مربوط به عبارت فشار با داده‌های حاصل از حل دقیق تطابق بسیار خوبی دارند.

۱۰-۲- جریان لزج ناپایا حول سیلندر مربع شکل

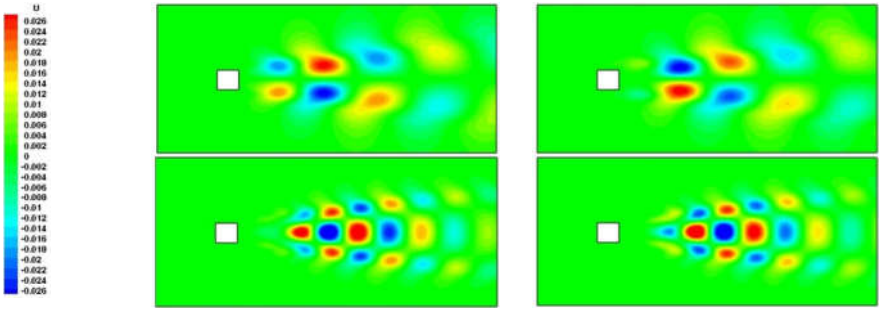
مسئلهٔ دوم بر اساس حل معادلات جریان سیال تراکم‌ناپذیر (معادلهٔ (۶)) حول یک سیلندر مربع شکل در عدد رینولدز ۱۰۰ می‌باشد. یک دسته ۷۵تایی از حل میدان جریان شامل فشار، مولفه‌های افقی و عمودی سرعت در زمان‌های مختلف، با گام‌های زمانی مساوی، و در یک بازهٔ زمانی معین به عنوان ورودی در نظر گرفته شده‌است. در شکل **۴** سه عضو از دسته نمایه‌های فشار، مولفهٔ افقی و عمودی سرعت در گام‌های زمانی مختلف نشان داده شده‌است. این بازهٔ زمانی یک سیکل

www.SID.ir

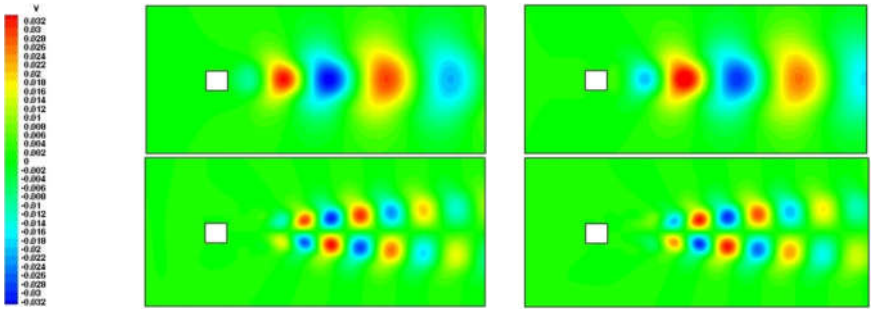
Archive of SID



شکل۴- خطوط همتراز سه نمایه مؤلفهٔ افقی سرعت(ستون سمت چپ)، مؤلفهٔ عمودی سرعت(ستون وسط) و میدان فشار(ستون سمت راست)



شکل۵- خطوط همتراز چهار مود پرانرژی‌تر میدان مؤلفهٔ افقی سرعت



شکل۶- خطوط همتراز چهار مود پرانرژی‌تر میدان مؤلفهٔ عمودی سرعت

نوسان کامل بوده که اندازهٔ آن از نمودار تغییرات زمانی انرژی جنبشی کل میدان یا ضرایب بی‌بعد (مانند ضریب برآ) بدست می‌آید. سپس مقادیر سرعت اغتشاشی (طبق رابطهٔ ۶) بدست آمده و دسته نمایهٔ حاصل بر اساس رابطهٔ (۷) به منظور محاسبهٔ مودهای جریان استفاده می‌شود. توابع ویژه و بردارهای ویژه پس از حل یک مسئلهٔ مقدار ویژه استخراج شده که در شکل‌های **۵** و **۶** به ترتیب خطوط همتراز چهار مود پرانرژی‌تر مؤلفهٔ افقی و عمودی سرعت نمایش داده شده‌است. همانطور که در این دو شکل نیز مشخص است یک دوگانی[1] در ساختار مودهای میدان سرعت وجود دیده شده که ناشی از تقارن آنها می‌باشد[۱۰]. شکل **۷** انرژی نسبی مودهای جریان برای مولفهٔ افقی و عمودی سرعت را نشان می‌دهد. همانطور که در این شکل مشخص است، برای هر دو مولفهٔ سرعت تعداد مودهایی که سهم بالاتری در میزان انرژی کل میدان دارند، بسیار کمتر از کل مودهامی‌باشد. این نمودار تصویر کنندهٔ عدد سهم مودها بوده و با توجه به روش ارائه شده تعداد مودهای مورد نیاز برای ایجاد مدل رتبه‌کاسته محاسبه می‌شود. در جدول ۱ سطح(درصد) انرژی (در فرم بی‌بعد) مودهای اول تا پنجم مولفهٔ افقی سرعت و انرژی کل به ازای اضافه‌شدن هر مود جدید آورده شده‌است. همانطور که مشخص است تنها با استفاده از ۲ مود اول تقریباً ۸۰ درصد انرژی جنبشی کل سیستم تسخیر شده در حالی که ۳ مود باقیمانده تنها در حدود ۱۷درصد انرژی کل را تغییر می‌دهند. برای این مسئله شش مود به منظور بازسازی مدل رتبه‌کاسته جهت شبیه‌سازی میدان جریان مورد استفاده قرار گرفته‌است. سپس با استفاده از نمایه‌های فشار ضرایب مودال میدان سرعت و با بهره‌گیری از حل یک مسئلهٔ کمینه‌سازی مودهای میدان فشار محاسبه شده‌است. شکل **۸** خطوط همتراز مودهای فشار محاسبه‌شده با روش تشریح‌شده را نشان می‌دهد. پس از بازسازی مدل رتبه‌کاسته به شکل یک سیستم دینامیکی بر اساس روابط (۹) و (۱۴) برای مدل‌های استاندارد و اصلاح‌شده برای عبارت فشار و با استفاده از یک شرط اولیه که برابر با مقدار ضرایب مودال در اولین گام زمانی است، پیشروی زمانی با

[1] Duality

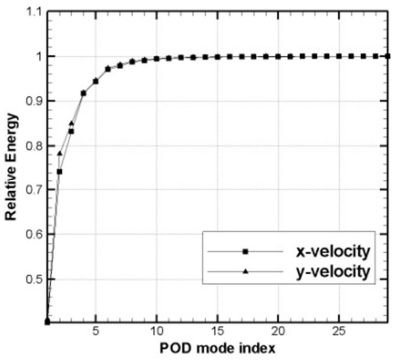
www.SID.ir

Archive of SID

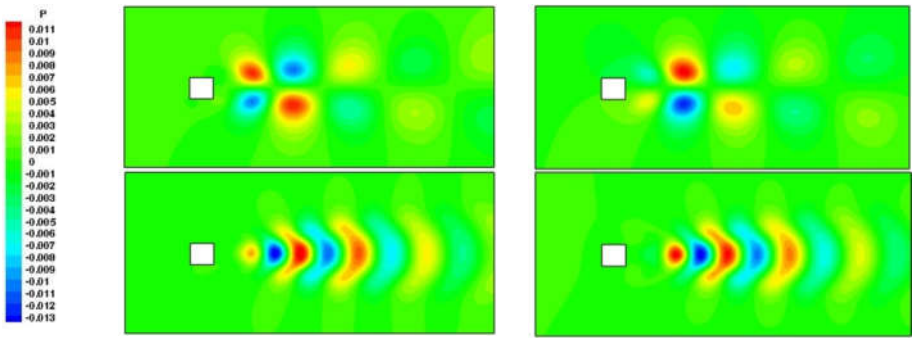
استفاده از انجام می‌گیرد. در شکل**۹** مقایسه‌ای بین تغییرات زمانی چهار ضریب مودال اول، بر حسب سطح انرژی، برای مؤلفهٔ افقی سرعت در یک بازهٔ زمانی معادل با یک نوسان کامل بین شبیه‌سازی عددی مستقیم، مدل رتبه‌کاسته استاندارد و مدل رتبه‌کاستهٔ اصلاح‌شده برای عبارت فشار نمایش داده شده‌است. همانطور که در شکل مشخص است، نتایج حاصل از مدل رتبه‌کاستهٔ اصلاح‌شده برای عبارت فشار در مقایسه با نتایج مدل استاندارد از دقّت بالاتری در مقایسه با نتایج حاصل از حل عددی مستقیم برخوردار است. شکل**۱۰** تغییرات زمانی چهار ضریب مودال اول برای مؤلفهٔ عمودی سرعت را نشان می‌دهد که نتایج حاصل از مدل رتبه‌کاستهٔ اصلاح شده برای عبارت فشار دقّت بالاتری در مقایسه با مدل رتبه‌کاستهٔ استاندارد، برای شبیه‌سازی میدان جریان نمایش می‌دهد. در شکل **۱۱** تغییرات زمانی چهار ضریب مودال اول مؤلفهٔ افقی سرعت حاصل از مدل رتبه‌کاستهٔ اصلاح‌شده (بهینه‌سازی شده) در مقایسه با مدل رتبه‌کاستهٔ اصلاح‌شده برای عبارت فشار نشان داده شده‌است. همانطور که مشخص است، نتایج حاصل از مدل رتبه‌کاستهٔ اصلاح شده (بهینه‌سازی شده) از دقّت بسیار بالاتری در قیاس با نتایج حاصل از مدل رتبه‌کاستهٔ اصلاح‌شده برای عبارت فشار و در مقایسه با نتایج حاصل از حل عددی مستقیم برخوردار است. مقایسه‌ای بین تغییرات ضرایب مودال مؤلفهٔ عمودی سرعت حاصل از مدل رتبه‌کاستهٔ بهینه سازی‌شده، مدل رتبه‌کاستهٔ اصلاح‌شده برای عبارت فشار با نتایج حاصل از حل عددی مستقیم در شکل ۱۲ نشان داده شده‌است. واضح است که نتایج حاصل از مدل رتبه‌کاستهٔ اصلاح‌شده با روش بهینه‌سازی در مقایسه با نتایج حاصل از حل عددی مستقیم، دقت بسیار بالای این مدل را نشان می‌دهد.

جدول ۱- سطح انرژی(بی‌بعدشده) مودهای پرانرژی‌تر مولفهٔ افقی سرعت.

شمارهٔ مود	۱	۲	۳	۴	۵
میزان انرژی جنبشی	٪۳۹	٪۴۰/۵	٪۷/۵	٪۷/۶۵	٪۱/۸۵
انرژی جنبشی کل	٪۳۹	٪۷۹/۵	٪۸۷	٪۹۴/۶۵	٪۹۶/۵



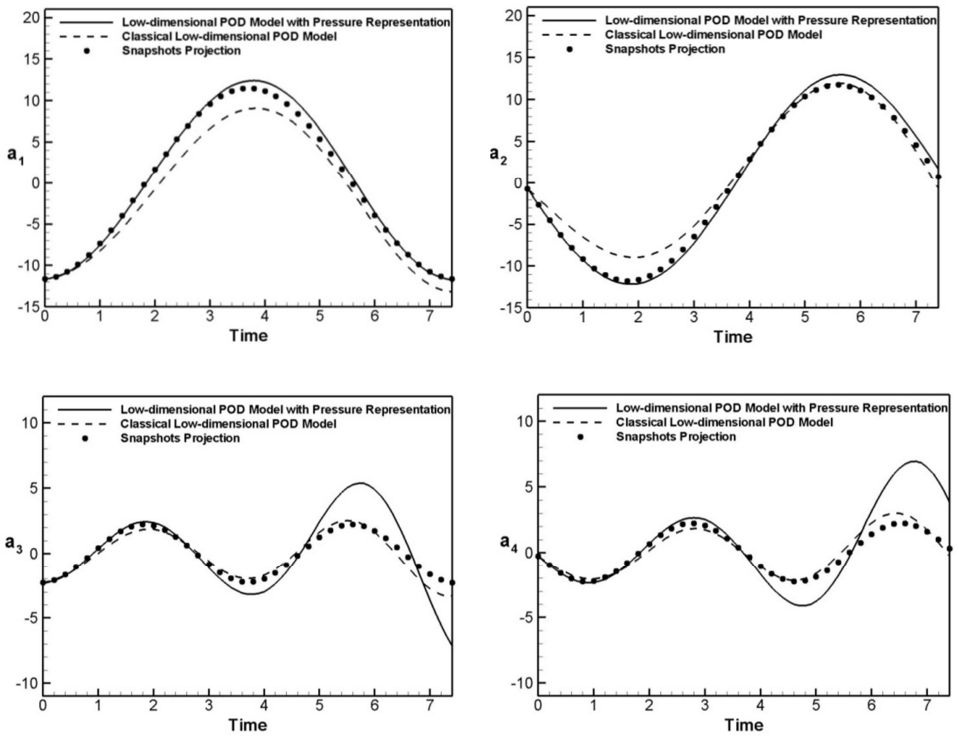
شکل ۷- انرژی نسبی مودهای POD میدان سرعت



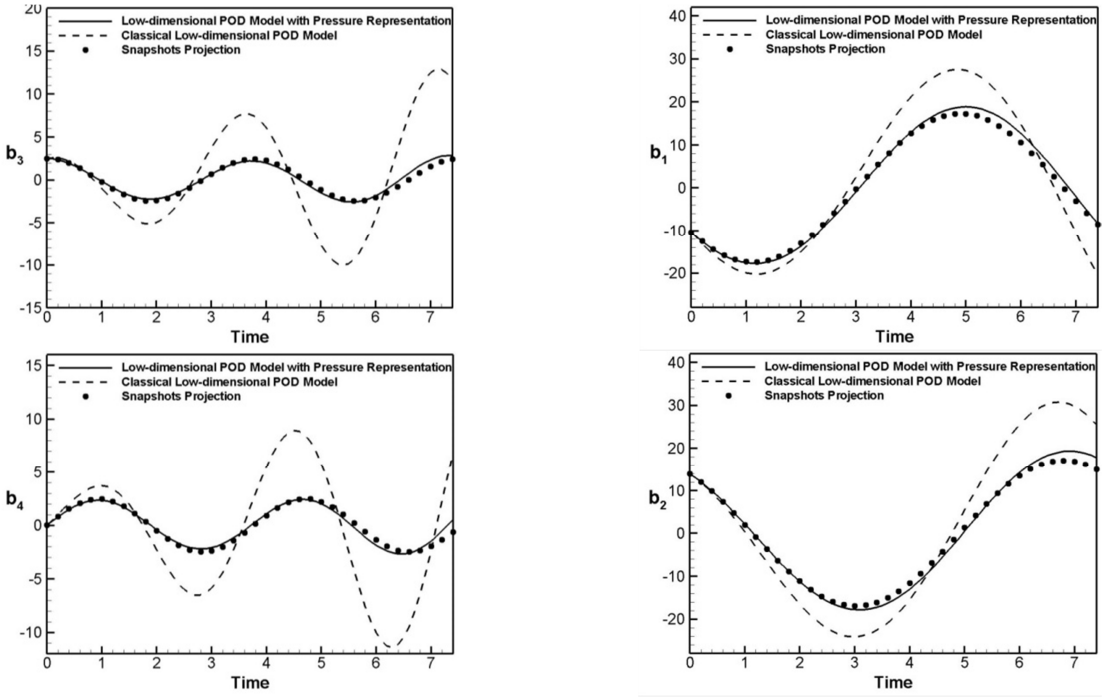
شکل۸- خطوط همتراز چهار مود پرانرژی‌تر میدان فشار

www.SID.ir

Archive of SID



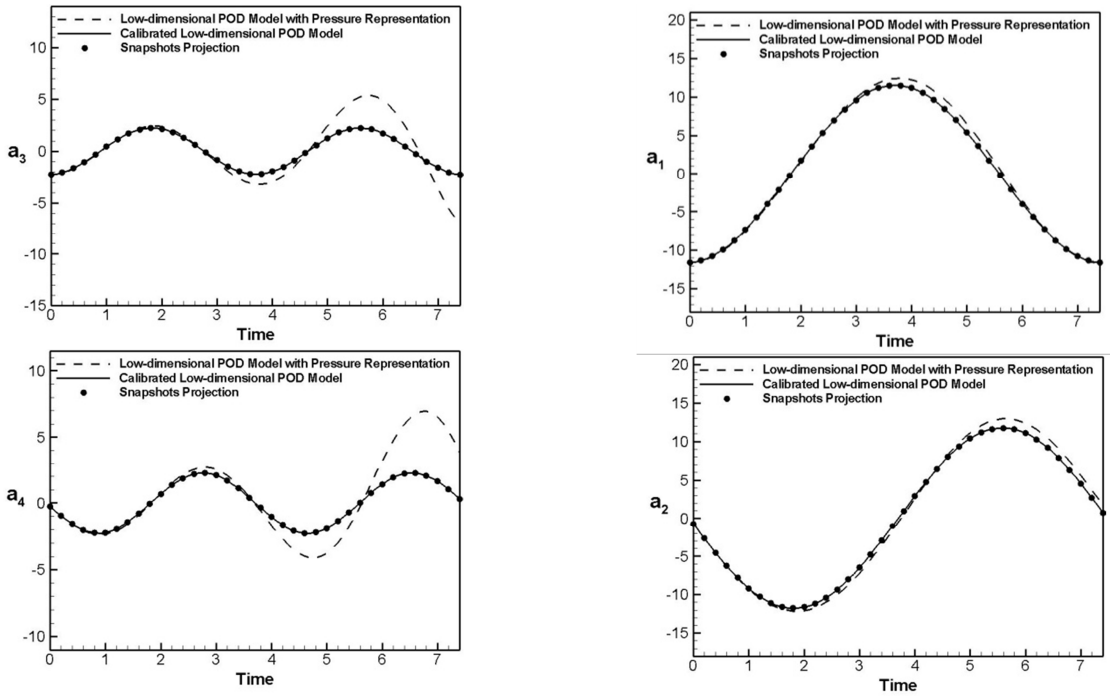
شکل ۹-تغییرات زمانی چهار ضریب مودال پر انرژی‌تر معادلهٔ اندازه‌حرکت در راستای x، خطوط پیوسته انتگرال‌گیری از الگوی رتبه‌کاستهٔ اصلاح شده با جایگزینی عبارت فشار، خط‌چین الگوی رتبه‌کاستهٔ استاندارد و نقاط حاصل از شبیه‌سازی عددی مستقیم



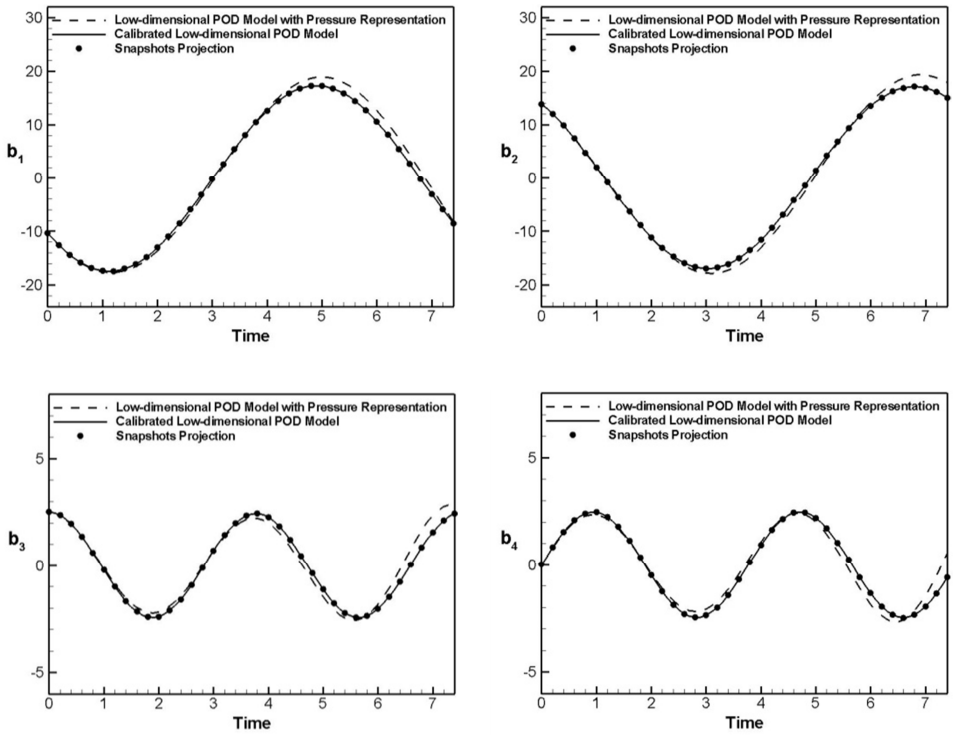
شکل۱۰-تغییرات زمانی چهار ضریب مودال پر انرژی‌تر معادلهٔ اندازه‌حرکت در راستای y، خطوط پیوسته انتگرال‌گیری از الگوی رتبه‌کاستهٔ اصلاح شده با جایگزینی عبارت فشار، خط‌چین الگوی رتبه‌کاستهٔ استاندارد و نقاط حاصل از شبیه‌سازی عددی مستقیم

www.SID.ir

Archive of SID



شکل۱۱-تغییرات زمانی چهار ضریب مودال پر انرژی‌تر معادلهٔ اندازه‌حرکت در راستای y، خطوط پیوسته انتگرال‌گیری از الگوی رتبه‌کاستهٔ اصلاح شده با جایگزینی عبارت فشار، خط‌چین الگوی رتبه‌کاستهٔ استاندارد و نقاط حاصل از شبیه‌سازی عددی مستقیم



شکل ۱۲-تغییرات زمانی چهار ضریب مودال پر انرژی‌تر معادلهٔ اندازه‌حرکت در راستای y، خطوط پیوسته انتگرال‌گیری از الگوی رتبه‌کاستهٔ اصلاح شده (بهینه‌سازی شده)، خط‌چین الگوی رتبه‌کاستهٔ رتبه‌کاستهٔ اصلاح شده با جایگزینی عبارت فشار و نقاط حاصل از شبیه‌سازی عددی مستقیم

www.SID.ir

Archive of SID

۱۱- نتیجه‌گیری

استفاده از روش‌های سریع در تحلیل مسائل مهندسی از اهداف پژوهشگران و طراحان در این حوزه می‌باشد. مدل‌های رتبه‌کاسته یکی از راه‌کارهایی است که به عنوان روشی مناسب، سریع و کم‌هزینه همواره مورد توجه پژوهشگران بوده‌است. کاربرد الگوهای رتبه‌کاسته، که بر اساس معادلات بقای حاکم بر پدیده‌های فیزیکی توسعه می‌یابند، در سال‌های اخیر توسعهٔ بسیار زیادی یافته‌است. این پژوهش، به ارائهٔ یک روش جدید از اصلاح مدل رتبه‌کاستهٔ توسعه یافته بر پایهٔ روش تجزیه متعامد بهینه پرداخته است. بدین منظور با تصویرسازی معادلات.

بقای جرم و اندازه حرکت خطی در فضای مودهای POD، مدل حاصل به صورت یک مسئلهٔ مقدار اولیه بدست می‌آید. به منظور حذف اثر گرادیان فشار روی مرزهای میدان جریان، که سبب عدم برقراری قانون بقای جرم می‌شود، مودهای فشار با بهرگیری از نمایه‌های مربوطه و با استفاده از ضرایب مودال میدان سرعت محاسبه می‌شوند. عبارت مرتبط با تغییرات فشار از معادله اندازه حرکت حذف نشده و به شکل یک رابطه جایگزین در آن بیان می‌شود. برای اصلاح اثر مودهای غیربقایی در معادلهٔ پیوستگی و میراکردن اثرات حذف مودهای با اعداد موج بالا از یک عبارت اصلاح (جبران‌ساز) خطی استفاده شده‌است. از دو روش تشریح شده به منظور انتگرال‌گیری در بازهٔ زمانی کوتاه برای مسئلهٔ مذکور بهره گرفته شده که افزایش دقت نتایج و کاهش زمان چشمگیری را در مقایسه با شبیه‌سازی عددی مستقیم نشان می‌دهد.

۱۲- مراجع

[1] Smith, T. R., Moehlis, J., Holmes, P., "Low-dimensional Modeling of Turbulence Using the Proper Orthogonal Decomposition", *A tutorial, Kluwer Academic Publishers*, 2004.

[2] Holmes, P., Lumley, J. L., and Berkooz, G., *Turbulence, Coherent Structures, Dynamical Systems and Symmetry*, Cambridge Monographs on Mechanics, Cambridge University Press, Cambridge, 1996.

[3] Lumley, J. L., The Structure of Inhomogeneous Turbulence, In A. M. Yaglom Tartarski, editors, *Atmospheric Turbulence and Wave Propagation*, pp. 166-Nauka, 78, 1967.

[4] Sirovich, L., Turbulence and the Dynamics of Coherent Structures, *Parts I-III, Quarterly of Applied Math.*, XLV (3):561-82, 1987.

[5] Favier, J., Cordier, L., Kourta, A., and Iollo, A., Calibrated POD Reduced-order Models of Massively Separated Flows in the Perspective of Their Control, *ASME Joint U.S.-European Fluids Engineering Summer Meeting*, Miami, Florida, USA, 2006

[6] Couplet, M., Basdevant, C., and Saguat, P., "Calibrated Reduced-order POD-Galerkin System for Fluid Flow Modeling", J. Computational Physics, Vol. 207, pp. 192–220, 2005.

[7] Noack B.R., Papas P. and Monkewitz P. A., The Need for a Pressure-Term Representation in Empirical Galerkin Models of Incompressible Shear Flows, *J. Fluid Mech.*, Vol. 523, pp.339-365, 2005.

[8] Galletti, B., Bottaro, A., Bruneau, C. H., and Iollo, A. Accurate Model Reduction for Transient and Forced Wakes, *European J. Mech-B/Fluids*, Vol. 26, pp.354-366, 2007.

[9] Moayyedi M. K., Taeibi-Rahni M., and Sabetghadam F., Accurate Low-dimensional dynamical Model for Simulation of the Unsteady Incompressible Flows, *The 12th Fluid Dynamic Conference*, Babol, Iran, 2009.

[10] Sabetghadam, F., Moayyedi, M. K., and Taeibi-Rahni, M., A Fast Approach for Temporal Calibration of Low-dimensional POD Model for Simulation of the Unsteady Incompressible Flows, *The 9th Iranian Aerospace Society Conference*, IAU- Science and Research Branch, Tehran, Iran, 2010.

[11] Stankiewicz W., Roszak R., and Morzyński M., "Genetic Algorithm-based Calibration of Reduced Order Galerkin Models", Mathematical Modeling and Analysis, Vol. 16, No.2, pp.233-247, 2011.

[12] Cordier L., Abou El Majd B., Favier J., Calibration of POD reduced-order models using Tikhonov regularization, *International J. for Numerical Methods in Fluids*, 63 (2), pp.269-296, 2009.

[13] Moayyedi, M.K, *Low-dimensional POD Simulation of the Unsteady Flows around Bodies with Arbitrary Shapes*. PhD Dissertation, Department of Aerospace Engineering, Sharif University of Technology, 2009.

www.SID.ir