

محاسبه حساسیت هندسه طراحی برای مسائل ترموالاستیک با استفاده از روش نیمه تحلیلی پیراسته

مجتبی شیخی ازغندی

استادیار، گروه مکانیک، دانشکده فنی مهندسی، دانشگاه بزرگمهر قائنات، قائن، ایران

مهدی حسن زاده*

مری، گروه مهندسی مکانیک، مرکز کردکوی، واحد گرگان، دانشگاه آزاد اسلامی، کردکوی، ایران

چکیده

هدف از مقاله حاضر تحلیل حساسیت پارامترهای هندسی در طراحی مسائل ترموالاستیک با استفاده از روش نیمه تحلیلی بهبود یافته می باشد. روش نیمه تحلیلی، یکی از روش های کارا برای تحلیل حساسیت طراحی نسبت به متغیرهای طراحی است و به صورت ترکیبی از روش تحلیلی و روش تفاضل محدود می باشد. اگرچه این روش، روش قدرتمندی است، اما نسبت به اندازه گام حساس است. تحلیل حساسیت به کمک متغیر مختلط روش نوینی است که نسبت به اندازه طول گام حساس نبوده و در مقایسه با سایر روش ها چندین مزیت دارد. پیاده سازی این روش در کد المان محدود برای محاسبه حساسیت به آسانی انجام می پذیرد و فقط نیاز به تغییر در شبکه بندی المان محدود در طول محور موهومی دارد. این مقاله از ترکیب روش تحلیلی با روش متغیر مختلط برای محاسبه حساسیت در مسائل ترموالاستیک استفاده می کند. روش ارائه شده هر دو مزایای روش تحلیلی و روش متغیر مختلط را دارا است. مزیت روش ارائه شده در سرعت عملکرد، دقت و سادگی پیاده سازی آن است. مقایسه نتایج ارائه شده توسط روش پیشنهادی با دیگر روش ها نشان دهنده کارایی بالای روش حاضر بوده که می تواند مقادیر حساسیت مسائل را به صورت دقیق و پایدار پیش بینی نماید.

واژه های کلیدی: ترموالاستیسیت، المان محدود، بهینه سازی، روش متغیر مختلط، روش نیمه تحلیلی.

Computation of Shape Design Sensitivities on Thermo-Elastic Problems using Modified Semi-Analytical Method

M. Sheikhi Azqandi

Department of Mechanical Engineering, Faculty of Engineering, Bozorgmehr University of Qaenat, Qaen, Iran.

M. Hassanzadeh

Department of Mechanical Engineering, Kordkuy Center, Gorgan Branch, Islamic Azad University, Kordkuy, Iran.

Abstract

The aim of the present paper is sensitivity of shape design analysis on thermo-elastic problems using a modified semi-analytical method. The semi-analytical method is one of the efficient methods for sensitivity analysis with respect to the design variables which combines the analytical method and finite difference method. Although this method is a powerful method, however, it is sensitive to perturbation size. Complex variables method is a new novel approach which is not sensitive to disturbance and has some potential advantages over other methods. The implementation of this method in a finite element code for sensitivities calculation is straightforward, only requiring a perturbation of the finite element mesh along the imaginary axis. This study uses the combination of analytical method and complex variables method to calculate the sensitivity of thermo-elastic problems. The proposed method has both advantages of the analytical method and the complex variables method. The advantages of this method are that it is quick, accurate and simple to implement. The obtained results are compared to other methods and it is shown that the proposed method is effective and can predict the stable and accurate sensitivity results.

Keywords: Thermo-elasticity, Finite element, Optimization, Complex Variables Method (CVM), Semi-Analytical Method.

۱-مقدمه

پارامترهای طراحی زیادی هستند و یا تحلیل آن ها از نظر محاسباتی هزینه بر است، کارا نمی باشند. در بهینه سازی سازه ها الگوریتم های کارآمد بسیاری مانند روش برنامه ریزی غیر خطی متوالی (SQP) وجود دارند. این روش ها برای یافتن جهت جستجو در هر مرحله فرایند بهینه سازی، نیازمند محاسبه مشتقات توابع هدف و قیود نسبت به پارامترهای طراحی می باشند [۳-۴]. خطا در محاسبه این مشتقات، کارایی الگوریتم های بهینه سازی را کاهش می دهد و منجر به عدم همگرایی آن ها می شود. در سازه ها مشتقات توابع هدف و قیود، وابسته به پارامترهای مهم در طراحی سازه نظیر جابجایی، کرنش، تنش و غیره نسبت به پارامترهای طراحی است. بنابراین استفاده از راهکار دقیق و کارا در انجام آنالیز حساسیت در فرایند بهینه سازی سازه از اهمیت بالایی برخوردار است. علاوه بر این، آنالیز حساسیت کاربردهای مهم دیگری مانند شناسایی پارامترها [۵] و

سازه ها و اجزای مکانیکی متعددی وجود دارند که به طور هم زمان تحت بارهای مکانیکی و حرارتی هستند. افزایش دما باعث انبساط و در نتیجه به وجود آمدن جابجایی و کرنش در سازه می شود. اگر سازه ها به وسیله تکیه گاه ها مقید شده باشند، کرنش ناشی از حرارت، موجب ایجاد تنش در سازه می شود. اخیراً بهینه سازی سازه هایی که شامل قیود حرارتی هستند، توجه محققین زیادی را به خود جلب کرده است [۱]. برای بهینه سازی همیشه می توان از الگوریتم های بهینه سازی که نیاز به مشتق گیری از توابع هدف و قیود ندارند، استفاده کرد. مزایای این الگوریتم ها سادگی در پیاده سازی و توانایی بالای آن ها در یافتن نقاط بهینه است [۲]. اما این روش ها برای یافتن طرح بهینه مسائلی که دارای

تحلیل قابلیت اطمینان سازه [۶] را دارد.

روش‌های زیادی برای محاسبه آنالیز حساسیت وجود دارد. از جمله آن‌ها می‌توان روش تفاضل محدود، روش‌های تحلیلی شامل روش مشتق مستقیم [۷]، روش متغیر الحاقی [۸-۹]، روش متغیر مختلط [۱۰-۱۲] و روش‌های نیمه‌تحلیلی [۱۳] را نام برد. در روش‌های تحلیلی، حساسیت محاسبه شده دقیق و مستقل از مقدار اندازه گام است. اما پیاده‌سازی روش‌های تحلیلی در برنامه‌های محدود با توجه به امکان‌پذیر نبودن همیشگی محاسبه ماتریس سفتی، مشکل است. روش تفاضل محدود نسبت به روش‌های تحلیلی به‌سادگی پیاده‌سازی می‌شود و مستقل از نوع المان و نوع روش تحلیل می‌باشد. اما این روش علاوه بر وابستگی زیاد به مقدار اندازه گام، نیاز به حجم محاسبات بالایی برای به دست آوردن جواب قابل‌اطمینان دارد. به همین علت روش‌های نیمه‌تحلیلی برای به دست آوردن دقت و کارایی مناسب پیشنهاد می‌شوند. پیاده‌سازی این روش‌ها راحت بوده و علاوه بر داشتن دقت روش تحلیلی، نسبت به روش تفاضل محدود وابستگی کمتری به مقدار اندازه گام دارد.

اخیراً مقالات مختلفی برای معرفی دوباره روش متغیر مختلط ارائه شده است [۱۴]. مزیت این روش نسبت به روش تفاضل محدود تأثیر ناچیز خطای ناشی از گرد کردن در جواب مسئله است و بنابراین حساس به اندازه گام‌های کوچک نبوده و برای توابع غیرخطی عمومی کارا است. متأسفانه روش متغیر مختلط همانند روش تفاضل محدود به لحاظ محاسباتی دارای حجم بالایی بوده و نیازمند انجام حل کامل برای هر متغیر طراحی است. روش نیمه‌تحلیلی به‌منظور ایجاد توازن بین دقت و کارایی پیشنهاد شده است. زیرا این روش به‌راحتی پیاده‌سازی می‌شود و دقت روش‌های تحلیلی را نیز دارد. هدف آنالیز حساسیت مسائل به کمک روش المان محدود در عمل محاسبه مشتقات ماتریس سفتی، ماتریس جرم و بردار نیرو نسبت به متغیرهای طراحی است. در روش تحلیلی این مشتقات به‌صورت تحلیلی (روابط ریاضی) محاسبه می‌شوند. اما در بسیاری از موارد به‌ویژه برای محاسبه مشتق نسبت به متغیرهای هندسی مسئله، محاسبه این مشتقات مشکل است. در روش نیمه‌تحلیلی مشتقات ماتریس سفتی، بردار نیرویی و غیره به‌صورت عددی و به کمک روش تفاضل محدود محاسبه می‌شود. اما حل نهایی به روش تحلیلی انجام می‌پذیرد. به‌این‌ترتیب می‌توان به‌راحتی روش تفاضل محدود را پیاده‌سازی کرد و با دقت روش تحلیلی به نتایج قابل قبولی رسید. این روش محاسبه مشتقات، روش نیمه‌تحلیلی نامیده می‌شود که همانند روش تفاضل محدود به‌دوراز خطاهای برش و گرد کردن نیست و باید در انتخاب اندازه گام دقت کرد [۱۵].

برای مسائل انتقال گرما، محققین زیادی آنالیز حساسیت را مورد مطالعه قرار داده‌اند. تور توری و همکاران حساسیت طراحی شکل را برای مسائل رسانش گرمایی گذرا و غیرخطی با استفاده از روش متغیر الحاقی [۱۶] فرمول‌بندی کرده‌اند. یانگ [۱۷] عباراتی را جهت حساسیت طراحی شکل در مسائل ترموالاستیسیته با به کار بردن روش مشتق‌گیری برای میدان جابجایی و دما به دست آورده‌اند. اسلازالک و همکاران [۱۸] از تبدیل کیرشلف برای استخراج عبارات حساسیت طراحی شکل برای مسائل حرارتی غیرخطی با استفاده از روش متغیر الحاقی استفاده کرده‌اند. بوبارو [۱۹] از روش گلرکین بدون المان در جامدات ترموالاستیک استفاده کرده و آنالیز حساسیت را به روش مشتق‌گیری مستقیم تعیین نموده و در مسائل بهینه‌سازی گرمایی به کار گرفته است.

روش متغیرهای مختلط اولین بار توسط لینس و مولر [۲۰] بیان گردید. اسکویور و ترب [۲۱] با بهره‌گیری از این روش، مشتقات توابع حقیقی را تعیین کردند. در زمینه‌ی هوافضا مارتین و همکارانش [۲۲] از روش متغیر مختلط در سازه‌های هوایی سه‌بعدی جهت تعیین حساسیت برای استفاده در بهینه‌سازی طراحی استفاده کردند. رودریگز [۲۳] برای طراحی دریچه ورودی هواپیما، از روش متغیرهای مختلط به‌منظور به دست آوردن گرادین‌های مورد استفاده در الگوریتم بهینه‌سازی در مسئله بهینه‌سازی غیرخطی کوپل با معادلات ناویراستوکس جریان استفاده کرده است. اندرسون و همکارانش [۲۴] از روش متغیر مختلط برای تعیین مشتقات حساسیت در جریان‌های توربولانس استفاده کردند. تا به امروز، در تحلیل المان محدود سازه روش متغیر مختلط به‌ندرت به‌کارگیری شده است. وانگ و آپته [۲۵] کاربردهایی از روش متغیرهای مختلط برای مقدار ویژه و بردار ویژه آنالیز حساسیت ارائه کردند.

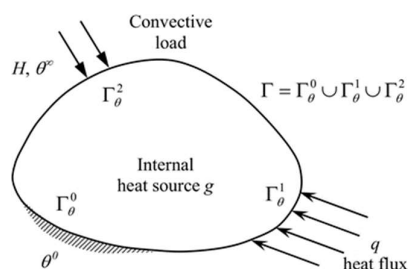
در مطالعات گذشته، به روش نیمه‌تحلیلی توجه کمتری شده و شاید دلیل اصلی آن حساس بودن این روش به مقدار اندازه گام و عدم اطمینان به دقت جواب به‌دست‌آمده است. این مقاله روش نیمه‌تحلیلی بهبودیافته جدیدی را برای محاسبه آنالیز حساسیت در مسائل ترموالاستیک خطی غیرکوپل ارائه می‌دهد که علاوه بر سادگی در پیاده‌سازی، دارای دقت و کارایی بالایی نسبت به روش‌های دیگر می‌باشد. این روش، ترکیبی از روش مشتق‌گیری مستقیم و روش متغیر مختلط بوده و توانسته خطاهای برش و گرد کردن را از بین ببرد. به‌این‌ترتیب به‌طور هم‌زمان از مزیت دقت روش تحلیلی و کارایی روش متغیر مختلط استفاده شده است.

۲- تحلیل مسائل ترموالاستیک

در این قسمت، معادله رسانش گرمایی پایا و همچنین معادله تعادل الاستیسیته تحت بار حرارتی ارائه می‌شود. این نوع مسئله در تحلیل اجزایی از ماشین‌آلات مانند تیغه‌های توربین که در آن‌ها تغییر شکل ناشی از دما قابل توجه است، کاربرد دارد. با توجه به اینکه اثرات دما و تغییر شکل سازه کوپل هستند، در اینجا با در نظر گرفتن اثرات حرارتی به‌صورت بار خارجی بر روی سازه، معادله غیرکوپل نسبتاً ساده‌ای به دست آورده شده است که می‌توان آن را به‌صورت توضیح داده‌شده در ادامه حل کرد.

۲-۱- تحلیل گرمایی

در این بخش یک جسم سه‌بعدی جامد همگن، ایزوتروپیک و ترموالاستیک به‌صورت شکل ۱ در نظر گرفته شده است. معادله رسانش گرمایی پایا و شرایط مرزی به‌صورت زیر هستند [۱۷].



شکل ۱- مدل تحلیل گرمایی

$$-k\theta_{,ii} = g \quad @ D \quad (1)$$

در محاسبه مدول حرارتی، E و ν به ترتیب مدول الاستیسیته و ضریب پواسون است. تانسور الاستیسیته $C^{ijmn}(T)$ در معادله (۱۳) به صورت زیر تعیین می شود.

$$C^{ijmn}(T) = \lambda(T)\delta^{ij}\delta^{mn} + \mu(T)(\delta^{im}\delta^{jn} + \delta^{in}\delta^{jm}) \quad (15)$$

$$\lambda(T) = (\nu(T)E(T)(1 + \nu(T))(12\nu(T))) \quad (16)$$

$$\mu(T) = (E(T)/2(1 + \nu(T))) \quad (17)$$

در رابطه فوق λ و μ ضرایب لامه و $E(T)$ و $\nu(T)$ به ترتیب مدول یانگ و نسبت پواسون می باشند. توجه شود که مدول یانگ و نسبت پواسون وابسته به دمای مطلق T می باشند. شکل ضعیف معادله الاستیسیته به صورت زیر است.

$$\int_D \sigma^{ij}(q, \theta) \epsilon^{ij}(\bar{q}) dD = \int_D B_i^j \bar{q}^i dD + \int_{\Gamma_2} T_i^j \bar{q}^i d\Gamma \quad \bar{q} \in U \quad (18)$$

که U فضای جابجایی مجازی سینماتیکی است.

$$U = \{q \in [S^1(D)]^3; q^i = 0, x \in \Gamma^0\} \quad (19)$$

با استفاده از رابطه تنش- کرنش ارائه شده در معادله (۱۳) و جایگذاری آن در معادله (۱۸)، خواهیم داشت.

$$\int_D C^{ijmn}(T) \epsilon^{mn}(q) \epsilon^{ij}(\bar{q}) dD = \int_D (B_i^j \bar{q}^i + \beta(T) \theta \bar{q}_i^j) dD + \int_{\Gamma_2} T_i^j \bar{q}^i d\Gamma \quad \bar{q} \in U \quad (20)$$

یادآور می شود که در رابطه فوق، مسئله حرارتی و مسئله الاستیسیته غیر کوپل هستند. بنابراین حتی اگر مدول یانگ و نسبت پواسون تابعی از دما باشند، مسئله الاستیسیته همچنان خطی است. با تعریف شکل دوخطی انرژی و شکل خطی بار روابط به صورت زیر به دست می آید.

$$A(q, \bar{q}) = \int_D C^{ijmn}(T) \epsilon^{mn}(q) \epsilon^{ij}(\bar{q}) dD \quad (21)$$

$$P(\bar{q}) = \int_D (B_i^j \bar{q}^i + \beta(T) \theta \bar{q}_i^j) dD + \int_{\Gamma_2} T_i^j \bar{q}^i d\Gamma \quad (22)$$

معادله (۲۰) به صورت زیر نوشته می شود.

$$A(q, \bar{q}) = P(\bar{q}) \quad \bar{q} \in U \quad (23)$$

۳- تحلیل مسئله

با استفاده از روش المان محدود می توان یک حل تقریبی معادلات حاکم که در بخش قبل ارائه شد را به دست آورد. در صورت داشتن مقادیر جابجایی و دما در گره های مسئله (q و θ) و میانمایی بین این مقادیر در یک المان، می توان آن ها را به صورت زیر پیوسته فرض کرد [۲۶].

$$z = N_i q_i \quad (24)$$

$$\theta = M_i \chi_i \quad (25)$$

که q_i و χ_i بردارهای مقادیر گره ای و N و M به ترتیب شامل توابع شکل برای جابجایی ها و دما باشد. حال با فرض جابجایی های کوچک، مؤلفه های تانسور کرنش با بردار جابجایی q به صورت زیر وابسته هستند.

$$\epsilon = Bq \quad (26)$$

که $\epsilon = \{\epsilon_{11} \epsilon_{22} \epsilon_{33} \gamma_{12} \gamma_{23} \gamma_{13}\}^T$ می باشد و ماتریس B بردار جابجایی کرنش بوده و به صورت روابط زیر تعریف می شود.

$$\theta = \theta_0 \quad @ \Gamma_0^0 \quad (2)$$

$$k \theta_{,i} n^i = q_h \quad @ \Gamma_0^1 \quad (3)$$

$$k \theta_{,i} n^i + H(\theta - \theta_{\infty}) = 0 \quad @ \Gamma_0^2 \quad (4)$$

که $\theta = T - T_0$ و T دمای مطلق، T_0 دمای مرجع در حالت بدون تنش جسم، θ_0 دمای معلوم جسم، θ_{∞} دمای محیط، n^i مؤلفه نام بردار یک عمود بر مرز، k رسانایی گرمایی جسم، H ضریب انتقال گرمای همرفتی، q_h بردار شارش گرما، g منبع گرمای داخلی، Γ_0^0 مرز با دمای معلوم، Γ_0^1 مرز با شارش گرمای معلوم و Γ_0^2 مرز با گرمای همرفتی معلوم می باشد. بالانویس و زیرنویس به ترتیب مؤلفه و مشتق نسبت به متغیر میدان را نشان می دهد. برای به دست آوردن شکل ضعیف شده مسئله انتقال گرما دو طرف معادلات (۱) تا (۴) در دمای مجازی $\bar{\theta}$ ضرب شده و سپس روی دامنه D انتگرال گرفته می شود و باهم جمع می شوند.

$$\int_D k \theta_{,i} \bar{\theta}_{,i} d\Omega + \int_{\Gamma_0^2} H \bar{\theta} d\Gamma = \int_D g \bar{\theta} d\Omega + \int_{\Gamma_0^1} q_h \bar{\theta} d\Gamma + \int_{\Gamma_0^2} H \theta_{\infty} \bar{\theta} d\Gamma \quad (5)$$

در صورتی که I فضای دمای مجاز سینماتیکی به صورت رابطه (۶) تعریف شود که در آن S^1 فضای سوبولف^۱ از مرتبه ۱ است، برای تمام $\bar{\theta}$ انتخاب شده از مجموعه I ، شکل دوخطی انرژی و شکل خطی بار برای دماها به صورت روابط (۷) و (۸) تعریف می شود.

$$I = \{\theta \in [S^1(D)]; \theta = 0, x \in \Gamma_0^0\} \quad (6)$$

$$A(\theta, \bar{\theta}) \equiv \int_D k \theta_{,i} \bar{\theta}_{,i} dD + \int_{\Gamma_0^2} H \theta \bar{\theta} d\Gamma \quad (7)$$

$$L(\bar{\theta}) \equiv \int_D g \bar{\theta} dD + \int_{\Gamma_0^1} q_h \bar{\theta} d\Gamma + \int_{\Gamma_0^2} H \theta_{\infty} \bar{\theta} d\Gamma \quad (8)$$

با توجه به روابط فوق می توان معادله (۵) را به شکل معادله (۹) بازنویسی کرد.

$$A(\theta, \bar{\theta}) = L(\bar{\theta}), \quad \bar{\theta} \in I \quad (9)$$

۲-۲- تحلیل الاستیک

معادله تعادل و شرایط مرزی برای مسائل الاستیسیته سه بعدی به صورت زیر نوشته می شود.

$$-\sigma_{,j}^i = B_i^j \quad @ D \quad (10)$$

$$q^i = q^{i0} \quad @ \Gamma_0^0 \quad (11)$$

$$T_i^j = \sigma^{ij} n^j \quad @ \Gamma_0^2 \quad (12)$$

که B_i^j مؤلفه نام نیروی حجمی، T_i^j مؤلفه نام نیروهای سطحی، q^i مؤلفه نام جابجایی، Γ_0^0 مرز با جابجایی معلوم و Γ_0^2 مرز با نیروی کنش معلوم می باشد. در معادله (۱۰) تانسور تنش به صورت زیر تعریف می شود.

$$\sigma^{ij}(q, \theta) = C^{ijmn}(T) [\epsilon^{mn}(q) - \delta^{mn} \alpha \theta] = C^{ijmn}(T) \epsilon^{mn}(q) - \beta(T) \delta^{ij} \theta \quad (13)$$

که $\theta = T - T_0$ ، $\epsilon^{ij}(q) = (q_j^i + q_i^j)/2$ ، تانسور کرنش، α ضریب انبساط گرمای خطی، δ^{ij} کرانکر دلتا، β مدول حرارتی بوده و به صورت رابطه (۱۴) محاسبه می شود.

$$\beta(T) = \alpha E(T) / (1 - 2\nu(T)) \quad (14)$$

¹Weak form

² Sobolev

۴-آنالیز حساسیت

معادله المان محدود برای مسئله رسانش گرمای پایا با فرمول (۳۸) داده شده است. در اینجا فرض بر این است که h, k, G و q_h تابعی از دما نباشند. با حل معادله (۳۸)، مقادیر دما در جسم (X) به دست می آید و با داشتن توزیع دمای محاسبه شده می توان اثرات آن را روی تحلیل المان محدود استاتیک اعمال کرد. دمای X باعث کرنش گرمایی ناشی از انبساط می شود که این اثر به صورت بار گرمایی F^{th} در معادله (۳۷) ظاهر شده است. باید به این نکته توجه داشت که از این کرنش گرمایی مستقیماً نمی توان برای محاسبه میدان تنش استفاده کرد و شرایط مرزی و مقاومت سازه ای را هم زمان باید در نظر داشت. به عبارت دیگر اگر سازه ای به وسیله تکیه گاه هایش برای انبساط و یا انقباض محدود نشود، در سازه در اثر گرما تنش ایجاد نمی شود.

برای به دست آوردن تحلیل حساسیت سازه می توان از روش مستقیم استفاده کرد. روش مستقیم بر پایه مشتق گیری ضمنی از معادلات تعادل استوار است. بنابراین در تحلیل حساسیت برای دما از معادله (۳۸) نسبت به پارامترهای طراحی $h_p, p = 1, \dots, P$ مشتق گرفته می شود و با منظم کردن آن، عبارت زیر برای حساسیت های $\frac{\partial X}{\partial h_p}$ به دست می آید.

$$K^{th} \frac{\partial X}{\partial h_p} = -\frac{\partial K^{th}}{\partial h_p} X + \frac{\partial Q}{\partial h_p} \quad (۴۵)$$

معادله (۴۵) شبیه معادله (۳۸) است و تنها تفاوت آن در طرف راست معادله جدید است که بردار شبه بار گرمایی نامیده می شود و باید محاسبه گردد. هنگامی که طرف راست معادله جدید محاسبه شود، با حل سیستم معادلات (۴۵)، $\frac{\partial X}{\partial h_p}$ به دست می آید.

با مشتق گیری از معادله (۳۶) نسبت به پارامترهای طراحی $h_p, p = 1, \dots, P$ و منظم کردن آن عبارت زیر برای تحلیل حساسیت طراحی استاتیک به دست می آید.

$$K \frac{\partial q}{\partial h_p} = -\frac{\partial K}{\partial h_p} q + \frac{\partial F}{\partial h_p} + \frac{\partial F^{th}}{\partial h_p} \quad (۴۶)$$

به طرف راست معادله (۴۶) بردار شبه نیرو گفته می شود که همانند طرف راست معادله (۴۵) باید محاسبه شود تا بتوان با حل این سیستم معادلات، پارامتر $\frac{\partial q}{\partial h_p}$ را به دست آورد. در نهایت با استفاده از این حساسیت ها، می توان حساسیت توابع مورد نظر را به دست آورد.

ذکر این نکته مهم است که برای محاسبه $\frac{\partial F^{th}}{\partial h_p}$ و $\frac{\partial K^{th}}{\partial h_p}$ استفاده از اطلاعات حساسیت $\frac{\partial X}{\partial h_p}$ نیز ضروری است. زیرا با توجه به وجود دما در رابطه (۴۶)، تانسور الاستیسیته C به کاررفته در ماتریس سفتی K و همچنین F^{th} ممکن است وابسته به دما باشد. محاسبه این حساسیت علاوه بر دخیل بودن در محاسبه عبارت های بردار شبه نیرو، در تحلیل حساسیت طراحی استاتیک (معادله (۴۳)) مورد استفاده قرار می گیرد. به این ترتیب اثرات حساسیت گرمایی در حساسیت تنشی در نظر گرفته می شود.

در روش تحلیلی، عبارات $\frac{\partial F}{\partial h_p}, \frac{\partial K}{\partial h_p}, \frac{\partial Q}{\partial h_p}, \frac{\partial K^{th}}{\partial h_p}$ و $\frac{\partial F^{th}}{\partial h_p}$ به صورت دقیق محاسبه می شود. محاسبه دقیق این عبارات علاوه بر سخت و طاقت فرسا بودن، روش به دست آوردن آن ها از مسئله ای به مسئله دیگر ممکن است عوض شود. در روش نیمه تحلیلی مرسوم این عبارات با روش تفاضل محدود محاسبه می شود و سپس حساسیت ها با استفاده از حل سیستم

$$B = [b_1 b_2 \dots b_i \dots b_m] \quad (۲۷)$$

$$b_i = \begin{bmatrix} N_{i,x} & 0 & 0 \\ 0 & N_{i,y} & 0 \\ 0 & 0 & N_{i,z} \\ N_{i,y} & N_{i,x} & 0 \\ 0 & N_{i,z} & N_{i,y} \\ N_{i,z} & 0 & N_{i,x} \end{bmatrix}, i = 1, \dots, m \quad (۲۸)$$

گردان های دما به صورت زیر بیان می شود.

$$\nabla \theta = \left\{ \frac{\partial \theta}{\partial x} \frac{\partial \theta}{\partial y} \right\}^T = B_T X \quad (۲۹)$$

$$B_T = \left\{ \frac{\partial M}{\partial x} \frac{\partial M}{\partial y} \right\}^T \quad (۳۰)$$

با جایگزینی معادلات (۲۴) تا (۲۶) و (۲۹) در معادله (۲۰) و (۲۰)، معادلات زیر به دست می آیند.

$$\bar{X}^T K^{th} X = \bar{X}^T Q \quad (۳۱)$$

$$\bar{q}^T K q = \bar{q}^T (F + F^{th}) \quad (۳۲)$$

که:

$$K^{th} = \int_{\Omega} k B_T^T B_T dD + \int_{\Gamma_0} H M^T M d\Gamma \quad (۳۳)$$

$$Q = \int_D g M^T dD + \int_{\Gamma_0} q_h M^T d\Gamma + \int_{\Gamma_0} H \theta_{\infty} M^T d\Gamma \quad (۳۴)$$

$$K = \int_D B^T C B dD \quad (۳۵)$$

$$F = \int_D B_f N^T dD + \int_{\Gamma_2} T_f N^T d\Gamma \quad (۳۶)$$

$$F^{th} = \int_D \beta B^T a \theta dD \quad (۳۷)$$

a بردار $(1,1,1,0,0,0)^T$ هست. F ناشی از بار مکانیکی و F^{th} ناشی از بار گرمایی هست. از آنجایی که معادله (۳۱) باید برای تمامی \bar{X} ها و معادله (۳۲) برای تمامی \bar{q} ها برقرار باشد، می توان معادلات زیر را نتیجه گرفت.

$$K^{th} X = Q \quad (۳۸)$$

$$K q = F + F^{th} \quad (۳۹)$$

K, Q, F و F^{th} به وسیله ترکیب کردن معادلات (۳۳) تا (۳۷) بر روی تمام المان ها به دست می آید.

$$K^{th} = \sum_{e=1}^{N_e} \left(\int_{D_e} k B_T^T B_T dD + \int_{\Gamma_0^e} H M^T M d\Gamma \right) \quad (۴۰)$$

$$Q = \sum_{e=1}^{N_e} \left(\int_{D_e} g M^T dD + \int_{\Gamma_0^e} q_h M^T d\Gamma + \int_{\Gamma_0^e} H \theta_{\infty} M^T d\Gamma \right) \quad (۴۱)$$

$$K = \sum_{e=1}^{N_e} \int_{D_e} B^T C B dD \quad (۴۲)$$

$$F = \sum_{e=1}^{N_e} \left(\int_{D_e} B_f N^T dD + \int_{\Gamma_2^e} T_f N^T d\Gamma \right) \quad (۴۳)$$

$$F^{th} = \sum_{e=1}^{N_e} \int_{D_e} \beta B^T a \theta dD \quad (۴۴)$$

در روابط فوق N_e تعداد کل المان های جسم است و انتگرال ها روی حجم و یا مرزهای المان گرفته می شوند. بعد از ترکیب کردن ماتریس های سفتی و نیرویی المان ها و به دست آوردن ماتریس سفتی و بردار نیروی کل با اعمال شرط مرزی و سپس حل سیستم معادلات (۳۸) و (۳۹) میدان دما و جابجایی به دست می آید.

$$\frac{\partial Q}{\partial h_p} = \frac{\text{Im}[Q(h_p+i\Delta h_p)]}{\Delta h_p} \quad (51)$$

پس از محاسبه این عبارات حساسیت $\frac{\partial X}{\partial h_p}$ با معادلات زیر به دست می آید.

$$\frac{\partial X}{\partial h_p} = (K^{th})^{-1} \left(-\frac{\partial K^{th}}{\partial h_p} X + \frac{\partial Q}{\partial h_p} \right) \quad (52)$$

عبارات $\frac{\partial F^{th}}{\partial h_p}$, $\frac{\partial F}{\partial h_p}$, $\frac{\partial K}{\partial h_p}$ نیز به صورت زیر تعیین می گردد.

$$\frac{\partial K}{\partial h_p} = \frac{\text{Im}[K(h_p+i\Delta h_p, \varphi+i\Delta \chi)]}{\Delta h_p} \quad (53)$$

$$\frac{\partial F}{\partial h_p} = \frac{\text{Im}[F(h_p+i\Delta h_p)]}{\Delta h_p} \quad (54)$$

$$\frac{\partial F^{th}}{\partial h_p} = \frac{\text{Im}[F^{th}(h_p+i\Delta h_p, \varphi+i\Delta \chi)]}{\Delta h_p} \quad (55)$$

K و F^{th} همان طور که در بالا اشاره شد به دما هم وابسته اند و باید حساسیت آن در نظر گرفته شود. در رابطه (55)، $\Delta \chi$ از رابطه (56) به دست می آید.

$$\Delta \chi = \frac{\partial X}{\partial h_p} \Delta h_p \quad (56)$$

پس از محاسبه این عبارات، حساسیت با معادلات زیر به دست می آید.

$$\frac{\partial q}{\partial h_p} = K^{-1} \left(-\frac{\partial K}{\partial h_p} q + \frac{\partial F}{\partial h_p} + \frac{\partial F^{th}}{\partial h_p} \right) \quad (57)$$

زمانی که حساسیت جابجایی ها و دما پیدا شد، حساسیت توابع مورد نیاز قابل محاسبه خواهد بود. در صورتی که R تابعی از پارامترهای طراحی $h_p, p = 1, \dots, P$ و وابسته به میدان جابجایی های q و میدان دمای χ به شکل رابطه (58) باشد.

$$R = R(q(h_p), \chi(h_p), h_p) \quad (58)$$

مشقت پاسخ R نسبت به پارامتر طراحی h_p به صورت زیر تعریف می شود.

$$\frac{dR}{dh_p} = \frac{\partial R}{\partial h_p} + \frac{\partial R}{\partial u} \frac{\partial q}{\partial h_p} + \frac{\partial R}{\partial \chi} \frac{\partial \chi}{\partial h_p} \quad (59)$$

با استفاده از فرمول زیر نیز $\frac{dR}{dh_p}$ به دست می آید.

$$\frac{dR}{dh_p} = \frac{\text{Im}[\theta(q+i\Delta q, \chi+i\Delta \chi, h_p+i\Delta h_p)]}{\Delta h_p} \quad (60)$$

که:

$$\Delta q = \frac{\partial q}{\partial h_p} \Delta h_p \quad (61)$$

$\Delta \chi$ در معادله (56) آمده است. فلوجارت محاسبه آنالیز حساسیت در شکل ۲ ارائه شده است.

در این پژوهش، برای تحلیل مسائل ترموالاستیک برنامه المان محدود دوبعدی با فرمول بندی و فرضیات ذکر شده در قسمت های قبلی در نرم افزار متلب^۳ نوشته شده است. برنامه المان محدود نوشته شده از تابع شکل خطی مربعی چهار گره ای برای مش دوبعدی استفاده می کند. هندسه مسائل و مش بندی آن ها در نرم افزار آباکوس^۴ ایجاد شده و سپس به مشخصات هندسی مسئله برنامه متلب وارد می شود و مسئله توسط برنامه تحلیل می گردد. بعد از حل سیستم معادلات برای دما و جابجایی ها، تنش ها در هر گره به صورت المان به المان و با استفاده از روابط الاستیسیته و تابع شکل و جابجایی های گره ها محاسبه می شود. از آنجایی که تنش های محاسبه شده از یک المان ممکن است با تنش های

معادلات (۴۵) و (۴۶) به دست می آیند. از مزایای این روش می توان به سادگی آن اشاره کرد. نقطه ضعف این روش، حساس بودن آن به اندازه مقدار گام و تأثیر پذیری نتایج از خطاهای برش و گرد کردن می باشد. این مورد به خصوص زمانی که تعداد عبارات زیاد باشد، نمود بیشتری پیدا کرده و خطا در محاسبه آن ها باعث ایجاد خطای کل بزرگ تر می شود. در این مقاله از متغیر مختلط برای محاسبه عددی این عبارات استفاده شده است تا حساس بودن نتایج نسبت به اندازه گام از بین برود. مزیت دیگر روش پیشنهادی مقاله این است که چون در تمامی کد پیاده سازی شده از اعداد مختلط استفاده نمی شود، حافظه اشغال شده و همچنین زمان اجرای برنامه پایین است. در نتیجه این روش منجر به نتایج مطمئن در زمان پایین خواهد شد. در بخش بعد محاسبه مشتقات با استفاده از متغیر مختلط شرح داده می شود.

۵- محاسبه حساسیت با استفاده از متغیر مختلط

روش متغیرهای مختلط بر پایه بسط سری تیلوری است که یک گام مختلط را روی محور موهومی می گیرد. برای استخراج تقریب تفاضل محدود به منظور محاسبه مشتقات می توان سری تیلور تابع را در نقطه x با استفاده از فرمول تفاضل مرکزی را به صورت زیر به دست آورد [۱۳].

$$\frac{df}{dx} \approx \frac{f(x+\Delta x) - f(x-\Delta x)}{2\Delta x} \quad (47)$$

این عبارت برای محاسبه مشتق دارای خطایی از مرتبه $O(h^2)$ است. عیوب این روش بالا بودن زمان محاسباتی آن و احتمال عدم دقت در محاسبه مشتقات است. عیب اول از این واقعیت سرچشمه می گیرد که معادله (۴۷) نیاز به دو حل با همگرایی خوب برای محاسبه توابع دارد. عیب دوم به این علت است که مشتقات به اندازه گام حساس هستند. برای کمینه کردن خطای برش، اندازه گام کوچک انتخاب می شود. اما اندازه گام بیش از اندازه کوچک ممکن است باعث تولید خطای از بین رفتن ارقام بامعنی شود. از طرفی مقدار بهینه برای اندازه گام از قبل مشخص نیست و ممکن است از یک تابع به تابع دیگر و از یک متغیر به متغیر دیگر تغییر کند. اگر سری تیلور تابع با استفاده از یک گام مختلط بسط داده شود معادله زیر به دست می آید [۲۱].

$$f(x+i\Delta x) = f(x) + i\Delta x \frac{df}{dx} - \frac{\Delta x^2}{2} \frac{d^2f}{dx^2} - \frac{i\Delta x^3}{6} \frac{d^3f}{dx^3} + \frac{\Delta x^4}{24} \frac{d^4f}{dx^4} + \dots \quad (48)$$

حل معادله فوق برای قسمت موهومی تابع، رابطه (۴۹) را نتیجه می دهد.

$$\frac{df}{dx} \approx \frac{\text{Im}[f(x+i\Delta x)]}{\Delta x} \quad (49)$$

خطای این عبارت برای محاسبه مشتق از مرتبه $O(h^2)$ است. بنابراین با محاسبه تابع با آرگومان مختلط، بدون خطای تفریق، تابع و مشتق آن به دست می آید. قسمت حقیقی رابطه (۴۵)، مقدار تابع است. از آنجایی که مسئله خطی فرض شده است، K^{th} و Q تابعی از دما نمی باشند و محاسبه عبارات $\frac{\partial Q}{\partial h_p}$, $\frac{\partial K^{th}}{\partial h_p}$ به صورت زیر درمی آید.

$$\frac{\partial K^{th}}{\partial h_p} = \frac{\text{Im}[K^{th}(h_p+i\Delta h_p)]}{\Delta h_p} \quad (50)$$

³MATLAB
⁴ABAQUS

می‌دهد. برای اعتبارسنجی کد نوشته‌شده، از نتایج ارائه‌شده در مرجع [۲۶] استفاده شده و در جدول ۲ مقایسه‌ای بین این نتایج انجام پذیرفته است. بر اساس نتایج ارائه‌شده در این جدول، اختلاف ناچیزی بین نتایج وجود دارد. حساسیت‌های جابجایی $\frac{\partial v_L}{\partial L}$ برای طول گام‌های مختلف در جدول ۳ ارائه شده است.

جدول ۲- نتایج حل تیر مرکب با استفاده از کد نوشته‌شده و

مرجع [۲۶]

کد نوشته‌شده	[۲۶]	درصد اختلاف نسبی
۰/۶۷۰۷	۰/۶۷۱۴	۰/۱
۰/۲۶۹۵	۰/۲۶۸۴	۰/۴

جدول ۳- مقادیر حساسیت جابجایی انتهای تیر مرکب نسبت به طول

$$\left(\frac{\partial v_L}{\partial L}\right)L$$

طول گام	روش پیشنهادی	تفاضل محدود	نیمه‌تحلیلی مرسوم
۱-۱۰	-۶/۵۶۸۵۱۱۵۴۹	۰/۰۲۶۹۴۶۳۴۶	-۰/۵۱۶۷۹۴۰۷۶
۲-۱۰	-۰/۰۴۹۴۳۵۰۳۸	۰/۰۲۶۹۵۰۰۹۹	-۰/۰۴۶۰۹۸۵۰۱
۳-۱۰	۰/۰۲۶۱۸۵۰۳۶	۰/۰۲۶۹۴۹۷۵	۰/۰۲۶۱۷۸۷۶۲
۴-۱۰	۰/۰۲۶۹۵۷۸۲۲	۰/۰۲۶۹۴۷۷۸۹	۰/۰۲۶۹۴۱۷۳۸
۵-۱۰	۰/۰۲۶۹۵۰۱۷۷	۰/۰۲۶۹۷۷۰۶۴	۰/۰۲۶۹۸۰۲۵۴
۶-۱۰	۰/۰۲۶۹۵۰۰۹۹	۰/۰۲۶۸۱۴۰۵۵	۰/۰۲۶۹۹۴۷۳۱
۷-۱۰	۰/۰۲۶۹۵۰۱۰۱	۰/۰۳۱۵۶۶۸۸۲	۰/۰۳۰۲۷۷۵۶۸
۸-۱۰	۰/۰۲۶۹۵۰۰۹۹	۰/۰۱۲۲۴۷۶۵۸	۰/۰۱۷۵۷۳۲۲۴
۹-۱۰	۰/۰۲۶۹۵۰۱۰۲	۰/۰۳۷۲۲۰۷۰۹۹	۰/۰۲۶۷۸۳۲۰۲۳
۱۰-۱۰	۰/۰۲۶۹۵۰۱۰۰	۱/۳۲۰۵۷۴۷۶۱	۱/۱۶۳۰۶۵۵۸۲
۱۱-۱۰	۰/۰۲۶۹۵۰۱۰۰	۴۸/۱۲۹۵۲۲۵۹	۱۲/۵۹۰۶۶۸۳
۱۲-۱۰	۰/۰۲۶۹۵۰۱۰۰	-۵۹/۵۸۵۹۴۷۲۹	-۱۶۸/۰۶۱۹۲۲۱
۱۳-۱۰	۰/۰۲۶۹۵۰۰۹۹	-۳۳۷۶/۸۳۰۴۸۲	-۱۷۸۲/۶۲۰۷۰۷
۱۴-۱۰	۰/۰۲۶۹۵۰۱۰۱	-۱۴۵۹۱/۲۳۳۷۸	۸۵۸۰/۹۸۸۳۶
۱۵-۱۰	۰/۰۲۶۹۵۰۰۹۹	۰/۰۰۰۰۰۰۰۰	۰/۰۰۰۰۰۰۰۰

نتایج ارائه‌شده در جدول ۳، وابستگی محاسبه حساسیت به اندازه طول گام در دو روش تفاضل محدود و نیمه‌تحلیلی مرسوم را نشان می‌دهد و بنابراین نیاز به استفاده از یک روش نیمه‌تحلیلی جدید برای تحلیل حساسیت طراحی مسائل ترموالاستیک را تأیید می‌کند. در این مثال در روش تفاضل محدود برای طول گام کوچک‌تر از 10^{-7} دقت محاسبات به علت از بین رفتن ارقام بامعنی و گرد کردن ارقام محاسبه‌شده از دست می‌رود. در روش نیمه‌تحلیلی مرسوم در طول گام بزرگ‌تر از 10^{-3} و طول کوچک‌تر از 10^{-6} دقت محاسبات از بین می‌رود. به عنوان مثال درصد اختلاف نسبی مقدار حساسیت بین طول گام 10^{-6} و 10^{-7} در روش ارائه شده، تفاضل محدود و روش نیمه‌تحلیلی به ترتیب

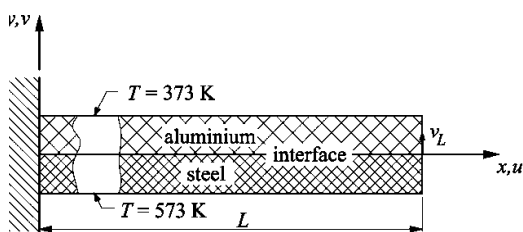
محاسبه‌شده با دیگر المان مطابقت نداشته باشد، از متوسط‌گیری برای هموارسازی میدان تنش در نقاط گره‌ای استفاده شده است. به منظور انجام محاسبه حساسیت شکل، گام کوچکی باید به صورت موهومی در مختصات گره‌ای مناسب ایجاد شود. برای این منظور اولین گره قرار گرفته‌شده در پارامتر موردنظر انتخاب می‌گردد. تغییر نسبی برای مختصات X و Y بستگی به حساسیتی دارد که قرار است محاسبه شود. تمام گره‌های دیگر در مدل بدون تغییر باقی می‌مانند. اگر هدف محاسبه حساسیت نسبت به خصوصیات ماده باشد، برای همان خاصیت مورد مطالعه گام تغییر در نظر گرفته می‌شود. برای محاسبه حساسیت به خاطر سادگی از رابطه (۶۰) استفاده شده است.

۶- مثال‌های عددی

در این قسمت به تحلیل حساسیت چند مسئله برای اعتبارسنجی روش ذکر شده پرداخته می‌شود. برای پیاده‌سازی روش مذکور کد المان محدودی به همراه تحلیل حساسیت در نرم‌افزار متلب نوشته‌شده و سپس برای مثال‌های این مقاله به کار برده می‌شود. نتایج به دست آمده با حساسیت محاسبه‌شده از حل‌های روش تفاضل محدود و روش نیمه‌تحلیلی مرسوم مقایسه می‌شود.

۶-۱- مثال ۱

تیر مرکب یکسر گیردار دوبعدی مطابق شکل ۳ در نظر گرفته شده است. تیر از دو نوع ماده با ارتفاع برابر و دماهای متفاوت در مرزهای بالا و پایین تیر تشکیل شده است. طول تیر $L = 50 \text{ mm}$ و ارتفاع آن 2 mm است. در اینجا حساسیت جابجایی نوک تیر نسبت به طول آن یعنی $\frac{\partial v_L}{\partial L}$ برای طول گام‌های مختلف بررسی می‌شود. خواص مکانیکی دو مواد تیر در جدول ۱ آمده است.

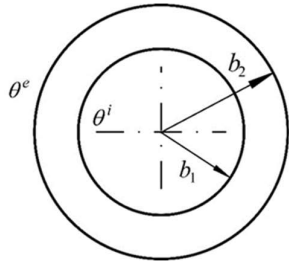


شکل ۳- هندسه تیر مرکب از دو نوع ماده به همراه شرط مرزی [۲۶]

جدول ۱- خواص مکانیکی مواد به کاررفته در تیر

خواص	فولاد	آلومینیوم
مدول یانگ GPa	۲۱۰	۷۰
نسبت پواسون	۰/۳	۰/۳
رسانایی گرمایی $W/(mm^2 \cdot K)$	27×10^{-6}	$2/2 \times 10^{-6}$
ضریب انبساط K^{-1}	$1/2 \times 10^{-5}$	$2/5 \times 10^{-5}$

مدل المان محدود شامل ۳۲۰۰ المان ۴ گره‌ای، جابجایی عمودی نوک تیر تحت بار حرارتی اعمالی به آن را $v_L = 0/6707 \text{ mm}$ نتیجه



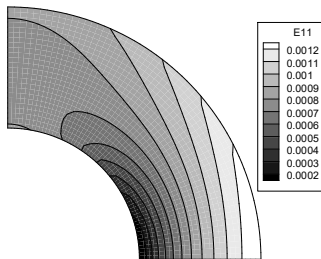
شکل ۵- هندسه دیسک و شرایط مرزی

ماده دیسک الاستیک خطی بوده و دارای ثوابت مهندسی E ، ν و α می‌باشد. شرایط مرزی مسئله شامل دما و تنش شعاعی در سطوح داخلی و خارجی دیسک به صورت زیر است.

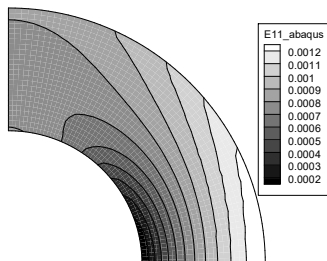
$$\theta(b_1) = \theta^i, \theta(b_2) = \theta^e \quad (62)$$

$$\sigma_r(b_1) = 0, \sigma_r(b_2) = 0 \quad (63)$$

در این مسئله متغیرهای طراحی مسئله شعاع داخلی و خارجی دیسک (b_1 و b_2) در نظر گرفته شده و هدف محاسبه تغییرات انرژی U نسبت به این پارامترها است. در شبیه‌سازی از تقارن مسئله برای صرفه‌جویی در زمان استفاده شده است. مسئله به کمک دو حالت برنامه المان محدود نوشته شده در نرم‌افزار متلب و همچنین نرم‌افزار آباکوس تحلیل شده است. در شکل‌های ۶ و ۷، چگونگی تغییرات کرنش ϵ_x با استفاده از کد نوشته شده در نرم‌افزار متلب و آباکوس در دیسک آورده شده است. نتایج شبیه‌سازی با متلب در نرم‌افزار تکپلات^۵ نمایش داده شده است. همان‌طور که واضح است اختلاف چندانی مشاهده نمی‌شود.

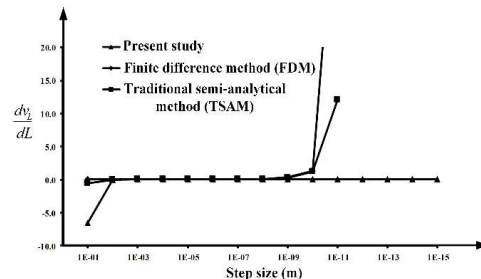


شکل ۶- حل مسئله دیسک با استفاده از برنامه نوشته شده



شکل ۷- حل مسئله دیسک با استفاده از نرم‌افزار آباکوس

حدود $18,000,000,000$ و 12 است. مقادیر ذکر شده با زیاد شدن اختلاف بین طول گام‌ها در دو روش تفاضل محدود و نیمه تحلیلی افزایش می‌یابد. اگر در این مثال تیر نازک‌تری بررسی می‌شد، خطای مسئله بالاتر می‌رفت. زیرا خطای گرد کردن با چرخش المان نسبت مستقیم دارد و هرچه تیر نازک‌تر باشد، چرخش بیشتری داشته و در نتیجه خطای بالاتری پدید خواهد آمد [۱۵]. روش تفاضل محدود به‌جز در طول گام‌های بسیار کوچک، نتایج خوبی را می‌دهد. ولی روش نیمه‌تحلیلی پیشنهادی نتایج دقیقی را در محدوده بالایی از اندازه گام در بردارد. در شکل ۴، به‌صورت بهتری نتایج به‌دست‌آمده توسط روش‌های مختلف ارائه شده است. واضح است که روش تفاضل محدود و روش نیمه‌تحلیلی مرسوم همگرایی قابل‌اطمینانی در هر گام ندارند و کارایی مناسب برای روش نیمه‌تحلیلی مرسوم تنها در محدوده 10^{-3} تا 10^{-6} و برای روش تفاضل محدود در محدوده 10^{-1} تا 10^{-6} دیده می‌شود. خصوصاً در محدوده کوچک‌تر از 10^{-1} همگرایی این دو روش بسیار نامنظم است و نشان‌دهنده تمایل به واگرایی است. علاوه بر این نتایج نشان می‌دهد که روش تفاضل محدود نسبت به دو روش دیگر حساسیت کمتری نسبت به خطای برش دارد و در طول گام بالاتر جواب دقیق‌تری نسبت به دو روش دیگر دارد. در نتایج به‌دست‌آمده از روش نیمه‌تحلیلی ارائه‌شده، خطای ناشی از برش وجود دارد اما خطای گرد کردن دیده نمی‌شود. بنابراین می‌توان به هر میزان دلخواه طول گام را کوچک در نظر گرفت و به جواب مطلوب رسید. در دیگر روش‌ها به‌طورکلی هر دو خطای برش و گرد کردن وجود دارد. بنابراین در انتخاب طول گام باید دقت کرد تا این خطاها به وجود نیایند.



شکل ۴- حساسیت جایجایی سر تیر نسبت به طول تیر

در مرجع [۲۶] محاسبه حساسیت به کار برده وابسته به اندازه گام نیست و با گام درشت و کوچک به یک جواب می‌رسد. اما کد نویسی آن وابسته به نوع المان و محدود به المان لاگرانژ است. درحالی‌که در روش پیشنهادی این مقاله مقدار حساسیت وابسته به نوع المان نبوده و با در نظر گرفتن گام به اندازه کافی کوچک، برای همه المان‌ها به جواب قابل قبولی دست می‌یابد.

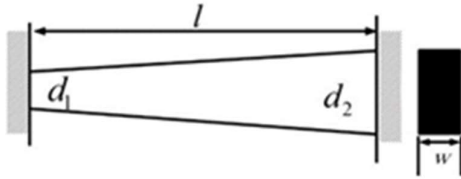
۲-۶- مثال ۲

دیسک همگن مطابق شکل ۵ با شعاع داخلی b_1 و شعاع خارجی b_2 را در نظر بگیرید. در این مثال فرض بر این است که منبع گرمایی داخلی و نیروهای حجمی در دیسک وجود ندارند.

⁵ Techplot

۳-۶-۳ مثال

تیری با سطح مقطع متغیر نشان داده شده در شکل ۸ را در نظر بگیرید. تیر از صفر تا ۱۰۰۰ درجه سلسیوس (T) به صورت یکنواخت گرما داده می شود.



شکل ۸- تیر مقید تحت بار گرمایی

میدان تنش تحلیلی با استفاده از شرایط سازگاری بین تغییر شکل ناشی از بار حرارتی و بار مکانیکی به صورت رابطه (۶۴) به دست می آید [۱۷].

$$\sigma = -\frac{E\alpha T(d_2-d_1)}{[d_1+(d_2-d_1)x/l]\log(d_2/d_1)} \quad (64)$$

با انتخاب ارتفاع دو انتهای تیر به عنوان متغیرهای طراحی (d_1 و d_2) حساسیت تنش به صورت زیر محاسبه می شود.

$$\frac{\partial \sigma}{\partial d_1} = -E\alpha T \frac{(d_2/d_1-1)[d_1+(d_2-d_1)x/l]-d_2 \log(d_2/d_1)}{([d_1+(d_2-d_1)x/l]\log(d_2/d_1))^2} \quad (65)$$

$$\frac{\partial \sigma}{\partial d_2} = \frac{\partial \sigma}{\partial d_1} = -E\alpha T \frac{(d_2/d_1-1)[d_1+(d_2-d_1)x/l]-d_2 \log(d_2/d_1)}{([d_1+(d_2-d_1)x/l]\log(d_2/d_1))^2} \quad (66)$$

برای محاسبه حساسیت تنش نسبت به پارامترهای طراحی با استفاده از روش پیشنهادی این مقاله، باید ابتدا به تحلیل آن با استفاده از روش المان محدود پرداخت. برای این منظور تیر به صورت دوبعدی مدل شد و شرایط مرزی عایق روی تمامی سطوح به جز دو سر انتهایی اعمال گردید. مدل المان محدود برای تیر شامل ۵۴ گره و ۲۰ المان چهار گره ای هست. انتهای چپ و راست گیردار است. طول l و عرض w تیر، به ترتیب ۵۰ mm و ۱ mm است. مدول یانگ $E = 207 \text{ GPa}$ ، $\alpha = 10^{-6} \text{ } ^\circ\text{C}^{-1}$ است. پواسون $\nu = 0.3$ و ضریب انبساط گرمایی α برابر با $10^{-6} \text{ } ^\circ\text{C}^{-1}$ است.

با توجه به معلوم بودن توزیع دما، تحلیل انتقال گرما برای این مسئله نیازی نیست. ولی برای امتحان معادله انتقال حرارت در معادله (۳۸) دماهای 1000°C در دو انتها اعمال می شود.

همان طور که انتظار می رفت نتایج دما در تیر با دماهای مرز یکسان به دست آمد و این بدین معنی است که تحلیل المان محدود انتقال گرما قادر به توصیف پروفیل دمای همگن نیز هست.

تنش و حساسیت های تنش به دست آمده از حل دقیق و تحلیل المان محدود برای گام 10^{-5} در جدول ۶ آمده است. خطای تنش برای مدل المان محدود در این حالت زیر ۳ درصد است که مربوط به تنش های محاسبه شده در مرزها هست. در سایر نقاط خطا بسیار پایین تر است.

در جدول های ۴ و ۵ مقادیر حساسیت های انرژی به ازای مقادیر مختلف اندازه گام با استفاده از روش نیمه تحلیلی پیشنهادی، روش تفاضل محدود و روش نیمه تحلیلی مرسوم ارائه شده است.

در این نتایج نیز کارایی خوبی برای محاسبه حساسیت طراحی با استفاده از ترکیب روش نیمه تحلیلی با متغیر مختلط دیده می شود. نتایج نشان می دهد که همگرایی مطمئنی صرف نظر از اندازه گام وجود دارد. در این مثال با توجه به کمتر بودن چرخش المان نسبت به تیر در نظر گرفته شده در مثال قبل، دامنه مطمئن طول گام در دو روش دیگر نسبت به مثال قبل وسیع تر هست.

جدول ۴- مقادیر حساسیت انرژی کرنشی دیسک نسبت به شعاع

$(\frac{\partial U}{\partial b_1}) b_1$ داخلی

طول گام	روش نیمه تحلیلی پیشنهادی	تفاضل محدود	روش نیمه تحلیلی مرسوم
۱-۱۰	-۰/۳۴۰۷۸۳۳۳۵۰	-۰/۴۱۸۲۱۳۲۵۲	-۰/۶۹۲۶۳۵۸۳۵
۲-۱۰	-۰/۴۱۷۱۷۳۶۵۴۶	-۰/۴۱۷۹۵۶۹۲	-۰/۴۳۹۳۲۱۳۲۱
۳-۱۰	-۰/۴۱۷۹۵۲۴۴۵	-۰/۴۱۷۹۵۴۳۵۸	-۰/۴۲۰۰۱۷۵۹۱
۴-۱۰	-۰/۴۱۷۹۵۴۲۵۴۱	-۰/۴۱۷۹۵۴۳۳۳	-۰/۴۱۸۱۵۹۹۱۱
۶-۱۰	-۰/۴۱۷۹۵۴۳۳۲۱	-۰/۴۱۷۹۵۴۳۲۴	-۰/۴۱۷۹۵۶۳۷۸
۸-۱۰	-۰/۴۱۷۹۵۴۳۳۲۱	-۰/۴۱۷۹۵۵۹۸۱	-۰/۴۱۷۹۵۴۷۳۸
۱۰-۱۰	-۰/۴۱۷۹۵۴۳۳۲۱	-۰/۴۱۷۶۸۳۶۶۵	-۰/۴۱۷۹۵۹۰۰۱
۱۲-۱۰	-۰/۴۱۷۹۵۴۳۳۲۱	-۰/۴۱۱۲۲۶۶۰۸	-۰/۴۱۹۲۲۰۲۲۱۴
۱۳-۱۰	-۰/۴۱۷۹۵۴۳۳۲۱	-۰/۵۳۲۹۰۷۰۵۲	-۰/۳۱۷۴۴۲۳۱
۱۴-۱۰	-۰/۴۱۷۹۵۴۳۳۲۱	-۰/۰۸۸۸۱۷۸۴۲	-۰/۶۲۱۷۳۴۸۹۴
۱۵-۱۰	-۰/۴۱۷۹۵۴۳۳۲۱	-۰/۸۸۸۱۷۸۴۲	۶/۲۱۷۳۴۸۹۳۸
۱۶-۱۰	-۰/۴۱۷۹۵۴۳۳۲۱	۰/۰۰۰۰۰۰۰۰	۰/۰۰۰۰۰۰۰۰

جدول ۵- مقادیر حساسیت انرژی کرنشی دیسک نسبت به شعاع

$(\frac{\partial U}{\partial b_2}) b_2$ خارجی

طول گام	روش نیمه تحلیلی پیشنهادی	تفاضل محدود	روش نیمه تحلیلی مرسوم
۱-۱۰	۱/۰۶۶۱۸۴۵۸۳	۱/۰۵۸۸۲۴۷۹	۱/۰۲۱۹۱۵۴۶۵
۲-۱۰	۱/۰۵۸۴۶۰۶۸	۱/۰۵۸۸۰۴۷۲۵	۱/۰۴۷۷۲۴۸۹۸
۳-۱۰	۱/۰۵۸۸۰۰۶۹۲	۱/۰۵۸۸۰۴۵۲۴	۱/۰۵۷۶۸۱۰۹۵
۴-۱۰	۱/۰۵۸۸۰۴۴۸۴	۱/۰۵۸۸۰۴۵۲۲	۱/۰۵۸۶۹۲۰۴۱
۶-۱۰	۱/۰۵۸۸۰۴۵۲۲	۱/۰۵۸۸۰۴۵۲۸	۱/۰۵۸۸۰۳۳۸۹
۸-۱۰	۱/۰۵۸۸۰۴۵۲۲	۱/۰۵۸۸۰۴۸۶۶	۱/۰۵۸۸۰۳۹۷۸
۱۰-۱۰	۱/۰۵۸۸۰۴۵۲۲	۱/۰۵۸۸۶۸۵۴۸	۱/۰۵۸۷۷۰۸۴۹
۱۲-۱۰	۱/۰۵۸۸۰۴۵۲۲	۱/۰۴۴۴۹۷۸۲۲	۱/۰۵۵۱۵۵۹۶۳
۱۳-۱۰	۱/۰۵۸۸۰۴۵۲۲	۱/۱۱۰۲۲۳۰۲۵	۱/۰۹۲۴۵۹۴۵۶
۱۴-۱۰	۱/۰۵۸۸۰۴۵۲۲	۰/۹۷۶۹۹۶۲۶۲	۰/۹۷۶۹۹۶۲۶۲
۱۵-۱۰	۱/۰۵۸۸۰۴۵۲۲	۰/۰۰۰۰۰۰۰۰	۰/۰۰۰۰۰۰۰۰

جدول ۶- محاسبه حساسیت تنش عمودی تیر نسبت به عرض ابتدایی و انتهای تیر در طول گام ۱۰^{-۵}

X (mm)	تنش دقیق MPa	تنش محاسبه شده MPa	d ₂ و d ₁ (mm)	حساسیت دقیق	روش پیشنهادی	[۱۷]	تفاضل محدود	درصد خطای نسبی	
								نیمه تحلیلی مرسوم	[۱۷]
۰	-۲۷/۲۴۸۶	-۲۷/۱۸۶۲	۱ (۱/۰)	۱۴/۰۳۸۱	۱۳/۶۸۸۴	۱۳/۹۵	۱۳/۶۸۸۴	۱۳/۶۸۸۴	۰/۶۲۸
								۲ (۱/۳)	-۱۱/۳۶۰۰
۱۰	-۲۶/۲۰۰۵	-۲۶/۲۰۰۶	۱ (۱/۰)	۷/۴۵۱۸	۷/۴۵۲۴	۷/۳۷	۷/۴۵۲۴	۷/۴۵۲۴	۱/۰۹۸
								۲ (۱/۳)	-۶/۲۱۰۴
۲۰	-۲۵/۲۳۰۱	-۲۵/۲۳۰۲	۱ (۱/۰)	۱/۷۸۴۸	۱/۷۸۵۳	۱/۷۱۶	۱/۷۸۵۳	۱/۷۸۵۳	۳/۸۵۵
								۲ (۱/۳)	-۱/۴۸۷۸
۳۰	-۲۴/۳۲۹۱	-۲۴/۳۲۹۱	۱ (۱/۰)	-۳/۱۰۶۱	-۳/۱۰۵۷	-۳/۱۶۵	-۳/۱۰۵۷	۲/۵۸۸۱	۱/۸۹۶
								۲ (۱/۳)	-۳/۱۰۵۷
۴۰	-۲۳/۴۹۰۱	-۲۳/۴۹۰۲	۱ (۱/۰)	-۷/۳۳۸۳	-۷/۳۳۷۹	-۷/۳۸۸	-۷/۳۳۷۹	۲/۵۸۸۱	۰/۶۷۷
								۲ (۱/۳)	-۶/۱۱۴۹
۵۰	-۲۲/۷۰۷۱	-۲۲/۷۵۸۶	۱ (۱/۰)	-۱۱/۰۰۸۸	-۱۱/۰۷۷۶۲	-۱۱/۰۵	-۱۰/۷۷۶۲	۶/۱۱۴۹	۴/۴۶۲
								۲ (۱/۳)	-۱۰/۷۷۶۲
								۸/۹۳۷۸	۰/۳۹۲

جدول ۸- مقادیر حساسیت تنش عمودی تیر نسبت به عرض انتهای

d₂ برای گام‌های مختلف برای x = ۳۰ mm

طول گام	روش پیشنهادی	تفاضل محدود	نیمه تحلیلی مرسوم
۱-۱۰	۲/۵۸۴۸۶۶۰۲۸	۲/۵۸۲۰۶۷۶۱۳	۲/۵۹۱۲۳۴۳۱۸
۳-۱۰	۲/۵۸۸۰۱۸۷۹۱	۲/۵۸۷۹۹۱۳۱۵	۲/۵۸۸۸۰۸۲۴۷۳
۴-۱۰	۲/۵۸۸۰۵۰۶۲۹	۲/۵۸۸۰۵۰۶۲۷	۲/۵۸۸۰۵۰۶۳۴
۶-۱۰	۲/۵۸۸۰۵۰۶۳۲	۲/۵۸۸۰۵۰۶۳۹	۲/۵۸۸۰۵۰۳۹۸
۸-۱۰	۲/۵۸۸۰۵۰۶۳۲	۲/۵۸۷۹۷۰۵۴۹	۲/۵۸۸۰۴۰۵۳۷
۱۰-۱۰	۲/۵۸۸۰۵۰۶۳۲	۲/۵۸۹۵۰۱۲۲	۲/۵۸۵۹۸۴۷۶
۱۳-۱۰	۲/۵۸۸۰۵۰۶۳۲	۲/۷۹۴۲۰۹۳۰۸	۲/۸۴۵۷۳۳۶۵۷
۱۴-۱۰	۲/۵۸۸۰۵۰۶۳۲	-۵۴/۸۸۹۴۲۶۳۴	۳/۹۰۷۹۸۵۰۴۷
۱۶-۱۰	۲/۵۸۸۰۵۰۶۳۲	۰/۰۰۰۰۰۰۰۰	۰/۰۰۰۰۰۰۰۰

۷- نتیجه گیری

مشقت گیری به روش متغیر مختلط، روش دقیقی برای محاسبه حساسیت در مسائل مهندسی هست. روش متغیر مختلط مشابه روش تفاضل محدود است و تفاوت مهم آن در این است که در روش متغیر مختلط در نظر گرفتن گام تغییر مقدار پارامترهای مورد مطالعه به جای اینکه در طول محور حقیقی اعمال شود، در طول محور موهومی در نظر گرفته می شود. مزایای این روش در این است که مشتقات مرتبه اول بدون عملیات تفریق به دست می آید؛ بنابراین برخلاف روش تفاضل محدود می توان اندازه گام را به اندازه دلخواه کوچک انتخاب کرد و به مشکل تفریق دو عدد تقریباً مساوی و از دست رفتن ارقام بامعنی مواجه نشد. علاوه بر این روش متغیر مختلط با مختل کردن مش ریزی دوباره مواجه نمی شود. موارد ذکر شده، برتری این روش نسبت به روش تفاضل محدود هست.

در این مقاله با ارائه چند مثال با توابع هدف مختلف و تحلیل حساسیت آن‌ها با روش پیشنهادی و روش‌های دیگر به مقایسه و اعتبارسنجی روش ارائه شده پرداخته شد. نتایج به دست آمده حاکی از دقت و کارایی بالاتر این روش نسبت به دیگر روش‌ها بود. سه روش تفاضل محدود، روش نیمه تحلیلی مرسوم و روش نیمه تحلیلی ارائه شده

نتایج مطلوبی برای حساسیت‌ها با هر سه روش مشاهده می شود. روش ارائه شده برای محاسبه گرادینان جابجایی‌ها یعنی تنش‌ها نیز نتیجه مطلوبی در بردارد. برای بررسی اثر طول گام مقادیر حساسیت برای x = ۳۰ mm در جدول‌های ۷ و ۸ آورده شده است. مجدداً برتری روش ارائه شده نسبت به دو روش دیگر واضح است. نتایج حاکی از این دارد که در روش پیشنهادی دامنه تغییر طول گام مناسب همانند مثال ۲ وسیع بوده و این به دلیل عدم چرخش المان هست. در این مثال خطای برش برای هر سه روش قابل مشاهده نیست. اما خطای گرد کردن برای دو روش تفاضل محدود و روش نیمه تحلیلی مرسوم قابل مشاهده است. از طرفی دیگر هر چه خطای محاسبه خود تابع بالاتر باشد، محاسبه حساسیت نیز با خطای بیشتری همراه خواهد بود.

جدول ۷- مقادیر حساسیت تنش عمودی تیر نسبت به عرض ابتدایی

d₁ برای گام‌های مختلف برای x = ۳۰ mm

طول گام	روش پیشنهادی	تفاضل محدود	نیمه تحلیلی مرسوم
۱-۱۰	-۳/۱۰۳۹۴۲۴۹۱	-۳/۱۲۷۱۷۱۴۷۱	-۳/۱۰۷۴۲۸۷۰۸
۳-۱۰	-۳/۱۰۵۶۷۰۷۷۹	-۳/۱۰۵۹۰۲۰۸۵	-۳/۱۰۵۷۰۵۶۴۸
۴-۱۰	-۳/۱۰۵۶۸۸۲۱۲	-۳/۱۰۵۶۸۸۲۳۸	-۳/۱۰۵۶۸۸۲۱۵
۶-۱۰	-۳/۱۰۵۶۸۸۲۱۴	-۳/۱۰۵۶۸۸۰۲۳	-۳/۱۰۵۶۸۸۳۰۷
۸-۱۰	-۳/۱۰۵۶۸۸۲۱۴	-۳/۱۰۵۶۵۹۱۹۶	-۳/۱۰۵۶۶۸۷۸۹
۱۰-۱۰	-۳/۱۰۵۶۸۸۲۱۴	-۳/۱۰۹۹۳۸۹۷۳	-۳/۱۰۸۶۹۵۵۲۳
۱۳-۱۰	-۳/۱۰۵۶۸۸۲۱۴	-۳/۵۶۸۷۰۰۸۹	-۳/۳۶۴۴۱۹۸۵۴
۱۴-۱۰	-۳/۱۰۵۶۸۸۲۱۴	-۳/۱۰۴۶۳۱۴۴	-۹۳/۰۸۱۰۹۸۳۸
۱۶-۱۰	-۳/۱۰۵۶۸۸۲۱۴	-۳/۱۰۷۶۳۵۶۸۳۹	-۱۷/۷۶۳۵۶۸۳۹
۱۷-۱۰	-۳/۱۰۵۶۸۸۲۱۴	۰/۰۰۰۰۰۰۰۰	۰/۰۰۰۰۰۰۰۰

- [12] Gomez-Farias A., Montoya A., Millwater H., Complex Finite Element Sensitivity Method for Creep Analysis, *Int. J. Pressure Vessels and Piping*, Vol. 132-133, pp. 27-42, 2015.
- [13] Hassanzadeh M., Computation of shape design sensitivities for linear FEM using modified semi-analytical method, *Modares Mechanical Engineering*, Vol. 15, No. 11, pp. 73-80, 2015 (In Persian)
- [14] Lai K. L., Crassidis J., Extensions of the first and second complex-step derivative approximations, *Journal of Computational and Applied Mathematics*, Vol. 219, No. 1, pp. 276-293, 2008.
- [15] Van Keulen F., De Boer H., Rigorous improvement of semi-analytical design sensitivities by exact differentiation of rigid body motions, *International journal for numerical methods in engineering*, Vol. 42, No. 1, pp. 71-91, 1998.
- [16] Tortorelli D. A., Haber R. B., Lu S. C., Design sensitivity analysis for nonlinear thermal systems, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, Vol. 77, No. 1, pp. 61-77, 1989.
- [17] Yang R., Shape design sensitivity analysis of thermoelasticity problems, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, Vol. 102, No. 1, pp. 41-60, 1993.
- [18] Sluzalec A., Kleiber M., Shape sensitivity analysis for nonlinear steady-state heat conduction problems, *Int. J. Heat and Mass Transfer*, Vol. 39, No. 12, pp. 2609-2613, 1996.
- [19] Bobaru F., Mukherjee S., Mesh less approach to shape optimization of linear thermo elastic solids, *Int. J. Numerical Methods in Engineering*, Vol. 53, No. 4, pp. 765-796, 2002.
- [20] Lyness, J. N., Moller, C. B., "Numerical differentiation of analytic functions", *SIAM J. on Numerical Analysis*, vol. 4, no. 2, pp. 202-210, 1967.
- [21] Squire W., Trapp G., Using complex variables to estimate derivatives of real functions, *Siam Review*, Vol. 40, No. 1, pp. 110-112, 1998.
- [22] Martins J., Kroo I. M., Alonso J. J., An automated method for sensitivity analysis using complex variables, *AIAA paper*, Vol. 689, pp. 2000, 2000.
- [23] Rodriguez D. L., A multidisciplinary optimization method for designing inlets using complex variables, *AIAA paper*, Vol. 4875, pp. 1-10, 2000.
- [24] Anderson W. K., Newman J. C., Whitfield D. L., Nielsen E. J., Sensitivity analysis for Navier-Stokes equations on unstructured meshes using complex variables, *AIAA J.*, Vol. 39, No. 1, pp. 56-63, 2001.
- [25] Wang B. P., Apte A. P., Complex variable method for eigen solution sensitivity analysis, *AIAA J.*, Vol. 44, No. 12, pp. 2958-2961, 2006.
- [26] Lund E., Finite element based design sensitivity analysis and optimization, *Institute of Mechanical Engineering, Aalborg University, Denmark*, pp. 107, 1994.

در این مقاله جواب‌های مطلوبی را ارائه می‌دهند. ولی در روش تفاضل محدود و روش نیمه‌تحلیلی باید در انتخاب طول گام تغییر دقت کرد. زیرا اندازه گام از قبل مشخص نیست و نیازمند تکرار شبیه‌سازی برای اطمینان از نتایج حاصله هست. روش ارائه‌شده اگرچه خطای برش بالاتری نسبت به روش تفاضل محدود دارد، اما خطای گرد کردن و از دست رفتن ارقام بامعنی را نداشته و با انتخاب اندازه گام کوچک دلخواه، می‌توان به نتایج بسیار مطلوب رسید. طبق بررسی انجام‌شده، تأیید شد که منشأ خطای گرد کردن ناشی از چرخش المان بوده و این مسئله استفاده از روش تفاضل محدود و روش نیمه‌تحلیلی مرسوم را محدود می‌کند. در این حالت استفاده از روش نیمه‌تحلیلی ارائه‌شده محدودیتی نداشته و می‌توان بدون نگرانی از کوچک بودن طول گام و مشکلات ناشی از خطای اشاره‌شده به جواب‌های مطمئن رسید.

۸-مراجع

- [1] Chen B., Gu Y., Zhao G., Lin W., Design optimization for structural thermal buckling, *J. Thermal Stresses*, Vol. 26, No. 5, pp. 479-494, 2003.
- [2] Sheikhi M., Ghoddosian A., A hybrid imperialist competitive ant colony algorithm for optimum geometry design of frame structures, *Structural Engineering and Mechanics*, Vol. 46, No. 3, pp. 403-416, 2013.
- [3] Ghoddosian, A., Sheikhi M., *Meta-heuristic optimization methods in engineering*, Semnan University Press, 2013.
- [4] Haftka R. T., Gürdal Z., *Elements of structural optimization*: Springer Science & Business, 2012.
- [5] Araújo A. L., Soares C. M., Herskovits J., Pedersen P., Development of a finite element model for the identification of mechanical and piezoelectric properties through gradient optimization and experimental vibration data, *Composite Structures*, Vol. 58, No. 3, pp. 307-318, 2002.
- [6] Haukaas T., Scott M. H., Shape sensitivities in the reliability analysis of nonlinear frame structures, *Computers & Structures*, Vol. 84, No. 15, pp. 964-977, 2006.
- [7] Fourment L., Balan T., Chenot J., Optimal design for non-steady-state metal forming processes-11. Application of shape optimization in forging, *Int. J. for numerical methods in engineering*, Vol. 39, pp. 51-65, 1996.
- [8] Chung S. H., Kwon Y. S., Park S. J., German R. M., Sensitivity analysis by the adjoint variable method for optimization of the die compaction process in particulate materials processing, *Finite Elements in Analysis and Design*, Vol. 45, No. 11, pp. 836-844, 2009.
- [9] Wang L., Anderson W. K., Shape sensitivity analysis for the compressible Navier-Stokes equations via discontinuous Galerkin methods, *Computers & Fluids*, Vol. 69, pp. 93-107, 2012.
- [10] Kim H., Cho M., Study on the design sensitivity analysis based on complex variable in eigenvalue problem, *Finite Elements in Analysis and Design*, Vol. 45, No. 12, pp. 892-900, 2009.
- [11] Voorhees A., Millwater H., Bagley R., Complex variable methods for shape sensitivity of finite element models, *Finite Elements in Analysis and Design*, Vol. 47, No. 10, pp. 1146-1156, 2011.