

تحلیل ارتعاشات پوسته مخروطی ساندویچی کامپوزیت با شرایط مرزی مختلف با استفاده از روش‌های المان محدود و مربعات دیفرانسیلی (DQ)

مجید گلچی

دانشجوی کارشناسی ارشد، گروه مهندسی مکانیک، دانشگاه صنعتی قم، قم، ایران

مصطفی طالبی توتی*

استادیار، گروه مهندسی مکانیک، دانشگاه صنعتی قم، قم، ایران

چکیده

در تحقیق حاضر به کمک روش مربعات دیفرانسیلی (DQM) به تحلیل ارتعاشات آزاد پوسته مخروطی ساندویچ پنل پرداخته شده است. محاسبات برای چهار نوع مواد مختلف، پلی‌اتراتکتون (PEEK)، پلی‌کربنات (PC)، پلی‌پروپیلن جامد (SPP) و فوم پلی‌آمید با چگالی بالا (HDPF) به عنوان هسته و شیشه-اپوکسی به عنوان پوسته کامپوزیتی انجام شده است. مدل‌سازی ریاضی به کمک نظریه تغییر شکل برشی مرتبه اول پوسته انجام و معادلات حرکت به کمک روش همیلتون استخراج شده است. معادلات حاکم بر ارتعاشات پوسته، به کمک روش DQ حل شده و فرکانس طبیعی محاسبه شده است. اثر افزایش طول و ضخامت و همچنین اثر شرایط مرزی مختلف بر روی فرکانس طبیعی بررسی گردیده است. از مواد مختلفی به عنوان هسته استفاده شده و اثر آن بر روی فرکانس طبیعی مورد بررسی قرار گرفته است. به منظور اعتبارسنجی، مقایسه‌ای میان نتایج بدست آمده و نتایج موجود در ادبیات تحقیق و همچنین نرم‌افزار آباکوس (Abaqus) صورت گرفته است.

واژه‌های کلیدی: پوسته مخروطی ساندویچی کامپوزیت، روش مربعات دیفرانسیلی، نظریه تغییر شکل برشی مرتبه اول، پوسته مخروطی، فرکانس طبیعی.

Vibration Analysis of the Composite Sandwich Conical Shell with Various Boundary Conditions using Finite Element and Differential Quadrature Methods (DQ)

M. Golchi

Department of Mechanical Engineering, Qom University of Technology, Qom, Iran

M. Talebitooti

Department of Mechanical Engineering, Qom University of Technology, Qom, Iran

Abstract

In this paper, free vibration of the composite sandwich conical shell are investigated by using differential quadrature method (DQM). The analysis is performed for the four different types of core materials, Polyether ether ketone (PEEK), Polycarbonate (PC), Solid polypropylene (SPP) and high density polyimide foam (HDPF) and Consider a sandwich conical shell with the skin layers made of glass fabric reinforced polymer. The first-order shear deformation shell theory is adopted to formulate the theoretical model and governing equations of motion are derived by Hamilton's principle. The governing equations of motion, are discretized by means of the DQM and natural frequencies are achieved. The effects of thickening, increase of length and boundary conditions on natural frequencies, are investigated. To verify the accuracy of this method, comparisons of the present results with results available in the open literature and Abaqus are performed.

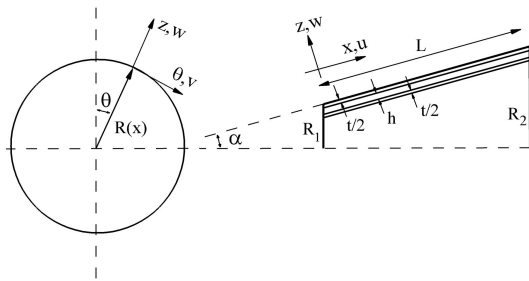
Keywords: Composite sandwich conical shell, Differential quadrature method, First-order shear deformation shell theory, Natural frequency.

از قبیل: تنش ابتدایی، نقص، اضافه نمودن جرم و فنر، بستر الاستیک، مورد بررسی قرار گرفته است. کرمی و قصاب‌زاده [۳] ارتعاشات آزاد پوسته استوانه‌ای نازک و نسبتاً ضخیم را به کمک نظریه تغییر شکل برشی مرتبه اول مورد بررسی قرار داده‌اند. پوسته استوانه‌ای از مواد مدرج تابعی دو جهته ساخته شده و از روش مربعات دیفرانسیلی برای حل معادلات حاکم بر حرکت استفاده شده است. گارگ و همکاران [۴] ارتعاشات آزاد کامپوزیت‌ها و ساندویچ پنل‌های دو انحنایی را مورد بررسی قرار دارند. در این تحقیق، تکیه‌گاه ساده به عنوان شرط مرزی انتخاب شده و از نظریه ساندورز استفاده و همچنین برای کرنش برشی عرضی، یک توزیع سهمی‌وار در راستای ضخامت فرض شده است. لپاتین و همکاران [۵] کمانش ساندویچ پنل‌های استوانه‌ای را مورد بررسی قرار داده‌اند. ساندویچ پنل تحت فشار خارجی بوده و تکیه‌گاه آن گیردار است. خار و همکاران [۶] با استفاده از نظریه‌های مراتب بالاتر بر روی ساندویچ پنل‌های ضخیم تحلیل ترمودینامیکی و ارتعاشاتی

۱- مقدمه

پوسته‌های مخروطی کاربرد گسترده‌ای در صنایع مختلف از قبیل هوافضا، دریایی، لوله‌های انتقال، نازل‌ها و... دارند و ساندویچ پنل‌ها بخاطر وزن کم، استحکام بالا و سفتی خمشی بالا می‌توانند انتخاب خوبی در این صنایع باشند. ساندویچ پنل‌ها دارای یک هسته می‌باشند که از دو طرف به دو لایه محدود شده است. هسته عموماً عایق، نرم و انعطاف پذیر بوده و جنس آن اغلب پلی‌اتراتکتون، پلی‌کربنات، پلی‌استایرن، پشم سنگ و پشم شیشه است. ساندویچ پنل‌ها با هسته‌ای انعطاف‌پذیر در صنایع مختلفی همچون هوافضا، ساختمان سازی، خودروسازی و قطار کاربرد دارند.

کاتو در مقاله و همچنین در کتاب اخیر خود، رفتار دینامیکی پوسته‌های کامپوزیتی را مورد تحلیل قرار داده است [۱-۲]. در این مقاله نظریه‌های مختلف از قبیل: نازک، ضخیم، سه بعدی و غیرمحل، روش‌های حل شامل: حل دقیق، ریتز و المان محدود و اثرهای پیچیده



شکل ۱- نمایش سیستم مختصات بر روی پوسته مخروطی

انجام داده‌اند. رفتار فروپاشی و انتشار کمانش در لوله‌های ساندویچی، تحت فشار خارجی توسط آن و همکاری آن مورد مطالعه قرار گرفته است [۷]. ارجمندی و طاهری [۸ و ۹] حل‌های تحلیلی و المان محدود برای تحلیل کمانش لوله‌های ساندویچی با پیکربندی مختلف ساختار و مواد هسته و بار ایجاد شده بوسیله فشار خارجی را بدست آوردند. آن‌ها رفتار لوله‌ها را با استفاده از فرمولبندی دو بعدی مسئله کمانش در مختصات قطبی مطالعه کردند. روش سختی کاهش یافته حد پایین برای حل مسئله کمانش پوسته استوانه‌ای ساندویچی با شرایط مرزی تکیه‌گاه ساده، توسط اگا و همکاران بکارگرفته شد [۱۰]. ویلکینز و همکاران [۱۱] ارتعاشات آزاد ساندویچ پل‌های استوانه‌ای و مخروطی را مورد بررسی قرار داده‌اند. در این تحقیق، جنس پوسته‌ها و هسته ساندویچ پل ایزوتروپیک و یا ارتوتروپیک فرض شده و همچنین شرایط مرزی مختلف برای پوسته در نظر گرفته شده و معادلات با کمک روش گلرکین حل شده است. کاردوماتیاس و سیمیتس [۱۲] و هن و همکاران [۱۳] یک حل الاستیسیته برای مسئله کمانش پوسته-های طویل استوانه‌ای ساندویچی که تحت فشار خارجی قرار گرفته‌اند، ارائه دادند. ایری و همکاران فرکانس طبیعی پوسته‌های مخروطی را برای شرایط مرزی مختلف محاسبه نموده‌اند [۱۴]. آن‌جی و همکاران ارتعاشات آزاد پوسته‌های مخروطی کامپوزیتی را با کمک روش مربعات دیفرانسیلی مورد بررسی قرار داده‌اند [۱۵].

مروری بر ادبیات تحقیق نشان می‌دهد که در زمینه ارتعاشات پوسته مخروطی ساندویچی، مطالعه‌ای صورت نگرفته است. در این تحقیق، ابتدا خصوصیات مکانیکی ساندویچ پل مدل گردیده و سپس معادلات حرکت به کمک نظریه مرتبه اول برشی و اصل همپلتون استخراج و این معادلات به کمک روش مربعات دیفرانسیلی حل گردیده است. صحنه‌سنجی به کمک مقایسه میان نتایج حاصل با نتایج موجود در ادبیات تحقیق و همچنین نتایج حاصل از نرم‌افزار آباکوس^۱ صورت گرفته است.

$$\begin{aligned} & \frac{\partial N_x}{\partial x} + \frac{1}{R(x)} \frac{\partial N_{x\theta}}{\partial \theta} + (N_x - N_\theta) \frac{\sin \alpha}{R(x)} \\ & = I_0 \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + I_1 \frac{\partial^2 \phi_x}{\partial t^2} \\ & \frac{\partial N_{x\theta}}{\partial x} + \frac{1}{R(x)} \frac{\partial N_\theta}{\partial \theta} + Q_\theta \frac{\cos \alpha}{R(x)} + 2N_{x\theta} \frac{\sin \alpha}{R(x)} \\ & = I_0 \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} + I_1 \frac{\partial^2 \phi_\theta}{\partial t^2} \\ & \frac{\partial Q_x}{\partial x} + \frac{1}{R(x)} \frac{\partial Q_\theta}{\partial \theta} + Q_x \frac{\sin \alpha}{R(x)} - N_\theta \frac{\cos \alpha}{R(x)} = I_0 \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} \quad (1) \\ & \frac{\partial M_x}{\partial x} + \frac{1}{R(x)} \frac{\partial M_{x\theta}}{\partial \theta} + (M_x - M_\theta) \frac{\sin \alpha}{R(x)} - Q_x \\ & = I_1 \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + I_2 \frac{\partial^2 \phi_x}{\partial t^2} \\ & \frac{\partial M_{x\theta}}{\partial x} + \frac{1}{R(x)} \frac{\partial M_\theta}{\partial \theta} + 2M_{x\theta} \frac{\sin \alpha}{R(x)} - Q_\theta \\ & = I_1 \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} + I_2 \frac{\partial^2 \phi_\theta}{\partial t^2} \end{aligned}$$

که در آن

$$(I_0, I_1, I_2) = \int_{-h/2}^{h/2} \rho_h(1, z, z^2) dz + \int_{-t/2}^{t/2} \rho_t(1, z, z^2) dz \quad (2)$$

$$R(x) = R_1 + x \sin \alpha \quad (3)$$

N و M به ترتیب بردارهای منتجه‌ی نیرو و ممان بوده و Q_x و Q_θ نیروهای برشی هستند که بصورت زیر تعریف می‌شوند:

$$\begin{aligned} N_x &= A_{11}\epsilon_x + A_{12}\epsilon_\theta, \quad N_\theta = A_{21}\epsilon_x + A_{22}\epsilon_\theta \\ N_{x\theta} &= A_{66}\epsilon_{x\theta}, \quad M_x = D_{11}\kappa_x + D_{12}\kappa_\theta \\ M_\theta &= D_{21}\kappa_x + D_{22}\kappa_\theta, \quad M_{x\theta} = D_{66}\kappa_{x\theta} \\ Q_x &= A_{44}\epsilon_{xz}, \quad Q_\theta = A_{55}\epsilon_{\theta z} \end{aligned} \quad (4)$$

ε و κ کرنش‌ها و انحنای سطح مرجع (لایه میانی)، φ_x و φ_θ شیب‌ها در صفحات x-z و θ-z هستند. روابط کرنش-جابجایی برای سطح مرجع عبارتند از:

۲- معادلات و روابط

در شکل ۱، دستگاه مختصات برای ساندویچ پل مخروطی و همچنین مشخصات مخروط ناقص نشان داده شده است. α زاویه رأس مخروط، R₁ شعاع کوچکتر و L طول آن می‌باشد. ضخامت هسته ساندویچ ایزوتروپیک h و ضخامت پوسته‌های ساندویچ پل t/2 بوده که در دو سمت آن قرار می‌گیرد. دستگاه مختصات (x, θ, z) بر روی لایه میانی ساندویچ پل قرار گرفته است. جابجایی‌ها در جهت x, θ و z به ترتیب u, v و w در نظر گرفته می‌شوند. معادلات حاکم بر ارتعاشات پوسته مخروطی طبق نظریه مرتبه اول برشی [۱۶] عبارتند از:

^۱ ABAQUS

یک اصل ساده ریاضی تبعیت می کند که طبق آن هر تابع هموار را می توان بصورت یک چند جمله ای مرتبه (N-1) ام، در کل دامنه آن بیان نمود. در یک شبکه ی گسسته، مشتق این تابع هموار در یک جهت مختصات و در یک نقطه را می توان با جمع مقادیر تابع در نقاط دیگر در آن جهت، با احتساب یک ضریب وزنی، محاسبه نمود. بطور مثال مشتق جزئی تابع $f(x)$ در نقطه (x_i) بصورت زیر بیان می شود:

$$\frac{\partial^s f(x)}{\partial u^s} \Big|_{x=x_i} = \sum_{j=1}^N \tilde{C}_{ij}^s f(x_j), \quad i=1,2,\dots,N \quad (10)$$

که N تعداد نقاط شبکه گسسته و \tilde{C}_{ij}^s ضرایب وزنی می باشد که به مشتق مرتبه S ام وابسته است و بصورت زیر بدست می آید:
برای مشتق مرتبه اول، $S=1$.

$$\tilde{C}_{ij}^1 = \frac{M^{(1)}(x_i)}{(x_i - x_j)M^{(1)}(x_j)} \quad \text{for } i \neq j \text{ and } i,j=1,2,\dots,N \quad (11)$$

و

$$\tilde{C}_{ij}^1 = - \sum_{j=1 (j \neq i)}^N \tilde{C}_{ij}^1 \quad \text{for } i=1,2,\dots,N \quad (12)$$

که $M^{(1)}(x)$ مشتق مرتبه اول تابع $M(x)$ بوده و بصورت زیر تعریف می گردد:

$$M(x) = \prod_{j=1}^N (x - x_j) \quad (13)$$

$$M^{(1)}(x_k) = \prod_{j=1 (j \neq k)}^N (x_k - x_j)$$

برای مشتقات مراتب بالا، $S>1$ ، ضرایب وزنی از روابط زیر حاصل می شوند:

$$\tilde{C}_{ij}^s = s(\tilde{C}_{ij}^{s-1} \tilde{C}_{ii}^{s-1} - \frac{\tilde{C}_{ij}^{s-1}}{x_i - x_j}) \quad \text{for } i \neq j \text{ and } i,j=1,2,\dots,N \quad (14)$$

$$s=2,3,\dots,N-1$$

و

$$\tilde{C}_{ii}^s = - \sum_{j=1 (j \neq i)}^N \tilde{C}_{ij}^s \quad \text{for } i=1,2,\dots,N \quad (15)$$

به دلیل آن که در این روش تقسیم و بخش مختصات و همچنین تعداد نقاط شبکه بصورت دلخواه انتخاب می گردند، دو مدل زیر استفاده شده است [14]:

الف- توزیع نقاط با فواصل مساوی در دامنه:

$$x_i = \frac{i-1}{N-1}L \quad i=1,2,\dots,N \quad (16)$$

ب- توزیع کسینوسی نقاط که در انتها فواصل نقاط کمتر است:

$$x_i = \left(\frac{1 - \cos((i-1)/(N-1)\pi)}{2} \right) L \quad i=1,2,\dots,N \quad (17)$$

با استفاده از روش مربعات دیفرانسیلی، معادلات حرکت که در معادله (1) آمده است، به صورت رابطه (18) بازنویسی می شود:

$$\begin{aligned} \varepsilon_x &= \frac{\partial u}{\partial x} \\ \varepsilon_\theta &= \frac{1}{R(x)} \frac{\partial v}{\partial \theta} + \frac{1}{R(x)} (u \sin \alpha + w \cos \alpha) \\ \varepsilon_{x\theta} &= \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{1}{R(x)} \frac{\partial u}{\partial \theta} - \frac{1}{R(x)} (v \sin \alpha) \\ \kappa_x &= \frac{\partial \phi_x}{\partial x} \\ \kappa_\theta &= \frac{1}{R(x)} \frac{\partial \phi_\theta}{\partial \theta} + \frac{1}{R(x)} (\phi_x \sin \alpha) \\ \kappa_{x\theta} &= \frac{\partial \phi_\theta}{\partial x} + \frac{1}{R(x)} \frac{\partial \phi_x}{\partial \theta} - \frac{1}{R(x)} (\phi_\theta \sin \alpha) \\ \varepsilon_{xz} &= \phi_x + \frac{\partial w}{\partial x} \\ \varepsilon_{\theta z} &= \phi_\theta - \frac{1}{R(x)} (v \cos \alpha) + \frac{1}{R(x)} \frac{\partial w}{\partial \theta} \end{aligned} \quad (8)$$

۱-۲- مدل سازی خصوصیات مکانیکی ساندویچ پنل

A_{ij} و D_{ij} به ترتیب سفتی کششی و سفتی خمشی ساندویچ پنل می باشند. پوسته ها و هسته ساندویچ پنل هر دو ارتوتروپیک هستند. درایه های ماتریس سفتی کششی بصورت زیر قابل محاسبه است [4].

$$\begin{aligned} A_{11} &= \bar{E}_{xt} t \zeta_{11}, \quad A_{22} = \bar{E}_{\theta t} t \zeta_{22} \\ A_{12} &= A_{21} = \bar{E}_{xt} \nu_{x\theta t} t \zeta_{12}, \quad A_{33} = G_{x\theta t} t \zeta_{33} \\ A_{44} &= G_{xzt} t \zeta_{xz}, \quad A_{55} = G_{\theta zt} t \zeta_{\theta z} \\ \bar{E}_{xt} &= \frac{E_{xt}}{1 - \nu_{x\theta t} \nu_{\theta xt}}, \quad \bar{E}_{\theta t} = \frac{E_{\theta t}}{1 - \nu_{x\theta t} \nu_{\theta xt}} \\ \bar{E}_{xh} &= \frac{E_{xh}}{1 - \nu_{x\theta h} \nu_{\theta xh}}, \quad \bar{E}_{\theta h} = \frac{E_{\theta h}}{1 - \nu_{x\theta h} \nu_{\theta xh}} \end{aligned} \quad (6)$$

که

$$\begin{aligned} \zeta_{11} &= 1 + \frac{h}{t} \frac{\bar{E}_{xh}}{\bar{E}_{xt}}, \quad \zeta_{12} = 1 + \frac{h}{t} \frac{\bar{E}_{xh} \nu_{x\theta h}}{\bar{E}_{xt} \nu_{x\theta t}} \\ \zeta_{22} &= 1 + \frac{h}{t} \frac{\bar{E}_{\theta h}}{\bar{E}_{\theta t}}, \quad \zeta_{33} = 1 + \frac{h}{t} \frac{G_{x\theta h}}{G_{x\theta t}} \\ \zeta_{xz} &= \left(1 + \frac{h}{t} \right)^2 \left(1 + \frac{h}{t} \frac{G_{xzt}}{G_{xzh}} \right)^{-1} \\ \zeta_{\theta z} &= \left(1 + \frac{h}{t} \right)^2 \left(1 + \frac{h}{t} \frac{G_{\theta zt}}{G_{\theta zh}} \right)^{-1} \end{aligned} \quad (7)$$

درایه های ماتریس سفتی خمشی بصورت زیر قابل محاسبه است.

$$\begin{aligned} D_{11} &= \frac{\bar{E}_{xt} t^3}{12} \xi_{11}, \quad D_{22} = \frac{\bar{E}_{\theta t} t^3}{12} \xi_{22}, \quad D_{33} = \frac{G_{x\theta t} t^3}{12} \xi_{33} \\ D_{12} &= D_{21} = \frac{\bar{E}_{xt} \nu_{x\theta t} t^3}{12} \xi_{12} \end{aligned} \quad (8)$$

که در آن

$$\begin{aligned} \xi_{11} &= \xi + \frac{h^3}{t^3} \frac{\bar{E}_{xh}}{\bar{E}_{xt}}, \quad \xi_{12} = \xi + \frac{h^3}{t^3} \frac{\bar{E}_{xh} \nu_{x\theta h}}{\bar{E}_{xt} \nu_{x\theta t}} \\ \xi_{22} &= \xi + \frac{h^3}{t^3} \frac{\bar{E}_{\theta h}}{\bar{E}_{\theta t}}, \quad \xi_{33} = \xi + \frac{h^3}{t^3} \frac{G_{x\theta h}}{G_{x\theta t}} \\ \xi &= 1 + 3 \frac{h}{t} + 3 \frac{h^2}{t^2} \end{aligned} \quad (9)$$

۲-۲- روش مربعات دیفرانسیلی

این روش، یک روش عددی تقریبی است که مفهوم و منطق آن از

جدول ۱- خواص مکانیکی مواد مختلف به عنوان هسته ساندویچ پنل

ρ (kg / m ³)	G(GPa)	E(GPa)	
۱۳۲۰	۰/۹۶	۲/۳	پلی اتراترکتون (PEEK)
۱۲۰۰	۰/۶۸	۱/۶	پلی کربنات (PC)
۹۴۶	۰/۴۳۵	۱	پلی پروپیلن جامد (SPP)
۳۵	۰/۲۲	۰/۵	فوم پلی آمید با چگالی بالا (HDPF)

اپوکسی، مقایسه شده است که برای شرط مرزی تکیه‌گاه گیردار و ساده در جدول ۲ ارائه شده است. همچنین در ادامه، جنس هسته و پوسته ساندویچ پنل را یکسان و ایزوتروپیک فرض کرده و با ارتعاشات پوسته مخروطی ایزوتروپیک مقایسه شده است که نتایج آن در جدول ۳ برای شرط مرزی تکیه‌گاه گیردار و ساده ارائه شده است. برای روش المان محدود، ساندویچ پنل به دو روش مدل شده است. در روش اول، ساندویچ پنل بصورت پوسته مدل شده است ولی در روش دوم، هسته ساندویچ پنل بصورت سه‌بعدی و پوسته‌های ساندویچ پنل، بصورت پوسته مدل شده است. در جدول ۴، نتایج روش‌های المان محدود و نیز روش مربعات دیفرانسیلی برای پوسته مخروطی آورده شده است. با توجه به جدول ۴، مشاهده می‌شود که نتایج روش دوم المان محدود که در آن هسته‌ی ساندویچ پنل بصورت سه‌بعدی مدل شده است، از دقت بهتری برخوردار است. مقایسه نتایج ارائه شده در جداول ۲، ۳ و ۴، نشان از دقت و صحت استخراج معادلات، روش حل و کدنویسی صورت گرفته، دارد.

جدول ۲- فرکانسی طبیعی حاصل از روش مربعات دیفرانسیلی و نتایج

آباکوس (روش اول)

$$R_1 = 1 \text{ m}, L = 5 \text{ m}, \alpha = \sin^{-1} 0.6, h = 0.02 \text{ m}, t = 0.01 \text{ m}$$

تکیه‌گاه ساده		تکیه‌گاه گیردار		
آباکوس	مربعات دیفرانسیلی	آباکوس	مربعات دیفرانسیلی	n
۱۱/۳۵۷	۱۱/۵۲	۲۲/۹۱۶	۲۳/۷۷۳۸	۲
۱۰/۸۹۷	۱۰/۸۱۳	۱۶/۳۰۴	۱۶/۳۵۴۶	۳
۱۲/۸۴۳	۱۲/۲۹۶	۱۴/۱۳۷	۱۴/۱۳۸۴	۴
۱۴/۸۵۶	۱۴/۴۳۴۱	۱۴/۳۶	۱۴/۷۴۸۶	۵
۱۷/۳۶۸	۱۷/۱۱۷۳	۱۶/۰۰۲	۱۶/۵۱۰۲	۶
۲۰/۲۵۲	۲۰/۳۰۶۲	۱۸/۳۴۷	۱۹/۰۲۷۷	۷

در ادامه به بررسی همگرایی نتایج نسبت به نقاط شبکه NGP، در روش مربعات دیفرانسیلی پرداخته می‌شود. با افزایش تعداد نقاط شبکه، دقت پاسخ بدست آمده نیز افزایش می‌یابد. همگرایی فرکانس طبیعی پوسته به ازای افزایش تعداد نقاط شبکه، برای پوسته استوانه‌ای در شکل ۲-الف و برای پوسته مخروطی با زاویه رأس ۳۰ درجه در شکل ۲-ب آورده شده است. با توجه به شکل ۲، مشاهده می‌شود که

$$\{[M]\omega^2\}\{d\} + [S_{dd}]\{d\} + [S_{db}]\{b\} = 0 \quad (18)$$

که در آن بردارهای $\{d\}$ و $\{b\}$ به ترتیب نشان‌گر دامنه و مرز سیستم بوده و ابعاد آن به ترتیب برابر است با $5(N-2)$ و 10 . بطور مشابه، معادلات شرط مرزی نیز بصورت زیر می‌شوند:

$$[S_{bd}]\{d\} + [S_{bb}]\{b\} = 0 \quad (19)$$

ابعاد ماتریس‌های $[S_{dd}]$ ، $[S_{db}]$ ، $[S_{bd}]$ ، $[S_{bb}]$ به ترتیب برابر است با 10×10 ، $10 \times 5(N-2)$ ، $5(N-2) \times 10$ ، $5(N-2) \times 5(N-2)$. تکیه‌گاه ساده، گیردار و ترکیب آن‌ها به عنوان شرایط مرزی پوسته مخروطی انتخاب می‌شود که بصورت زیر تعریف می‌شوند:

الف- تکیه‌گاه ساده:

$$v_1 = v_N = w_1 = w_N = \phi_{\theta 1} = \phi_{\theta N} = 0 \quad (20)$$

$$N_{x1} = N_{xN} = M_{x1} = M_{xN} = 0$$

ب- تکیه‌گاه گیردار:

$$u_1 = u_N = v_1 = v_N = w_1 = w_N = 0 \quad (21)$$

$$\phi_{x1} = \phi_{\theta 1} = \phi_{xN} = \phi_{\theta N} = 0$$

که زیرنویس ۱ و N نشان‌گر ابتدا و انتهای پوسته است. با استفاده از معادله (۱۹) بردار شرط مرزی دامنه $\{b\}$ به صورت زیر محاسبه می‌گردد.

$$\{b\} = -[S_{bb}]^{-1}[S_{bd}]\{d\} \quad (22)$$

که با جای‌گذاری آن در معادله (۱۸) رابطه زیر استخراج می‌گردد.

$$\{[M]\omega^2 + K\}\{d\} = 0, K = \{[S_{dd}] - [S_{db}][S_{bb}]^{-1}[S_{bd}]\} \quad (23)$$

با ضرب کردن $-[M]^{-1}$ از سمت راست به معادله (۲۳) خواهیم داشت:

$$\{-[I]\omega^2 - [M]^{-1}[K]\}\{d\} = 0 \quad (24)$$

مسئله مقدار ویژه حاصل شده و فرکانس طبیعی برابر خواهد شد با:

$$\omega^2 = \text{eig}(-[M]^{-1}[K]) \quad (25)$$

$$\text{Natural Frequency} = \frac{\omega}{2\pi}$$

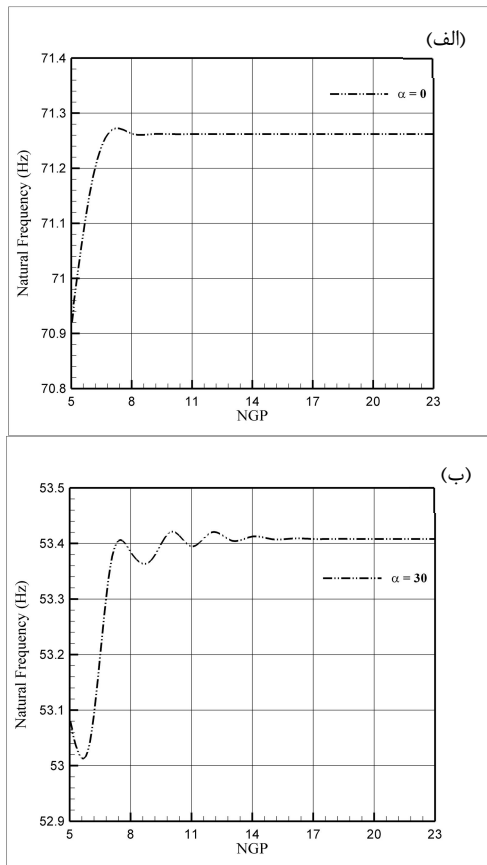
۳- نتایج عددی

در این بخش ارتعاشات پوسته‌های مخروطی ساندویچی کامپوزیت، به‌صورت عددی مورد بررسی قرار می‌گیرد. اثر پارامترهای هندسی مرتبط با پوسته مخروطی و همچنین جنس پوسته بر روی فرکانس طبیعی بررسی شده است. در این مقاله از مواد مختلفی به عنوان هسته ساندویچ پنل استفاده شده، که خواص مکانیکی آن‌ها در جدول ۱ آمده است. از شیشه-اپوکسی به عنوان پوسته ساندویچ پنل استفاده شده است، که خواص مکانیکی آن در ذیل آمده است:

$$E_{xt} = 18 \text{ GPa}, E_{\theta t} = 50 \text{ GPa}, G_{x\theta t} = 7 \text{ GPa}, G_{xz t} = 2 \text{ GPa}, G_{\theta z t} = 3 \text{ GPa}, \nu_{x\theta t} = 0.14, \nu_{\theta x t} = 0.05, \rho_t = 1000 \text{ kg / m}^3$$

ابتدا برای اعتبار سنجی نتایج بدست آمده، نتایج با نتایج نرم‌افزار آباکوس برای پوسته با هسته پلی‌اتراترکتون و دیواره از جنس شیشه-

می‌یابد، ولی شماره مود فرکانس پایه تغییری نکرده و ثابت باقی می‌ماند.



شکل ۲- همگرایی فرکانس طبیعی با افزایش NGP
(الف) پوسته استوانه‌ای (ب) پوسته مخروطی

با توجه به شکل ۵ مشاهده می‌شود، با افزایش ضخامت هسته، شماره مود برای فرکانس پایه کاهش می‌یابد. یعنی برای ضخامت‌های $h = 0.02, 0.08, 0.2, 0.5$ m فرکانس طبیعی پوسته مخروطی به ترتیب در $n = 4, 3, 2, 1$ اتفاق می‌افتد. با توجه به شکل ۶ نیز، مشاهده می‌شود که با تغییر جنس هسته ساندویچ پنل، شماره مود فرکانس پایه تغییری نکرده و ثابت باقی می‌ماند.

جدول ۳- پارامتر فرکانسی $\alpha = 30^\circ, v = f = \omega R_2 \sqrt{\rho(1-v^2)}/E$
 $0.3, h/R_2 = 0.01, L \sin \alpha/R_2 = 0.75$

n	تکیه‌گاه گیردار		تکیه‌گاه ساده	
	تحقیق حاضر	مرجع [۱۴]	تحقیق حاضر	مرجع [۱۴]
۱	۰/۷۵۲۴	۰/۷۵۲۶	۰/۶۷۶۴	۰/۶۹۴۵
۲	۰/۴۶۵۴	۰/۴۶۶۲	۰/۳۶۸۶	۰/۳۵۹۸
۳	۰/۳۱۳۶	۰/۳۱۶۴	۰/۲۱۹۶	۰/۲۱۳۴
۴	۰/۲۵۶۶	۰/۲۶۱۹	۰/۱۹۴۱	۰/۱۹۳۲
۵	۰/۲۶۰۱	۰/۲۶۶۷	۰/۲۱۶۳	۰/۲۱۸۳
۶	۰/۲۸۶۸	۰/۲۹۵۳	۰/۲۵۱۵	۰/۲۵۴۳
۷	۰/۳۲۵۳	۰/۳۳۶۶	۰/۲۹۶۴	۰/۲۹۹۵

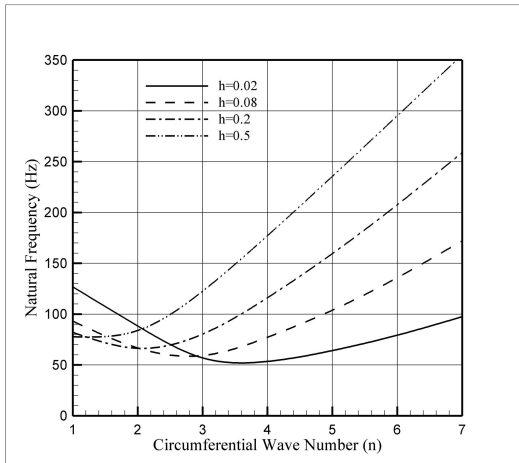
همگرایی فرکانس طبیعی برای پوسته استوانه‌ای سریع‌تر از پوسته مخروطی اتفاق می‌افتد. همچنین در شکل ۳-الف و شکل ۳-ب، به ترتیب روند همگرایی برای پوسته مخروطی با دو زاویه رأس ۴۵ و ۶۰ درجه نشان داده شده است. مقایسه نتایج این دو شکل و همچنین شکل ۲-ب، بیانگر آن است که سرعت همگرایی برای پوسته مخروطی از زاویه رأس مخروط مستقل بوده و با افزایش زاویه تغییری نمی‌کند. همگرایی برای پوسته استوانه‌ای در $NGP=10$ و برای پوسته مخروطی در $NGP=18$ اتفاق می‌افتد.

جدول ۴- فرکانس طبیعی روش مربعات دیفرانسیلی با روش‌های المان محدود برای تکیه‌گاه گیردار

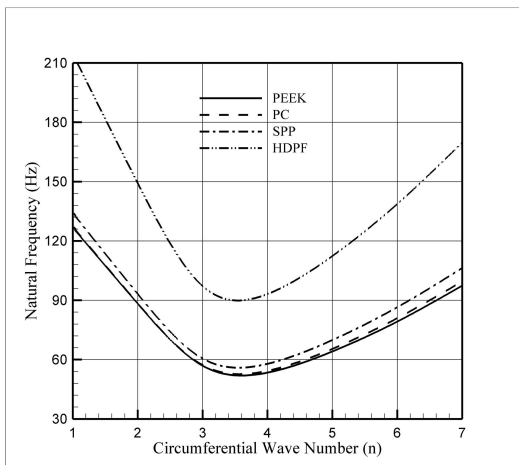
$R_1 = 0.5$ m, $L = 5$ m, $\alpha = 20^\circ$, $h = 0.04$ m, $t = 0.01$ m

n	مربعات دیفرانسیلی	روش اول المان محدود	روش دوم المان محدود
۲	۵۶/۵۶۷۶	۵۵/۰۷۸	۵۲/۶۴۵
۳	۵۷/۵۴۴	۵۶/۸۰۸	۵۵/۵۱۰
۴	۷۱/۹۴۴۴	۷۰/۷۱۳	۷۰/۰۶۴
۵	۹۳/۲۶۴۵	۸۹/۸۰۴	۹۰/۸۷۱
۵	۱۲۰/۲۴۲۷	۱۱۸/۳۶	۱۱۷/۶۷
۷	۱۵۲/۰۲۹۱	۱۴۹/۰۷	۱۴۹/۱۴

از این پس، نتایج ارائه شده برای ساندویچ پنلی می‌باشد که شیشه-پوکسی به عنوان پوسته ساندویچ پنل، و پلی‌اترترکتون به عنوان هسته ساندویچ پنل در نظر گرفته شده و مشخصات هندسی پوسته $h = 0.02$ m, $t = 0.01$ m, $R = 1$ m, $L = 3$ m, $\alpha = 30^\circ$ می‌باشد، مگر آنکه خلاف آن ذکر گردد. همچنین در جدول ۵ و شکل-های ۱۲ و ۱۳ طول پوسته $L=4$ m می‌باشد. در شکل ۴، شکل ۵ و شکل ۶ به ترتیب تغییرات فرکانس طبیعی پوسته با شماره مدهای محیطی، به ازای تغییرات زوایای رأس مخروط، ضخامت هسته ساندویچ پنل و جنس هسته آورده شده است. با توجه به شکل ۴، مشاهده می‌شود که فرکانس پایه در شماره مود محیطی ۴ ($n=4$) اتفاق می‌افتد و همچنین با افزایش زاویه رأس مخروط، فرکانس طبیعی سیستم کاهش



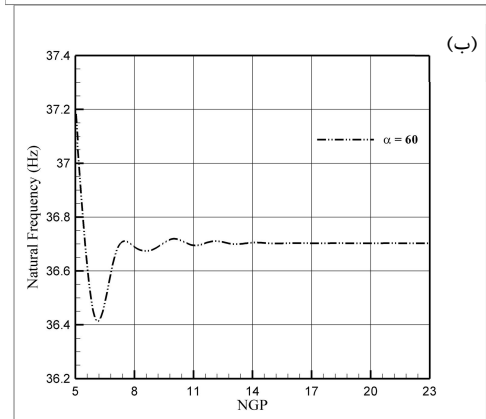
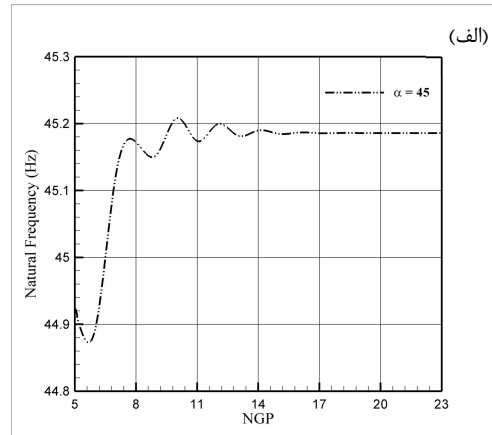
شکل ۵- تغییرات فرکانس طبیعی پوسته با شماره مودهای محیطی برای ضخامت هسته مختلف



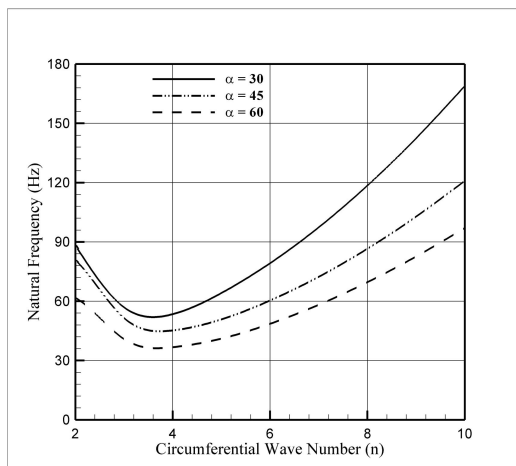
شکل ۶- تغییرات فرکانس طبیعی پوسته با شماره مودهای محیطی برای جنس هسته مختلف

در جدول ۵، تغییرات فرکانس طبیعی پوسته به ازای زاویه رأس مخروط مختلف، برای شرایط مرزی مختلف آورده شده است. با توجه به نتایج این جدول، با افزایش زاویه رأس مخروط فرکانس طبیعی سیستم کاهش می‌یابد. همان‌طور که انتظار می‌رفت فرکانس طبیعی برای شرط مرزی گیردار از شرط مرزی ساده بیشتر بوده که علت آن صلبیت بیشتر سیستم، در شرط مرزی گیردار است. فرکانس طبیعی برای پوسته مخروطی با شرط مرزی SS-CI همواره بزرگتر است از پوسته مخروطی با شرط مرزی CS-SI، که در جدول ۵، قابل مشاهده است.

با توجه به نتایج فرکانس طبیعی برای تکیه‌گاه گیردار و ساده برای طول‌های متفاوت، که در شکل ۷ آمده است، درصد اختلاف فرکانس طبیعی با افزایش زاویه رأس مخروط، افزایش می‌یابد که مقدار آن برای $\alpha = 30^\circ, 45^\circ, 60^\circ, 75^\circ$ برای پوسته با شرط مرزی تکیه‌گاه ساده و



شکل ۳- همگرایی فرکانس طبیعی پوسته مخروطی با افزایش NGP
الف) $\alpha = 45^\circ$ ب) $\alpha = 60^\circ$



شکل ۴- تغییرات فرکانس طبیعی پوسته مخروطی با شماره مودهای محیطی، برای زوایای رأس مخروط مختلف

اثر شرایط مرزی متفاوت در شکل ۸ نشان داده شده است. در این شکل تغییرات فرکانس طبیعی پوسته به ازای تغییرات طول مخروط، برای تکیه‌گاه‌های متفاوت بررسی شده است. با توجه به نتایج جدول ۵ و شکل ۸ با افزایش زاویه رأس مخروط و یا طول پوسته درصد اختلاف فرکانس طبیعی برای دو شرط مرزی Cs-Cl و Ss-Cl کاهش می‌یابد و حتی برای $L = 12, 15 \text{ m}$ فرکانس آن‌ها با هم برابر می‌شود. در صورتی که درصد اختلاف فرکانس طبیعی برای شرط مرزی Cs-Cl با Ss-Cl و Cs-Sl با افزایش طول پوسته، افزایش می‌یابد. بطور مثال با توجه به نتایج شکل ۸ برای شرط مرزی Cs-Cl و Cs-Sl، درصد اختلاف فرکانس طبیعی برای پوسته با طول‌های $L = 3, 6, 9, 12, 15 \text{ m}$ ترتیب برابر $Dis = 3.910, 11.220, 15.988, 19.248, 19.986$ می‌باشد که از رابطه‌ی زیر قابل محاسبه است:

$$Dis(CsCl - CsSl) = \frac{F_{CsCl}|_{L=3} - F_{CsSl}|_{L=3}}{F_{CsCl}|_{L=3}} \times 100$$

اثر افزایش طول پوسته بر روی فرکانس طبیعی سیستم، برای ضخامت‌های متفاوت هسته ساندویچ پل، در شکل ۹ و برای جنس هسته متفاوت در شکل ۱۰ بررسی شده است. با توجه به نتایج شکل ۹، درصد اختلاف فرکانس طبیعی با افزایش طول پوسته، کاهش می‌یابد ولی مقدار آن برای تمامی ضخامت‌های هسته، تقریباً عددی ثابت می‌باشد. برای پوسته با طول‌های $L = 6, 9, 12, 15 \text{ m}$ به ترتیب برابر مقادیر $Dis = 55.1, 38.6, 29.7, 24$ می‌باشد. درصد اختلاف فرکانس با افزایش طول از رابطه‌ی زیر بدست می‌آید:

$$Dis(L=6) = \frac{F_{L=3}|_{h=0.02} - F_{L=6}|_{h=0.02}}{F_{L=3}|_{h=0.02}} \times 100$$

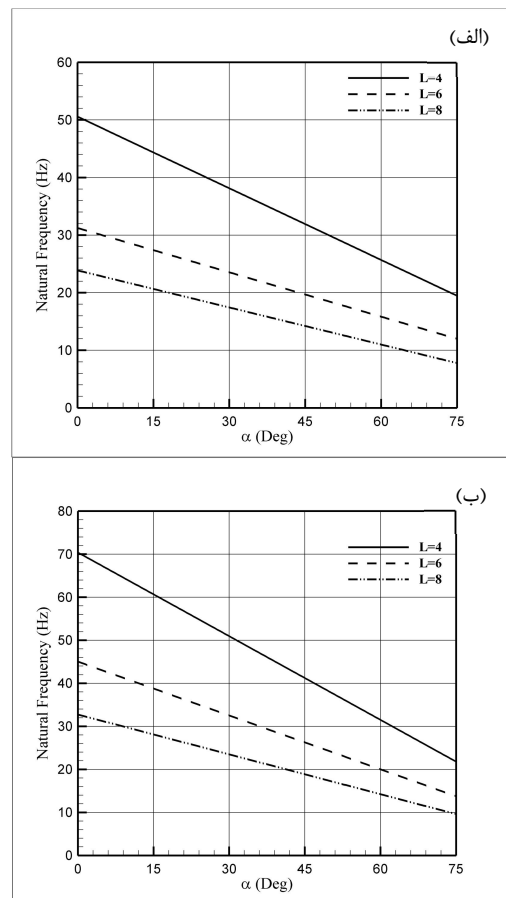
با توجه به شکل ۱۰، تغییرات فرکانس طبیعی با افزایش طول پوسته، برای هسته، با جنس‌های مختلف مشاهده می‌شود. تغییر جنس هسته موجب تغییر سختی و جرم سیستم می‌شود. فرکانس طبیعی با سختی رابطه مستقیم و با جرم سیستم رابطه معکوس دارد. با توجه به خواص مکانیکی مواد در جدول ۱، نسبت E/ρ برای فوم پلی‌آمید با چگالی بالا در مقایسه با مواد دیگر خیلی بزرگتر بوده و بطور میانگین ۱۱ برابر دیگر مواد است که این امر اختلاف زیاد میان فرکانس سیستم با این جنس را توجیه می‌کند. نسبت E/ρ برای سه ماده دیگر، پلی-اترترکتون، پلی‌کربنات و پلی‌پروپیلن جامد، تقریباً یکسان می‌باشد به همین دلیل فرکانس آن‌ها اختلاف ناچیزی دارد. برای آن‌ها چگالی جرم اثر بیشتری نسبت به سختی، بر روی فرکانس گذاشته و با افزایش چگالی فرکانس کاهش یافته است. بنابراین، میان این سه ماده، پلی-اترترکتون با بیشترین چگالی، فرکانس طبیعی کمترین را داراست.

جدول ۵- تغییرات فرکانس طبیعی پوسته به ازای تغییرات زاویه رأس

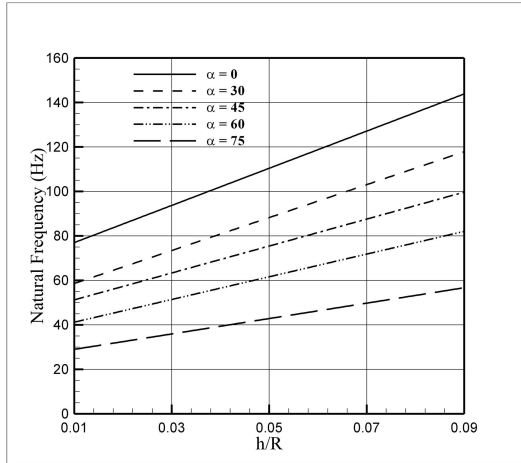
مخروط، برای شرایط مرزی مختلف				α
Ss-Cl	Cs-Sl	Cs-Cl	Ss-Sl	۰
۶۳/۰۵۱۷	۶۳/۰۵۱۷	۷۲/۳۸۳	۵۰/۹۵۵۳	۱۵
۵۴/۸۹۹۹	۴۶/۱۶۷۲	۵۸/۶۹۳۶	۴۲/۶۲۰۹	۳۰
۴۸/۸۵۸۹	۳۹/۹۴۳۷	۴۹/۷۱۰۴	۳۹/۱۹۹۹	۴۵
۴۱/۰۵۴۳	۳۳/۰۳۹۷	۴۱/۵۷۶	۳۲/۵۱۷۴	۶۰
۳۲/۰۱۹۹	۲۶/۴۷۵	۳۲/۲۴۶۹	۲۶/۲۳۴	۷۵
۲۱/۵۶۹۳	۱۸/۸۰۷۳	۲۱/۸۳۶۲	۱۸/۵۶۴۹	

برای $L = 8 \text{ m}$ به ترتیب برابر $Dis = 14.617, 18.043, 20.656, 31.822$ می‌باشد. برای یک زاویه رأس مخروط یکسان، درصد اختلاف فرکانس طبیعی شرط مرزی تکیه‌گاه گیردار از تکیه‌گاه ساده بیشتر است. درصد اختلاف فرکانس طبیعی از رابطه‌ی زیر قابل محاسبه می‌باشد.

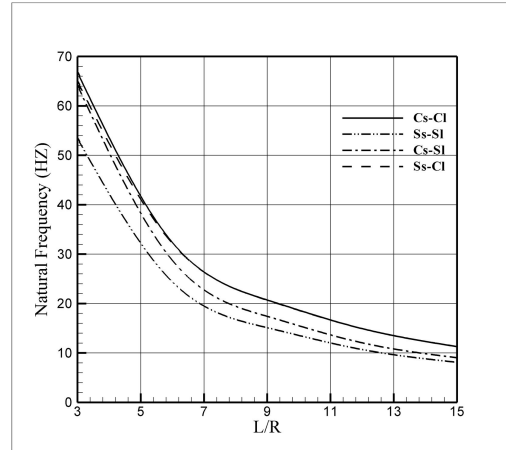
$$Dis(\alpha = 45^\circ) = \frac{F_{\alpha=30^\circ} - F_{\alpha=45^\circ}}{F_{\alpha=30^\circ}} \times 100$$



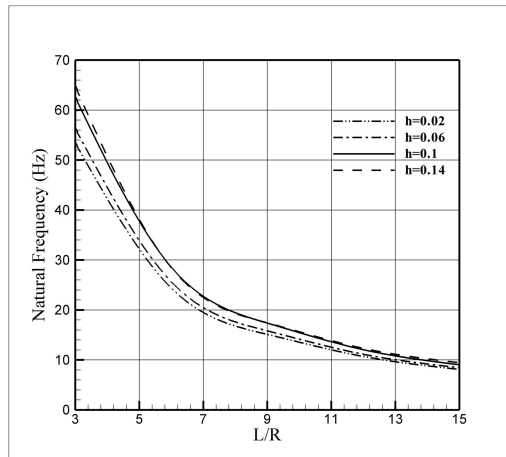
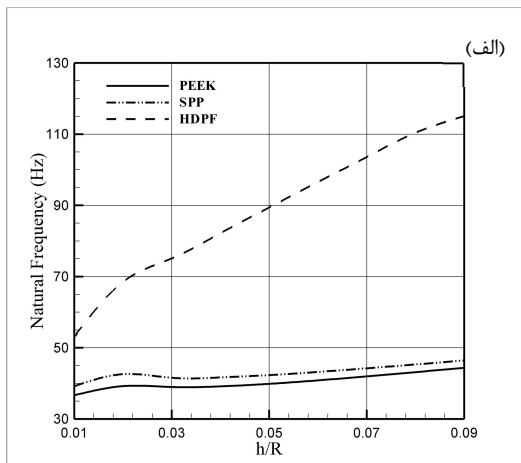
شکل ۷- تغییرات فرکانس طبیعی بر حسب زاویه رأس مخروط (الف) تکیه‌گاه ساده (ب) تکیه‌گاه گیردار



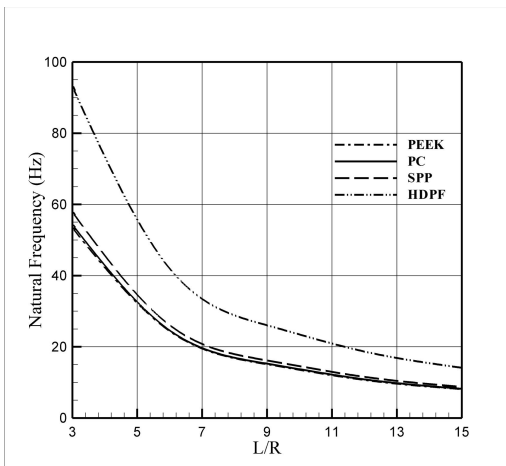
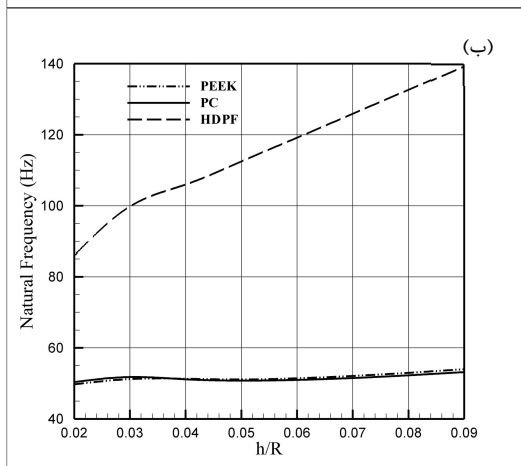
شکل ۱۱- تغییرات فرکانس طبیعی پوسته به ازای تغییرات ضخامت هسته ساندویچ پنل برای زوایای رأس مخروط متفاوت



شکل ۸- تغییرات فرکانس طبیعی پوسته بر حسب طول مخروط، برای شرایط مرزی مختلف



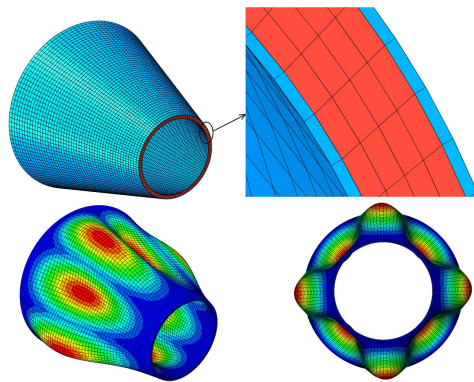
شکل ۹- تغییرات فرکانس طبیعی پوسته بر حسب طول مخروط، برای ضخامت هسته ساندویچ پنل متفاوت



شکل ۱۰- تغییرات فرکانس طبیعی پوسته بر حسب طول مخروط برای جنس هسته ساندویچ پنل متفاوت

شکل ۱۲- تغییرات فرکانس طبیعی پوسته بر حسب ضخامت هسته ساندویچ پنل برای جنس هسته متفاوت. (الف) تکیه‌گاه ساده (ب) تکیه‌گاه گیردار

اثر افزایش ضخامت هسته ساندویچ پنل بر روی فرکانس طبیعی سیستم، برای زوایای رأس مخروط متفاوت در شکل ۱۱، برای جنس



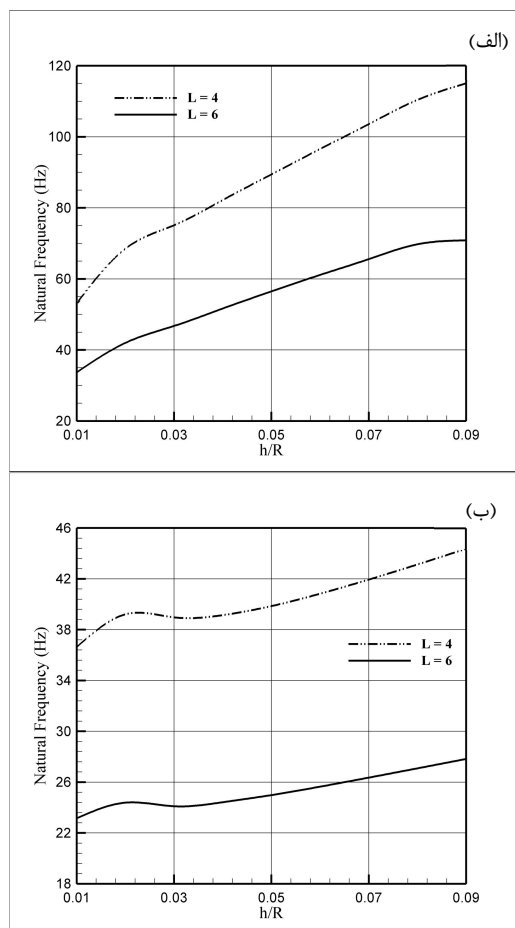
شکل ۱۴- نمونه‌ای از پوسته مخروطی مدل شده در نرم‌افزار آباکوس به کمک المان سه‌بعدی برای هسته و شکل مود مربوطه

۴- نتیجه‌گیری

در این تحقیق، ارتعاشات آزاد پوسته مخروطی ساندویچی مورد بررسی قرار گرفته و به کمک نظریه تغییر شکل برشی مرتبه اول پوسته‌ها، مدلسازی ریاضی انجام شده است. معادلات بدست آمده به کمک روش مربعات دیفرانسیلی حل و فرکانس طبیعی محاسبه شده است. محاسبات برای مواد مختلف، به عنوان هسته انجام شده است. به منظور صحت‌سنجی، نتایج بدست آمده، با مرجع [۱۴] و نرم‌افزار آباکوس مقایسه گردید. اهم نتایج عبارتند از:

- (۱) سرعت همگرایی فرکانس طبیعی برای پوسته استوانه‌ای در روش مربعات دیفرانسیلی از پوسته مخروطی بیشتر بوده و همچنین برای پوسته مخروطی از زاویه رأس مخروط مستقل بوده و با افزایش زاویه تغییری نمی‌کند.
- (۲) شماره مود فرکانس طبیعی پایه، با افزایش ضخامت کاهش می‌یابد، ولی با تغییر زاویه رأس مخروط تغییری نمی‌کند.
- (۳) درصد اختلاف فرکانس طبیعی برای پوسته با شرط مرزی Cs-Cl با Cs-Sl و Ss-Sl با افزایش طول پوسته، افزایش می‌یابد.
- (۴) درصد اختلاف فرکانس طبیعی برای دو شرط مرزی Cs-Cl و Ss-Cl، با افزایش زاویه رأس مخروط و یا افزایش طول پوسته، کاهش می‌یابد، بطوری که برای $L = 12, 15$ m فرکانس آن‌ها با هم برابر می‌شود.
- (۵) نسبت E/ρ برای پلی‌اترکتون، پلی‌کربنات و پلی‌پروپیلن جامد اختلاف ناچیزی دارد که با مقایسه‌ی فرکانس طبیعی ساندویچ پنل که هسته‌ی آن از این جنس است، می‌توان نتیجه گرفت که برای آن‌ها جرم اثر بیشتری نسبت به سختی، بر روی فرکانس گذاشته و با افزایش چگالی فرکانس کاهش یافته است. بنابراین میان این سه ماده، پلی‌اترکتون که بیشترین چگالی را دارد، دارای فرکانس طبیعی کمترین است.
- (۶) برای ساندویچ پنل با هسته‌ی پلی‌اترکتون، پلی‌کربنات و پلی‌پروپیلن جامد، در ضخامت‌های کم، با افزایش ضخامت، اثر افزایش چگالی و جرم بیشتر از اثر افزایش سختی بوده و به همین خاطر باعث کاهش فرکانس می‌شود.

هسته متفاوت در شکل ۱۲ و برای طول پوسته متفاوت در شکل ۱۳ بررسی شده است. با توجه به شکل ۱۱، با افزایش ضخامت هسته، فرکانس نیز افزایش می‌یابد ولی با افزایش زاویه رأس مخروط، شیب نمودار کاهش می‌یابد. بنابراین با افزایش زاویه، حساسیت فرکانس نسبت به ضخامت کاهش می‌یابد. طبق شکل ۱۲، فرکانس طبیعی با افزایش ضخامت هسته، از جنس فوم پلی‌آمید، همواره افزایش می‌یابد ولی برای دو ماده دیگر پس از کمی کاهش، افزایش می‌یابد. دلیل این پدیده این است که در ضخامت‌های کم، با افزایش ضخامت، اثر افزایش چگالی و جرم بیشتر از اثر افزایش سختی بوده و به همین خاطر باعث کاهش فرکانس می‌شود. با توجه به شکل ۱۳ مشخص می‌شود، که اثر افزایش ضخامت در ساندویچ پنل با طول کوتاه‌تر، محسوس‌تر می‌باشد، به طوری که شیب نمودار برای ساندویچ پنل با طول ۴ متر از شیب نمودار برای ساندویچ پنل با طول ۶ متر، بیشتر می‌باشد. در انتها و به عنوان نمونه، مش‌بندی و شکل مود پوسته مخروطی مدل شده در نرم‌افزار آباکوس در شکل ۱۴ آورده شده است.



شکل ۱۳- تغییرات فرکانس طبیعی پوسته بر حسب ضخامت هسته پوسته برای طول مخروط متفاوت (الف) HDPF (ب) PEEK

۵- مراجع

- [1] Qatu M.S., Recent research advances in the dynamic behavior of shells: part 1. Laminated composite shells, Appl Mech Rev, Vol. 55, No. 4, pp. 325–50, 2002.
- [2] Qatu M.S., Vibration of laminated shells and plates, Oxford: Elsevier; 2004.
- [۳] فرشید اله کرمی، مریم قصابزاده سرریزی، تحلیل ارتعاشات آزاد پوسته استوانه‌ای نازک و نسبتاً ضخیم مدرج تابعی دو جهت براساس نظریه مرتبه اول تغییر شکل برشی، مجله علمی پژوهشی دانشگاه تبریز، جلد ۴۶، شماره ۱، صفحه ۲۸-۱۵، بهار ۱۳۹۵.
- [4] Garg A.K., Khare R.K., and Kant T., Higher-order closed-form solutions for free vibration of laminated composite and sandwich shells, J Sandwich Struct Mater, Vol. 8, pp. 205–35, 2006.
- [5] Lopatin A.V., and Morozov E.V., Buckling of the composite orthotropic clamped–clamped cylindrical shell loaded by transverse inertia forces, Compos Struct, Vol. 95, pp. 471–8, 2013.
- [6] Khare R.K., Rode V., Garg A.K., and John S.P.H., Higher-order closed-form solutions for thick laminated sandwich shells, J Sandwich Struct Mater, Vol.7, pp. 335–58, 2005.
- [7] An C., Duan M., and Estefen S.F., Collapse and buckle propagation of sandwich pipes: a review, In: Proceedings of the ASME 2013 32nd international conference on ocean, offshore and arctic engineering, June 8–14, Nantes, France, 2013.
- [8] Arjomandi K., and Taheri F., Elastic buckling capacity of bonded and unbonded sandwich pipes under external hydrostatic pressure, J Mech Mater Struct, Vol. 5, No. 3, pp. 391–407, 2010.
- [9] Arjomandi K., and Taheri F., Stability and post-buckling response of sandwich pipes under hydrostatic external pressure, Int J Press Vessels Pip, Vol. 88, pp. 138–48, 2011.
- [10] Ohga M., Wijenayaka A.S., and Croll J.G.A., Reduced stiffness buckling of sandwich cylindrical shells under uniform external pressure, Thin-Walled Struct, Vol. 43, pp. 1188–201, 2005.
- [11] Wilkins, JR D. J., Bert C.W., and Egle D.M., Free vibrations of orthotropic sandwich conical shells with various boundary conditions, J. Sound Vib. 13, 211-228, 1970.
- [12] Kardomateas G.A., and Simites G.J., Buckling of long sandwich cylindrical shells under external pressure, J Appl Mech, Vol. 72, pp. 493–9, 2005.
- [13] Han J.H., Kardomateas G.A., and Simites G.J., Elasticity shell theory and finite element results for the buckling of long sandwich cylindrical shells under external pressure, Composites: Part B, Vol. 35, pp. 591–8, 2004.
- [14] Irie T., Yamada G., and Kaneko Y., Natural frequencies of truncated conical shells, Journal of Sound and Vibration, Vol. 92, No. 3, pp. 447–453, 1984.
- [15] Ng, T.Y., Hua, L., and Lam, K.Y., Generalized differential quadrature for free vibration of rotating composite laminated conical shell with various boundary conditions, Int. J. Mech. Sci. 45, 567–587, 2003.
- [16] Xiang X., Guoyong J., Tiangui Y., and Zhigang L., Free vibration analysis of functionally graded conical shells and annular plates using the Haar wavelet method, Applied Acoustics, 85, pp.130–142, 2014.