

بررسی تاثیر نقص هندسی و تغییر شکل های پیش و پس از کمانش بر ارتعاشات آزاد ورق ها

دانشجوی دکتری، دانشکده مهندسی، دانشگاه شهید چمران اهواز، اهواز، ایران
 استاد، دانشکده مهندسی، دانشگاه شهید چمران اهواز، اهواز، ایران
 استادیار، دانشکده مهندسی، دانشگاه شهید چمران اهواز، اهواز، ایران
 استاد، دانشکده مهندسی، دانشگاه شهید چمران اهواز، اهواز، ایران

حسام مکوندی
 شاپور مرادی*
 داود پور ویس
 کورش حیدری شیرازی

چکیده

این مقاله به بررسی تاثیر وجود نقص اولیه هندسی و نیز اثر تغییر شکل های پیش و پس از کمانش ورق های ایزوتروپیک مستطیلی تحت اثر بار فشاری درون صفحه ای تک محوره، بر رفتار ارتعاشی ورق می پردازد. به این منظور روابط حاکم بر رفتار ورق با استفاده از نظریه میندلین و روابط کرنش جابجایی ون کارمن برای جابجایی های بزرگ، استخراج گردیده و پاسخ دستگاه معادلات دیفرانسیل غیرخطی بدست آمده به صورت ترکیبی از پاسخ های استاتیکی و دینامیکی حاصل گردیده است. به دلیل بزرگ بودن دامنه تغییر شکل استاتیکی ورق در مقایسه با دامنه ارتعاشات آن، حل دستگاه معادلات بدست آمده در دو گام صورت پذیرفته است. در گام نخست پاسخ پیش و پس از کمانش ورق با گسسته سازی معادلات به روش مربعات دیفرانسیلی و حل دستگاه معادلات حاصل به کمک روش طول کمان حاصل شده است. پس از آن با در نظر گرفتن ارتعاشات با دامنه کوچک حول حالت تغییر شکل یافته ورق (پاسخ مرحله نخست) و با صرف نظر نمودن از عبارات غیرخطی، فرکانس های طبیعی ارتعاشات ورق به کمک روش مربعات دیفرانسیلی و حل مسئله مقدار ویژه ایجاد شده، حاصل گردیده است. نتایج حاصل برای دامنه های متفاوت نقص هندسی اولیه و نیز شرایط مرزی متفاوت نشان دهنده تاثیر شدید عوامل ذکر شده بر فرکانس های طبیعی ورق می باشد.

واژه های کلیدی: پس کمانش، ارتعاشات، نقص اولیه، تغییر شکل برشی، مربعات دیفرانسیلی.

Study on Effects of Initial Imperfection and Pre & Post-buckling Deformations on Vibration of Plates

H. Makvandi

Faculty of Engineering, Shahid Chamran University of Ahvaz, Ahvaz, Iran

Sh. Moradi

Faculty of Engineering, Shahid Chamran University of Ahvaz, Ahvaz, Iran

D. Poorveis

Faculty of Engineering, Shahid Chamran University of Ahvaz, Ahvaz, Iran

K. Heidari Shirazi

Faculty of Engineering, Shahid Chamran University of Ahvaz, Ahvaz, Iran

Abstract

Effects of initial geometric imperfection and pre- & post-buckling deformations on vibration of isotropic rectangular plates under uniaxial compressive in-plane load have been studied. Vibration equations of a plate, using Mindlin theory and Von-Karman stress-strain relations for large deformations, have been extracted. The response of nonlinear differential equations was assumed as the summation of dynamic and static responses. Due to the large static deflection of a plate in comparison with its vibration amplitude, the differential equations have been solved in two steps. First, the static equations have been solved using the differential quadrature method and the Arc-length strategy. Next, considering small vibration amplitude about the deformed plate (the first step result) and eliminating nonlinear terms, natural frequencies have been calculated using the differential quadrature method and solving the obtained eigenvalue problem. The results for different initial geometric imperfection and different boundary conditions reflect the impact of the mentioned factors on the natural frequencies of plates.

Keywords: Post-buckling, Vibration, Initial imperfection, Shear deformation, Differential quadrature.

بررسی ارتعاشات ورق های تخت و پوسته های کامل با اشکال و شرایط مرزی متفاوت صورت پذیرفته است. با این وجود تفاوت معناداری میان نتایج نظری و نتایج تجربی مشاهده می گردد که این مسئله می تواند ناشی از وجود نقص هندسی در این سازه ها و یا تغییر شکل های سازه، در حالت هایی که سازه تحت بارهای درون صفحه ای قرار دارد، باشد. لذا محققین بسیاری به بررسی اثر نقص هندسی اولیه و تغییر شکلهای پیش و پس از کمانش بر رفتار دینامیکی ورق ها پرداخته اند [۱-۱۶].

۱- مقدمه

ورق ها با توجه به نسبت مقاومت به وزن مناسبی که دارند به طور گسترده ای در صنایع مختلف مورد استفاده قرار می گیرند. با توجه به این کاربرد گسترده، ارتعاشات سازه های ورقی موضوع بسیاری از مطالعات صورت گرفته در دهه های گذشته بوده و هنوز هم توجه بسیاری را به خود معطوف نموده است. تلاش های بسیاری در زمینه

قرار دادند و به کمک روش پرتابی^۱ معادلات حاصل را برای شرایط مرزی ساده و گیردار حل نمودند.

تاکزالا و همکاران [۱۴] ارتعاشات پیش و پس از کمانش ورق‌های مدرج تابعی بر روی بستر الاستیک تحت بارگذاری دمایی را مورد بررسی قرار دادند. آن‌ها با استفاده از نظریه برشی مرتبه اول و روش اجزا محدود جهت بررسی رفتار ورق‌های مدرج تابعی، مشاهده نمودند که رفتار این ورق‌ها وابستگی شدیدی به نسبت حجمی فلز و سرامیک و همچنین مقادیر دما دارد. دی و همکاران [۱۵] رفتار پس از کمانش و ارتعاشات ورق‌های ساندوویچی کمانش یافته تحت بارهای لبه‌ای غیریکنواخت را به کمک روش گالرکین مورد بررسی قرار دادند. آن‌ها به کمک روابط لاو-کیرشهف معادلات حاکم بر ورق را استخراج نموده و در روابط خود از اثر نقص هندسی اولیه صرف نظر نمودند. بنچاف و بوتیور [۱۶] ارتعاشات غیرخطی ورق کمانش یافته ون-کارمن را به کمک یک روش عددی تقریبی و روش تراز هارمونیک مورد مطالعه قرار دادند. آن‌ها مسائل استاتیکی و دینامیکی غیرخطی مربوطه را به مجموعه‌ای از مسائل خطی تبدیل نموده و آن را به کمک روش اجزا محدود حل نمودند.

از بررسی‌های انجام گرفته، مشخص می‌گردد که تا به حال رفتار ارتعاشی ورق‌های کمانش یافته با در نظر گرفتن تاثیر تغییر شکل‌های برشی و نیز با استفاده از روش مربعات دیفرانسیلی، بررسی نگردیده و پژوهش‌های صورت پذیرفته پیشین محدود به شرایط مرزی خاص [۱-۱۶] بوده‌اند. لذا با توجه به اهمیت بررسی پاسخ‌های دینامیکی سازه‌های ورقی، در این مقاله، نخست اثر وجود نقص هندسی بر فرکانس‌های طبیعی ورق بررسی شده و پس از آن تاثیر تغییر شکل‌های پیش از کمانش و پس از کمانش بر فرکانس‌های طبیعی ورق مورد بررسی قرار گرفته است. به این منظور روابط حاکم بر رفتار ورق با استفاده از نظریه میندلین و روابط کرنش-جابجایی ون کارمن استخراج گردیده است. دستگاه معادلات دیفرانسیل غیرخطی بدست آمده به کمک روش مربعات دیفرانسیلی به یک دستگاه معادلات جبری غیرخطی تبدیل شده و پس از آن، پاسخ پس از کمانش ورق به کمک روش نیوتن رافسون و روش طول کمان بدست می‌آید. سپس با فرض ارتعاشات با دامنه کوچک حول حالت کمانش یافته و با صرف نظر از عبارات غیر-خطی، فرکانس‌های طبیعی ورق کمانش یافته استخراج می‌گردد.

۲- معادلات حاکم

با استفاده از نظریه میندلین و با در نظر گرفتن وجود نقص اولیه هندسی در روابط کرنش-جابجایی ون کارمن، کرنش‌های صفحه میانی ورقی با ابعاد a و b که تحت بار فشاری P قرار گرفته، مطابق شکل ۱ به صورت روابط (۱) بدست می‌آیند.

هوی و لیسا [۱] تاثیر نواقص هندسی را بر ارتعاشات ورق‌های تخت چهار طرف ساده تحت بارهای فشاری درون صفحه‌ای یک محوره و دو محوره مورد مطالعه قرار داده و تغییرات زیاد فرکانس‌های طبیعی در اثر وجود نقص هندسی را مشاهده نمودند. پاسیک و همکاران [۲] با استفاده از روش‌های تحلیلی به بررسی ارتعاشات غیرخطی ورق‌های مستطیلی کمانش یافته با لبه‌های غیرصلب پرداختند. ایلانکو و دیکسون [۳] و ایلانکو [۴] به کمک روش گالرکین پاسخ پس از کمانش و فرکانس‌های طبیعی ارتعاشات ورق‌های ایزوتروپیک مستطیلی چهار طرف ساده را در حالت پیش و پس از کمانش محاسبه نمودند. ان جی و وایت [۵] به کمک روش رایلی-ریتز و روش اجزا محدود، فرکانس‌های طبیعی ارتعاشات ورق‌های ایزوتروپیک مستطیلی دارای نقص هندسی را در حالت پیش و پس از کمانش استخراج نمودند. آنها مشاهده نمودند که فرکانس طبیعی ارتعاشات ورق با افزایش بار در مرحله پیش از کمانش، کاهش و در مرحله پس از کمانش، افزایش می‌یابد.

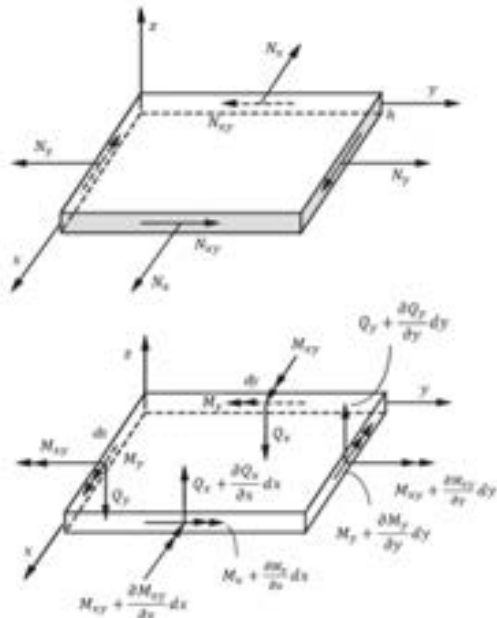
گرایت [۶] با استفاده از روش اجزا محدود به بررسی ارتعاشات پیش و پس از کمانش ورق‌های نازک مستطیلی از جنس مواد مرکب لایه‌ای تحت بارگذاری دمایی پرداخت. او به این منظور از روابط کرنش-جابجایی غیرخطی ون کارمن استفاده و نتایج را برای انواع توزیع دما در ضخامت ورق محاسبه نمود. ساسی و استیگویی [۷] به کمک روش گالرکین تاثیر افزایش دامنه نقص هندسی بر پاسخ پس از کمانش و فرکانس‌های طبیعی ورق مستطیلی کمانش‌یافته را مورد بررسی قرار دادند و مشاهده نمودند که پاسخ‌های حاصل شدیداً وابسته به دامنه نقص هندسی و شرایط مرزی ورق می‌باشد. مورفی و همکاران [۸] به بررسی نظری و تجربی ارتعاشات ورق‌های کمانش یافته چهار طرف گیردار تحت اثر بارگذاری حرارتی پرداختند. آن‌ها به کمک روش گالرکین فرکانس‌های طبیعی ارتعاشات ورق کمانش یافته را استخراج نموده و انطباق خوبی بین چند فرکانس نخست ارتعاشات ورق با فرکانس‌های تجربی مشاهده نمودند.

لیبراسکو و همکاران [۹] به کمک روش گالرکین به بررسی ارتعاشات ورق‌های مواد مرکب تحت بارهای دمایی و مکانیکی پرداختند. آن‌ها به بررسی تاثیر دما و بار وارد بر ورق، بر فرکانس اول ارتعاشات ورق پرداختند و در روابط خود اثرات تغییر شکل‌های برشی و نقص هندسی اولیه را در نظر گرفتند. اوه و همکاران [۱۰] به کمک روش اجزا محدود غیرخطی، به بررسی پس از کمانش و ارتعاشات پیش و پس از کمانش ورق‌های مواد مرکب پیژو لایه‌ای تحت بارهای پیژوالکتریک دمایی پرداختند. آن‌ها به کمک نتایج این تحقیق روشی را جهت افزایش بار کمانش ورق و کاهش خیز پس از کمانش آن ارائه نمودند. گیریش و رامچاندرا [۱۱] رفتار پس از کمانش ورق مرکب مستطیلی را تحت بارگذاری حرارتی مورد مطالعه قرار دادند. آن‌ها به این منظور از روابط کرنش-جابجایی ون کارمن و نظریه تغییر شکل‌های برشی مرتبه بالا استفاده و تاثیر عیوب اولیه را بر رفتار ورق بررسی نمودند. ویلیامز و همکاران [۱۲] پاسخ پس از کمانش ورق‌های دایره‌ای را به کمک روش تفاضل محدود محاسبه نموده و به کمک روش مدلسازی اجزا متمرکز به بررسی ارتعاشات ورق حول حالت کمانش یافته پرداختند. لی و همکاران [۱۳] ارتعاشات پس از کمانش ورق‌های دایره‌ای ارتوتروپیک تحت بارگذاری حرارتی یکنواخت را مورد بررسی

^۱ Shooting Method

$$\begin{Bmatrix} N_x \\ N_y \\ N_{xy} \end{Bmatrix}, \begin{Bmatrix} M_x \\ M_y \\ M_{xy} \end{Bmatrix} = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \begin{Bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} (1, z) dz \quad (3)$$

$$\begin{Bmatrix} Q_x \\ Q_y \end{Bmatrix} = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \begin{Bmatrix} \tau_{xz} \\ \tau_{yz} \end{Bmatrix} dz$$



شکل ۱- نیروها و گشتاورهای وارد بر المان ورق

با تعریف نیروها و ممان‌های حاصل به فرم رابطه (۳)، رابطه بین نیروها و ممان‌های نمایش داده شده در شکل ۲ و جابجایی‌های مفروض ورق محاسبه می‌گردد. پس از آن با نوشتن معادلات دیفرانسیلی حرکت برای المان نمایش داده شده در شکل ۲ در جهات x و y می‌توان معادلات حرکت ورق را مشابه روابط (۴) الی (۶) در این جهات یافت.

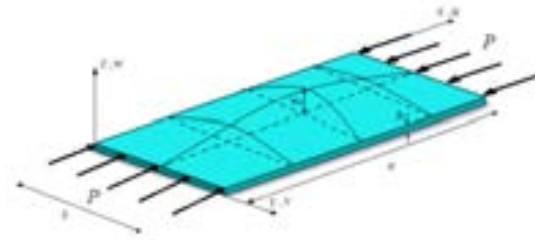
$$\frac{\partial N_x}{\partial x} + \frac{\partial N_{xy}}{\partial y} = \mu \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \quad (4)$$

$$\frac{\partial N_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial N_y}{\partial y} = \mu \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} \quad (5)$$

$$\begin{aligned} & \frac{\partial^2 M_x}{\partial x^2} + 2 \frac{\partial^2 M_{xy}}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 M_y}{\partial y^2} = \mu \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} - \\ & \left[N_x \frac{\partial^2 (w + w_0)}{\partial x^2} + 2 N_{xy} \frac{\partial^2 (w + w_0)}{\partial x \partial y} + \right. \\ & \left. N_y \frac{\partial^2 (w + w_0)}{\partial y^2} \right] \quad (6) \end{aligned}$$

در اینجا $\mu = \rho h$ و ρ چگالی و h ضخامت ورق مورد نظر می‌باشد. همچنین با محاسبه گشتاور حول محورهای x و y نتیجه می‌شود:

$$\frac{\partial M_x}{\partial x} + \frac{\partial M_{xy}}{\partial y} - Q_x = I_x \frac{\partial^2 \alpha}{\partial t^2} \quad (7)$$



شکل ۲- ورق مستطیلی تحت بار فشاری درون صفحه‌ای تک محوره

$$\begin{aligned} \epsilon_x &= \frac{\partial u}{\partial x} + z \frac{\partial \alpha}{\partial x} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 + \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial w_0}{\partial x} \\ \epsilon_y &= \frac{\partial v}{\partial y} + z \frac{\partial \beta}{\partial y} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial y} \right)^2 + \frac{\partial w}{\partial y} \frac{\partial w_0}{\partial y} \\ \epsilon_z &= 0 \\ \gamma_{xy} &= \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} + z \frac{\partial \alpha}{\partial y} + z \frac{\partial \beta}{\partial x} + \\ & \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial w_0}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial y} \frac{\partial w_0}{\partial x} \\ \gamma_{yz} &= \left(\frac{\partial w}{\partial y} + \beta \right) \quad \gamma_{xz} = \left(\frac{\partial w}{\partial x} + \alpha \right) \end{aligned} \quad (1)$$

در اینجا u, v و w به ترتیب جابجایی‌ها در راستای محورهای x, y و z بوده و نقص هندسی اولیه ورق مستطیلی که متناظر با تنش صفر است با جابجایی عمودی w_0 نمایش داده شده است. همچنین α و β به ترتیب چرخش حول محورهای x و y می‌باشد. از سوی دیگر تنش‌ها برای مواد همگن را می‌توان به شکل معادلات (۲) نوشت:

$$\begin{aligned} \sigma_{xx} &= \frac{E}{1 - \nu^2} (\epsilon_{xx} + \nu \epsilon_{yy}) \\ \sigma_{yy} &= \frac{E}{1 - \nu^2} (\epsilon_{yy} + \nu \epsilon_{xx}) \\ \sigma_{zz} &= \frac{E}{1 - \nu^2} (\nu \epsilon_{xx} + \nu \epsilon_{yy}) \\ \tau_{xy} &= \frac{E}{2(1 + \nu)} (\gamma_{xy}) \\ \tau_{xz} &= \frac{E}{2(1 + \nu)} (\gamma_{xz}) \\ \tau_{yz} &= \frac{E}{2(1 + \nu)} (\gamma_{yz}) \end{aligned} \quad (2)$$

در اینجا E مدول الاستیسیته و ν ضریب پواسون می‌باشند. با استفاده از معادلات (۱) و (۲)، نیرو و گشتاور حاصل را می‌توان به صورت معادله (۳) نوشت:

نقص هندسی مورد استفاده به ازای شرایط مرزی متفاوت بررسی شده در این مقاله، در جدول ۱ ارائه شده است.

جدول ۱- توابع نقص هندسی اولیه

شرایط مرزی	نقص اولیه هندسی
چهار طرف ساده (SSSS)	$w_0 = W_0 \left(\sin \frac{n\pi x}{a} \right) \left(\sin \frac{n\pi y}{b} \right)$
چهار طرف گیردار (CCCC)	$w_0 = W_0 \left(1 - \cos \frac{2n\pi x}{a} \right) \left(1 - \cos \frac{2n\pi y}{b} \right)$
دو طرف گیردار دو طرف ساده (SCSC) (اعمال بار بر تکیه‌گاه‌های گیردار)	$w_0 = W_0 \left(1 - \cos \frac{2n\pi x}{a} \right) \left(\sin \frac{n\pi y}{b} \right)$
دو طرف ساده دو طرف گیردار (SCSC) (اعمال بار بر تکیه‌گاه‌های ساده)	$w_0 = W_0 \left(\sin \frac{n\pi x}{a} \right) \left(1 - \cos \frac{2n\pi y}{b} \right)$

به منظور بررسی میزان و نحوه اثر وجود نقص اولیه در فرکانس-های طبیعی ورق‌های نازک مستطیلی، ابتدا روابط (۴) الی (۸) برای حالتی که بار درون صفحه ای موجود نباشد بررسی گردیده است. به این منظور ابتدا از عبارات غیرخطی در معادلات حرکت ورق صرف نظر شده و سپس معادلات حاصل و شرایط مرزی مسئله به کمک روش مربعات دیفرانسیلی به یک دستگاه معادلات جبری تبدیل می‌شوند. پس از آن با حل مسئله مقدار ویژه حاصل به شکل معادله (۱۱)، فرکانس‌های طبیعی ارتعاشات ورق مورد نظر محاسبه می‌گردند.

$$\begin{bmatrix} A_{BB} & A_{BI} \\ A_{IB} & A_{II} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} X_B \\ X_I \end{Bmatrix} = -\omega^2 \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ B_{IB} & B_{II} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} X_B \\ X_I \end{Bmatrix} \quad (11)$$

زیرنویس‌های B و I به ترتیب نشان‌دهنده مناطق داخلی و مرزی ورق می‌باشند. بردارهای X_B و X_I نیز به ترتیب بردار جابجایی نقاط مرزی و داخلی ورق می‌باشند. می‌توان این معادله را به فرم معادله (۱۲) بدست آورد. که با حل آن، فرکانس‌های طبیعی ورق حاصل می‌گردد.

$$[A^*]X_I = -\omega^2[B^*]X_I$$

$$\begin{cases} [A^*] = (A_{II} - A_{IB} \times A_{BB}^{-1} \times A_{BI}) \\ [B^*] = (B_{II} - B_{IB} \times A_{BB}^{-1} \times A_{BI}) \end{cases} \quad (12)$$

۴- پس از کماتش

همانگونه که پیش از این نیز ذکر گردید تغییر شکل ورق‌ها تحت بارهای فشاری درون صفحه‌ای نیز بر رفتار دینامیکی آن‌ها موثر است. به منظور بررسی این تاثیر، در ادامه فرکانس‌های طبیعی ورق‌های مستطیلی تحت تاثیر بارهای درون صفحه‌ای فشاری تک محوره، به کمک روابط (۴) الی (۸) بررسی می‌گردد. به منظور حل این معادلات و بدست آوردن پاسخ دستگاه معادلات فوق، ابتدا پاسخ سیستم مطابق رابطه (۱۳)، به صورت مجموع پاسخ استاتیکی (مستقل از زمان) و پاسخ دینامیکی (متغیر با زمان) در نظر گرفته می‌شود. در حقیقت به

$$\frac{\partial M_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial M_y}{\partial y} - Q_y = I_y \frac{\partial^2 \beta}{\partial t^2} \quad (8)$$

در این روابط $I_x = I_y = \frac{\rho h^3}{12}$ می‌باشد. با جایگذاری مقادیر نیروها و ممان‌های وارد بر المان ورق در روابط (۴) الی (۸)، معادلات دیفرانسیلی حرکت ورق، بر حسب جابجایی‌ها (w, v, u و β) حاصل می‌گردند. به منظور حل این دستگاه معادلات دیفرانسیل غیرخطی از روش مربعات دیفرانسیلی که در ادامه معرفی خواهد شد استفاده شده است.

۲-۱- روش مربعات دیفرانسیلی

ابداع روش مربعات دیفرانسیلی بر اساس روش مشتق‌گیری گوس برای محاسبه مشتق یک تابع بر اساس مقدار آن در تعداد محدودی از نقاط دامنه انجام گرفته است. این روش، تقریبی برای بیان مشتق یک تابع در نقطه‌ای واقع بر دامنه آن، بصورت ترکیب وزنی از مقادیر تابع در نقاط درون آن دامنه می‌باشد. این تعریف نخستین بار توسط بلمان و همکاران [۱۷] ارائه گردید. آن‌ها پیشنهاد کردند که مشتق مرتبه اول $f(x,y)$ در یک نقطه نسبت به x و y به صورت تقریبی خطی از مجموع مقادیر تابع در تمام بازه مشتق‌گیری به صورت معادله (۹) بیان گردد.

$$\frac{\partial^n}{\partial x^n} f(x_i, y_j) = \sum_{k=1}^{N_x} C_{ik}^{(n)} f(x_k, y_j)$$

$$\frac{\partial^m}{\partial y^m} f(x_i, y_j) = \sum_{k=1}^{N_y} C_{jk}^{(m)} f(x_i, y_k)$$

$$\frac{\partial^{(n+m)}}{\partial x^n \partial y^m} f(x_i, y_j) = \sum_{k=1}^{N_x} C_{ik}^{(n)} \sum_{l=1}^{N_y} C_{jl}^{(m)} f(x_k, y_l)$$

$$n = 1, \dots, N_x - 1 \quad , \quad m = 1, \dots, N_y - 1$$

در رابطه فوق f تابع مورد نظر، N_x و N_y تعداد نقاط دقت در راستای x و y ، x_i و y_j نقاط دقت n ام و m ام از دامنه تابع و $C_{ij}^{(n)}$ و $C_{ij}^{(m)}$ ضرایب وزنی برای بدست آوردن مشتق مرتبه n و m تابع $f(x_i, y_j)$ در (x_i, y_j) می‌باشد. در این پژوهش برای محاسبه ضرایب وزنی مربعات دیفرانسیلی از روابطی که توسط کوان و چانگ [۱۸] ارائه شده، استفاده شده است. همچنین در این مقاله، از نقاط دقت لاگرانژ با رابطه‌ای مشابه معادله (۱۰) جهت انجام کلیه محاسبات استفاده شده است.

$$x_i = \frac{1}{2} \left[1 - \cos \left(\frac{2i-1}{N-1} \pi \right) \right] \quad i = 2, 3, \dots, N_x - 1$$

$$x_1 = 0, x_{N_x} = 1$$

$$y_j = \frac{1}{2} \left[1 - \cos \left(\frac{2j-1}{N-1} \pi \right) \right] \quad j = 2, 3, \dots, N_y - 1 \quad (10)$$

$$y_1 = 0, y_{N_y} = 1$$

۳- اثر نقص اولیه هندسی

همانگونه که پیشتر ذکر شد یکی از عواملی که موجب اختلاف رفتار تجربی و نظری ورق‌ها می‌گردد وجود نقص هندسی اولیه در ساختار ورق است. در این پژوهش ضریبی از شکل مود اول کماتش خطی ورق به عنوان نقص هندسی اولیه در نظر گرفته شده است. توابع

$$\begin{aligned}
 & \frac{Eh}{1-\nu^2} [v_{d,yy} + w_{d,yy}w_{s,y} + w_{s,yy}w_{d,y} + w_{d,yy}w_{0,y} + \\
 & + w_{d,y}w_{0,yy} + \nu(u_{d,xy} + w_{d,xy}w_{s,x} + w_{s,xy}w_{d,x} + \\
 & w_{d,xy}w_{0,x} + w_{d,x}w_{0,xy})] + \frac{Eh}{2(1+\nu)} [u_{d,xy} + v_{d,xx} + \\
 & w_{d,xy}w_{s,x} + w_{s,xy}w_{d,x} + w_{s,x}w_{d,xy} + w_{d,x}w_{s,xy} + \\
 & w_{0,xx}w_{d,y} + w_{0,x}w_{d,xy} + w_{d,xx}w_{0,y} + w_{d,x}w_{0,xy}] = \mu\ddot{w}_d \\
 & K_s Gh(\alpha_{d,x} + w_{d,xx}) + K_s Gh(\beta_{d,y} + w_{d,yy}) + \\
 & \frac{Eh}{1-\nu^2} (u_{d,xx}w_{s,x} + u_{s,xx}w_{d,x} + w_{d,xx}w_{s,x}^2 + \\
 & 2w_{s,xx}w_{s,x}w_{d,x} + w_{d,xx}w_{0,x}w_{s,x} + w_{s,xx}w_{0,x}w_{d,x} + \\
 & 2w_{s,x}w_{d,x}w_{0,xx} + \nu(v_{d,xy}w_{s,x} + v_{s,xy}w_{d,x} + \\
 & w_{d,xy}w_{s,x}w_{0,y} + w_{s,xy}w_{d,x}w_{0,y} + w_{0,xy}w_{d,x}w_{s,y} + \\
 & w_{0,xy}w_{s,x}w_{d,y}) + \frac{Eh}{1-\nu^2} (u_{d,xx}w_{0,x} + w_{d,xx}w_{0,x}w_{s,x} + \\
 & w_{s,xx}w_{0,x}w_{d,x} + w_{d,xx}w_{0,x}^2 + w_{0,xx}w_{0,x}w_{d,x} + \\
 & \nu(v_{d,xy}w_{0,x} + w_{d,xy}w_{0,x}w_{s,y} + w_{s,xy}w_{0,x}w_{d,y} + \\
 & w_{d,xy}w_{0,x}w_{0,y} + w_{0,xy}w_{0,x}w_{d,y})) + \frac{Eh}{1-\nu^2} (u_{d,x}w_{s,xx} + \\
 & u_{s,x}w_{d,xx} + \frac{1}{2}w_{s,x}^2w_{d,xx} + w_{s,xx}w_{s,x}w_{d,x} + \\
 & w_{s,xx}w_{0,x}w_{d,x} + w_{d,xx}w_{0,x}w_{s,x} + \nu(v_{d,y}w_{s,xx} + \\
 & v_{s,y}w_{d,xx} + \frac{1}{2}w_{d,xx}^2w_{d,xx} + w_{d,y}w_{s,xx}w_{0,y} + w_{s,y}w_{d,xx}w_{0,y} + \\
 & w_{s,y}w_{s,xx}w_{d,y})) + \frac{Eh}{1-\nu^2} (u_{d,x}w_{0,xx} + w_{0,xx}w_{0,x}w_{d,x} + \\
 & \nu(v_{d,y}w_{0,xx} + w_{d,y}w_{0,xx}w_{0,y})) + \frac{Eh}{1-\nu^2} (v_{d,yy}w_{s,y} + \\
 & v_{s,yy}w_{d,y} + w_{d,yy}w_{s,y}^2 + 2w_{s,yy}w_{0,y}w_{d,y} + w_{d,yy}w_{0,y}w_{s,y} + \\
 & w_{s,yy}w_{0,y}w_{d,y} + 2w_{s,y}w_{d,y}w_{0,yy} + \nu(u_{d,xy}w_{s,y} + \\
 & u_{s,xy}w_{d,y} + w_{s,xy}w_{0,x}w_{d,y} + w_{s,xy}w_{d,y}w_{0,x} + \\
 & w_{d,xy}w_{s,y}w_{0,x} + w_{0,xy}w_{s,x}w_{d,y} + w_{s,xy}w_{d,y}w_{s,x})) + \\
 & \frac{Eh}{1-\nu^2} (v_{d,yy}w_{0,y} + w_{d,yy}w_{0,y}w_{s,y} + w_{s,yy}w_{0,y}w_{d,y} + \\
 & w_{d,yy}w_{0,y}^2 + w_{0,yy}w_{0,y}w_{d,y} + \nu(u_{d,xy}w_{0,y} + \\
 & w_{d,xy}w_{0,y}w_{s,x} + w_{s,xy}w_{0,y}w_{d,x} + w_{d,xy}w_{0,x}w_{0,y} + \\
 & w_{0,xy}w_{0,y}w_{d,x})) + \frac{Eh}{1-\nu^2} (u_{d,x}w_{0,xx} + w_{0,xx}w_{s,x}w_{d,x} + \\
 & w_{0,xx}w_{s,x}w_{d,x} + \nu(v_{d,y}w_{0,xx} + w_{0,xx}w_{s,y}w_{d,y} + \\
 & w_{0,xx}w_{0,y}w_{d,y}) + \frac{Eh}{1-\nu^2} (v_{d,y}w_{s,yy} + v_{s,y}w_{d,yy} + \\
 & \frac{1}{2}w_{d,yy}w_{s,y}^2 + w_{s,yy}w_{d,y}w_{s,y} + w_{d,yy}w_{s,y}w_{0,y} + \\
 & w_{d,y}w_{s,yy}w_{s,y} + \nu(u_{s,x}w_{d,yy} + u_{d,x}w_{s,yy} + \\
 & \frac{1}{2}w_{d,yy}w_{s,x}^2 + w_{d,x}w_{s,yy}w_{0,x} + w_{s,x}w_{d,yy}w_{0,x})) + \\
 & \frac{Eh}{1-\nu^2} (v_{d,y}w_{0,yy} + w_{0,yy}w_{s,y}w_{d,y} + \\
 & w_{0,yy}w_{0,y}w_{d,y} + \nu(u_{d,x}w_{0,yy} + w_{d,x}w_{0,yy}w_{s,x} + \\
 & w_{d,x}w_{0,yy}w_{0,x}) + \frac{Eh}{2(1+\nu)} (u_{s,xy}w_{d,y} + u_{d,xy}w_{s,y} \\
 & v_{s,xx}w_{d,y} + v_{d,xx}w_{s,y} + w_{d,xx}w_{s,y}^2 + 2w_{s,xx}w_{s,y}w_{d,y} + \\
 & 2w_{0,xx}w_{s,y}w_{d,y} + w_{s,xy}w_{d,x}w_{s,y} + w_{s,xy}w_{d,x}w_{s,y} + \\
 & w_{d,xy}w_{s,x}w_{s,y} + w_{s,xy}w_{s,x}w_{d,y} + w_{d,xy}w_{0,x}w_{s,y} + \\
 & w_{0,x}w_{s,xy}w_{d,y} + w_{s,xx}w_{0,y}w_{d,y} + w_{d,xx}w_{0,y}w_{s,y} + \\
 & w_{0,xy}w_{s,y}w_{d,x} + w_{0,xy}w_{s,x}w_{d,y})) + \frac{Eh}{2(1+\nu)} \\
 & (u_{d,xy}w_{0,y} + v_{d,xx}w_{0,y} + w_{s,xx}w_{d,y}w_{0,y} + w_{d,xx}w_{s,y}w_{0,y} + \\
 & w_{s,xy}w_{d,x}w_{0,y} + w_{d,xy}w_{s,x}w_{0,y} + w_{0,xy}w_{d,y}w_{0,y} +
 \end{aligned}$$

(۱۵)

(۱۶)

این روش، ارتعاشات ورق (پاسخ متغیر با زمان) حول حالت تغییر شکل یافته ورق (پاسخ مستقل از زمان) بررسی می‌گردد.

$$\begin{aligned}
 w &= w_s + w_d \\
 u &= u_s + u_d \\
 v &= v_s + v_d \\
 \alpha &= \alpha_s + \alpha_d \\
 \beta &= \beta_s + \beta_d
 \end{aligned}
 \tag{۱۳}$$

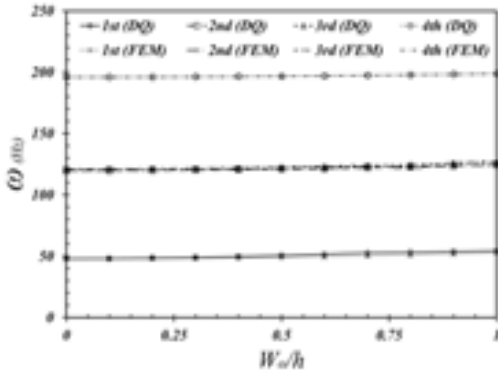
در این رابطه $w_s, u_s, v_s, \alpha_s, \beta_s$ پاسخ پس از کمانش (مستقل از زمان) و $w_d, u_d, v_d, \alpha_d, \beta_d$ دامنه ارتعاشات حول حالت کمانش یافته (وابسته به زمان) می‌باشد. با جایگذاری رابطه (۱۳) در دستگاه معادلات مورد نظر، و با صرف نظر نمودن از عبارتهای وابسته به زمان در روابط حاصل، دستگاه معادلات پس از کمانش (مستقل از زمان) بدست می‌آید.

برای حل این دستگاه معادلات دیفرانسیل غیرخطی ابتدا به کمک روش مربعات دیفرانسیلی، دستگاه معادلات مورد نظر به یک دستگاه معادلات جبری غیرخطی تبدیل شده و سپس دستگاه حاصل به کمک روش طول کمان حل می‌گردد. در صورتی که در حل معادلات حاکم بر رفتار بعد از کمانش ورق‌ها و بدست آوردن پاسخ سیستم که اغلب بصورت منحنی بار بر حسب جابجایی رسم می‌شود، از روش نیوتن-رافسون استفاده شود، بار مسیر را کنترل می‌کند. این بدان مفهوم است که بار توسط مقادیر ثابتی افزایش پیدا می‌کند و معادلات به مجهولات که همان جابجایی‌ها هستند اعمال می‌شوند. این الگوریتم، بعلت تغییر شیب ناگهانی و دوشاخگی در همسایگی بار بحرانی، معمولاً قادر به گذر از این ناحیه و حل مسئله در فراسوی بار کمانش نیست. به منظور رفع این مشکل روشهای متفاوتی توسط محققین پیشنهاد شده است. در این پژوهش از روش طول کمان، که در آن مقادیر افزایشی بار توسط یک قید کنترل می‌شود، استفاده شده است [۱۹-۲۱].

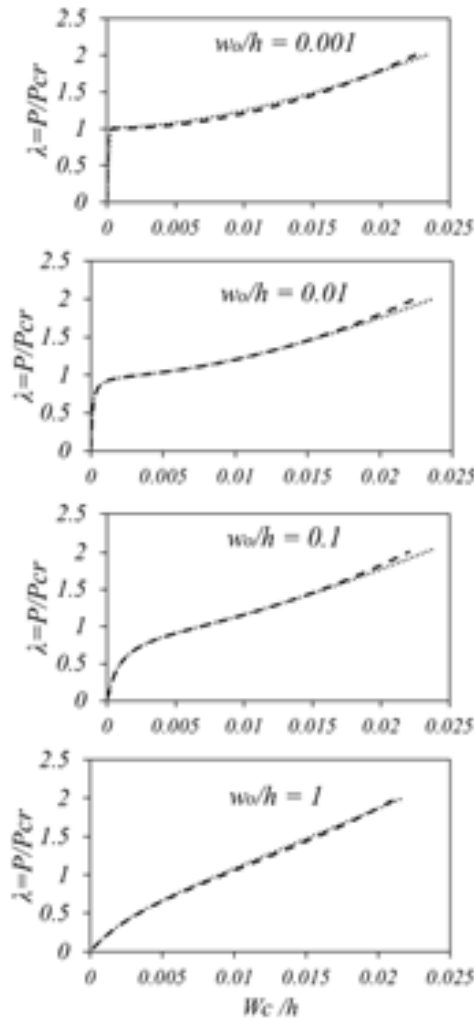
۵- ارتعاشات پیش و پس از کمانش

پس از یافتن پاسخ استاتیکی معادلات ارائه شده، در این مرحله پاسخ بدست آمده در معادلات ارتعاشات خطی حول حالت کمانش یافته جایگزین می‌گردد. به منظور محاسبه فرکانس‌های ارتعاشات ورق کمانش یافته، ابتدا پاسخ معادلات به صورت رابطه (۱۳) در معادلات حرکت ورق جایگذاری می‌گردد و سپس از عبارات غیر خطی وابسته به زمان و عباراتی که تنها شامل پاسخ مستقل از زمان هستند صرف نظر می‌گردد. پس از آن با جایگذاری پاسخ استاتیکی مرحله قبل، دستگاه معادلات ارتعاشات خطی ورق حول حالت کمانش یافته مشابه روابط (۱۴) الی (۱۸) حاصل می‌گردد.

$$\begin{aligned}
 & \frac{Eh}{1-\nu^2} [u_{d,xx} + w_{s,xx}w_{d,x} + w_{d,xx}w_{s,x} + w_{d,xx}w_{0,x} + \\
 & w_{d,x}w_{0,xx} + \nu(v_{d,xy} + w_{d,xy}w_{s,y} + w_{s,xy}w_{d,y} + \\
 & w_{d,xy}w_{0,y} + w_{d,y}w_{0,xy}) + \frac{Eh}{2(1+\nu)} [u_{d,yy} + v_{d,xy} + \\
 & w_{d,xy}w_{s,y} + w_{s,xy}w_{d,y} + w_{s,x}w_{d,yy} + w_{d,x}w_{s,yy} + \\
 & w_{0,xy}w_{d,y} + w_{0,x}w_{d,yy} + w_{d,xy}w_{0,y} + w_{d,x}w_{0,yy}] = \mu\ddot{w}_d
 \end{aligned}
 \tag{۱۴}$$



شکل ۳- فرکانس‌های طبیعی ورق بر حسب دامنه نقص هندسی



شکل ۴- نتایج پس از کماتش ورق به کمک روش DQ (...) و اجزاء محدود (ANSYS) (---)

شکل ۴ پاسخ جابجایی عرضی نقطه میانی ورقی با مشخصات هندسی و مرزی از همان جنس قبلی را نشان می‌دهد که تحت بار محوری قرار دارد. پاسخ‌های بدست آمده به کمک روش DQ با نتایج حاصل از روش اجزاء محدود مقایسه شده‌اند که حاکی از دقت بسیار

$$w_{d,xy}w_{s,y}w_{0,y} + w_{d,xy}w_{0,x}w_{0,y} + w_{d,xx}w_{0,y}^2 + w_{0,xy}^2w_{0,y}w_{d,x}) + \frac{Eh}{2(1+\nu)}(u_{d,yy}w_{s,x} + u_{s,yy}w_{d,x} + v_{s,xy}w_{d,x} + v_{d,xy}w_{s,x} + w_{s,xy}w_{s,x}w_{d,y} + w_{s,xy}w_{d,x}w_{s,y} + w_{d,xy}w_{s,x}w_{s,y} + w_{d,yy}w_{s,x}^2 + 2w_{s,yy}w_{d,x}w_{s,x} + w_{d,xy}w_{s,x}w_{0,y} + w_{s,xy}w_{d,x}w_{0,y} + w_{d,yy}w_{s,x}^2 + w_{0,xy}w_{s,x}w_{d,y} + w_{0,xy}w_{d,x}w_{s,y} + w_{d,yy}w_{0,x}w_{s,x} + w_{d,x}w_{0,x}w_{s,yy} + 2w_{s,yy}w_{d,x}w_{s,y})) + \frac{Eh}{2(1+\nu)}(u_{d,yy}w_{0,x} + v_{d,xy}w_{0,x} + w_{d,xy}w_{0,x}w_{s,y} + w_{s,xy}w_{0,x}w_{d,x} + w_{s,yy}w_{0,x}w_{d,x} + w_{d,yy}w_{0,x}w_{s,x} + w_{d,yy}w_{0,x}^2 + w_{d,xy}w_{0,x}w_{0,y} + w_{0,yy}w_{d,x}w_{0,x} + w_{d,y}w_{0,xy}w_{0,x})) + \frac{Eh}{(1+\nu)}(u_{s,y}w_{d,xy} + u_{d,y}w_{s,xy} + v_{s,x}w_{d,xy} + v_{d,x}w_{s,xy} + w_{d,xy}w_{s,x}w_{s,y} + w_{s,xy}w_{d,x}w_{s,y} + w_{s,xy}w_{s,x}w_{d,y} + w_{d,xy}w_{0,x}w_{s,y} + w_{s,xy}w_{0,x}w_{d,y} + w_{s,xy}w_{d,x}w_{0,y} + w_{d,xy}w_{s,x}w_{0,y})) + \frac{Eh}{(1+\nu)}(u_{d,y}w_{0,xy} + v_{d,x}w_{0,xy} + w_{0,xy}w_{s,x}w_{d,y} + w_{0,xy}w_{d,x}w_{s,y} + w_{0,xy}w_{0,x}w_{d,y} + w_{0,xy}w_{d,x}w_{0,y})) = \mu \ddot{w}_d$$

$$\frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)}(\alpha_{d,xx} + \nu\beta_{d,xy}) + \frac{Eh^3}{24(1+\nu)} \quad (17)$$

$$(\alpha_{d,yy} + \beta_{d,xy}) - K_s Gh(\alpha_d + w_{d,x}) = I_x \ddot{\alpha}_d$$

$$\frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)}(\beta_{d,xx} + \nu\alpha_{d,xy}) + \frac{Eh^3}{24(1+\nu)} \quad (18)$$

$$(\alpha_{d,xy} + \beta_{d,xx}) - K_s Gh(\beta_d + w_{d,y}) = I_y \ddot{\beta}_d$$

این دستگاه معادلات دیفرانسیلی به کمک روش مربعات دیفرانسیلی به یک دستگاه معادلات جبری تبدیل گردیده و سپس با حل مسئله مقدار ویژه حاصل، فرکانسها و شکل مودهای ارتعاشات ورق بر حسب میزان بار وارد بر ورق بدست می‌آید.

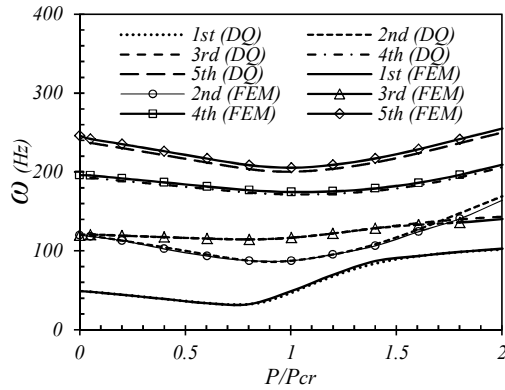
۶- نتایج

با استفاده از این روش فرکانس‌های طبیعی یک ورق مربعی چهار طرف ساده به ازای مقادیر مختلف دامنه نسبی نقص اولیه محاسبه شده و نتایج حاصل به همراه مقادیر حاصل از حل به روش اجزاء محدود در شکل ۳ ارائه گردیده است. طول و عرض ورق $1m$ و ضخامت آن $0.1m$ در نظر گرفته شده است و جنس آن از فولاد با مدول یانگ $207GPa$ و ضریب پواسون 0.3 است. در حل مسئله فوق به روش اجزاء محدود از نرم افزار انسیس^۱ و ۱۰۰ المان SHELL281 استفاده شده است. همانگونه که از شکل ۳ دیده می‌شود، نتایج بدست آمده از روش DQ^۲ تطابق بسیار خوبی با نتایج حاصل از روش اجزاء محدود دارند. همچنین مقایسه نتایج ارائه شده، نشان‌دهنده افزایش فرکانس‌های طبیعی ورق با افزایش دامنه نقص هندسی می‌باشد. چرا که با افزایش دامنه نقص هندسی، سختی ورق افزایش یافته و فرکانس‌های طبیعی ورق را افزایش می‌دهد.

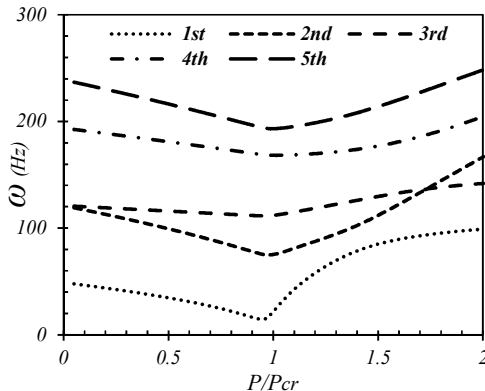
^۱ ANSYS

^۲ Differential Quadrature

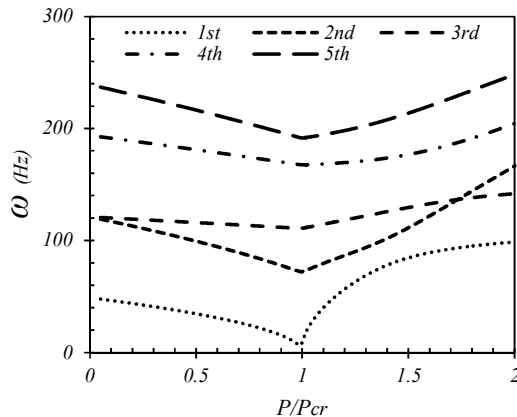
مقاله، فرکانس نخست پس از کمناش ورق با نتایج مرجع [۳] مقایسه گردیده است. شکل ۶ تغییرات فرکانس نخست ورق بررسی شده در مرجع [۳] را بر حسب بار وارده بر ورق نمایش می‌دهد. نتایج حاصل نشان‌دهنده انطباق خوب جواب‌های این دو روش بوده و اختلاف نتایج ناشی از استفاده مرجع [۳] از روش گالری مرتبه یک و در نظر نگرفتن تاثیر تغییر شکل‌های برشی می‌باشد.



شکل ۷- تغییرات پنج فرکانس طبیعی نخست ورق SSSS بر حسب بار وارده بر آن ($w_0/h=0.1$)



شکل ۸- تغییرات پنج فرکانس طبیعی نخست ورق SSSS بر حسب بار وارده بر آن ($w_0/h=0.01$)

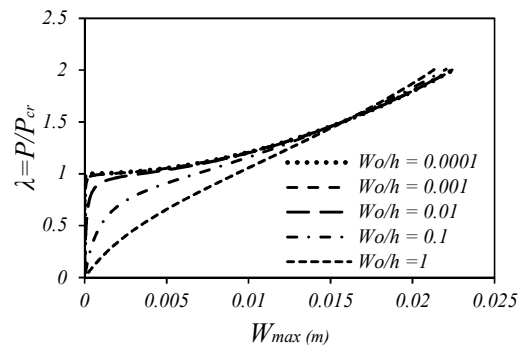


شکل ۹- تغییرات پنج فرکانس طبیعی نخست ورق SSSS بر حسب بار وارده بر آن ($w_0/h=0.001$)

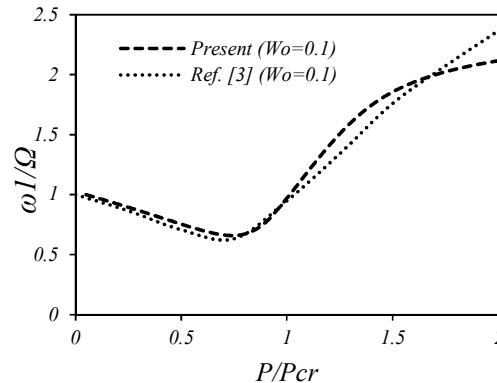
شکل‌های ۷ تا ۹ نمایش‌دهنده تاثیر میزان بار فشاری بر پنج

خوب روش ارائه شده است. نکته‌ای که در مقایسه نتایج این مسئله باید مد نظر داشت این است که در مسائل غیرخطی، بر خلاف مسائل خطی، ارضا شرایط مرزی مناسب باعث ایجاد جواب منحصر بفرد نخواهد بود بلکه تنها تضمین کننده اصل پایداری انرژی می‌باشد [۲۲]. لذا انطباق کامل پاسخ‌ها بر یکدیگر در اینگونه تحلیل‌ها بعید به نظر می‌رسد.

شکل ۵ تاثیر مقادیر مختلف نقص هندسی اولیه را بر رفتار پس از کمناش ورق‌ها نمایش می‌دهد. همانگونه که مشاهده می‌شود، افزایش نقص هندسی در ورق اثرات بسیار محسوسی در رفتار ورق در همسایگی بار بحرانی دارد بطوریکه با ازدیاد دامنه نقص هندسی رفتار کمناش ورق دچار تغییر شده بگونه‌ای که به ازای $w_0/h=1$ نقطه کمناش ورق غیرقابل تشخیص است. همچنین مشاهده می‌گردد که با کاهش مقدار نقص هندسی، رفتار کمناش مشهودتر شده و نتایج به رفتار ورق تخت نزدیکتر می‌شود. از سوی دیگر مشاهده می‌گردد که اثر نقص هندسی با افزایش جابجایی کاهش یافته، بطوریکه در جابجایی‌های بیش از ۱/۵ برابر ضخامت، منحنی‌ها بر یکدیگر منطبق می‌شوند، چرا که دامنه نقص هندسی در مقایسه با جابجایی ورق ناچیز می‌باشد. و لذا اثر آن از این می‌رود و نمودارها همگرا می‌شوند. با مشاهده این نمودارها می‌توان به این نتیجه رسید که در صورت وجود نقص هندسی در ورق‌ها، استفاده از تحلیل غیرخطی جهت محاسبه بار کمناش ورق‌ها اجتناب‌ناپذیر است.



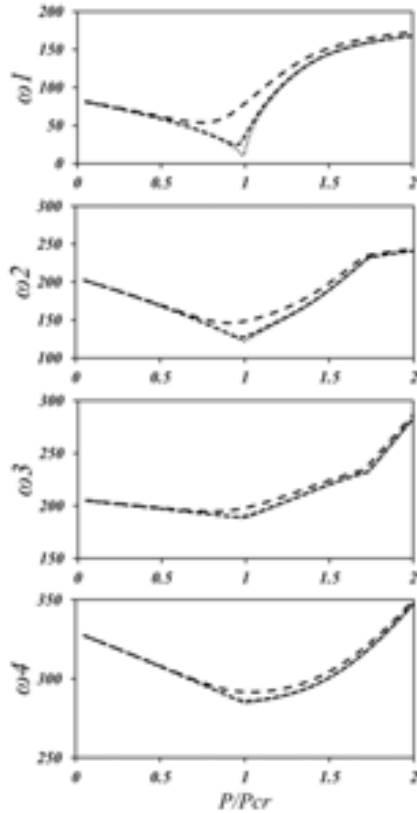
شکل ۵- پاسخ پس از کمناش ورق به ازای مقادیر مختلف نقص اولیه



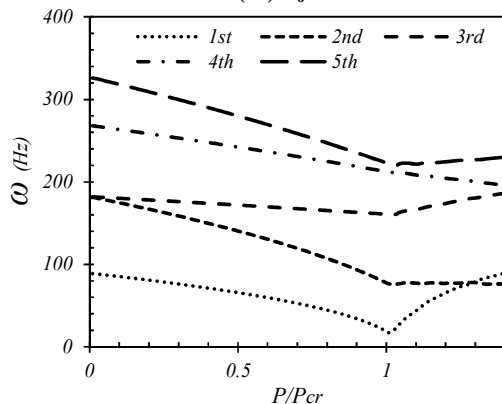
شکل ۶- نتایج مرجع [۳] و روش ارائه شده

در ادامه به منظور بررسی صحت و دقت روش ارائه شده در این

می‌یابد. این مسئله به این علت است که پس از کماتش، انحنا ورق افزوده شده و در عمل نقص هندسی در مقایسه با آن ناچیز می‌شود. با روش مشابه می‌توان پاسخ را برای سایر شرایط مرزی نیز محاسبه نمود، در شکل‌های ۱۲ الی ۱۵ فرکانس‌ها و شکل موده‌های ارتعاشات ورق برای ترکیباتی از شرایط مرزی گیردار و ساده ارائه شده است.



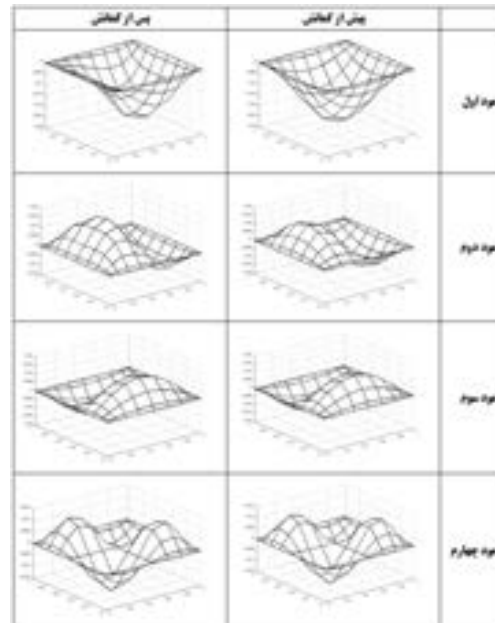
شکل ۱۱- تغییرات فرکانس‌های اول تا چهارم بر حسب بار وارده و به ازای مقادیر مختلف نقص اولیه، $w_0/h=0.001$ (_) و $w_0/h=0.01$ (...) و $w_0/h=0.1$ (---)



شکل ۱۲- تغییرات پنج فرکانس طبیعی نخست ورق cccc بر حسب بار وارده بر آن ($w_0/h=0.01$)

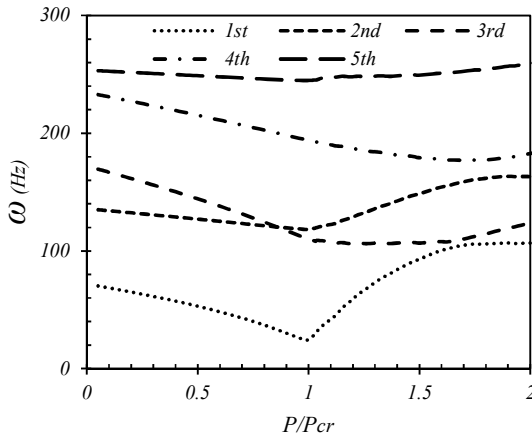
فرکانس طبیعی نخست ارتعاشات پیش و پس از کماتش ورق چهارطرف ساده به ازای مقادیر متفاوت نقص هندسی اولیه می‌باشد. مشاهده می‌گردد که در مرحله پیش از کماتش ($P/P_{cr} < 1$) فرکانس‌های طبیعی ورق با افزایش بار فشاری، کاهش می‌یابند و در ناحیه پس از کماتش ($P/P_{cr} > 1$) با افزایش بار، فرکانس‌های طبیعی به میزان قابل توجهی افزایش می‌یابند. همچنین مشاهده می‌گردد که کمترین فرکانس‌های طبیعی سازه در بار بحرانی ($P/P_{cr} = 1$) اتفاق می‌افتد. چرا که تا پیش از بار کماتش ورق با افزایش بار وارد بر آن سختی ورق کاهش یافته و موجب کاهش فرکانس‌های طبیعی ورق می‌گردد. پس از آن با افزایش بار وارد بر ورق، با توجه به تغییر شکل‌های بزرگ، سختی کششی دینامیکی افزایش یافته و بر سختی خمشی آن غلبه می‌نماید و لذا فرکانس‌های طبیعی ورق افزایش می‌یابد.

شکل ۱۰ شکل موده‌های اول تا چهارم ورق چهار طرف ساده را به ازای مقادیر مختلف بار فشاری نمایش می‌دهد. در این شکل‌ها بار قبل از کماتش و بار پس از کماتش به ترتیب ۰/۵ و ۱/۵ برابر بار بحرانی ورق می‌باشد. همانگونه که از شکل ۱۰ قابل مشاهده است شکل موده‌های اول و دوم نسبت به سایر شکل موده‌ها تغییرات بیشتری نموده‌اند که همین تغییرات در فرکانس‌های مربوطه در شکل‌های ۷ تا ۹ نیز مشهود است.

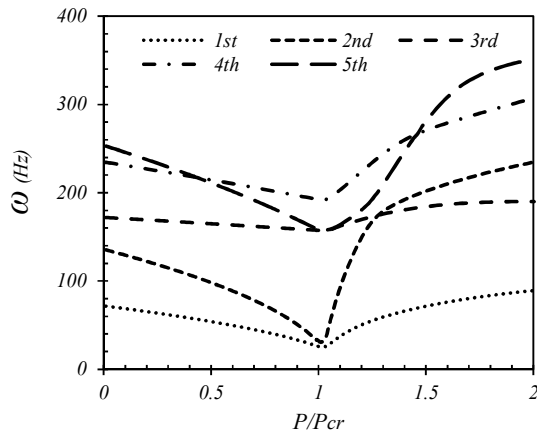


شکل ۱۰- چهار شکل مده اول ورق چهار طرف ساده در وضعیت پیش از کماتش ($P/P_{cr} = 0.5$) و پس از کماتش ($P/P_{cr} = 1.5$)

شکل ۱۱ تغییرات فرکانس‌های اول تا چهارم یک ورق را به ازای مقادیر مختلف نقص هندسی اولیه بر حسب بار وارده بر آن نمایش می‌دهد. مشاهده می‌گردد که فرکانس‌های اول و دوم نسبت به تغییر دامنه نقص هندسی حساس‌تر از سایر فرکانس‌ها هستند و فرکانس‌های سوم و چهارم برای دامنه‌های متفاوت نقص هندسی تغییر چندانی نمی‌کنند. همچنین مشاهده می‌شود که پس از وقوع تغییر شکل‌های بزرگ (پس از کماتش) و با بیشتر شدن نیروی فشاری وارد بر صفحه این اثر کاهش



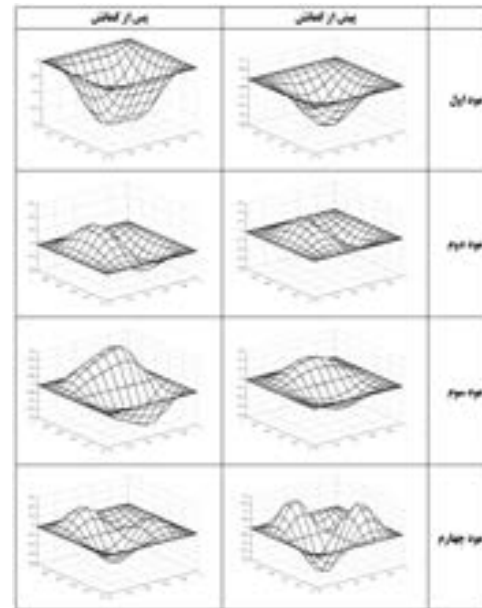
شکل ۱۴- تغییرات پنج فرکانس طبیعی نخست ورق CSCS بر حسب بار وارده بر آن ($w_0/h=0.01$)



شکل ۱۵- تغییرات پنج فرکانس طبیعی نخست ورق SCSC بر حسب بار وارده بر آن ($w_0/h=0.01$)

۷- نتیجه گیری

در این پژوهش تاثیر وجود نقص هندسی اولیه و تغییر شکل‌های پیش و پس از کمانش ورق مستطیلی تحت بار فشاری تک محوره درون صفحه‌ای بر فرکانس‌های طبیعی ورق‌ها، به کمک روش کودراتور دیفرانسیلی مورد بررسی قرار گرفت. نتایج حاصل با نتایج حاصل از روش اجزا محدود مقایسه گردید. مشاهده گردید که با افزایش دامنه نقص هندسی اولیه، فرکانس‌های طبیعی ورق افزایش می‌یابد. درحالی‌که افزایش بار درون صفحه‌ای فشاری وارد بر ورق‌ها، تا پیش از بار کمانش ورق عموماً موجب کاهش فرکانس‌های طبیعی ورق و پس از آن موجب افزایش در فرکانس‌های طبیعی ورق می‌گردد. همچنین مشاهده گردید که نحوه تاثیر نقص هندسی و بارهای پیش و پس از کمانش بر فرکانس‌های طبیعی ارتعاشات ورق‌ها، وابستگی زیادی به شرایط مرزی حاکم بر ورق دارد و با توجه به ماهیت شکل مود مورد نظر، کاهش یا افزایش فرکانس قابل مشاهده است.



شکل ۱۳- چهار شکل مود اول ورق چهار طرف گیردار در وضعیت پیش از کمانش ($P/P_{cr} = 0.5$) و پس از کمانش ($P/P_{cr} = 1.4$)

در شکل ۱۲ تغییرات پنج فرکانس نخست برای ورق چهارطرف گیردار تحت اثر بار فشاری تک محوره درون صفحه‌ای نمایش داده شده است. همانگونه که می‌توان مشاهده نمود کلیه فرکانس‌ها تا پیش از بار کمانش، با افزایش بار وارد بر ورق کاهش می‌یابند. اما پس از بار کمانش، فرکانس‌های فرد با توجه به افزایش سختی کششی ورق، افزایش یافته و فرکانس‌های زوج همچنان کاهش می‌یابند. با دقت در منحنی‌های فرکانس‌های مود اول و دوم می‌توان مشاهده نمود که فرکانس مود اول ارتعاشات ورق پس از برخورد دو منحنی از فرکانس مود دوم ارتعاشات ورق بیشتر می‌شود. شکل ۱۳ چهار شکل اول ورق چهار طرف گیردار را قبل و بعد از نقطه برخورد دو منحنی نمایش می‌دهد.

شکل ۱۴ تغییرات پنج فرکانس طبیعی نخست ورقی را نمایش می‌دهد که مرزهای تحت بار آن گیردار بوده و دو مرز دیگر شرایط مرزی ساده دارند. همانگونه که مشاهده می‌گردد کلیه فرکانس‌های نمایش داده شده تا پیش از بار کمانش با افزایش بار فشاری، کاهش می‌یابند. پس از آن با افزایش بار وارد بر ورق در مرحله پس از کمانش، فرکانس‌های طبیعی اول، دوم، سوم و پنجم بر اثر غلبه تاثیر سختی کششی بر سختی خمشی افزایش می‌یابند در حالیکه فرکانس چهارم به علت آنکه مود مورد نظر یک مود خمشی است همچنان کاهش می‌یابد. شکل ۱۵ تغییرات پنج فرکانس نخست ورقی با دو مرز ساده تحت بار و دو مرز گیردار را نمایش می‌دهند، مشاهده می‌شود که کلیه فرکانس‌ها تا پیش از بار کمانش، با افزایش بار، کاهش می‌یابند و پس از آن در مرحله پس از کمانش با افزایش بار بر اثر غلبه سختی کششی بر سختی خمشی ورق، افزایش می‌یابند.

[20] Riks E., The application of Newton's method to the problem of elastic stability, *Journal of Applied Mechanics*, Vol. 39, pp. 1060-1065, 1979.
 [21] Forde B.D.R. and Stierner S.F., Improved arc length orthogonality methods for nonlinear finite element analysis, *Computers & Structures*, Vol. 27, pp. 625-630, 1987.
 [22] Chia C.Y., Nonlinear analysis of plates, *McGraw-Hill*, New York, 1980.

[1] Hui D. and Leissa A. W., Effects of geometric imperfections on vibrations of biaxially compressed rectangular flat plates, *Transactions of the ASME*, Vol. 50, pp. 750-756, 1983.
 [2] Pasic H. and Herrmann G., Non-linear free vibration of buckled plates with deformable loaded edges, *Journal of sound and vibration*, pp. 105-114, 1983.
 [3] Ilanko S. and Dickinson S.M., The vibration and post-buckling of geometrically imperfect, simply supported, rectangular plates under uni-axial loading, part I: theoretical approach, *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 118(2), pp. 313-336, 1987.
 [4] Ilanko S., Vibration and post-buckling of in-plane loaded rectangular plates using a multiterm galerkin's method, *Journal of Applied Mechanics*, Vol. 69, pp. 589-592, 2002.
 [5] NG C.F. and White R.G., Dynamic behavior of postbuckled isotropic plates under in-plane compression, *Journal of sound and vibration*, pp. 1-18, 1988.
 [6] Grayt C.C., Vibrations of rectangular plates with moderately large initial deflections at elevated temperatures using finite element method, *31st Structures, Structural Dynamics and Materials Conference, Structures, Structural Dynamics, and Materials and Co-located Conferences*, 1990.
 [7] Sassi S. and Ostigu G.L., Analysis of the variation of frequencies for imperfect rectangular plates, *Journal of sound and vibration*, Vol. 177(5), pp. 675-687, 1994.
 [8] Murphy K.D., Virgin L.N. and Rizzi S.A., Free Vibration of Thermally Loaded Panels Including Initial Imperfections and Post-Buckling Effects, *Fifth International Conference on Recent Advances in Structural Dynamics*, Southampton, 1994.
 [9] Librescu L., Lin W., Nemeth M.P. and Starnes JR, J.H., Vibration of geometrically imperfect panels subjected to thermal and mechanical loads, *Journal of Spacecraft and rockets* 33, pp. 285-291, 1996.
 [10] Oh I.K., Han J.H. and Lee I., Postbuckling and vibration characteristic of piezolaminated composite plate subject to thermopiezoelectric loads, *Journal of sound and vibration* 233, pp. 19-40, 2000.
 [11] Girish J. and Ramchandra L.S., Thermal postbuckled vibrations of symmetrically laminated composite plates with initial geometric imperfections, *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 282, pp. 1137-1153, 2005.
 [12] Williams M., Griffin B., Homeijer B., Sankar B. and Sheplak M., Vibration of post-buckled homogeneous circular plates, *IEEE Ultrasonics Symposium*, 2007.
 [13] Li S.R., Barta R.C. and Ma L.S., Vibration of Thermally Post-Buckled Orthotropic Circular Plates, *Journal of Thermal Stresses*, Vol. 30, pp. 43-57, 2007.
 [14] Taczala M., Buczkowski R. and Kleiber M., Nonlinear free vibration of pre- and post-buckled FGM plates on two-parameter foundation in the thermal environment, *Composite structures*, Vol. 137, pp. 85-92, 2016.
 [15] Dey T., Kumar R. and Panda S.K., Postbuckling and postbuckled vibration analysis of sandwich plates under non-uniform mechanical edge loadings, *International Journal of Mechanical Sciences*, Vol. 115-116, pp. 226-237, 2016.
 [16] Benchouaf L. and Boutyour E., Nonlinear vibrations of buckled plates by an asymptotic numerical method, *C. R. Mecanique* Vol. 344 pp. 151-166, 2016.
 [17] Bellman R.E., Kashef B. and Casti J., Differential Quadrature: a Technique for the Rapid Solution of Nonlinear partial Differential equation, *Journal of Compute Phys*, Vol. 1 pp. 133-143, 1997.
 [18] Quan J.R. and Chang C.T., New Insights in Solving Distributed System of Equations by Quadrature-Method, *Journal of Compute Chem Eng*, Vol. 13, pp. 1017-1024, 1989.
 [19] Wempner G.A., Discrete approximation related to nonlinear theories of solids, *International Journal of Solids and Structures*, Vol. 7, pp. 1581-1599, 1971.