

## تحلیل ارتعاشی نانو تیر مگنتو-الکترو-الاستیک تیموشنکو با مدل معادلات انتگرال-دیفرانسیل

رضا پیل افکن\*

استادیار، گروه مهندسی مکانیک، دانشگاه محقق اردبیلی، اردبیل، ایران

سینا خواجه زاده

کارشناسی ارشد، گروه مهندسی مکانیک، دانشگاه محقق اردبیلی، اردبیل، ایران

### چکیده

در دهه گذشته ارتعاش نانو تیرهای پیزوالکتریک و پیزومغناطیس مورد توجه پژوهشگران بوده است. عموماً علاوه بر میدان‌های جابجایی، میدان‌های الکترومغناطیس نیز بدلیل کوچک بودن نسبت عرض به طول هندسه تیر، بصورت یک بعدی در نظر گرفته می‌شود. این امر اعمال شرایط مرزی الکترومغناطیسی بر وجه بالایی و پایینی تیر را دشوار می‌سازد. در این مطالعه ارتعاش آزاد تیر تیموشنکو دارای خواص مگنتو-الکترو-الاستیک با در نظر گرفتن تئوری الاستیسیته غیر موضعی خطی، با فرض میدان‌های جابجایی یک بعدی و میدان‌های الکترومغناطیس دو بعدی بررسی شده است. معادلات حالت که بصورت جفت شده انتگرال-دیفرانسیل می‌باشند با یک روش تربیع دیفرانسیلی با تابع درونیاب نقطه شعاعی بهبود یافته گسسته سازی شده اند. پاسخ فرکانسی سیستم و شکل مودها در شرایط مرزی دیریکله و نیومان در دو حالت مدار باز و مدار بسته مورد بررسی قرار می‌گیرد. برای اعتبار سنجی، فرکانس‌های بدست آمده با نتایج مسئله کاملاً یک بعدی مشابه، مقایسه شده است.

**واژه‌های کلیدی:** نانوتیر الکترومغناطیس، الاستیسیته غیرموضعی، روش‌های بدون‌مش، تابع درونیاب نقطه‌ای شعاعی، تئوری تیموشنکو.

## Vibration Analysis of Magneto-electro-elastic Nanobeams on Elastic Foundation using Integrodifferential Equations model

R. Pilafkan

Mechanical Engineering Department, university of Mohaghegh Ardabili, Ardabil, Iran

S. Khajezadeh

Department of Mechanical Engineering, Mohaghegh Ardabili, Ardabil, Iran

### Abstract

During the past decade researchers have investigated vibrations of piezoelectric and piezomagnetic nanobeams. In addition to displacement fields, usually the electromagnetic fields are also considered one dimensional because the small ratio of height to length of the beam geometry. This makes the implication of electromagnetic boundary conditions on the upper and lower faces of the beam rigorous. In this study free vibration of Timoshenko beam having Magneto-Electro-Elastic properties laying on Elastic foundation has been studied considering one dimensional displacement fields and two dimensional electromagnetic fields. State equations which are a Integro-Differential couple has been discretized using a modified radial point interpolation function. Frequency response and the mode shapes have been queried for Dirichlet and Neuman boundary conditions with two conditions open circuit and closed circuit. Obtained frequencies have been compared with results of the corresponding fully one dimensional problem.

**Keywords:** Electromagnetic Nanobeam, Nonlocal Elasticity, Meshless Methods, Radial Point Interpolation Function, Timoshenko Theory.

نخستین بار کی [6,7] با استفاده از تئوری تیر تیموشنکو و با فرض توضع میدان‌های پتانسیل الکترومغناطیس  $\Phi$  و  $\Psi$  بصورت برآیند تابع کسینوسی و خطی در راستای ضخامت تیر، رابطه‌ی (۱)، ارتعاش آزاد نانو تیر با خواص مگنتو-الکترو-الاستیک را مطالعه نمود.

$$\Phi = -\cos(\beta z)\varphi(x,t) + \frac{2z\phi_0}{L_z} \quad (الف-۱)$$

$$\psi = -\cos(\beta z)\psi(x,t) + \frac{2z\psi_0}{L_z} \quad (ب-۱)$$

$x$  در راستای محور تیر و  $z$  در راستای جانبی،  $L_z$  ضخامت تیر و  $\beta = \pi/L_z$  می‌باشد. چنین فرضی برای میدان‌های الکترومغناطیس معادلات مربوط به دو متغیر  $\Phi$  و  $\Psi$  را یک بعدی می‌کند که به ساده تر شدن مسئله کمک می‌نماید. اما با این فرض،  $\phi_0$  و  $\psi_0$  رابطه‌ی (۱) بدلیل توضع خطی، در معادلات حرکت جایی نخواهد داشت. هر چند کی با در نظر گرفتن جملات حاصل از ضرب این پارامترها در کرنش ون

### ۱- مقدمه

در ساخت مبدل‌های الکترومغناطیس که از اجزای کلیدی در سیستم‌های میکرو و نانو الکترومکانیک<sup>۱</sup> می‌باشند بخاطر محدودیت‌های موجود در فرآیندهای ساخت در ابعاد میکرو و نانو، به مواد دارای خواص مگنتو-الکترو-الاستیک (مانند تیتانات باریم و فریت کبالت و تیتانات قلع<sup>۲</sup> و غیره) توجه ویژه ای می‌شود. از اینرو درک رفتار ارتعاشی این نانو ساختارها تحت بارگذاری الکترومغناطیس در طراحی سیستم‌های نانو اهمیت بسزایی دارد. ردی [1-4] با استفاده از تئوری الاستیسیته‌ی غیر موضعی رفتار استاتیک و دینامیک نانو تیر و نانو صفحه‌ها را با تئوری‌های گوناگون تیر و صفحه بصورت تحلیلی و عددی بررسی کرد. آیدگدو [5] یک تئوری عمومی برای جابجایی استاتیک، کمانش و ارتعاش آزاد تیرها در ابعاد نانو معرفی نمود. برای

1 MEMS & NEMS  
2 BaTiO<sub>3</sub>, CoFe<sub>2</sub>O<sub>4</sub>, PZT

\* نویسنده مکاتبه کننده، آدرس پست الکترونیکی: rezapilafkan@uma.ac.ir

تنش  $\sigma'$  و  $\sigma$ ، جابجایی الکتریکی  $D'$  و  $D$  و یا القای مغناطیسی  $B'$  و  $B$  (غیر موضعی و موضعی) باشد و برای جامدات با زوج مغناطیسی، الکتریکی و الاستیک،  $g$  دربردارنده کرنش  $\epsilon$ ، شدت میدان الکتریکی  $E$  و شدت میدان مغناطیسی  $H$  است [10,11].  $\tau = e_0 a / l$ . پارامتر غیر موضعی می باشد که در آن  $e_0$  ثابت مربوط به جنس ماده،  $a$  طول مشخصه داخلی (مثلاً پارامتر شبکه بلور) و  $l$  طول مشخصه خارجی می باشد.  $\alpha(|x-x'|, \tau)$  تابع میرایی غیر موضعی است. این تابع دارای این خاصیت است که به ازای  $\tau \rightarrow 0$  به تابع دلتا میل می کند و به ازای  $\tau \rightarrow 1$  رابطه (۲) دینامیک بلور اتمی را تقریب می زند. رابطه تابعی (۲) را می توان بصورت دیفرانسیلی بازنویسی کرد [12] که در اینصورت خواهیم داشت

$$(1 - \tau^2 l^2 \nabla^2) \sigma' = C_{ij}^{ss} \epsilon_j - C_{ij}^{se} E_j - C_{ij}^{sm} H_j \quad (۳-الف)$$

$$(1 - \tau^2 l^2 \nabla^2) D' = C_{ij}^{se} \epsilon_j + C_{ij}^{ee} E_j + C_{ij}^{em} H_j, \quad i, j = 1, \dots, 6 \quad (۳-ب)$$

$$(1 - \tau^2 l^2 \nabla^2) B' = C_{ij}^{sm} \epsilon_j + C_{ij}^{em} E_j + C_{ij}^{mm} H_j \quad (۳-ج)$$

که در آن  $\nabla^2$  عملگر لاپلاسین است. در روابط از فرم برداری تانسورها<sup>۳</sup> استفاده شده است و بالانویس  $s$  و  $m$  و  $e$  به ترتیب بیانگر کرنش، میدان الکتریکی و شدت میدان مغناطیسی می باشد.

## ۲-۲- مدل نانو تیر مگنتو-الکترو-الاستیک

هندسه ی مورد بررسی مربوط به تیری در ابعاد نانو ساخته شده از مواد با رفتار مگنتو-الکترو-الاستیک قطنیده شده در راستای محور جانبی  $z$  است. شکل ۱ مربوط به نیمه ی بالایی تیر مورد نظر تحت بارگذاری الکترومغناطیس می باشد. جابجایی جانبی و محوری به ترتیب  $U_x(x, z, t)$  و  $U_z(x, z, t)$  می باشد. براساس تئوری تیر تیموشنکو خواهیم داشت

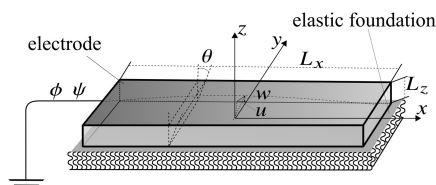
$$U_x(x, z, t) = u_0(x, t) + z\theta(x, t) \quad (۴-الف)$$

$$U_z(x, t) = w(x, t) \quad (۴-ب)$$

روابط خطی کرنش-جابجایی بصورت زیر بدست می آید

$$\epsilon_{xx} = \frac{\partial u_0}{\partial x} + z \frac{\partial \theta}{\partial x} \quad (۵-الف)$$

$$\gamma_{xz} = \frac{\partial w}{\partial x} + \theta \quad (۵-ب)$$



شکل ۱- نمودار طرحواره نانو تیر تیموشنکو مگنتو-الکترو-الاستیک

با فرض تغییرات الکترومغناطیس شبه تعادلی می توان میدان الکتریکی و مغناطیسی را بصورت گرادینان میدان های پتانسیل اسکالر بیان نمود (معادله ۶-الف و ۶-ب)

کارمان به عنوان نیروی خارجی ( $N_e$  و  $N_m$ ) و چشم پوشی از جملات غیر خطی حاصله، تیر را بصورت خطی مدل کرده است. انصاری و همکاران [8] تحلیل دینامیکی نانو تیر مگنتو-الکترو-ترمو-الاستیک غیر خطی را با دخالت دادن دیگر جملات کرنش غیر خطی در معادلات حرکت، انجام داد. در این مقاله تلاش شده است تا معادلات انتگرال-دیفرانسیل مکانیکی (یک بعدی) جفت شده با معادلات دیفرانسیل الکترومغناطیس (دو بعدی) که از اعمال اصل همیلتون بر تیر تیموشنکو دارای رفتار فیزیکی غیر موضعی بدست آمده است، با روش تربیع دیفرانسیلی با تابع درونیاب نقطه شعاعی<sup>۱</sup>؛ برای تحلیل ارتعاش آزاد سیستم گسسته سازی شود و رفتار ارتعاشی چنین سیستمی، تحت بارگذاری های گوناگون الکترومغناطیس، مورد بررسی قرار گیرد. مدل تیر تیموشنکو نسبت به دیگر مدل های مهندسی برای تیر ها، هم از دقت بالا و هم سادگی فرمول بندی برخوردار است، با این وجود بدست آوردن معادلات اوپلر-برنولی مربوط به سیستم مورد بررسی، با استفاده از معادلات بدست آمده از مدل تیموشنکو، کار دشواری نمی باشد. مدل پیشنهادی در کار حاضر گذشته از بستر سازی برای اعمال شرایط مرزی پیچیده و دو بعدی به نانو-تیری که بصورت یک بعدی و ساده مدل شده باشد، از آنجا که بصورت یک دستگاه معادلات انتگرال-دیفرانسیل می باشد، از دیدگاه ریاضیاتی و حل تحلیلی آن چالشی ریاضیاتی است. در مطالعه حاضر، قدرت روش های بدون مش در حل عددی چنین دستگاه معادلاتی بررسی و تایید شده است.

## ۲- مدل سازی ریاضی

در این بخش معادلات حالت تیر تیموشنکو با تئوری الاستیسیته غیر موضعی ارائه می شود.

### ۲-۱- تئوری الاستیسیته غیر موضعی

تئوری الاستیسیته ی ارینگن [9] بیان می دارد که حالت ماده (کرنش، جابجایی الکتریکی، میدان مغناطیسی)، در هر نقطه  $x$  از یک محیط پیوسته، علاوه بر وابستگی به نیروهای فیزیکی (تنش، میدان الکتریکی، القاء مغناطیسی) در آن نقطه به بارگذاری در دیگر نقاط  $x'$  نیز بستگی دارد (و برعکس). این تئوری جامع تر از تئوری الاستیسیته ی گرادینان کرنش می باشد و افزون بر رفع ناتوانی تئوری محیط های پیوسته کلاسیک در پیش بینی تنش در لبه ی ترک یا در حل توضع تنش پیرامون ذرات نابعجایی که به معرفی معیار شکست طبیعی انجامید، می تواند روابط پراکندگی برای موج های هارمونیک بیان کند که در سراسر ناحیه ی بریلوین؛ با نتایج دینامیک شبکه ی بلور سازگار می باشد. در تئوری محیط پیوسته غیر موضعی روابط ساختاری میان میدان وابسته  $J$  و میدان مستقل  $g$  بصورت تابعی<sup>۲</sup> (۲) بیان می شود

$$J = \int_V \alpha(|x-x'|, \tau) j(g(x')) dx' \quad (۲)$$

در رابطه ی (۲) بیانگر رابطه ی ساختاری میان نیرو و حالت در تئوری محیط های پیوسته کلاسیک می باشد.  $J$  و  $j$  به ترتیب می تواند

<sup>۱</sup> RPI-DQ

<sup>۲</sup> Functional

<sup>۳</sup> Voigt Notation

$N_x$  و  $N_z$  نیروهای خارجی در راستای طولی و جانبی تیر و  $K_{fs}$  و  $K_{fn}$  ضریب سفتی برشی و نرمال بستر الاستیک می‌باشد. بطوریکه که نیروهای خارجی طولی و عرضی بستر الاستیک با جابجایی تیر رابطه خطی دارد.

$$N_{fn} = -K_{fn} \times w(x, t), \quad (9-ع)$$

$$N_{fs} = -K_{fs} \times u(x, -L/2, t), \quad (9-ی)$$

با انتخاب  $\delta u_0, \delta w, \delta \theta, \delta \varphi$  و  $\delta \psi$  از فضای تابعی<sup>۱</sup> که اعضای آن برقراری شرایط مرزی و شرایط اولیه را تضمین می‌کنند انتگرال‌های مرزی و انتگرال‌های با حدود زمان اولیه و پایانی در معادله ی (۹) صفر خواهد شد. پس از برای اعمال رابطه ی همپلتون و فرض پیوسته و مشتق پذیر بودن توابع حالت در ناحیه تحلیلی مسئله، می‌توان با صفر نمودن ضرایب جملات  $\delta u_0, \delta w, \delta \theta, \delta \varphi$  و  $\delta \psi$  معادلات تعادل سیستم را بدست آورد

$$\delta u_0: \int_z \frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} dz = \frac{\partial N}{\partial x} = \int_z \rho \ddot{u}_0 - N_x + \frac{K_{fs}}{L_z} \left( u_0 - \frac{L_z}{2} \theta \right) dz, \quad (10-الف)$$

$$\delta w: \int_z \frac{\partial \sigma_{xz}}{\partial x} dz = \frac{\partial Q}{\partial x} = \int_z (\rho \dot{w} - N_z + \frac{K_{fn} w}{L_z}) dz, \quad (10-ب)$$

$$\delta \theta: \int_z \frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} dz = \frac{\partial M}{\partial x} = \int_z \rho z^2 \ddot{\theta} - \frac{K_{fs}}{2} \left( u_0 - \frac{L_z}{2} \theta \right) + \sigma_{xz} dz, \quad (10-ج)$$

$$\delta \varphi: \frac{\partial D_x}{\partial x} + \frac{\partial D_z}{\partial z} = 0, \quad (10-د)$$

$$\delta \psi: \frac{\partial B_x}{\partial x} + \frac{\partial B_z}{\partial z} = 0, \quad (10-ه)$$

$$N = \int_z \sigma_{xx} dz, Q = \int_z \sigma_{xz} dz, M = \int_z z \sigma_{xx} dz. \quad (10-و)$$

در سه معادله ی نخست (۱۰) انتگرال مؤلفه‌های تنش در راستای  $z$  مشتق منته‌جه‌های تنش  $N, Q, M$  را بدست می‌دهد. برای بازنویسی معادلات تعادل بر حسب متغیرهای حالت  $u_0, w, \theta, \varphi$  و  $\psi$  نخست برای متغیرهای یک بعدی با انتگرال‌گیری از معادله‌های ساختاری (۷) در راستای  $z$  و جایگذاری مناسب از این معادله‌ها، رابطه‌های تعادل یک بعدی (۱۱-۱۳) مربوطه بدست می‌آید. معادله‌های الکترومغناطیس (۱۴) با جایگذاری مشتق‌های جزئی بدست آمده از رابطه‌ی ساختاری الکتریک و مغناطیس (۷) و بدون نیاز به انتگرال گیری، بصورت دو بعدی خواهد بود.

$$N = \tau^2 I_1 \frac{\partial \ddot{u}_0}{\partial x} - \tau^2 \int_z \frac{\partial N_x}{\partial x} dz + \tau^2 \frac{\partial}{\partial x} [K_{fs} \left( u_0 - \frac{L_z}{2} \theta \right)] \quad (11-الف)$$

$$+ K_{11}^{ss} L_z \frac{\partial u_0}{\partial x} + K_{13}^{se} \int_z \frac{\partial \varphi}{\partial z} dz + K_{13}^{sm} \int_z \frac{\partial \psi}{\partial z} dz,$$

$$(E_x, E_z) = -\nabla \Phi(x, z, t) \quad (6-الف)$$

$$(H_x, H_z) = -\nabla \Psi(x, z, t) \quad (6-ب)$$

برای حالت تنش صفحه‌ای شکل کاهش یافته رابطه‌ی ساختاری (۳) در معادله‌ی (۷) ارائه شده است

$$(1 - \tau^2 l^2 \nabla^2) \sigma'_{xx} = K_{11}^{ss} \varepsilon_{xx} - K_{13}^{se} E_z - K_{13}^{sm} H_z \quad (7-الف)$$

$$(1 - \tau^2 l^2 \nabla^2) \sigma'_{xz} = K_{33}^{ss} \varepsilon_{xz} - K_{13}^{se} E_x - K_{13}^{sm} H_x \quad (7-ب)$$

$$(1 - \tau^2 l^2 \nabla^2) D'_x = K_{15}^{seT} \varepsilon_{xz} + K_{11}^{ee} E_x + K_{11}^{em} H_x \quad (7-ج)$$

$$(1 - \tau^2 l^2 \nabla^2) D'_z = K_{13}^{seT} \varepsilon_{xx} + K_{33}^{ee} E_z + K_{33}^{em} H_z \quad (7-د)$$

$$(1 - \tau^2 l^2 \nabla^2) B'_x = K_{15}^{smT} \varepsilon_{xz} + K_{11}^{em} E_x + K_{11}^{mm} H_x \quad (7-ه)$$

$$(1 - \tau^2 l^2 \nabla^2) B'_z = K_{13}^{smT} \varepsilon_{xx} + K_{33}^{em} E_z + K_{33}^{mm} H_z \quad (7-و)$$

ثابت‌های کاهش یافته مطابق رابطه‌ی (۸) بدست می‌آید

$$K_{11}^{ss} = C_{11}^{ss} - \frac{(C_{12}^{ss})^2}{C_{22}^{ss}}, K_{55}^{ss} = C_{55}^{ss}, K_{13}^{ss} = C_{13}^{ss} - \frac{(C_{12}^{ss} C_{23}^{ss})}{C_{22}^{ss}},$$

$$K_{13}^{se} = C_{13}^{se} - \frac{(C_{12}^{ss} C_{23}^{se})}{C_{22}^{ss}}, K_{15}^{se} = C_{15}^{se}, K_{15}^{sm} = C_{15}^{sm}, K_{11}^{em} = C_{11}^{em},$$

$$K_{13}^{sm} = C_{13}^{sm} - \frac{(C_{12}^{ss} C_{23}^{sm})}{C_{22}^{ss}}, K_{11}^{ee} = C_{11}^{ee},$$

$$K_{33}^{ee} = C_{33}^{ee} + \frac{(C_{23}^{se})^2}{C_{22}^{ss}}, K_{11}^{mm} = C_{11}^{mm}, K_{33}^{mm} = C_{33}^{mm} + \frac{(C_{23}^{sm})^2}{C_{22}^{ss}},$$

$$K_{33}^{em} = C_{33}^{em} + \frac{(C_{23}^{se} C_{23}^{sm})}{C_{22}^{ss}} \quad (8)$$

انرژی جنبشی  $K$ ، انرژی درونی  $U$  به همراه کار مسیر  $W$  بایستی اصل همپلتون را ارضا کنند،

$$\delta \int_0^t (K - (U - W)) dt = 0 \quad (9-الف)$$

$$\delta \int_0^t K dt = - \int_0^t \int_{0xz} \rho \left[ \ddot{u}_0 \delta u_0 + \dot{w} \delta w + z^2 \ddot{\theta} \delta \theta \right] dz dx dt + \int_{xz} \rho \left[ \dot{u}_0 \delta u_0 + \dot{w} \delta w + z^2 \dot{\theta} \delta \theta \right] dz dx \Big|_0^t, \quad (9-ب)$$

$$\delta \int_0^t U dt = - \int_0^t \int_{0xz} \left\{ \frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} - K_{fs} \left( u_0 - \frac{L_z}{2} \theta \right) \right\} \delta u_0 + \left[ \frac{\partial \sigma_{xz}}{\partial x} - K_{fn} w \right] \delta w + \left[ z \frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} - \sigma_{xz} + \frac{L_z}{2} K_{fs} (u_0 - \frac{L_z}{2} \theta) \right] \delta \theta + \left[ \frac{\partial D_x}{\partial x} + \frac{\partial D_z}{\partial z} \right] \delta \varphi + \left[ \frac{\partial B_x}{\partial x} + \frac{\partial B_z}{\partial z} \right] \delta \psi \Big\} dz dx dt + \int_0^t \int_{0xz} \left[ \sigma_{xx} \delta u_0 + \sigma_{xz} \delta w + z \sigma_{xx} \delta \theta + D_x \delta \varphi + B_x \delta \psi \right] dz \Big|_0^t + \int_{xz} \rho \left[ \dot{u}_0 \delta u_0 + \dot{w} \delta w + z^2 \dot{\theta} \delta \theta \right] dz dx \Big|_0^t, \quad (9-ج)$$

$$\delta \int_0^t W dt = \int_0^t \int_{0xz} [N_x \delta u_0 + z N_x \delta \theta + N_z \delta w] dz dx dt, \quad (9-د)$$

<sup>1</sup> Function Space

معمولی [15,16] وابستگی کمتری به آرایش گره‌ها دارد. یعنی عدد حالت ماتریس‌های سختی و جرم بدست آمده با تغییر اندک موقعیت گره‌ها تغییر چشمگیری نخواهد داشت و نیازی به توزیع یکنواخت گره‌ها نیست. همگرایی سریع از ویژگی‌های مثبت و ناپایداری نسبی از ویژگی‌های منفی این روش ذکر شده است [17]. در این روش تابع تحلیلی  $r: \Omega \rightarrow \mathfrak{R}$  در ناحیه  $\Omega \subset \mathfrak{R}^n$  با تابع  $\tilde{r}: \Omega \rightarrow \mathfrak{R}$  تقریب زده می‌شود که ترکیبی خطی از مجموعه‌ی توابع شعاعی  $\eta_i = \{\eta(\sqrt{\|x - x_i\|_2}) | i = 1, \dots, N, x \in \Omega, \eta: \mathfrak{R}_{\geq 0} \rightarrow \mathfrak{R}\}$  می‌باشد.  $N$  تعداد گره‌های مورد نظر در همسایگی نقطه‌ی میانبایی  $\|\cdot\|_p$  نرم طبیعی  $\Omega$  است. با افزودن چند تابع بیشتر  $p_j(x)$  با ضریب مجهول  $b_j$  تابع میانبای  $\tilde{r}(x, t)$  قابلیت تقریب دقیق آن تابع‌ها را نیز بدست می‌آورد.

$$\tilde{r}(x, t) = \sum_{i=1, \dots, N} a_i(t) \eta_i(x) + \sum_{j=1, \dots, m} b_j(t) p_j(x) = \mathbf{a}^T \boldsymbol{\eta}(x) + \mathbf{b}^T \mathbf{p}(x), \quad (15)$$

$i = 1, \dots, N, j = 1, \dots, m$ , تعداد  $N + m$  مجهول  $a$  و  $b$  از دستگاه معادلات میانبایی و چند معادله‌ی کمکی محاسبه می‌شود

$$\tilde{r}(X_{Ii}, t) = r_i \sum_{i=1, \dots, N} a_i p_j(X_{Ii}) = 0, \quad (16)$$

$i = 1, \dots, N, j = 1, \dots, m$ , نقطه میانبایی است و مقادیر دارای پسوند  $i$  مقادیر محاسبه شده در این نقطه‌ها اند. این معادلات را می‌توان بصورت ماتریسی بازنویسی کرد

$$\begin{bmatrix} r_1 \\ 0 \end{bmatrix} = \mathbf{R} \times \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}, \mathbf{R} = \begin{bmatrix} \eta_1 & p_1 \\ \vdots & \vdots \end{bmatrix}, \eta = \begin{bmatrix} \eta(X_{I1})^T \\ \vdots \\ \eta(X_{IN})^T \end{bmatrix}, \quad (17\text{-الف})$$

$$\mathbf{p}_I = \begin{bmatrix} p(X_{I1})^T \\ p(X_{I2})^T \\ \vdots \\ p(X_{IN})^T \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = \mathbf{R}^{-1} \times \begin{bmatrix} f \\ 0 \end{bmatrix}, \quad (17\text{-ب})$$

$$\tilde{r}(x, t) = \begin{bmatrix} \eta^T & \mathbf{p}^T \end{bmatrix} \mathbf{R}^{-1} \times \begin{bmatrix} r_1 \\ 0 \end{bmatrix} = \boldsymbol{\Phi}^T(x) \mathbf{r}_I(t) \quad (18)$$

در این مطالعه برای تابع کمکی  $p(x)$  از جملات چند جمله‌ای مرتبه  $n$  استفاده شده است بطوریکه تعداد این جملات  $m$  می‌باشد. برای یک ناحیه  $k$  بعدی مقدار  $m$  با داشتن  $n$  مشخص می‌شود.

$$m = 1 + \sum_{i=1, \dots, n} \frac{(i+k-1)!}{(k-1)! \times i!} \quad (19)$$

برای تقریب میدان‌های دو بعدی  $\phi$  و  $\psi$  تعداد  $N_{2x}$  و  $N_{2z}$  گره در راستای طولی و عرضی و برای تقریب میدان‌های یک بعدی  $u$  و  $w$  و  $\theta$  تعداد  $N_1$  گره در راستای طولی تیر انتخاب شده است. گره‌ها بصورت نگاشتی از ریشه‌های چند جمله‌ای چبیشف<sup>۱</sup> انتخاب شده اند. با جایگذاری تابع میانبای معادله‌ی (۱۸) در معادله‌های (۱۱) تا (۱۴) برای

$$\left( K_{11}^{ss} L_z + \tau^2 K_{fs} \right) \frac{\partial^2 u_0}{\partial x^2} - K_{fs} u_0 + \frac{K_{fs} L_z}{2} \left( \theta - \tau^2 \frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} \right) \quad (11\text{-ب})$$

$$+ K_{13}^{se} \int_z \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial z} dz + K_{13}^{sm} \int_z \frac{\partial^2 \psi}{\partial x \partial z} dz + \int_z N_x dz - \tau^2 \int_z \frac{\partial^2 N_x}{\partial x^2} dz = I_1 \left( \ddot{u}_0 - \tau^2 \frac{\partial^2 \ddot{u}_0}{\partial x^2} \right),$$

$$Q = \tau^2 I_1 \frac{\partial \ddot{w}}{\partial x} - \tau^2 \int_z \frac{\partial N_z}{\partial x} dz + \tau^2 K_{fm} \frac{\partial w}{\partial x} \quad (12\text{-الف})$$

$$+ K_s K_{55}^{ss} L_z \left( \theta + \frac{\partial w}{\partial x} \right) + K_s K_{15}^{se} \int_z \frac{\partial \varphi}{\partial x} dz + K_s K_{15}^{sm} \int_z \frac{\partial \psi}{\partial x} dz,$$

$$\left( K_s K_{55}^{ss} L_z + \tau^2 K_{fm} \right) \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} - K_{fm} w + K_s K_{55}^{ss} L_z \frac{\partial \theta}{\partial x} \quad (12\text{-ب})$$

$$+ K_s K_{15}^{se} \int_z \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} dz + K_s K_{15}^{sm} \int_z \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} dz + \int_z N_z dz - \tau^2 \int_z \frac{\partial^2 N_z}{\partial x^2} dz = I_1 \left( \ddot{w} - \tau^2 \frac{\partial^2 \ddot{w}}{\partial x^2} \right)$$

$$M = \tau^2 I_1 \ddot{w} + \tau^2 K_{fm} w + \tau^2 I_1 \frac{\partial \theta}{\partial x} + K_{11}^{ss} I_3 \frac{\partial \theta}{\partial x} \quad (13\text{-الف})$$

$$- \tau^2 L_z \frac{K_{fs}}{2} \frac{\partial}{\partial x} \left( u_0 - \frac{L_z}{2} \theta \right) - \tau^2 \int_z N_z dz - \tau^2 \int_z \frac{\partial N_x}{\partial x} dz + K_{13}^{se} \int_z \frac{\partial \varphi}{\partial z} dz + K_{13}^{sm} \int_z \frac{\partial \psi}{\partial z} dz,$$

$$\left( K_{11}^{ss} I_3 + \tau^2 \frac{L_z^2}{4} K_{fs} \right) \frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} - \left( K_{fs} \frac{L_z^2}{4} + K_s K_{55}^{ss} L_z \right) \theta \quad (13\text{-ب})$$

$$- \tau^2 K_{fs} \frac{L_z}{2} \frac{\partial^2 u_0}{\partial x^2} + K_{fs} \frac{L_z}{2} u_0 - K_s K_{55}^{ss} L_z \frac{\partial w}{\partial x} + K_{13}^{se} \int_z \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial z} dz + K_{13}^{sm} \int_z \frac{\partial^2 \psi}{\partial x \partial z} dz - K_s K_{15}^{se} \int_z \frac{\partial \varphi}{\partial x} dz$$

$$K_s K_{15}^{sm} \int_z \frac{\partial \psi}{\partial x} dz - \tau^2 \int_z \frac{\partial^2 N_x}{\partial x^2} dz + \int_z N_x dz = I_2 \left( \ddot{\theta} - \tau^2 \frac{\partial^2 \ddot{\theta}}{\partial x^2} \right),$$

$$\left( K_{15}^{se} + K_{13}^{se} \right) \frac{\partial \theta}{\partial x} + K_{15}^{se} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} - K_{11}^{ee} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} - K_{33}^{ee} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} \quad (14\text{-الف})$$

$$- K_{11}^{em} \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} - K_{33}^{em} \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} = 0, \quad (14\text{-ب})$$

$$\left( K_{15}^{sm} + K_{13}^{sm} \right) \frac{\partial \theta}{\partial x} + K_{15}^{se} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} - K_{11}^{em} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} - K_{33}^{em} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2}$$

$$- K_{11}^{mm} \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} - K_{33}^{mm} \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} = 0.$$

### ۳- حل معادلات ارتعاشات

برای گسسته سازی معادلات (۱۱-۱۴) از روش تربیع دیفرانسیلی با تابع میانبای نقطه شعاعی استفاده شده است. این روش که توسط کانزا [13,14] ارائه شده است در مقایسه با روش تربیع دیفرانسیلی

<sup>1</sup> Condition Number

<sup>2</sup> Chebyshev's polynomial roots

$$-K_s K_{15}^{sm} \int_z \frac{\partial \Phi_2^T}{\partial x} (X_{I_1}, z) dz,$$

$$M_{\theta\theta} = I_2 \left( \Phi_1^T (X_{I_1}) - \tau^2 \frac{\partial^2 \Phi_1^T}{\partial x^2} (X_{I_1}) \right), \quad (ج-۲۱)$$

$$K_{\phi u} = 0, K_{\phi w} = K_{15}^{se} \frac{\partial^2 \Phi_1^T}{\partial x^2} (X_{I_2}),$$

$$K_{\phi\theta} = (K_{15}^{se} + K_{13}^{se}) \frac{\partial \Phi_1^T}{\partial x} (X_{I_2}),$$

$$K_{\phi\phi} = -K_{11}^{ee} \frac{\partial^2 \Phi_2^T}{\partial x^2} (X_{I_2}) - K_{33}^{ee} \frac{\partial^2 \Phi_2^T}{\partial z^2} (X_{I_2}),$$

$$K_{\phi\psi} = -K_{11}^{em} \frac{\partial^2 \Phi_2^T}{\partial x^2} (X_{I_2}) - K_{33}^{em} \frac{\partial^2 \Phi_2^T}{\partial z^2} (X_{I_2}), \quad (د-۲۰)$$

$$K_{\psi u} = 0, K_{\psi w} = K_{15}^{se} \frac{\partial^2 \Phi_1^T}{\partial x^2} (X_{I_2}),$$

$$K_{\psi\theta} = (K_{15}^{sm} + K_{13}^{sm}) \frac{\partial \Phi_1^T}{\partial x} (X_{I_2}),$$

$$K_{\psi\phi} = -K_{11}^{em} \frac{\partial^2 \Phi_2^T}{\partial x^2} (X_{I_2}) - K_{33}^{em} \frac{\partial^2 \Phi_2^T}{\partial z^2} (X_{I_2}),$$

$$K_{\psi\psi} = -K_{11}^{mm} \frac{\partial^2 \Phi_2^T}{\partial x^2} (X_{I_2}) - K_{33}^{mm} \frac{\partial^2 \Phi_2^T}{\partial z^2} (X_{I_2}) \quad (ه-۲۰)$$

انتهای آنها با استفاده از روش انتگرال گاوس-لژاندر<sup>۱</sup> با تعداد  $N_z$  نقطه در راستای جانبی محاسبه می‌شود.

شکل بهسازی شده ای از تابع دوتایی چندگانه<sup>۲</sup> به عنوان تابع میاناب شعاعی  $\eta$  استفاده شده است که عملکرد آن بویژه در افزایش همزمان خوش وضعی ماتریس‌های ضرایب و نرخ همگرایی پاسخها، در بررسی‌های عددی صورت گرفته برتری چشمگیری نسبت به توابع پایه شعاعی رایج [17] داشت

$$\eta_i = \sum_j w_j ((x - x_i)^2 + \alpha_{s2} ds_i^2)^{q_j} \quad (۲۲)$$

برای پارامترهای تابع میاناب،  $\alpha_{s1} = 0.02$  و  $q_1 = 2.02, q_2 = 2.03$ ،  $\alpha_{s2} = 0.001$  مناسب گسسته سازی عملگرهای دیفرانسیل موجود در معادلات بدست آمده نشان دادند.  $\alpha_{s1}$  برای حالت یک بعدی و  $\alpha_{s2}$  برای حالت دوبعدی است. شرایط مرزی بررسی شده در جدول ۱ نمایش داده شده است. در جدول ۱ عبارت C-C، C-H، H-H به ترتیب حالت دوسرگیردار، یکسر لولا و دوسرلولا اشاره دارد.

#### ۴- نتایج عددی

در این بخش نتایج تحلیل ارتعاشی تیر از جنس نانوکامپوزیت چند فرویک  $x\text{CoFe}_2\text{O}_4 \cdot (1-x)\text{BiTiO}_3$  ارائه شده است. جدول ۲ ضریب‌های مادی کاهش یافته مورد نیاز را برای کامپوزیتی از این دو ماده که دارای میانگین خواص هر دو فاز باشد در بر دارد [21-23]. برای تحلیل ارتعاش آزاد تیر بدون بستر الاستیک از معادلات تعادل و شرط مرزی (۱۱-۱۴) با  $K_{fn} = 0, K_{fs} = 0$  برای تیر به طول برای  $L_x = 80\text{nm}$  و ضخامت  $L_z = 10\text{nm}$  استفاده شده است.

بررسی ارتعاش آزاد (سینوسی) تیر، روابط گسسته سازی شده (۲۰) بدست می‌آید، همچنین برای گسسته سازی معادلات شرایط مرزی، تابع تقریب مربوط به هر کدام از میدان‌ها در این معادلات جایگزین می‌شود.

$$K r(t) = M \ddot{r}(t), r(t) = \sin(\omega t) X \quad (الف-۲۰)$$

$$\rightarrow K X = -f^2 M X \quad (ب-۲۰)$$

در معادله (۲۰-ب) متغیر  $f$  فرکانس ارتعاش آزاد سیستم است. ماتریس‌های مربعی  $K$  و  $M$  دارای ابعاد  $(2N_{2x} + 2N_{2z}) \times (2N_{2x} + 2N_{2z})$  اند. در معادلات (۲۱)، متغیرهای  $\Phi_1$  و  $\Phi_2$  به ماتریس توابع شکل بدست آمده از عملیات گسسته سازی (معادله ۱۵ تا ۱۸) بر روی معادلات حالت سیستم (معادلات ۱۱ تا ۱۴) اشاره دارد. تابع شکل مربوط به توابع یک بعدی با متغیر  $\Phi_1$  و تابع شکل های مربوط به متغیر های دوبعدی با متغیر  $\Phi_2$  نمایش داده شده اند.

$$K_{\theta w} = -K_s K_{55}^{ss} L_z \frac{\partial \Phi_1^T}{\partial x} (X_{I_1}), K_{\theta\theta} = \left( K_{11}^{ss} I_3 + \tau^2 \frac{L_z^2}{4} K_{fs} \right)$$

$$K_{uu} = \left( K_{11}^{ss} L_z + \tau^2 K_{fs} \right) \frac{\partial^2 \Phi_1^T}{\partial x^2} (X_{I_1}), K_{uw} = 0,$$

$$K_{u\theta} = \frac{K_{fs} L_z}{2} \left( \Phi_1^T (X_{I_1}) - \tau^2 \frac{\partial^2 \Phi_1^T}{\partial x^2} (X_{I_1}) \right),$$

$$K_{u\phi} = K_{13}^{se} \int_z \frac{\partial^2 \Phi_2^T}{\partial x \partial z} (X_{I_1}, z) dz,$$

$$K_{u\psi} = K_{13}^{sm} \int_z \frac{\partial^2 \Phi_2^T}{\partial x \partial z} (X_{I_1}, z) dz,$$

$$M_{uu} = I_1 \left( \Phi_1^T (X_{I_1}) - \tau^2 \frac{\partial^2 \Phi_1^T}{\partial x^2} (X_{I_1}) \right) \quad (الف-۲۱)$$

$$K_{wu} = 0,$$

$$K_{ww} = \left( K_s K_{55}^{ss} L_z + \tau^2 K_{fn} \right) \frac{\partial^2 \Phi_1^T}{\partial x^2} (X_{I_1}) - K_{fn} \Phi_1^T (X_{I_1}),$$

$$K_{w\theta} = K_s K_{55}^{ss} L_z \frac{\partial \Phi_1^T}{\partial x} (X_{I_1}),$$

$$K_{w\phi} = K_s K_{15}^{se} \int_z \frac{\partial^2 \Phi_2^T}{\partial x^2} (X_{I_1}, z) dz,$$

$$K_{w\psi} = K_s K_{15}^{sm} \int_z \frac{\partial^2 \Phi_2^T}{\partial x^2} (X_{I_1}, z) dz,$$

$$M_{ww} = I_1 \left( \Phi_1^T (X_{I_1}) - \tau^2 \frac{\partial^2 \Phi_1^T}{\partial x^2} (X_{I_1}) \right) \quad (ب-۲۱)$$

$$K_{\theta u} = \tau^2 K_{fs} \frac{L_z}{2} \frac{\partial^2 \Phi_1^T}{\partial x^2} (X_{I_1}) + K_{fs} \frac{L_z}{2} \Phi_1^T (X_{I_1}),$$

$$K_{\theta w} = -K_s K_{55}^{ss} L_z \frac{\partial \Phi_1^T}{\partial x} (X_{I_1}), K_{\theta\theta} = \left( K_{11}^{ss} I_3 + \tau^2 \frac{L_z^2}{4} K_{fs} \right)$$

$$\frac{\partial^2 \Phi_1^T}{\partial x^2} (X_{I_1}) - \left( K_{fs} \frac{L_z^2}{4} + K_s K_{55}^{ss} L_z \right) \Phi_1^T (X_{I_1}),$$

$$K_{\theta\phi} = K_{13}^{se} \int_z \frac{\partial^2 \Phi_2^T}{\partial x \partial z} (X_{I_1}, z) dz - K_s K_{15}^{se} \int_z \frac{\partial \Phi_2^T}{\partial x} (X_{I_1}, z) dz,$$

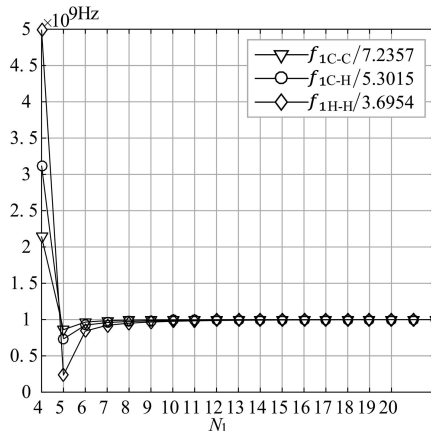
$$K_{\theta\psi} = K_{13}^{sm} \int_z \frac{\partial^2 \Phi_2^T}{\partial x \partial z} (X_{I_1}, z) dz$$

<sup>1</sup> Gauss-Legendre quadrature

<sup>2</sup> Multiquadrics

<sup>3</sup> Multiferoic

تفاوت‌هایی مانند در نظر گرفتن میدان‌های الکترومغناطیس دو بعدی در مدل ارائه شده در کار حاضر که معادلات حاکم را بصورت انتگرال-دیفرانسیل در می‌آورد و چشم پوشی از جابجایی محور  $w$  در مطالعه کی می‌باشد.



شکل ۴- تحلیل همگرایی در شرط مرزی‌های گوناگون C-H, C-C و H-H  
 $\tau = 0.1L_x$  و H-H

جدول ۳- مقایسه فرکانس اول تا سوم ( $f_1 - f_3$ ) (GHz) شرط مرزی  
( $\tau = 0.2L_x, \tau = 0.4L_x$ ) [7]. مرجع

| H-H    |        | C-H     |        | C-C     |        | شرط مرزی   |
|--------|--------|---------|--------|---------|--------|------------|
| ۰/۴    | ۰/۲    | ۰/۴     | ۰/۲    | ۰/۴     | ۰/۲    | $\tau/L_x$ |
| ۲/۲۷۱۱ | ۲/۲۷۱۱ | ۳/۲۷۹۵  | ۳/۳۳۸۱ | ۴/۴۴۶۴  | ۴/۴۷۹۴ | $f_1$      |
| ۴/۹۶۳۸ | ۴/۹۶۳۸ | ۸/۷۲۴۹  | ۵/۹۷۸۷ | ۱۰/۱۰۹۹ | ۶/۵۹۷۶ | $f_2$      |
| ۶/۹۶۲۷ | ۶/۹۶۲۷ | ۱۳/۲۰۷۳ | ۷/۷۷۳۰ | ۱۴/۱۶۵۶ | ۸/۳۱۷۵ | $f_3$      |
| ۲/۳۲۸۱ | ۲/۳۲۸۱ | ۳/۱۶۵۸  | ۳/۳۱۴۳ | ۴/۶۲۱۴  | ۴/۴۷۶۵ | $f_1$      |
| ۵/۰۹۱۸ | ۵/۰۹۱۸ | ۸/۵۷۶۱  | ۵/۹۱۵۹ | ۹/۹۹۴۰  | ۶/۵۹۱۳ | $f_2$      |
| ۷/۱۳۱۲ | ۷/۱۳۱۲ | ۱۳/۰۳۴۷ | ۷/۹۳۷۳ | ۱۴/۱۰۷۱ | ۸/۳۲۴۲ | $f_3$      |

ارتعاشات حالت‌های گوناگون شرایط انتهایی تیر، در حالت مدار بسته  $\phi_0 = 0, \psi_0 = 0$  در جدول ۴ و نتایج بارگذاری‌های مکانیکی مشابه برای حالت مدار باز  $D_z = 0, B_z = 0$  در جدول ۵ گزارش شده است. بطور کلی حالت مدار باز باعث منقبض شدن طیف فرکانسی<sup>۵</sup> و نزدیک شدن فرکانس‌های متوالی به یکدیگر می‌شود. شکل ۷ و ۸ و ۹ نمودار شکل مود نخست جابجایی جانبی در حالت‌های گوناگون شرط مرزی می‌باشد. از این دو شکل مشاهده می‌شود که تئوری الاستیسیته‌ی غیرموضعی که برتری آن در مقیاس نانو اثبات شده است، با تغییر نسبی پارامتر غیر موضعی از مقدار ۱ تا ۵، با انقباض مود نخست ارتعاشی، نسبت به تئوری کلاسیک انرژی کمتری برای این مود پیش بینی می‌کند. مود نخست  $\phi$  در شرایط انتهایی گوناگون برای مقطع طولی  $z = \pm 0.16$  در شکل ۱۰ و ۱۱ و ۱۲ رسم شده است. همچنین مود نخست  $\psi$  در شرایط انتهایی گوناگون برای مقطع طولی  $z = \pm 0.16$  در شکل ۱۳ و ۱۴ و ۱۵ رسم شده است.

معادله‌های الکترومغناطیس دو بعدی در لبه‌های بالایی و پایینی تیر ( $z = \pm \frac{L_x}{2}$ ) یکبار پتانسیل‌های الکترومغناطیس مقدار ثابت  $\phi_0 = 0, \psi_0 = 0$  (حالت مدار بسته<sup>۱</sup>) و بار دیگر شار الکتریکی و مغناطیسی  $D_z = 0, B_z = 0$  (حالت مدار باز<sup>۲</sup>) در نظر گرفته شده است. همچنین ممکن است مسئله مقدار ویژه مرتبه دو بدست آمده دارای ماتریس‌های جرم و سفتی بدحالت<sup>۳</sup> باشد. برای کاهش عدد حالت چنین ماتریس‌هایی و بدست آوردن مسئله مقدار ویژه مرتبه یک متناظر می‌توان از راهکار پیشنهادی‌هایم [18] استفاده نمود. بخاطر تاثیر اندک تعداد گره‌ها در راستای جانبی  $N_z$  بر نتایج، مقدار ثابت ۱۱ گره در این راستا در نظر گرفته شده است. برای تحلیل همگرایی تعداد گره‌های یک بعدی  $N_1$  و دو بعدی  $N_{2x}$  از تعداد ۴ گره بطور همزمان افزایش یافت. شکل ۴ نتیجه‌ی تحلیل همگرایی برای شرط مرزی‌های گوناگون می‌باشد. پس از تعداد ۲۳ گره همگرایی نسبی مشاهده شد. مقایسه نتایج حاضر و فرکانس‌های اول تا سوم مقاله‌ی کی [7] در جدول ۳ ارائه شده است.

جدول ۱- شرایط مرزی مورد بررسی

| شرط مرزی | اطلاعات موجود در $x = L_x$                              | اطلاعات موجود در $x = 0$                         |
|----------|---|--|
| C-C      | $u_0 = 0, w = 0, \theta = 0, \phi = 0, \psi = 0$        | $u_0 = 0, w = 0, \theta = 0, \phi = 0, \psi = 0$ |
| C-H      | $u_0 = 0, w = 0, \theta = 0, M = 0, \phi = 0, \psi = 0$ | $u_0 = 0, w = 0, \theta = 0, \phi = 0, \psi = 0$ |
| H-H      | $u_0 = 0, w = 0, M = 0, \phi = 0, \psi = 0$             | $u_0 = 0, w = 0, M = 0, \phi = 0, \psi = 0$      |

جدول ۲- خواص کامپوزیت  $(1-x)\text{BiTiO}_3 - x\text{CoFe}_2\text{O}_4, x = 0.5$

| خواص فیزیکی                                 | BaTiO3-CoFe2O4   |
|---|--|
| الاستیک (GPa)                               | $K_{11}^{ss} = 226, K_{12}^{ss} = 125, K_{13}^{ss} = 124, K_{33}^{ss} = 216, K_{44}^{ss} = 44.2$ |
| پیزوالکتریک ( $\text{C/m}^2$ )              | $K_{13}^{se} = -2.2, K_{33}^{se} = 9.3, K_{15}^{se} = 5.8$                                       |
| دی الکتریک ( $10^{-9}\text{C/Vm}$ )         | $K_{11}^{ee} = 5.64, K_{33}^{ee} = 6.45$   |
| پیزومغناطیس (N/Am)                          | $K_{13}^{sm} = 290.1, K_{33}^{sm} = 349.9, K_{15}^{sm} = 275$                                    |
| مگنتوالکتریک ( $10^{-12}\text{Ns/VC}$ )     | $K_{11}^{em} = 5.367, K_{33}^{em} = 2737.5$  |
| مغناطیس ( $10^{-6}\text{Ns}^2/\text{C}^2$ ) | $K_{11}^{mm} = -297, K_{33}^{mm} = 83.5$   |
| چگالی ( $10^3\text{Kg/m}^3$ )               | $\rho = 5.55$  |

هر چند معکوس پذیری ماتریس‌های میانجی<sup>۴</sup> با توابع پایه شعاعی نسبت به توزیع گره‌ها حساسیت کمتری نسبت به دیگر روش‌ها دارد، اما بخاطر پرشمار بودن پارامترهای بکار رفته تعیین این پارامترها برای یافتن پاسخ دقیق کاری دشوار و زمان بر است. دلیل تفاوت اندک (بطور میانگین 1.1%) فرکانس‌های بدست آمده و نتیجه‌ی مطالعه کی در

<sup>1</sup> Closed Circuit

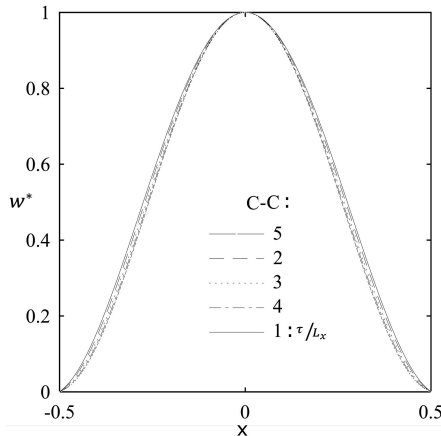
<sup>2</sup> Opened Circuit

<sup>3</sup> Ill-conditioned

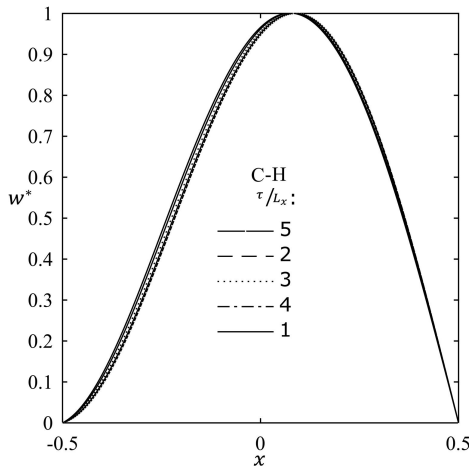
<sup>4</sup> Moment matrix

<sup>5</sup> Frequency spectrum

است. فرکانس‌های بدست آمده در این مطالعه و مطالعه کی تفاوت اندکی دیده می‌شود (جدول ۳). از سویی با مدل ارائه شده در کار حاضر امکان مقایسه فرکانس‌های تیر مدار باز و مدار بسته ایجاد شد (جدول ۴ و ۵). شکل موده‌های میدان‌های جابجایی و میانگین وزن دار (در راستای ضخامت) شکل موده‌های میدان‌های الکترو مغناطیس در این مطالعه همسان با نتایج مطالعه کی که همه‌ی متغیرها را بصورت یک بعدی فرض کرده است، بدست آمد.



شکل ۷- اثر پارامتر غیر موضعی  $\tau/L_x$  بر شکل مود نخست در حالت C-C تیر مدار بسته ( $w^*$ : جابجایی بدون بعد)



شکل ۸- اثر پارامتر غیر موضعی  $\tau/L_x$  بر مود نخست در حالت C-H

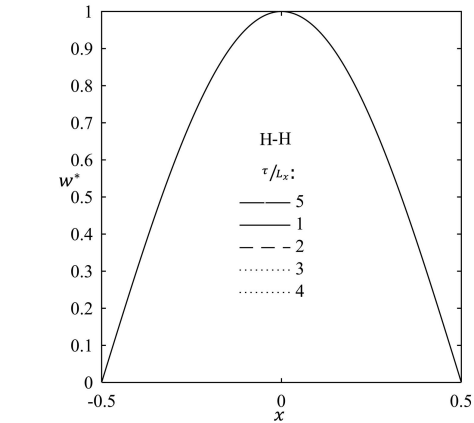
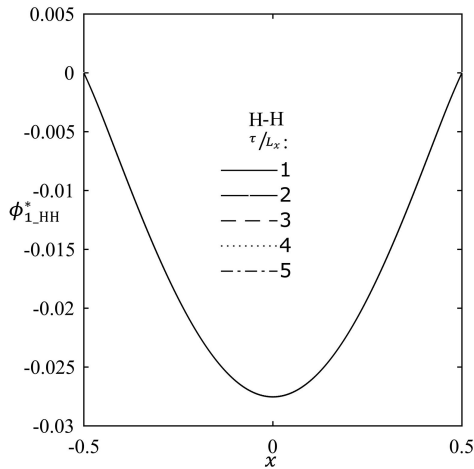
جدول ۴- فرکانس‌های اول تا سوم ( $f_1 - f_3$  (GHz)) شرط مرزی‌های C-C, C-H, H-H برای حالت مدار بسته وجوه بالایی و پایینی تیر ( $\phi_0 = \psi_0 = 0$ )

|     | ۰/۵   | ۰/۴    | ۰/۳    | ۰/۲     | ۰/۱     | ۰       | $\tau/L_x$ |
|-----|-------|--------|--------|---------|---------|---------|------------|
| C-C | $f_1$ | ۳/۸۱۹۶ | ۴/۴۷۹۴ | ۵/۳۱۷۰  | ۶/۳۰۶۲  | ۷/۲۳۵۷  | ۷/۶۴۴۸     |
|     | $f_2$ | ۵/۳۹۵۵ | ۶/۵۹۷۶ | ۸/۴۱۱۳  | ۱۱/۲۹۳۷ | ۱۵/۶۲۳۷ | ۱۸/۶۷۳۰    |
|     | $f_3$ | ۶/۷۵۵۹ | ۸/۳۱۷۵ | ۱۰/۷۷۳۵ | ۱۵/۰۸۹۰ | ۲۳/۴۶۱۰ | ۳۲/۴۱۲۲    |
| C-H | $f_1$ | ۲/۸۵۷۴ | ۳/۳۳۸۱ | ۳/۹۴۱۹  | ۴/۶۴۶۴  | ۵/۳۰۱۵  | ۵/۵۸۶۰     |
|     | $f_2$ | ۴/۹۰۴۹ | ۵/۹۷۸۷ | ۷/۵۸۵۳  | ۱۰/۱۰۹۹ | ۱۳/۸۵۰۱ | ۱۶/۳۸۴۳    |
|     | $f_3$ | ۶/۳۰۱۱ | ۷/۷۷۳۰ | ۱۰/۰۹۳۰ | ۱۴/۱۶۵۶ | ۲۲/۰۰۹۸ | ۳۰/۲۷۹۶    |
| H-H | $f_1$ | ۲/۰۷۹۶ | ۲/۲۷۱۱ | ۳/۸۱۸۴  | ۳/۲۷۹۵  | ۳/۶۹۵۴  | ۳/۸۷۳۷     |
|     | $f_2$ | ۴/۳۵۰۱ | ۴/۹۶۳۸ | ۶/۵۶۶۸  | ۸/۷۲۴۹  | ۱۱/۸۶۳۸ | ۱۴/۰۱۰۳    |
|     | $f_3$ | ۵/۸۴۸۹ | ۶/۹۶۲۷ | ۹/۳۹۵۶  | ۱۳/۲۰۷۳ | ۲۰/۵۱۶۱ | ۲۸/۲۰۵۷    |

جدول ۵ فرکانس‌های اول تا سوم ( $f_1 - f_3$  (GHz)) شرط مرزی‌های C-C, C-H, H-H برای حالت مدار باز تیر ( $D_z = 0, B_z = 0$ )

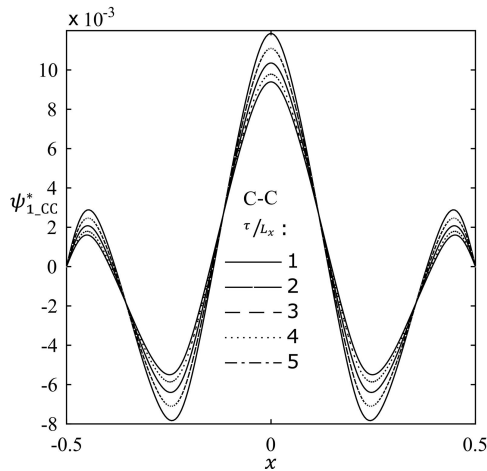
|     | ۰/۵   | ۰/۴    | ۰/۳    | ۰/۲     | ۰/۱     | ۰       | $\tau/L_x$ |
|-----|-------|--------|--------|---------|---------|---------|------------|
| C-C | $f_1$ | ۳/۸۳۲۴ | ۴/۴۹۱۸ | ۵/۳۲۶۹  | ۶/۳۰۹۸  | ۷/۲۹۹۶  | ۷/۶۴۰۵     |
|     | $f_2$ | ۵/۲۷۱۹ | ۶/۴۴۰۲ | ۸/۱۹۶۰  | ۱۰/۹۶۷۶ | ۱۵/۸۵۳۷ | ۱۷/۶۶۲۷    |
|     | $f_3$ | ۶/۶۸۳۵ | ۸/۲۲۵۸ | ۱۰/۶۴۹۸ | ۱۴/۹۰۴۶ | ۲۳/۱۳۸۸ | ۳۱/۷۹۹۲    |
| C-H | $f_1$ | ۲/۸۶۸۸ | ۳/۳۴۸۸ | ۳/۹۴۹۷  | ۴/۶۴۸۰  | ۵/۲۹۴۰  | ۵/۵۶۷۵     |
|     | $f_2$ | ۴/۸۴۰۱ | ۵/۸۹۵۵ | ۷/۴۷۱۰  | ۹/۹۳۶۸  | ۱۳/۵۶۶۳ | ۱۵/۸۲۷۴    |
|     | $f_3$ | ۶/۳۲۱۵ | ۷/۶۷۳۴ | ۹/۹۶۰۶  | ۱۳/۹۷۱۴ | ۲۱/۶۷۸۱ | ۲۹/۶۰۲۶    |
| H-H | $f_1$ | ۲/۰۸۷۸ | ۲/۴۲۰۹ | ۳/۸۲۹۴  | ۳/۲۹۲۳  | ۳/۷۰۹۸  | ۳/۸۸۸۷     |
|     | $f_2$ | ۴/۲۷۱۷ | ۵/۲۰۶۵ | ۶/۶۰۰۰  | ۸/۷۶۸۷  | ۱۱/۹۲۳۸ | ۱۴/۰۷۹۴    |
|     | $f_3$ | ۵/۸۴۱۶ | ۷/۲۱۵۳ | ۹/۳۸۳۹  | ۱۳/۱۹۰۶ | ۲۰/۴۸۸۹ | ۲۸/۱۶۶۱    |

با توجه به شکل ۹ و ۱۲ و ۱۵ که مربوط به شکل مود حالت دوسرولوا می باشند، پارامتر موضعی بر شکل مود های تیر با این شرط مرزی تاثیری ندارد. هر چند فرکانس مربوط به این مود ها تحت تاثیر پارامتر موضعی کاهش می یابد. (جدول ۴ و ۵). طبق روابط (۱۴-الف و ب) و با توجه به خواص ماده مورد نظر، میدان مغناطیس برعکس میدان الکتریکی، با یک زوج نیروی نسبتا قوی تحت تاثیر میدان های جابجایی است. از سویی بخاطر اینکه در این مطالعه میدان الکتریکی و مغناطیسی دو بعدی فرض شده و در راستای ضخامت دارای آزادی می باشند، موده های جابجایی بویژه جابجایی جانبی نیز بواسطه ی کوپل مگنتو-الاستیک یاد شده تحت تاثیر این آزادی قرار می گیرند. این یعنی فضای تابعی مدل شده، نسبت به مطالعه ی کی که در آن همه ی میدان ها یک بعدی فرض شده و توزیع میدان های الکترومغناطیس در راستای ضخامت با فرض کسینوسی بودن تحمیل شده است، گسترده تر است. پس اگرچه میان فرکانس های بدست آمده در این دو مطالعه طبق جدول ۳ اختلافی به میانگین 1.1% دیده می شود، وجود تفاوت چشمگیر میان شکل موده های بدست آمده در این مطالعه و مطالعه کی، گریزناپذیر است. این موضوع با مقایسه شکل مود نخست میدان الکتریکی و مغناطیسی رسم شده در شکل ۱۶ تا شکل ۲۱ نمایان



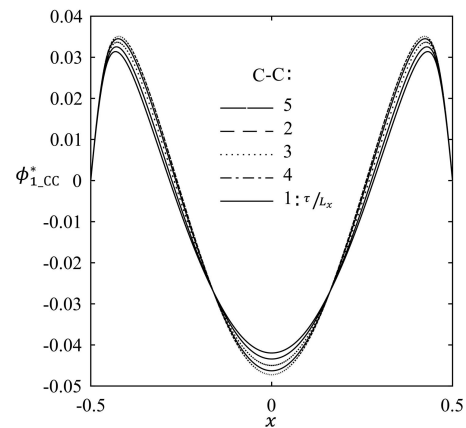
شکل ۹- اثر پارامتر غیر موضعی بر شکل مود نخست در حالت H-H تیر مدار بسته

شکل ۱۲- اثر پارامتر غیر موضعی  $\tau/L_x$  بر شکل مود نخست میدان الکتریکی تیر H-H

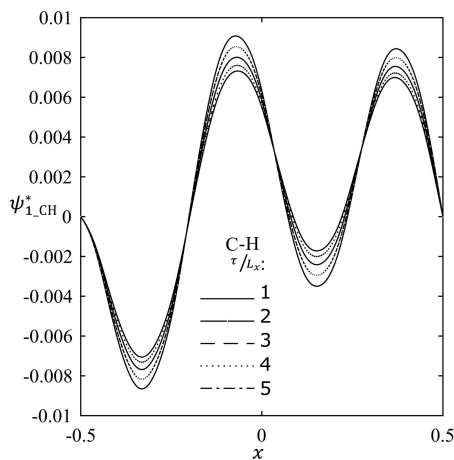


شکل ۱۳- اثر پارامتر غیر موضعی بر شکل مود میدان مغناطیسی تیر C-C

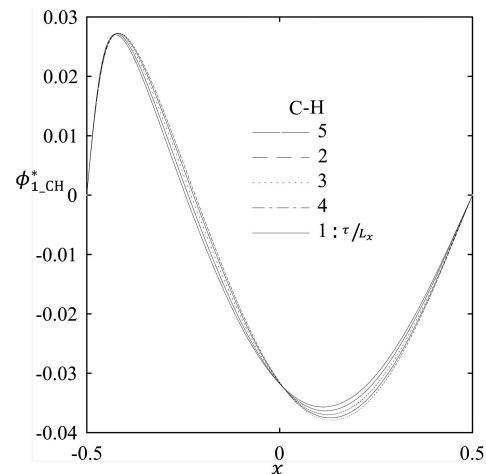
با این وجود نمودار دو بعدی برش مقطع  $z = \pm 0.16$  مطابق مدهای مغناطیسی مطالعه‌ی کی می‌باشد (شکل ۱۳ و ۱۴ و ۱۵).



شکل ۱۰- اثر پارامتر غیر موضعی بر شکل مود نخست میدان الکتریکی تیر C-C ( $\phi^*$ : پتانسیل الکتریکی بدون بعد)

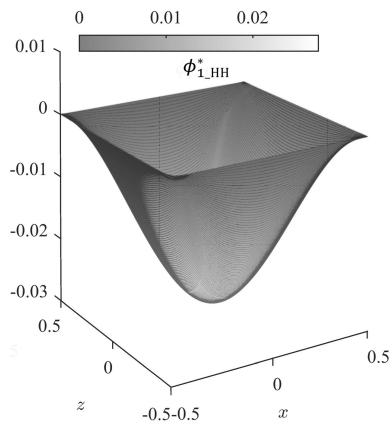


شکل ۱۴- اثر پارامتر غیر موضعی بر شکل مود نخست میدان C-H مغناطیسی تیر

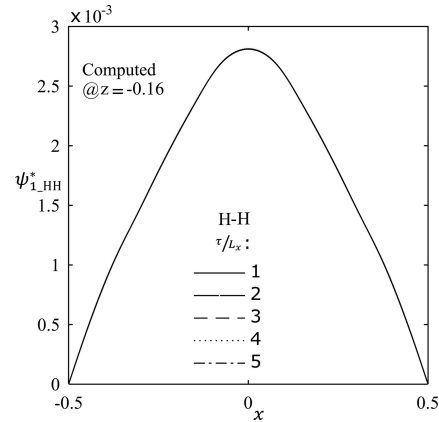


شکل ۱۱- اثر پارامتر غیر موضعی بر شکل مود نخست میدان الکتریکی C-H تیر





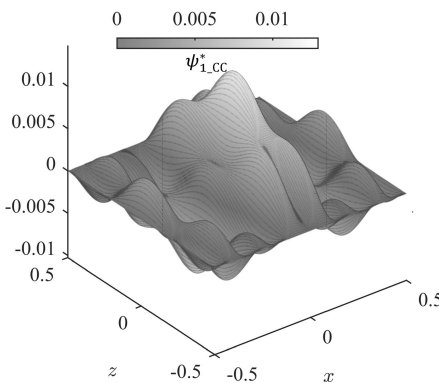
شکل ۱۸- شکل مود نخست پتانسیل الکتریکی تیر H-H



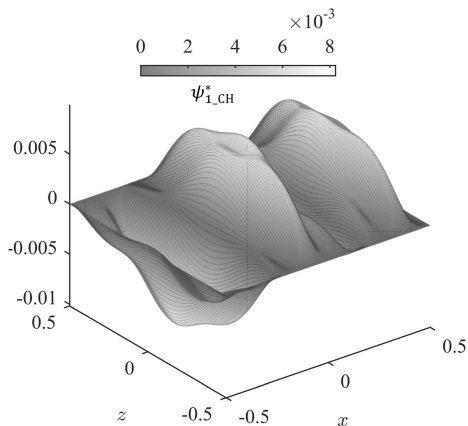
شکل ۱۵- اثر پارامتر غیر موضعی  $\tau/L_x$  بر شکل مود نخست میدان مغناطیسی تیر H-H

### ۵- نتیجه گیری و جمع بندی

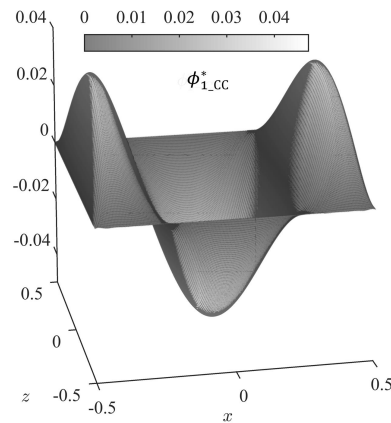
در بخش ۴ مدل نانو تیر تیموشنکو با استفاده از روش هم مکانی سراسری<sup>۱</sup> با تابع میانیاپ نقطه‌ای شعاعی بهبود یافته گسسته سازی شد. شکل ۷ تا ۲۱ تاثیر پارامتر موضعی بر شکل مودها را نشان می‌دهد. بطور خلاصه در این مطالعه:



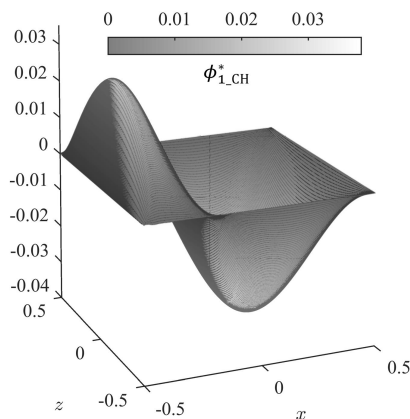
شکل ۱۹- شکل مود نخست پتانسیل مغناطیسی تیر C-C



شکل ۲۰- شکل مود نخست پتانسیل مغناطیسی تیر C-H



شکل ۱۶- شکل مود نخست پتانسیل الکتریکی تیر C-C

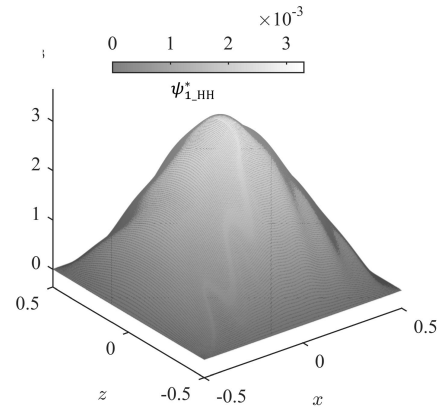


شکل ۱۷- شکل مود نخست پتانسیل الکتریکی تیر C-H

<sup>1</sup> Global Colocation

theory, *Composite Structures*, Vol. 126, pp. 216–226, Aug. 2015.

- [9] Eringen A., *Nonlocal continuum field theories*, 1st ed. New York: Springer, 2002.
- [10] Hartmann E., *An introduction to crystal physics*, 1st ed. Cardiff, Wales: Published for the International Union of Crystallography by University College Cardiff Press, 1984
- [11] Santapuri S., Lowe R. L., Bechtel S. E., Dapino M. J., Thermodynamic modeling of fully coupled finite-deformation thermo-electro-magneto-mechanical behavior for multifunctional applications, *International Journal of Engineering Science*, Vol. 72, pp. 117–139, Nov. 2013.
- [12] Eringen A. C., On differential equations of nonlocal elasticity and solutions of screw dislocation and surface waves, *Journal of Applied Physics*, Vol. 54, No. 9, pp. 4703–4710, Sep. 1983.
- [13] Kansa E. J., "Multiquadrics—A scattered data approximation scheme with applications to computational fluid-dynamics—II solutions to parabolic, hyperbolic and elliptic partial differential equations, *Journal of Computers and Mathematics with Applications*, Vol. 19, No. s 8-9, pp. 147–161, 1990.
- [14] Kansa E. J., Multiquadrics—A scattered data approximation scheme with applications to computational fluid-dynamics—I surface approximations and partial derivative estimates, *Computers & Mathematics with Applications*, Vol. 19, No. s 8–9, pp. 127–145, 1990.
- [15] Bellman R., Differential quadrature and long-term integration, *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, Vol. 34, Nno. 2, PP 235-238, 1971
- [16] Bellman R., Differential Quadrature: A Technique for the Rapid Solution of Nonlinear Partial Differential Equations, *Journal of Computational Physics*, Vol. 10, No. 1, PP 40-52, 1972
- [17] Liu X., Liu G. R., Tai K., Lam K. Y., Radial point interpolation collocation method (RPICM) for partial differential equations, *Computers & Mathematics with Applications*, Vol. 50, No. s 8–9, pp. 1425–1442, 2005.
- [18] Higham N., Mackey D., Tisseur F., Garvey S., Scaling, sensitivity and stability in the numerical solution of quadratic eigenvalue problems, *International Journal For Numerical Methods In Engineering*, Vol. 73, No. 3, PP 344–360, 2008.
- [19] Mohammadimehr M., Salemi M., Nasiri H., Afshari H., "Thermal effect on the deflection, critical buckling load and vibration of nonlocal Euler-Bernoulli beam on Pasternak foundation using Ritz method," *Modares Mechanical Engineering Journal*, Vol. 13, No. 11, pp. 64–76, Dec. 2013 (in Persian فارسی)
- [20] Li J.Y., Magneto-electro-elastic multi-inclusion and inhomogeneity problems and their applications in composite materials, *Int. J. Eng. Sci.* 38 (2000) 1993–2011.
- [21] Wu B., Yu J.G., He C.F., Wave propagation in non-homogeneous magneto-electro-elastic plates, *J. Sound Vib.* 317 (2008) 250–264.
- [22] Hou P.F., Teng G.H., Chen H.R., Three-dimensional Green's function for a point heat source in two-phase transversely isotropic magneto-electro-thermoelastic material, *Mech. Mater.* 41 (2009) 329–338.
- [23] Zhou Y.T., Lee K.Y., Theory of sliding contact for multiferroic materials indented by a rigid punch, *Int. J. Mech. Sci.* 66 (2013) 156–167.



شکل ۲۱ شکل مود نخست پتانسیل مغناطیسی تیر H-H

- ۱- برای نخستین بار دستگاه معادلات انتگرال دیفرانسیل برای نانوتیرهای مگنتو الکترو الاستیک ارائه شد. معادلات بدست آمده با روش تربیع دیفرانسیلی با تابع میانیاپ نقطه‌ای شعاعی گسسته‌سازی شد و حل عددی معادلات برای شرایط مرزی گوناگون انجام پذیرفت. (روابط ۱، ۱۲، ۱۳ و ۱۴)
- ۲- فرکانس های بدست آمده برای مدل حاضر تفاوت 1.1% با فرکانس های مدل مرجع کی [7] نشان داد. (جدول ۳)
- ۳- پارامتر غیرموضعی تاثیر کاهنده در فرکانس های ارتعاشی برای همه حالت های بارگذاری دارد. (جدول ۳، ۴ و ۵)
- ۴- تیر مدار باز نسبت به تیر مدار بسته طیف فرکانسی فشرده تری دارد. (جدول ۴ و ۵)
- ۵- شکل مود های یک بعدی و میانگین وزن دار شکل مود های دوبعدی، با نتایج کی مطابقت دارد.

## ۶- مراجع

- [1] Reddy J. N., Nonlocal theories for bending, buckling and vibration of beams, *International Journal of Engineering Science*, Vol. 45, No. s 2–8, pp. 288–307, Feb. 2007.
- [2] Santos J. and Reddy J., Vibration of Timoshenko beams using non-classical elasticity theories, *Journal of Shock and Vibration*, Vol. 19, No. 3, pp. 251-256, 2017
- [3] Reddy J., Nonlocal nonlinear formulations for bending of classical and shear deformation theories of beams and plates, *International Journal of Engineering Science*, Vol. 48, No. 11, pp. 1507–1518, 2010
- [4] Roque C., Ferreira A., and Reddy J., Analysis of Timoshenko nanobeams with a nonlocal formulation and meshless method, *International Journal of Engineering Science*, Vol. 49, No. 9, pp. 976–984, 2011.
- [5] Aydogdu M., A general nonlocal beam theory: Its application to nanobeam bending, buckling and vibration, *Physica E: Low-dimensional Systems and Nanostructures*, Vol. 41, No. 9, pp. 1651–1655, 2017.
- [6] Ke L.-L., Wang Y.-S., Thermoelectric-mechanical vibration of piezoelectric nanobeams based on the nonlocal theory, *Smart Materials and Structures*, Vol. 21, No. 2, p. 025018, Jan. 2012.
- [7] Ke L.-L., Wang Y.-S., Free vibration of size-dependent magneto-electro-elastic nanobeams based on the nonlocal theory, *Physica E: Low-dimensional Systems and Nanostructures*, Vol. 63, pp. 52–61, Sep. 2014.
- [8] Ansari R., Gholami R., Rouhi H., Size-dependent nonlinear forced vibration analysis of magneto-electro-thermo-elastic Timoshenko nanobeams based upon the nonlocal elasticity