

حل بسته انتقال گرمای جابجایی اجباری سیال قانون توانی درون لوله‌های هم‌دما

سید ضیا دقیقی

کارشناس ارشد، دانشکده مهندسی مکانیک، دانشگاه صنعتی شاهرود، شاهرود، ایران

محمود نوروزی*

دانشیار، دانشکده مهندسی مکانیک، دانشگاه صنعتی شاهرود، شاهرود، ایران

چکیده

در مقاله حاضر انتقال گرمای جابجایی اجباری سیال غیرنیوتنی قانون توانی درون لوله هم‌دما به صورت تحلیلی مورد مطالعه قرار گرفته است. جواب‌های تحلیلی برای جریان‌های درحال توسعه گرمایی و نیز کاملاً توسعه یافته قانون توانی ارائه شده است. در جریان در حال توسعه گرمایی، جواب معادله انرژی به روش جداسازی متغیرها، یک دستگاه معادله دیفرانسیل همگن به صورت اشتورم لیوویل می‌باشد. توزیع دمای جریان قانون توانی درون لوله برای نخستین بار برای دو حالت رقیق شونده $n=0.2$ و نیوتنی $n=1$ به صورت حل بسته ارائه شده است. نمودار حاصل از ترسیم عدد ناسلت محلی بر حسب طول بی‌بعد لوله برای هر دو حالت بررسی شده، بیانگر این واقعیت است که با افزایش شاخص قانون توانی، عدد ناسلت کاهش می‌یابد. برای جریان کاملاً توسعه یافته قانون توانی، با حل معادله انرژی در نهایت یک معادله دیفرانسیل معمولی همگن مرتبه دوم حاصل شده است که در آن توزیع دمای جریان به روش آنالیز مودال به دست آمده است. نتایج نشان می‌دهد که عدد ناسلت و دمای بیشینه با افزایش شاخص قانون توانی کاهش می‌یابند که به معنای کاهش انتقال گرما در لوله می‌باشد. **واژه‌های کلیدی:** سیال قانون توانی، انتقال گرمای جابجایی، لوله هم‌دما، آنالیز مودال، شاخص قانون توانی.

Closed-form Solution for Forced Convection of Power-law Fluid Flow through Isothermal Tubes

S.Z. Daghighi

Department of Mechanical Engineering, Shahrood University of Technology, Shahrood, Iran

M. Norouzi

Department of Mechanical Engineering, Shahrood University of Technology, Shahrood, Iran

Abstract

In the present paper the forced convection heat transfer of non-Newtonian Power-law fluid through an isothermal tube is studied analytically. Exact solutions for thermally developing and fully developed Power-law flows are presented. In the case of thermally developing flow, the energy equation is solved by applying the Separation Method resulting in a homogeneous system of differential equations including Sturm-Liouville equation. Temperature distribution of Power law flow through tube is presented for two states of shear thinning $n=0.2$ and Newtonian $n=1$ in closed form solutions. The diagram resulted of plotting the local Nusselt number versus the dimensionless tube length for both of two considered states, represents this fact that increasing of the Power law index the Nusselt number is decreased. For the fully developed Power law flow after solving the energy equation finally an ordinary second order differential equation is derived in which the flow temperature distribution is determined by Modal analysis. For different values of Power-law indices firstly, the Nusselt number is determined by wall thermal boundary condition and then the flow temperature distribution is presented by Frobenius method. The results show that the Nusselt number and maximum temperature are decreased by increasing the Power-law index meaning a decrease in the tube heat transfer.

Keywords: Power-law fluid, Heat convection, Isothermal tube, Modal analysis, Power-law index

وسیعی از مسایل را شامل می‌شود. نخستین بار گراتز [۲] و مجدداً ناسلت [۳] جریان لایه‌ای و توسعه یافته هیدرودینامیکی سیال نیوتنی با پروفیل سرعت سهمی شکل درون لوله به شعاع R را مطالعه کردند. آن‌ها با ثابت در نظر گرفتن دمای سیال خارج از لوله و نیز دمای دیواره در دو مقدار غیریکسان، توزیع دمای سیال نیوتنی را به دست آوردند. هم‌چنین مسأله گراتز سیال نیوتنی در حالت‌های دما ثابت و شار ثابت به ترتیب توسط سلارز و همکاران [۴] و سیگل و همکاران [۵] بررسی شد. حل لوک [۶] مسأله گراتز سیال قانون توانی تحت شرایط مرزی شار ثابت و دما ثابت درون لوله توسط شیبه و تسو [۷]، و در حالت شار ثابت توسط برد [۸] ارائه شده است. کوتا و اوزیسیک [۹] با مطالعه تحلیلی جریان لایه‌ای و درحال توسعه گرمایی سیال قانون توانی بدون در نظر گرفتن ترم اتلاف اصطکاکی درون مجراهای با مقطع مستطیلی و دایره‌ای دما ثابت، روابطی تحلیلی برای عدد ناسلت و دمای میانگین، به‌ازای مقادیر خاصی از شاخص سیال قانون توانی به دست آوردند. آن‌ها

۱- مقدمه

برخلاف سیال‌های نیوتنی که در آن‌ها لزجت کمیتی ثابت است، در سیال‌های غیرنیوتنی لزجت تابعی از نرخ برشی بوده و به همین دلیل سیال‌های غیرنیوتنی به سه گروه سیال‌های مستقل از زمان، وابسته به زمان و ویسکوالاستیک تقسیم می‌شوند. سیال قانون توانی از جمله سیال‌های رایج در صنعت و مصارف خانگی بوده که در شاخه سیال‌های غیرنیوتنی مستقل از زمان قرار می‌گیرد. با توجه به نوع رفتار لزجت، سیال قانون توانی به دو نوع شبه‌پلاستیک و دایالانت تقسیم‌بندی می‌شود. با افزایش نرخ برشی در سیال‌های شبه‌پلاستیک و دایالانت، لزجت به ترتیب کاهش و افزایش می‌یابد. هم‌چنین جریان بسیاری از مذاب‌های پلاستیکی با خصوصیت‌های سیال قانون توانی قابل توصیف می‌باشد. کاربرد سیال قانون توانی به صورت مفصل توسط رینر [۱] تشریح شده است. انتقال گرما سیال‌های درون مجراهای طیف

معادله انرژی را به روش تبدیل انتگرال محدود [۱۰] حل کرده و پاسخ را به صورت جملاتی متشکل از توابع ویژه و مقادیر ویژه ارائه کردند که در آن مقادیر ویژه به روش شمارش علامت به دست آمد. ژنگ و همکاران [۱۱] جریان کاملاً توسعه یافته سیال قانون توانی درون لوله را در حالت شار ثابت، با فرض این که پخشندگی گرمایی تابعی از گرادیان دما است، به ازای مقادیر مختلف شاخص سیال قانون توانی به صورت تحلیلی مورد مطالعه قرار دادند. آن‌ها با گزارش این که عدد ناسلت در بازه $0 < n < 0.1$ دارای کاهش چشم‌گیر، در بازه $n > 0.5$ دارای یک‌نواخت و برای $n > 2.0$ دارای مقدار ثابتی است، نشان دادند که عدد ناسلت به شدت به مقدار شاخص سیال قانون توانی، n ، بستگی دارد. فورابوچی و فدریکو [۱۲] انتقال گرمایی سیال‌های غیرنیوتنی درون لوله‌های غیرمستقیم را بررسی کردند. معادله ساختاری به‌کار رفته در مطالعه آن‌ها منطبق بر مدل قانون توانی، و نتایج آن‌ها مربوط به ناحیه ورودی می‌باشد. همچنین مسئله مشابهی توسط ریچاردسون [۱۳] برای اعداد گراتز بزرگ مورد بررسی قرار گرفت. آن‌ها پاسخ لوک تا مرتبه بزرگی دو را در بسط سری توانی توزیع دمای سیال قانون توانی به دست آوردند. راجو و راتنا [۱۴] انتقال گرمایی جریان قانون توانی درون لوله خمیده را بررسی کرده و با آنالیز مقادیر مختلف شاخص سیال قانون توانی، به این نتیجه رسیدند که سیال دایلاننت نسبت به سیال‌های نیوتنی و شبه‌پلاستیک، بهترین گزینه برای کارکرد کارآمد یک مبادله‌کن گرما است. خان و همکاران [۱۵] انتقال گرمایی عبوری از استوانه دما ثابت غوطه‌ور در سیال قانون توانی را به روش انتگرال حدی بررسی و در نتایج خود انتقال گرمایی ناشی از سیال‌های شبه‌پلاستیک را بیشتر از سیال‌های دایلاننت گزارش کردند. سوخوف و همکاران [۱۶] پدیده انتقال گرمایی جریان شبه‌پلاستیک قانون توانی را بین دو صفحه موازی دما ثابت، به صورت تحلیلی بررسی کرده و معادله‌های توزیع دما را به دست آوردند. شماری از محققین [۲۲-۱۷] با در نظر گرفتن اثر جمله اتلاف اصطکاکی در معادله انرژی، به بررسی تأثیرات آن بر انتقال گرمایی سیال قانون توانی درون مجراها پرداختند. مسئله گراتز سیال قانون توانی درون لوله با در نظر گرفتن جمله اتلاف اصطکاکی توسط گیل [۱۷] مطالعه شد. سیواتی‌سانگ و یین‌پینگ [۱۸] انتقال گرمایی مسئله گراتز سیال قانون توانی درون لوله و مجرا را با در نظر گرفتن گرمایی ناشی از اتلاف اصطکاکی، که با عدد برینکمن بیان می‌شود، به روش تشابهی مکانی بررسی کردند. آن‌ها همچنین به روش جدید تشابهی آنی-مکانی مسئله گراتز در حالت غیردائم را بررسی کردند. نتایج حل آن‌ها در قسمت دائم به خوبی با حل بسط لوک هم‌خوانی داشت. گینگریچ و همکاران [۱۹] با حل عددی معادله ساختاری جریان لایه‌ای و در حال توسعه گرمایی سیال قانون توانی به روش حجم محدود، به بررسی تأثیر ویسکوزیته سیال رقیق شونده و جمله اتلاف اصطکاکی بر انتقال گرمایی اجباری درون مجراهای با مقطع مستطیلی پرداختند. نتایج کار آن‌ها نشان داد که به دلیل حضور جمله اتلاف اصطکاکی، انتقال گرما از دیواره مجرا با افزایش رقت سیال به‌طور چشم‌گیری زیاد شده اما نرخ افزایش دمای متوسط سیال با فاصله طولی کاهش می‌یابد. چیبیا و همکاران [۲۰] انتقال گرمایی جابجایی اجباری سیال قانون توانی درون لوله تحت شار گرمایی نامتقارن محوری را با در نظر گرفتن جمله اتلاف اصطکاکی، به صورت تحلیلی مورد مطالعه قرار دادند. آن‌ها تأثیر

عدد برینکمن و خواص رئولوژی را بر توزیع عدد ناسلت محلی گزارش کردند. بارا و اکرت [۲۱] تولید گرمایی اصطکاکی را برای جریان قانون توانی درون اسلیت در هر دو حالت دما ثابت و شار ثابت، با فرض استقلال تمامی خواص از دما، به صورت تحلیلی آنالیز کرده و مقادیر ویژه و توابع ویژه را به صورت عددی و با روش تفاضل محدود به دست آوردند. آن‌ها با معرفی ضخامت کانال، به عنوان موثرترین پارامتر بر افزایش انتقال گرما، کانال‌های نازک را به عنوان بهترین طرح جهت می‌نیم‌سازی اثر برش لزج پیشنهاد دادند. والکو [۲۲] با آنالیز مسئله گراتز-برینکمن جریان سیال قانون توانی، اثرات جمله اتلاف اصطکاکی را به صورت عددی بررسی کرد. او با استفاده از روش تبدیل لاپلاس گالرکین، مطالعه خود را در رژیم سرمایش طبیعی، جایی که اتلاف اصطکاکی انرژی با ثابت نگه‌داشتن دمای دیواره در یک مقدار دلخواه، نامتعادل است بسط داد. همچنین مطالعات آزمایشگاهی مسئله گراتز سیال قانون توانی در حالت شار ثابت توسط باست و ولتی [۲۳] و نیز ماهالینگام و همکاران [۲۴] انجام شده است. ویشال [۲۵] مسئله انتقال گرما و تولید آنتروپی جریان سیال قانون توانی درون میکروکانال تحت شار گرمایی ثابت را بررسی کرد. لغزش روی دیواره به سه روش مختلف قانون لغزش مدل‌سازی شد که عبارتند از: قانون لغزش غیرخطی ناویر، قانون لغزش هاتزیکریاکس و قانون لغزش حدی. تمامی معادلات حاکم به صورت تحلیلی حل شده‌اند و اثر ضرایب مختلف اصطکاکی قوانین لغزش بر توزیع سرعت و دمای جریان، عدد ناسلت، نرخ تولید آنتروپی و نیز عدد بیژن نشان داده شده است. او در کار خود مشاهده کرد که برای ضرایب لغزش یکسان، قانون لغزش هاتزیکریاکس عدد ناسلت بزرگ‌تر ولی نرخ تولید آنتروپی کمتری را نسبت به قانون لغزش حدی پیش‌بینی می‌کند و این اختلاف با افزایش مقدار ضرایب لغزش بیشتر می‌شود. باپتیستا و همکاران [۲۶] پاسخ‌های تقریبی و نیز تحلیلی برای توزیع دما و عدد ناسلت جریان آرام و کاملاً توسعه یافته قانون توانی درون لوله‌ها و صفحات موازی، با دمای دیواره ثابت، ارائه کردند و مشاهده کردند که عدد ناسلت رابطه معکوس با شاخص مقدار قانون توانی دارد. موخرچی و همکاران [۲۷] جریان لایه‌ای انتقال گرمایی جابجایی اجباری سیال قانون توانی را درون داکت‌های با سطح مقطع متغیر به صورت عددی بررسی کردند. آنها از مقادیر شاخص قانون توانی در بازه $2 \leq n \leq 0.2$ بهره بردند و شرایط مرزی دیواره را برای هر دو حالت دما ثابت و شار ثابت آنالیز کردند. با ارائه مقادیر عدد ناسلت میانگین برحسب شاخص قانون توانی، آنها در نتایج خود گزارش کردند که ضریب اصطکاک فنینگ و عدد ناسلت به ترتیب تأثیر مثبت و منفی از شاخص قانون توانی می‌پذیرند. موخرچی و همکاران [۲۸] اثر اتلاف اصطکاکی بر انتقال گرمایی جابجایی اجباری سیالات قانون توانی را درون مجراهای با سطح مقطع متغیر در معرض دیواره تحت شار گرمایی ثابت و نیز دمای ثابت به صورت عددی مورد مطالعه قرار دادند. آنها در مطالعه خود محدوده مقدار شاخص قانون توانی را در بازه $1/2 \leq n \leq 0.8$ ، عدد برینکمن را در بازه $0.1 \leq Br \leq 0.01$ و نیز عدد پکلت را برابر ۱۰ در نظر گرفتند. برای هر دو شرط مرزی بررسی شده، نتایج آنها حاکی از بهبود نرخ انتقال گرما با کاهش مقدار شاخص قانون توانی است که علت آن نیز کاهش لایه مرزی گرمایی بیان شده است.

در مطالعه حاضر جریان سیال غیرنیوتنی قانون توانی درون لوله دما

که در آن \bar{u} سرعت و α پخشندگی گرمایی جریان می‌باشد. پارامتر \bar{x} نیز نشان‌دهنده مختصات طولی لوله می‌باشد. همان‌طور که اشاره شد در تحقیق حاضر توزیع دمای بی‌بعد جریان‌های در حال توسعه گرمایی و همچنین کاملاً توسعه یافته گرمایی قانون توانی درون لوله ارائه خواهد شد. به این منظور از شرایط مرزی معادلات (۷) تا (۹) برای جریان در حال توسعه گرمایی و از شرایط مرزی معادلات (۷) و (۸) نیز برای جریان کاملاً توسعه یافته استفاده شده است که در آن \bar{T}_{in} و \bar{T}_w پارامترهایی ثابت و به ترتیب بیان‌گر دمای مربوط به دیواره و ورودی جریان به لوله می‌باشند.

۲-۲- بی‌بعدسازی معادله‌ها

در ادامه پارامترهای لازم جهت بی‌بعدسازی معادله‌های انتقال گرما و سرعت را تعریف می‌کنیم. لازم به ذکر است که پارامترهای بی‌بعدسازی مربوط به طول و دما برای دو نوع جریان مورد بررسی، متفاوت است.

$$u = \frac{\bar{u}}{U}, r = \frac{\bar{r}}{R}, Nu = \frac{h D_H}{k} \quad (10)$$

$$x = \frac{\bar{x}/D}{Re Pr}, \theta = \frac{\bar{T} - \bar{T}_w}{\bar{T}_{in} - \bar{T}_w} \quad (11)$$

$$x = \frac{\bar{x}}{R}, T = \frac{\bar{T} - \bar{T}_w}{\bar{T}_b - \bar{T}_w} \quad (12)$$

که u, T, x به ترتیب سرعت، شعاع و طول بی‌بعد لوله می‌باشند. همچنین Re, Pr, Nu به ترتیب معرف اعداد بی‌بعد رینولدز، ناسلت و پراتل، D قطر و D_H نیز قطر هیدرولیکی لوله است. θ و T به ترتیب دماهای بی‌بعد برای جریان در حال توسعه گرمایی و کاملاً توسعه یافته هستند و پارامتر \bar{T}_b دمای متوسط جریان است. معادلات (۱۱) و (۱۲) به ترتیب برای بی‌بعدسازی روابط مربوط به جریان‌های در حال توسعه گرمایی و کاملاً توسعه یافته به کار رفته‌اند. همان‌طور که می‌دانیم در شرایطی که جریان کاملاً توسعه یافته گرمایی است، گرادیان طولی دمای بی‌بعد برابر صفر است [۳۱] و داریم:

$$\frac{dT}{dx} = 0 \quad (13)$$

با بسط معادله فوق به کمک تعریف دمای بی‌بعد مربوط به جریان کاملاً توسعه یافته گرمایی که در معادله (۱۲) آمده است و با انجام عملیات ساده ریاضی در نهایت به معادله (۱۴) می‌رسیم.

$$\frac{d\bar{T}}{d\bar{x}} = T \frac{d\bar{T}_b}{d\bar{x}} \quad (14)$$

عبارت $\frac{d\bar{T}_b}{d\bar{x}}$ که معرف گرادیان طولی دمای میانگین است، هم‌چنین می‌تواند از طریق موازنه انرژی روی یک حجم کنترل دیفرانسیلی به صورت زیر به دست آید:

$$\dot{m} c_p d\bar{T}_b = h d\bar{A} (\bar{T}_w - \bar{T}_b) \quad (15)$$

$$\frac{d\bar{T}_b}{d\bar{x}} = \frac{2h(\bar{T}_w - \bar{T}_b)}{\rho R U c_p} \quad (16)$$

ثابت به صورت تحلیلی مورد بررسی قرار گرفته است. توزیع دمای بی‌بعد جریان قانون توانی برای جریان‌های در حال توسعه گرمایی و نیز کاملاً توسعه یافته ارائه شده است. لازم به ذکر است که برای جریان در حال توسعه گرمایی، توزیع دما در دو حالت رقیق شونده و نیوتنی که مقدار شاخص قانون توانی در آن‌ها به ترتیب برابر $1/2$ و 1 می‌باشد، به صورت حل بسته ارائه شده است. توزیع دمای جریان کاملاً توسعه یافته نیز به‌ازای نه مقدار مختلف شاخص قانون توانی و به صورت حل سری حاصل شده است.

۲- فیزیک مسأله

۲-۱- معادله‌های حاکم

در مطالعه حاضر فرض بر این است که جریان سیال قانون توانی، یک جریان توسعه یافته هیدرودینامیکی، لایه‌ای، تراکم‌ناپذیر، دو بعدی و متقارن است. هم‌چنین با صرف‌نظر از جملات انتقال گرمای رسانشی در راستای طولی، $Pe_x \gg 1$ ، اتلاف اصطکاکی، خواص سیال را مستقل از دما و ثابت در نظر گرفته‌ایم. در ادامه معادله‌های حاکم که شامل معادله‌های پیوستگی، مومنتوم و انرژی می‌باشند به ترتیب در معادله‌های (۱) تا (۳) آمده‌اند [۲۹]:

$$\nabla \cdot \bar{V} = 0 \quad (1)$$

$$\rho \bar{V} \cdot \nabla \bar{V} = -\nabla \bar{p} + \bar{\nabla} \cdot \bar{\tau} \quad (2)$$

$$\rho c_p \bar{V} \cdot \nabla \bar{T} = k \nabla^2 \bar{T} \quad (3)$$

در معادله‌های فوق، \bar{V} بردار سرعت، \bar{p} فشار، \bar{T} دما، $\bar{\tau}$ تانسور تنش، ρ چگالی، c_p گرمای ویژه و k رسانایی گرمایی می‌باشند. هم‌چنین به دلیل این‌که جریان مورد بررسی در این تحقیق به لحاظ هیدرودینامیکی توسعه یافته می‌باشد، بنابراین پروفیل سرعت آن توسعه یافته بوده و با معادله (۴) بیان می‌شود [۳۰].

$$\frac{\bar{u}}{U} = k_1 \left(1 - \left(\frac{\bar{r}}{R} \right)^{k_2} \right) \quad (4)$$

$$k_1 = \frac{3n+1}{n+1}, k_2 = \frac{n+1}{n} \quad (5)$$

که در آن U سرعت میانگین و \bar{r} شعاع لوله می‌باشد. جهت سهولت در ادامه حل مسأله، ثابت‌های k_1 و k_2 به صورت معادله (۵) تعریف شده‌اند. در معادله (۵) پارامتر n شاخص سیال قانون توانی می‌باشد. معادله انرژی را نیز در مختصات استوانه‌ای به صورت معادله (۶) بازنویسی می‌کنیم.

$$\bar{u} \frac{\partial \bar{T}}{\partial \bar{x}} = \frac{\alpha}{\bar{r}} \frac{\partial}{\partial \bar{r}} \left(\bar{r} \frac{\partial \bar{T}}{\partial \bar{r}} \right) \quad (6)$$

$$at \quad \bar{r} = R, \quad \bar{T} = \bar{T}_w \quad (7)$$

$$at \quad \bar{r} = 0, \quad \frac{\partial \bar{T}}{\partial \bar{r}} = 0 \quad (8)$$

$$at \quad \bar{x} = 0, \quad \bar{T} = \bar{T}_{in} \quad (9)$$

پاسخ معادله (۲۴) به صورت تابع نمایی بوده که در زیر آمده است.

$$X(x) = a \exp\left(-\frac{4}{k_1} \lambda^2 x\right) \quad (28)$$

که در آن پارامتر a ثابت دل خواه است. اما معادله (۲۵) یک معادله اشتورم لیوویل است که به صورت یک مسأله مقدار ویژه ظاهر شده و پارامتر λ در آن معرف مقدار ویژه است. شرایط مرزی معادلات (۲۶) و (۲۷) با اعمال معادلات (۲۰) و (۲۱) بر معادله (۲۳) حاصل شده اند. در ادامه به ازای دو مقدار خاص شاخص قانون توانی و با ارائه جواب های بسته برای معادله (۱۸) ارائه شده است. ذکر این نکته مهم است که برای مقادیر دیگر شاخص قانون توانی حل بسته موجود نمی باشد.

حالت رقیق شونده، $n = 0/2$

با حل معادله (۲۵) به یک پاسخ بسته که در معادله (۲۹) نشان داده شده است می رسیم. C_1 و C_2 ضرایبی ثابت هستند. با توجه به مشتق تابع $P(r)$ (معادله (۳۰))، و با اعمال شرط مرزی معادله (۲۷) بر آن، نتیجه می شود که ضریب ثابت C_2 باید برابر صفر باشد.

$$P(r) = C_1 \exp\left(-\frac{1}{4} \lambda r^4\right)$$

$$HeunB\left(0, 0, 0, \frac{1}{2} \lambda^{\frac{3}{2}} \sqrt{2}, -\frac{1}{2} \sqrt{2} \lambda r^2\right) + C_2 \left(\begin{array}{c} \exp\left(-\frac{1}{4} \lambda r^4\right) \\ HeunB\left(0, 0, 0, \frac{1}{2} \lambda^{\frac{3}{2}} \sqrt{2}, -\frac{1}{2} \sqrt{2} \lambda r^2\right) \\ \exp\left(\frac{1}{2} \lambda r^4\right) \\ \int \frac{\exp\left(\frac{1}{2} \lambda r^4\right)}{r HeunB\left(0, 0, 0, \frac{1}{2} \lambda^{\frac{3}{2}} \sqrt{2}, -\frac{1}{2} \sqrt{2} \lambda r^2\right)} dr \end{array} \right)$$

$$\frac{dP(r)}{dr} = -C_1 \left(\begin{array}{c} \lambda r^3 \exp\left(-\frac{1}{4} \lambda r^4\right) \\ HeunB\left(0, 0, 0, \frac{1}{2} \lambda^{\frac{3}{2}} \sqrt{2}, -\frac{1}{2} \sqrt{2} \lambda r^2\right) + \\ \sqrt{2} \lambda \exp\left(-\frac{1}{4} \lambda r^4\right) r \\ HeunBPrime\left(0, 0, 0, \frac{1}{2} \lambda^{\frac{3}{2}} \sqrt{2}, -\frac{1}{2} \sqrt{2} \lambda r^2\right) \end{array} \right) - C_2 \left(\begin{array}{c} \left(\int \frac{\exp\left(\frac{1}{2} \lambda r^4\right)}{r HeunB\left(0, 0, 0, \frac{1}{2} \lambda^{\frac{3}{2}} \sqrt{2}, -\frac{1}{2} \sqrt{2} \lambda r^2\right)} dr \right)^2 \\ \lambda r^3 \exp\left(-\frac{1}{4} \lambda r^4\right) \\ HeunB\left(0, 0, 0, \frac{1}{2} \lambda^{\frac{3}{2}} \sqrt{2}, -\frac{1}{2} \sqrt{2} \lambda r^2\right) + \\ \sqrt{2} \lambda \exp\left(-\frac{1}{4} \lambda r^4\right) r \\ HeunBPrime\left(0, 0, 0, \frac{1}{2} \lambda^{\frac{3}{2}} \sqrt{2}, -\frac{1}{2} \sqrt{2} \lambda r^2\right) \\ \frac{\exp\left(\frac{1}{4} \lambda r^4\right)}{r HeunB\left(0, 0, 0, \frac{1}{2} \lambda^{\frac{3}{2}} \sqrt{2}, -\frac{1}{2} \sqrt{2} \lambda r^2\right)} \end{array} \right) \quad (30)$$

معادله (۳۱) با اعمال شرط مرزی معادله (۲۶) بر معادله (۲۹) به دست آمده است.

که در آن \dot{m} دبی جرمی جریان و $d\dot{A}$ سطح جانبی حجم کنترل دیفرانسیلی مورد نظر می باشد. بنابراین با جایگذاری معادله (۱۴) در معادله (۱۳) داریم:

$$\frac{dT}{d\tilde{x}} = T \frac{2h(\tilde{T}_w - \tilde{T}_b)}{\rho R U C_p} \quad (17)$$

در نهایت با اعمال پارامترهای بی بعدسازی معرفی شده در معادلات (۱۰) تا (۱۲) بر معادله انتقال گرما، معادله (۶)، به معادلات (۱۸) و (۱۹) که به ترتیب معرف معادلات انتقال گرمای جریان در حال توسعه گرمایی و کاملاً توسعه یافته قانون توانی درون لوله می باشند، می رسیم.

$$\frac{1}{4} k_1 \frac{\partial \theta}{\partial x} = \frac{1}{(1-r^{k_2})} \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial \theta}{\partial r} \right) \quad (18)$$

$$\frac{d^2 T}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{dT}{dr} + Nu k_1 (1-r^{k_2}) T = 0 \quad (19)$$

شکل بی بعد شرایط مرزی معادلات (۷) تا (۹) نیز در زیر آمده است.

$$at \quad r = 1, \quad \theta = 0 \quad or \quad T = 0 \quad (20)$$

$$at \quad r = 0, \quad \frac{\partial \theta}{\partial r} = 0 \quad or \quad \frac{dT}{dr} = 0 \quad (21)$$

$$at \quad x = 0, \quad \theta = 1 \quad (22)$$

همان طور که می دانیم در جریان در حال توسعه گرمایی، توزیع دمای سیال وابسته به دو متغیر طول و شعاع لوله خواهد بود. از شرایط مرزی معادلات (۲۰) تا (۲۲) برای جریان در حال توسعه گرمایی استفاده شده است. اما برای جریان کاملاً توسعه یافته تنها از شرایط مرزی (۲۰) و (۲۱) استفاده خواهد شد چون دما، T ، تنها تابعی از شعاع لوله خواهد بود.

۳- روش حل

۳-۱- جریان در حال توسعه گرمایی

در این قسمت به حل تحلیلی معادلات (۱۸) و (۱۹) می پردازیم. شرایط مرزی نیز به تناسب جریان مورد بررسی، در معادلات (۲۰) تا (۲۲) ارائه شده اند.

اکنون می توانیم معادله (۱۸) را به روش جداسازی متغیرها حل نماییم. به این منظور ابتدا تابع پاسخ را به صورت معادله (۲۳) در نظر گرفته که با جایگذاری آن در معادله (۱۸) به معادله های تفکیک شده (۲۴) و (۲۵) می رسیم.

$$\theta(x, r) = P(r)X(x) \quad (23)$$

$$X'(x) + \frac{4}{k_1} \lambda^2 X(x) = 0 \quad (24)$$

$$P''(r) + \frac{1}{r} P'(r) + (1-r^{k_2}) \lambda^2 P(r) = 0 \quad (25)$$

$$P(1) = 0 \quad (26)$$

$$P'(0) = 0 \quad (27)$$

$$1 = \sum_{m=1}^{\infty} A_m \exp\left(-\frac{1}{4}\lambda_m r^4\right) \quad (33)$$

$$HeunB\left(0, 0, 0, \frac{1}{2}\lambda_m^{3/2}\sqrt{2}, -\frac{1}{2}\sqrt{2\lambda_m} r^2\right)$$

توجه شود که به دلیل خطی بودن عملگر دیفرانسیلی و طبق اصل برهم‌نهی که بیان‌گر این واقعیت است که مجموع پاسخ‌های یک معادله همگن، خود نیز پاسخی قابل قبول برای آن معادله می‌باشد، می‌توانیم پاسخ کلی معادله دیفرانسیل جزئی همگن فوق را به صورت سری نامحدود نشان داده شده در معادله (۳۳) بنویسیم.

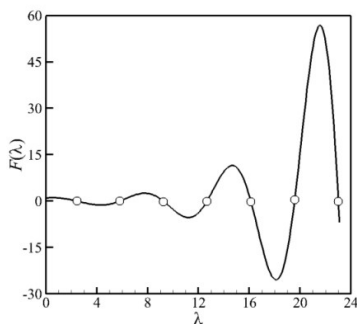
با اعمال شرط مرزی معادله (۲۲) بر معادله (۳۳)، معادله (۳۳) حاصل می‌شود که در آن مقادیر ثابت A_m متناظر با مقادیر ویژه λ_m به کمک معادله (۳۴) محاسبه شده‌اند. به این ترتیب توزیع دمای بی‌بعد به دست خواهد آمد.

$$A_m = \frac{\int_0^1 \left(\exp\left(-\frac{1}{4}\lambda_m r^4\right) HeunB\left(0, 0, 0, \frac{1}{2}\lambda_m^{3/2}\sqrt{2}, -\frac{1}{2}\sqrt{2\lambda_m} r^2\right)\right) r(1-r^{k_2}) dr}{\int_0^1 \left(\exp\left(-\frac{1}{4}\lambda_m r^4\right) HeunB\left(0, 0, 0, \frac{1}{2}\lambda_m^{3/2}\sqrt{2}, -\frac{1}{2}\sqrt{2\lambda_m} r^2\right)\right)^2 r(1-r^{k_2}) dr} \quad (34)$$

$$KummerM\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{4}\lambda_m, 1, \lambda_m r^2\right)$$

(۳۸)

جهت یافتن ثابت‌های A_m متناظر با مقادیر ویژه به دست آمده، ابتدا شرط مرزی معادله (۲۲) را بر معادله (۳۷) تاثیر داده که نتیجه آن به صورت معادله (۳۸) ظاهر شده است. در نهایت مشابه حالت قبل به کمک معادله (۳۹) این ثابت‌ها را محاسبه می‌کنیم. تعدادی از مقادیر ویژه و ثابت‌های متناظر با آن در جدول ۱ گزارش شده‌اند. مشاهده می‌شود که برای حالت نیوتنی، $n=1$ مقادیر ویژه و ثابت‌های متناظر به دست آمده در جدول ۱، تطابق بسیار خوبی با نتایج ذکر شده در کتاب شاه و لندن [۳۲] دارد. در ادامه می‌خواهیم رابطه‌ای تحلیلی برای عدد ناسلت برحسب فاصله طولی به دست آوریم.



شکل ۱- یافتن مقادیر ویژه برای $n=0/2$

$$A_m = \frac{\int_0^1 \left(\exp\left(-\frac{1}{2}\lambda_m r^2\right) KummerM\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{4}\lambda_m, 1, \lambda_m r^2\right)\right) r(1-r^{k_2}) dr}{\int_0^1 \left(\exp\left(-\frac{1}{2}\lambda_m r^2\right) KummerM\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{4}\lambda_m, 1, \lambda_m r^2\right)\right)^2 r(1-r^{k_2}) dr} \quad (39)$$

$$0 = HeunB\left(0, 0, 0, \frac{1}{2}\lambda^{3/2}\sqrt{2}, -\frac{1}{2}\sqrt{2\lambda}\right) \quad (31)$$

همان‌طور که می‌دانیم مقادیر ویژه بی‌شماری وجود دارند که در معادله (۳۱) صادق باشند. اگر عبارت طرف راست معادله (۳۱) را برابر با $F(\lambda)$ در نظر بگیریم، با ترسیم آن بر حسب پارامتر λ ، شکل ۱ حاصل خواهد شد. مقادیر ویژه λ در واقع همان نقاط تلاقی نمودار با محور افق می‌باشند که با دایره‌های توخالی نشان داده شده‌اند. تعدادی از مقادیر ویژه در جدول ۱ گزارش شده است. در نتیجه با جایگذاری معادله‌های (۲۸) و (۲۹) در معادله (۲۳)، توزیع دمای بی‌بعد جریان در حال توسعه گرمایی قانون توانی درون لوله دما ثابت به دست می‌آید.

$$\theta(x, r) = \sum_{m=1}^{\infty} A_m \exp\left(-\frac{4}{k_1}\lambda_m^2 x\right) \exp\left(-\frac{1}{4}\lambda_m r^4\right) \quad (32)$$

$$HeunB\left(0, 0, 0, \frac{1}{2}\lambda_m^{3/2}\sqrt{2}, -\frac{1}{2}\sqrt{2\lambda_m} r^2\right)$$

حالت نیوتنی، $n = 1$

پاسخ معادله (۲۵) در معادله (۳۵) آمده است (حل بسته).

$$P(r) = C_1 \exp\left(-\frac{1}{2}\lambda r^2\right) \quad (35)$$

$$KummerM\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{4}\lambda, 1, \lambda r^2\right) +$$

$$C_2 \exp\left(-\frac{1}{2}\lambda r^2\right)$$

$$KummerU\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{4}\lambda, 1, \lambda r^2\right)$$

$$0 = KummerM\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{4}\lambda, 1, \lambda\right) \quad (36)$$

از آن‌جا که تابع $KummerU$ در $r=0$ دارای نقطه تکین می‌باشد، بنابراین با اعمال شرط مرزی معادله (۲۷) بر معادله (۳۵)، ضریب ثابت C_2 حذف خواهد شد. معادله (۳۶) با تاثیر شرط مرزی معادله (۲۶) بر معادله (۳۵) به دست آمده است. در نهایت با ترسیم معادله حاصل شده، مانند حالت قبل مقادیر ویژه را می‌یابیم (شکل ۲). $G(\lambda)$ عبارت طرف راست معادله (۳۶) است. معادله زیر با جایگذاری معادله‌های (۲۸) و (۲۵) در معادله (۲۳) به دست آمده است.

$$\theta(x, r) = \sum_{m=1}^{\infty} A_m \exp\left(-\frac{4}{k_1}\lambda_m^2 x\right) \exp\left(-\frac{1}{2}\lambda_m r^2\right) \quad (37)$$

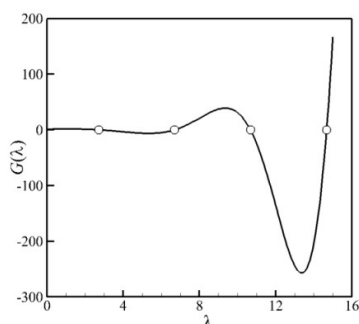
$$KummerM\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{4}\lambda_m, 1, \lambda_m r^2\right)$$

$$1 = \sum_{m=1}^{\infty} A_m \exp\left(-\frac{1}{2}\lambda_m r^2\right)$$

دمای متوسط بی‌بعد از معادله (۴۸) محاسبه می‌شود. با انتگرال‌گیری از معادله (۲۵) در بازه صفر تا یک، در نهایت به معادله (۴۹) می‌رسیم. بنابراین دمای متوسط بی‌بعد ارائه شده در معادله (۴۸) به معادله (۵۰) تبدیل می‌شود. معادله (۵۱) با جایگذاری معادله‌های (۴۶) و (۵۰) در معادله (۴۲)، به‌دست آمده است که عدد ناسلت محلی را بر حسب فاصله طولی x بیان می‌کند.

۳-۲- جریان کاملاً توسعه یافته

مسئله مقدار مرزی معرفی شده در معادله (۱۹) یک معادله دیفرانسیل مقدار ویژه است. چون هم معادله دیفرانسیل و هم شرایط مرزی آن، که در معادلات (۲۰) و (۲۱) نشان داده شده‌اند، همگن می‌باشند. برخلاف دیگر مسائل انتقال گرمای جابجایی، مسئله انتقال گرمای جریان کاملاً توسعه یافته هم‌دمای یک معادله دیفرانسیل مقدار ویژه بوده که ابتدا باید عدد ناسلت را طوری تعیین کرد که هم در معادله حاکم و هم در شرایط مرزی صادق باشد، و در نهایت توزیع دما را یافت. در مسائل دیگر روش حل معکوس می‌باشد. به طوری که در آن‌ها ابتدا توزیع دمای جریان تعیین شده، سپس عدد ناسلت به‌دست می‌آید.



شکل ۲- یافتن مقادیر ویژه برای $n=1$

در مطالعه حاضر عدد ناسلت به کمک روش آنالیز مودال معادله (۱۹) تحت شرایط مرزی معادلات (۲۰) و (۲۱) به‌دست آمده است. به علت همگن بودن معادله حاکم و هم چنین شرایط مرزی آن، نمی‌توان توزیع دمای جریان را به‌طور کامل به‌دست آورد و به یک شرط یا محدودیت غیرهمگن دیگر نیاز است تا پاسخ به‌طور کامل به‌دست آید. محدودیت غیرهمگن مورد نظر با انتگرال‌گیری از حاصل ضرب توزیع سرعت بی‌بعد و دمای بی‌بعد جریان در مقطع عرضی لوله حاصل می‌شود که در معادله (۵۲) نشان داده شده است.

$$\int_0^1 u(r) T(r) r dr = \frac{1}{2} \quad (52)$$

به کمک محدودیت فوق قادر خواهیم بود تا توزیع دمای جریان را به‌طور کامل به‌دست آوریم. در ادامه به کمک روش فروبنیوس توزیع دمای بی‌بعد جریان کاملاً توسعه یافته را به‌دست خواهیم آورد.

چون $r = 0$ یک نقطه تکین منظم برای معادله دیفرانسیل (۱۹) است، بنابراین توزیع دمای بی‌بعد جریان به‌صورت معادله (۵۳) بیان خواهد شد.

$$T(r) = Ay_1(r) + By_2(r) \quad (53)$$

می‌توان اثبات نمود که ضریب انتقال گرمای جابجایی محلی به‌کمک معادله (۴۰) به‌دست می‌آید [۲۹].

$$h(\bar{x}) = -\frac{k}{R\theta_b} \frac{\partial \theta(x, r)}{\partial r} \Big|_{r=1} \quad (40)$$

$$\theta_b = \frac{\bar{T}_b - \bar{T}_w}{\bar{T}_{in} - \bar{T}_w} \quad (41)$$

$$Nu(x) = -\frac{2}{\theta_b} \frac{\partial \theta(x, r)}{\partial r} \Big|_{r=1} \quad (42)$$

دمای متوسط بی‌بعد، θ_b ، نیز به‌کمک معادله (۴۱) تعریف می‌شود که در آن \bar{T}_b به‌عنوان دمای متوسط تعریف شده است. هم‌چنین قطر هیدرولیکی لوله نیز برابر $2R$ تعریف می‌شود. در نتیجه به‌کمک معادله (۱۰)، عدد ناسلت بر حسب دمای بی‌بعد به‌دست می‌آید (معادله (۴۲)).

اکنون دمای بی‌بعد را به‌صورت معادله (۴۳) بازنویسی می‌کنیم که در آن $P_m(r)$ با توجه به حالت‌های $n=0/2$ و $n=1$ به ترتیب با معادله‌های (۴۴) و (۴۵) تعریف شده است.

$$\theta(x, r) = \sum_{m=1}^{\infty} A_m \exp\left(-\frac{4}{k_1} \lambda_m^2 x\right) P_m(r) \quad (43)$$

$$P_m(r) = \exp\left(-\frac{1}{4} \lambda_m r^4\right) HeunB\left(0, 0, 0, \frac{1}{2} \lambda_m^{3/2} \sqrt{2}, -\frac{1}{2} \sqrt{2} \lambda_m r^2\right) \quad (44)$$

$$P_m(r) = \exp\left(-\frac{1}{2} \lambda_m r^2\right) KummerM\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{4} \lambda_m, 1, \lambda_m r^2\right) \quad (45)$$

$$\frac{\partial \theta(x, r)}{\partial r} \Big|_{r=1} = \sum_{m=1}^{\infty} A_m \exp\left(-\frac{4}{k_1} \lambda_m^2 x\right) \frac{dP_m(r)}{dr} \Big|_{r=1} \quad (46)$$

با مشتق‌گیری از دمای بی‌بعد و با در نظر گرفتن $r=1$ معادله (۴۶) حاصل می‌شود.

$$\bar{T}_b = \frac{\int \tilde{u} \tilde{T} d\bar{A}}{U\bar{A}} \quad (47)$$

$$\theta_b = 2k_1 \sum_{m=1}^{\infty} A_m \exp\left(-\frac{4}{k_1} \lambda_m^2 x\right) \int_0^1 r(1-r^{k_2}) P_m(r) dr \quad (48)$$

$$\int_0^1 r(1-r^{k_2}) P_m(r) dr = \frac{-1}{\lambda_m^2} \frac{dP_m(r)}{dr} \Big|_{r=1} \quad (49)$$

$$\theta_b = 2k_1 \sum_{m=1}^{\infty} A_m \exp\left(-\frac{4}{k_1} \lambda_m^2 x\right) \frac{-1}{\lambda_m^2} \frac{dP_m(r)}{dr} \Big|_{r=1} \quad (50)$$

$$Nu(x) = \frac{1}{k_1} \frac{\sum_{m=1}^{\infty} A_m \exp\left(-\frac{4}{k_1} \lambda_m^2 x\right) \frac{dP_m(r)}{dr} \Big|_{r=1}}{\sum_{m=1}^{\infty} \frac{A_m}{\lambda_m^2} \exp\left(-\frac{4}{k_1} \lambda_m^2 x\right) \frac{dP_m(r)}{dr} \Big|_{r=1}} \quad (51)$$

با تعریف دمای متوسط به‌صورت معادله (۴۷)، ثابت می‌شود که

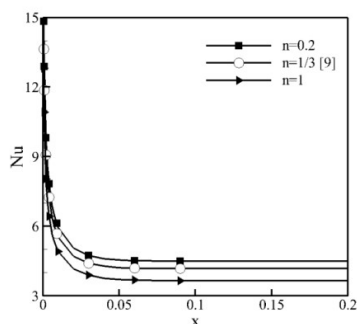
مقادیر مختلف شاخص قانون توانی به دست آمده است. به ازای $n=0.1$ ، $n=0.2$ ، $n=0.4$ ، $n=0.5$ ، $n=0.7$ ، $n=0.8$ ، $n=0.9$ ، $n=1$ توزیع دما را به صورت معادله (۵۶) خواهیم داشت. توزیع دما به ازای $n=0.5$ و $n=1$ متفاوت بوده و جهت اختصار از آوردن آنها در این مقاله پرهیز شده است. نکته حائز اهمیت این است که توزیع دما در تمام سطح مقطع محدود است. بنابراین طبق شرط مرزی معادله (۲۱) جمله C_2 در معادله (۵۶) باید برابر صفر باشد، تا پاسخ به دست آمده در $r=0$ نقطه تکین نداشته باشد.

$$T(r) = C_1 \left(1 - \frac{k_1 Nu}{4} r^2 \left(1 - \frac{k_1 Nu}{16} r^2 + \frac{k_1^2 Nu^2}{576} r^4 \right) + O(r^7) \right) + C_2 \left(\ln(r) \left(1 - \frac{k_1 Nu}{4} r^2 \left(1 - \frac{k_1 Nu}{16} r^2 + \frac{k_1^2 Nu^2}{576} r^4 \right) + O(r^7) \right) + \frac{k_1 Nu}{4} r^2 \left(1 - \frac{3k_1 Nu}{32} r^2 + \frac{11k_1^2 Nu^2}{3456} r^4 \right) + O(r^7) \right) \quad (56)$$

$$-\frac{k_1^7}{416179814400} Nu^7 + \frac{k_1^6}{2123366400} Nu^6 - \frac{k_1^5}{14745600} Nu^5 + \frac{k_1^4}{147456} Nu^4 - \frac{k_1^3}{2304} Nu^3 + \frac{k_1^2}{64} Nu^2 - \frac{k_1}{4} Nu + 1 = 0 \quad (57)$$

مقادیر شاخص قانون توانی $n=0.2$ و $n=1/3$ در فاصله طولی $x=0.001$ به ترتیب برابر $Nu=25/4715$ و $Nu=25/321$ است که با افزایش فاصله طولی بی بعد، کاهش یافته و مشاهده می شود که در $x=0.2$ ، به ترتیب برابر $Nu=4/4996$ و $Nu=4/1753$ است. در حالت $n=1$ همان طور که در جدول ۲ نشان داده شده است، نتایج کار حاضر با دقت بالایی با نتایج مرجع [۹] اعتبارسنجی شده است. در $x=0.2$ مقادیر عدد ناسلت به ازای $n=1$ برابر $Nu=3/6569$ و $Nu=3/568$ است. می توان گفت که در فاصله طولی بی بعد $x=0.2$ جریان تقریباً کاملاً توسعه یافته شده است. در حالت حدی و در فواصل طولی زیاد، تنها جمله اول از سری های معادله (۵۱) به لحاظ مرتبه بزرگی منظور خواهند شد. در نتیجه خواهیم داشت:

$$x \rightarrow \infty, Nu(\infty) \rightarrow \frac{\lambda_1^2}{k_1} = \frac{n+1}{3n+1} \lambda_1^2 \quad (58)$$



شکل ۳- نمودار عدد ناسلت بر حسب فاصله طولی بی بعد برای مقادیر مختلف شاخص قانون توانی

$$y_1(r) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n r^n \quad (54)$$

$$y_2(r) = y_1(r) \ln(r) + \sum_{n=0}^{\infty} b_n r^n \quad (55)$$

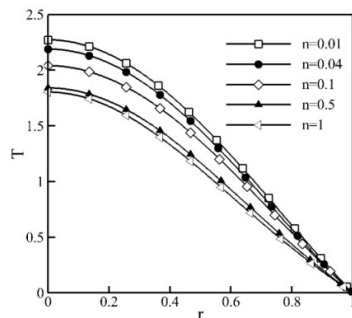
که در آن A و B ضرایب ثابت معادله می باشند. توابع y_1 و y_2 نیز به صورت معادله های (۵۴) و (۵۵) تعریف می شوند. در نهایت با جایگذاری معادله های (۵۴) و (۵۵) در معادله دیفرانسیل (۱۹) و پس از دسته بندی کردن جمله های یکسان و برابر صفر قرار دادن ضرایب توان های مختلف r مجهول های a_n و b_n به دست می آیند. در ادامه توزیع دمای بی بعد جریان کاملاً توسعه یافته قانون توانی به ازای

عدد Nu نیز به کمک شرط مرزی گرمایی روی دیواره (معادله (۲۰)) به دست می آید. به این صورت که با اعمال شرط مرزی ارائه شده در معادله (۲۰) بر توزیع دمای داده شده در معادله (۵۶)، عبارتی چندجمله ای بر حسب Nu به دست می آید. معادله (۵۷) به ازای $n=0.1$ به دست آمده است. طبق قانون مقیاس در انتقال گرمای جابجایی، عدد Nu در جریان داخلی و لایه ای از مرتبه اول است. بنابراین ریشه های مثبت مرتبه اول معادله (۵۷)، به عنوان عدد Nu فیزیکی جریان قانون توانی شناخته می شوند. برای افزایش دقت در اعداد ناسلت به دست آمده، مرتبه بزرگی توزیع دمای جریان برای $n=0.1$ برابر سی در نظر گرفته شده است. با حل معادله (۵۷)، مقدار $Nu=5/6709$ حاصل می شود. همچنین با توجه به معادله (۵۶)، می توان دریافت که تساوی $C_1 = T_{max}$ برقرار است. عدد ثابت C_1 نیز به کمک معادله (۵۲) محاسبه خواهد شد. مقادیر عدد ناسلت و نیز دمای بیشینه به ازای مقادیر دیگر شاخص قانون توانی، همانند حالت $n=0.1$ محاسبه می شود که در جدول ۳ گزارش شده اند.

۴- بحث و بررسی نتایج

توزیع عدد ناسلت محلی و دمای متوسط بی بعد به کمک معادلات (۵۱) و (۵۰) برای هر دو حالت بررسی شده شاخص قانون توانی در جریان در حال توسعه گرمایی، در فواصل کوتاه محوری نشان داده شده است (شکل های ۳ و ۴). همچنین نمودار توزیع دمای بی بعد جریان در حال توسعه گرمایی قانون توانی در شکل ۵ نشان داده شده است. نتایج حاصل شده در کار حاضر به ازای $n=0.2$ و $n=1$ به ترتیب با مقادیر متناظر به دست آمده برای $n=1/3$ و $n=1$ که در مرجع [۹] آمده است، اعتبارسنجی شده است. عدد ناسلت به ازای

دلیل افزایش دمای متوسط با شاخص قانون توانی، که کاهش عدد ناسلت را به همراه دارد، سرعت جریان می‌باشد. توزیع دمای بی‌بعد جریان در حال توسعه گرمایی قانون توانی (معادله (۴۳)) در شکل ۵ نشان داده شده است. همان‌طور که مشاهده می‌شود پروفیل دما پیوسته در حال کاهش از مقدار بیشینه در مرکز لوله، تا مقدار کمینه در دیواره لوله می‌باشد. در شکل ۵-الف و در فاصله طولی بی‌بعد $X=0.01$ و تقریباً تا شعاع بی‌بعد $r=0.65$ رفتار پروفیل‌های دما در دو حالت مشابه یک‌دیگر بوده ولی با افزایش شعاع بی‌بعد و با نزدیک شدن به دیواره لوله، پروفیل دما در حالت رقیق‌شونده با شیب بیشتری به دمای دیواره میل می‌کند. در واقع در حالت رقیق‌شونده، انتقال گرمای بهتری در مجاورت دیواره لوله رخ می‌دهد. اما در حالت همان‌طور که در شکل ۵-ب نشان داده شده است، انتقال گرما در حالت نیوتنی $n=1$ در تمام مقطع لوله بهتر از حالت رقیق‌شونده است و مقادیر دمای بیشینه به ترتیب برابر $\theta_{max} = 0.3418 / 0.2536$ می‌باشد. چنان‌چه دقت معادلات تا مرتبه بزرگی هفت انتخاب شود، جواب‌های تحلیلی به‌دست آمده برای مقادیر شاخص قانون توانی $n=0.1$ تا $n=0.25$ یکسان می‌باشد (معادله (۵۶)). اعداد ناسلت و دماهای بیشینه به‌ازای مقادیر مختلف شاخص قانون توانی (جهت استخراج نتایج با دقت بالاتر از توزیع دمای بی‌بعد با مرتبه بزرگی سی استفاده شده است) در جدول ۳ گزارش شده‌اند. مشاهده می‌شود که با افزایش مقدار شاخص قانون توانی از $n=0.1$ تا $n=1$ اعداد ناسلت به ترتیب از $Nu=5.6709$ تا $Nu=3.6568$ کاهش می‌یابد (جدول ۳). با توجه به شکل ۶ واضح است که با کاهش مقدار شاخص قانون توانی، گرادیان دما در نزدیکی

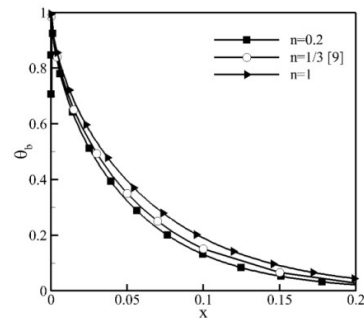


شکل ۶- توزیع دمای بی‌بعد جریان کاملاً توسعه یافته قانون توانی بر حسب شعاع بی‌بعد لوله

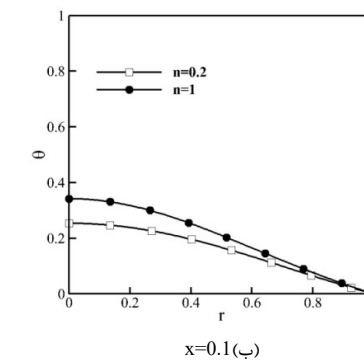
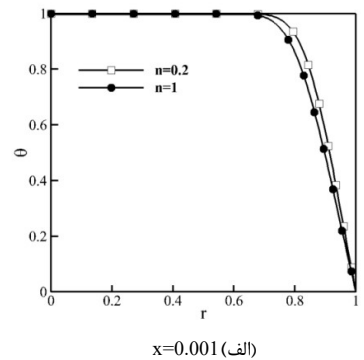
دیواره نیز افزایش می‌یابد (افزایش عدد ناسلت).

۵- نتیجه‌گیری

در تحقیق حاضر انتقال گرمای جابجایی اجباری جریان‌های در حال توسعه گرمایی و نیز کاملاً توسعه یافته قانون توانی درون یک لوله هم‌دما به‌صورت تحلیلی مورد مطالعه قرار گرفته است. در قسمت جریان در حال توسعه گرمایی، دو حالت جریان رقیق‌شونده $n=0.2$ و جریان نیوتنی $n=1$ مورد مطالعه قرار گرفته‌اند که دو جواب بسته



شکل ۴- نمودار توزیع دمای بی‌بعد متوسط جریان در حال توسعه گرمایی بر حسب فاصله طولی بی‌بعد برای مقادیر مختلف شاخص قانون توانی



شکل ۵- توزیع دمای بی‌بعد جریان در حال توسعه گرمایی قانون توانی بر حسب شعاع بی‌بعد لوله در فواصل طولی مختلف

در نتیجه برای دو حالت بررسی شده، عدد ناسلت حدی برابر است با:

$$Nu(\infty) = \begin{cases} 4.4997, & n = 0.2 \\ 3.6569, & n = 1.0 \end{cases} \quad (59)$$

بنابراین نتیجه می‌شود که با افزایش مقدار شاخص قانون توانی و نیز فاصله طولی بی‌بعد لوله، عدد ناسلت کاهش می‌یابد (شکل ۳). دمای متوسط بی‌بعد نیز همانند عدد ناسلت، با دقت خوبی با نتایج مرجع [۹] اعتبارسنجی شده است. شکل ۴ نمودار دمای بی‌بعد متوسط جریان در حال توسعه گرمایی را بر حسب فاصله طولی بی‌بعد لوله نشان می‌دهد. مشاهده می‌شود که با افزایش مقدار X و نیز شاخص قانون توانی، دمای متوسط بی‌بعد به ترتیب کاهش و افزایش می‌یابد.

روش آنالیز مودال به دست آمده است. در این روش، ابتدا عدد ناسلت و سپس معادله دمای بی بعد جریان تعیین به دست می آید. نتایج جریان کاملاً توسعه یافته قانون توانی موید این حقیقت است که با افزایش شاخص قانون توانی، عدد ناسلت و نیز دمای بیشینه جریان درون لوله کاهش می یابند. نتایج برای مقدار شاخص توانی $n=1$ با دقت بسیار بالایی به دست آمده اند.

برای آن ها ارائه شده است. نتایج نشان می دهد که با افزایش شاخص قانون توانی در فاصله طولی بی بعد معین، عدد ناسلت و دمای متوسط بی بعد به ترتیب کاهش و افزایش می یابند. برای جریان کاملاً توسعه یافته قانون توانی نیز به ازای نه مقدار مختلف شاخص قانون توانی، جواب های تحلیلی به روش فروبنیوس و به صورت سری به دست آمده اند. توزیع دمای بی بعد جریان کاملاً توسعه یافته قانون توانی به

جدول ۱- مقادیر ویژه و ضرایب ثابت مربوط به معادله دمای بی بعد برای دو حالت نیوتنی و قانون توانی

m	1	2	3	4	5	6	7
$n=0.2$							
λ_m	2.4494	5.8047	9.2329	12.6727	16.1167	19.5627	23.0098
A_m	۱.۵۳۴۲	-0.9082	0.6690	-0.5422	0.4620	-0.4061	0.3645
$n=1.0$							
λ_m	2.7044	۶.۶۷۹۰	۴۱۰.۶۷۳	۱۱۴.۶۷۱	9۱۸.۶۶۹	۲۲.۶۶۹۱	7۲۶.۶۶۸
A_m	1.4767	-0.8061	8۰.۵۸۸	-0.4758	۰.۴۰۵۰	-0.3557	2۰.۳۱۹

جدول ۲- مقادیر عدد ناسلت محلی و دمای متوسط جریان سیال در حال توسعه گرمایی قانون توانی درون لوله

		$n=1$		x
Nu [9]	θ_b [9]	Nu	θ_b	
22.279	0.98657	20.2121	0.98602	0.0001
17.559	0.97888	17.1461	0.97873	0.0002
13.842	0.96688	13.8142	0.96684	0.0004
12.050	0.95698	12.0473	0.95695	0.0006
10.926	0.94826	10.9252	0.94822	0.0008
10.130	0.94032	10.1299	0.94028	0.001
4.9161	0.75111	4.9151	0.75107	0.01
4.1724	0.62803	4.1724	0.62800	0.02
3.7689	0.45901	3.7690	0.45898	0.04
3.6820	0.34100	3.6821	0.34097	0.06
3.6625	0.25424	3.6626	0.25422	0.08
3.6581	0.18971	3.6582	0.18969	0.1
3.6568	0.04394	3.6569	0.04393	0.2

جدول ۳- مقادیر عدد ناسلت و دمای بیشینه جریان کاملاً توسعه یافته (سری فروبنیوس مرتبه ۳۰)

T_{max}	Nu	Nu [26]	Nu [27]	n
2.2724	5.6709	-	-	0.01
2.2333	5.5649	-	-	0.02
2.1891	5.4347	-	-	0.04
2.1408	5.2895	-	-	0.05
2.0403	4.9396	-	-	0.10
1.9371	4.4995	4.5	4.528	0.20
1.9083	4.3544	-	-	0.25
1.8404	3.9494	-	-	0.50
1.8026	3.6568	3.657	3.659	1.00

۶- علایم اختصاری

تابع پاسخ در جهت مولفه شعاعی، معادله (12)	P	شعاع لوله (m)	R
تابع پاسخ در جهت مولفه طولی، معادله (12)	$X(x)$	مختصات شعاعی (m)	\bar{r}
عدد ناسلت	Nu	مختصات شعاعی بی بعد	r
پارامتر ثابت، معادله (2)	k_1	مختصات طولی	\bar{x}
پارامتر ثابت، معادله (2)	k_2	مختصات طولی بی بعد	x
رسانایی گرمایی ($Wm^{-1}K^{-1}$)	k	عدد پکلت	Pe
ضریب انتقال گرمای جابجایی محلی ($Wm^{-2}K^{-1}$)	h	عدد پراوتل	Pr
شاخص قانون توانی	n	عدد رینولدز	Re

[15] Khan W.A., Culham J., Yovanovich M.M, Fluid flow and heat transfer in power-law fluids across circular cylinders: analytical study, Journal of heat transfer, Vol.128, No.9, pp. 870-878, 2006.

[16] Suckow W., Hrycak P., Griskey R., Heat transfer to polymer solutions and melts flowing between parallel plates, Polymer Engineering & Science, Vol. 11, No. 5, pp. 401-404, 1971.

[17] Gill W.N., Heat transfer in laminar power law flows with energy sources, AIChE Journal, Vol. 8, No. 1, pp. 137-138, 1962.

[18] Hsiao-Tsung L., Yen-Ping S., Unsteady thermal entrance heat transfer of power-law fluids in pipes and plate slits, International Journal of Heat and Mass Transfer, Vol. 24, No. 9, pp. 1531-1539, 1981.

[19] Gingrich W.K., Cho Y.I., Shyy W., Effects of shear thinning on laminar heat transfer behavior in a rectangular duct, International journal of heat and mass transfer, Vol. 35, No. 11, pp. 2823-2836, 1992.

[20] Chiba R., Izumi M., Sugano Y., An analytical solution to non-axisymmetric heat transfer with viscous dissipation for non-Newtonian fluids in laminar forced flow, Archive of Applied Mechanics, Vol. 78, No. 1, pp. 61-74, 2008.

[21] Ybarra R.M., Eckert R.E., Viscous heat generation in slit flow, AIChE Journal, Vol. 26, No. 5, pp. 751-762, 1980.

[22] Valko P.P., Solution of the Graetz-Brinkman problem with the Laplace transform Galerkin method, International Journal of Heat and Mass Transfer, Vol. 48, No. 9, pp. 1874-1882, 2005.

[23] Bassett C.E., Welty J.R., Non-Newtonian heat transfer in the thermal entrance region of uniformly heated, horizontal pipes, Aiche Journal, Vol. 21, No. 4, pp. ۶۹۷۰, ۷۰۶-۶۹۹.

[24] Mahalingam R., Tilton L., Coulson J., Heat transfer in laminar flow of non-Newtonian fluids, Chemical Engineering Science, Vol. 30, No. 8, pp. 921-929, 1975.

[25] Vishal A., Slip law effects on heat transfer and entropy generation of pressure driven flow of a power law fluid in a microchannel under uniform heat flux boundary condition, Energy, Vol. 76, pp. 716-732, 2014.

[26] Baptista A., Alves M.A., and Coelho P.M., Heat transfer in fully developed laminar flow of power law fluids, Journal of Heat Transfer, Vol. 136, pp. 041702-041702-8, 2014.

[27] Mukherjee S., Gupta A.K., and Chhabra R.P., Laminar forced convection in power-law and Bingham plastic fluids in ducts of semi-circular and other cross-sections, International Journal of Heat and Mass Transfer, Vol. 104, pp. 112-141, 2017.

[28] Mukherjee S., Biswal P., Chakraborty S., DasGupta S., Effects of viscous dissipation during forced convection of power-law fluids in microchannels, International Communications in Heat and Mass Transfer, Vol. 89, pp. 83-90, 2017.

[29] Bejan A., Convection heat transfer: John Wiley & sons, 2013.

[30] Chhabra R.P., Richardson J.F., Non-Newtonian flow and applied rheology: engineering applications: Butterworth-Heinemann, 2011.

[31] Kays W.M., and Crawford M.E., Convection Heat and Mass Transfer, McGraw-Hill, New York, 1980.

[32] Shah R., London A.L., Laminar flow forced convection in ducts, 1978.

سرعت طولی (ms ⁻¹)	\bar{u}
سرعت بی بعد	u
دما (K)	\bar{T}
دمای متوسط (K)	\bar{T}_b
ضریب ثابت	C_1
ضریب ثابت	C_2
توابع ویژه	C_m

علائم یونانی

پخشندگی گرمایی (m ² s ⁻¹)	α
دمای بی بعد	θ
دمای متوسط بی بعد	θ_b
مقدار ویژه	λ

بالانویس ها

مشتق	'
زیرنویس ها	
جهت طولی	x
دیواره لوله	w
ورودی به لوله	in
متوسط	b
اندیس مربوط به اعداد طبیعی	m

۷- مراجع

[1] Reiner M., Deformation and flow: HK Lewis & Company, 1949.

[2] Graetz V.L., Über die wärmeleitungsfähigkeit von flüssigkeiten, Annalen der Physik, Vol. 261, No. 7, pp. 337-357, 1885.

[3] Nusselt W., The dependence of the heat-transfer coefficient on tube length, Zeit. VDI, Vol. 54, pp. 1154-1158, 1910.

[4] Sellars J., Tribus M., and Klein J., Heat transfer to laminar 110W in a round tube or flat conduit-the Graetz problem extended, Transactions of the ASME, Vol. 78, pp. 4414148, 1956.

[5] Siegel R., Sparrow E., and Hallman. T., Steady laminar heat-transfer in a circular wall tube with prescribed wall heat flux, Applied Scientific Research, Section A, Vol. 7, No. 5, pp. 386-392, 1958 .

[6] Lévêque A., Les Lois de la transmission de chaleur par convection, par André Lévêque: Dunod, 1928.

[7] Shih Y.P., and Tsou J.D., An International Journal of Research and Development Extended leveque solutions for heat transfer to power law fluids in laminar flow in a pipe, The Chemical Engineering Journal, Vol. 15, No. 1, pp. 55-62, 1978.

[8] Bird R.B., Viscous heat effects in extrusion of molten plastics, Soc. Plastics Eng. J, Vol.11, pp.35, 1955.

[9] Cotta R., Özi M., Laminar forced convection of power-law non-Newtonian fluids inside ducts, Wärme-und Stoffübertragung, Vol. 20, No. 3, pp. 211-218, 1986.

[10] Mikhailov M.D., Ozisik M.N., Unified analysis and solutions of heat and mass diffusion, 1984.

[11] Lian-Cun Z., Xin-Xin Z., Lian-Xi M., Fully developed convective heat transfer of power law fluids in a circular tube, Chinese Physics Letters, Vol. 25, No. 1, pp. 195, 2008.

[12] Foraboschi F.P., Federico I.Di., Heat transfer in laminar flow of non-Newtonian heat-generating fluids, International Journal of Heat and Mass Transfer, Vol.7, No.3, pp. 315IN1319-318IN2325, 1964.

[13] Richardson S.M., Extended leveque solutions for flows of power law fluids in pipes and channels, International Journal of Heat and Mass Transfer, Vol.22, No.10, pp.1417-1423, 1979/10/01, 1979.

[14] Raju K.K., Rathna S., Heat transfer for the flow of a power-law fluid in a curved pipe, Journal of the Indian Institute of Science, Vol.52, No.1, pp.34, 2013.