

تحلیل تنش‌های بین‌لایه‌ای در تیرهای کامپوزیتی بر روی بستر الاستیک با استفاده از فنرهای افقی و عمودی

احمد رضا قاسمی*
مجتبی قاسمی
دانشیار، دانشکده مهندسی مکانیک، دانشگاه کاشان، کاشان، ایران
کارشناس ارشد، دانشکده مهندسی مکانیک، دانشگاه کاشان، کاشان، ایران

چکیده

در این پژوهش تنش‌های بین‌لایه‌ای برشی و عمودی داخل صفحه‌ای در تیر کامپوزیتی تیموشنکو، با چیدمان متفاوت که بر روی بستر الاستیک و تحت بارگذاری عرضی قرار دارد، مورد مطالعه قرار گرفته است. از فنرهای افقی و قائم با سختی بالا، در بین لایه‌های تیر کامپوزیتی برای مدلسازی رفتار الاستیک تنش‌های بین‌لایه‌ای استفاده شده است. معادلات حاکم و شرایط مرزی مسئله با استفاده از اصل کار مجازی استخراج شده و با محاسبه‌ی جایجایی لایه‌های تیر با استفاده از روش عددی مربع سازی دیفرانسیلی تعمیم یافته، تنش‌های بین‌لایه‌ای که در اصل همان عکس‌العمل فنرهای افقی و قائم بکار گرفته شده بین لایه‌هاست، قابل محاسبه است. همچنین با استفاده از معادلات ساختاری و معادلات تعادل، سایر تنش‌های موجود در تیر محاسبه و ترسیم شده است. با مقایسه نتایج تحلیل ارائه شده با نتایج حاصل از حل الاستیک سه بعدی می‌توان دریافت که روش ارائه شده از دقت مناسب در پیش‌بینی تنش‌های داخل صفحه‌ای برخوردار است. نتایج نشان می‌دهد تاثیر ضریب وینکلر روی تنش‌های بین‌لایه‌ای، کمتر از تاثیر ضریب پاسترناک می‌باشد. همچنین افزایش ضرایب بستر الاستیک سبب کاهش تنش بین‌لایه‌ای برشی و افزایش تنش عمودی بین‌لایه‌ای می‌شود.

واژه‌های کلیدی: تنش‌های داخل صفحه‌ای، روش عددی، تیر کامپوزیتی، بستر پاسترناک.

Interlaminar Stresses Analysis for laminated composite beams on Elastic foundation with Horizontal and Vertical springs

A. R. Ghasemi
M. Ghasemi

Department of Mechanical Engineering, University of Kashan, Kashan, Iran
Department of Mechanical Engineering, University of Kashan, Kashan, Iran

Abstract

In this manuscript, in-plane normal and shear interlaminar stresses in composite Timoshenko beam under transverse loading placed on the elastic foundation are studied. The elastic behavior of interlaminar stresses at the interface of adjacent layers is modeled by radial and tangential springs of high stiffnesses. In the first, governing equations and boundary conditions are derived by the virtual work principle and then they are solved by generalized differential quadrature method. By calculating the displacements of the beam laminates, the interlaminar stresses, which are the reaction of radial and tangential springs between adjacent layers of the laminated beam, are obtained. Also, the other stresses of the beam are calculated and drawn by equilibrium equations. Comparison between the results of presented analysis for a beam and the results of three dimensional elastic solution is shown that the presented method has good accurate to predict the in-plane stresses. The results showed that Winkler effects on interlaminar stresses are lower than Pasternak effects. Also, the elastic foundation caused decrease and increase for interlaminar shear stress and normal stress, respectively.

Keywords: In-plane stresses, Numerical method, Composite beam, Elastic foundation.

۱- مقدمه

مقارن تحت کشش یا فشار براساس فرض توزیع تنش با استفاده از اصل حداقل انرژی و تعادل نیرویی ارائه کردند [۲-۳]. کاساپوگو سپس این روش را برای لایه‌های نامتقارن تحت بارهای ترکیبی درون صفحه-ای و خارج صفحه‌ای گسترش داد [۴]. لو و لیو با گسترش تئوری پیوستگی تنش برشی بین لایه‌های^۱ توانستند تنش برشی را به صورت مستقیم از معادلات ساختاری بدست آورند، هرچند به علت در نظر نگرفتن تغییر شکل در راستای ضخامت قادر به محاسبه‌ی مستقیم تنش‌های عمودی بین لایه‌های نبودند [۵]. وو و کیو تئوری موضعی مرتبه بالای ورق را برای محاسبه‌ی تنش‌های بین لایه‌ای ارائه کردند. آنها معادلات تعادل را با معرفی قید پیوستگی جایجایی، در سطح مشترک بین لایه‌ها به صورت تابع انرژی پتانسیل و با استفاده از روش ضریب لاگرانژ و تعریف ضرایب لاگرانژ به عنوان تنش‌های بین لایه‌ای در سطح مشترک بین لایه‌ها استخراج کردند و از روش بسط سری فوریه برای

نیاز به مواد با عملکرد بالا و توسعه روش‌های عددی در حل مسائل ساختاری سبب رشد سریع تکنولوژی در زمینه مواد کامپوزیتی و به خصوص کامپوزیت‌های پایه پلیمری شده است. لایه لایه شدن، یا ترک برداشتن وجه اشتراک بین لایه‌های کامپوزیت است، که بر اثر تنش‌های بین لایه‌ای ایجاد می‌شود و یکی از مهمترین نوع آسیب در کامپوزیت-های لایه‌ای تقویت شده با الیاف است. بنابراین ارزیابی صحیح تنش‌های بین لایه‌ای به دلیل لغزش بین لایه‌ای و لایه لایه شدن تیر کامپوزیتی بر اثر این تنش‌ها مهم است.

تئوری‌های یک بعدی و دو بعدی برای ساختارهای لایه‌ای امکان محاسبه‌ی دقیق تنش‌های بین لایه‌ای را نمی‌دهند، چرا که سبب ایجاد ناپیوستگی در تنش‌های عرضی بین لایه‌ها می‌شوند. پاییس و پاگانو با استفاده از تئوری کلاسیک لایه‌ای، واکنش لایه‌های کامپوزیتی با عرض کم تحت کرنش محوری یکنواخت را مورد بررسی قرار داده و با استفاده از روش تفاضل متناهی، تنش و جایجایی در سراسر ناحیه تیر را محاسبه کردند [۱]. کاساپوگو و لیجیس روشی برای تحلیل لایه‌های

¹ ISSCT (Interlaminar Shear Stress Continuity Theory)

* نویسنده مکاتبه کننده، ادرس پست الکترونیکی: ghasemi@kashanu.ac.ir

محاسبه‌ی صحیح تنش‌های بین لایه‌ای اصلاح می‌شود، و رفتار بین لایه‌های مجاور توسط فنرهای افقی و قائم با سختی بالا مدلسازی شده است. در این مدل فرض اتصال کامل بین لایه ضروری نبوده و جابجایی بین لایه‌ها به $3n$ متغیر وابسته است، که در آن n نشان دهنده‌ی تعداد لایه‌هاست. واکنش فنرهای مختلف در راستای افقی و قائم، بیانگر تقریبی از عکس‌العمل‌های افقی و قائم بین لایه‌های مجاور تیر کامپوزیتی چندلایه است. در این پژوهش تنش‌های داخل صفحه‌ای تیر کامپوزیتی لایه‌ای ترکیبی مورد مطالعه قرار می‌گیرد و تاثیر بستر الاستیک از نوع پاسترناک بر این تنش‌ها نیز بررسی می‌شود. همچنین مقایسه نتایج در یک شرط مرزی خاص با نتایج حاصل از حل الاستیک سه بعدی نشان دهنده‌ی صحت روش حل است. مزیت این روش محاسبه‌ی دقیق تنش‌های بین لایه‌ای با استفاده از معادلات تعادل است. همچنین می‌توان تنش‌های داخل صفحه‌ای را از معادلات ساختاری استخراج و تنش‌های عرضی را با استفاده از معادلات تعادل محاسبه نمود.

۲- معادلات

شکل ۱ تیر کامپوزیتی لایه‌ای را نشان می‌دهد که بر روی بستر الاستیک قرار دارد و نیروی عرضی $P_z(x)$ بر سطح بالایی آن وارد می‌شود. $h^{(k)}$ و $A^{(k)}$ در شکل ۱ ضخامت و سطح مقطع لایه k ام را نشان می‌دهند، $d^{(k)}$ نیز بیانگر مختصات مرکز لایه k ام از مرکز تیر است.

۲-۱- میدان جابجایی و کرنش

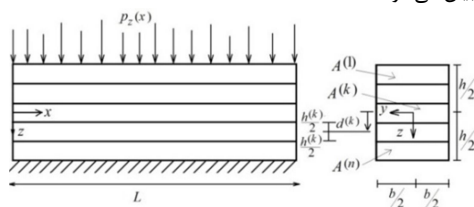
با فرض اینکه هر لایه کامپوزیتی به صورت یک تیر تیموشنکو در نظر گرفته شده است، میدان جابجایی برای لایه k ام تیر به صورت زیر بیان می‌شود.

$$\begin{cases} u^x(x^k, y^k, z^k) = u^x(x) + z^k \varphi^k(x) \\ v^k(x^k, y^k, z^k) = 0 \\ w^k(x^k, y^k, z^k) = w^k(x) \end{cases} \quad (1)$$

که در آن $u^{(k)}$ ، $v^{(k)}$ و $w^{(k)}$ جابجایی در راستای $x^{(k)}$ ، $y^{(k)}$ و $z^{(k)}$ است، و n تعداد لایه‌های تیر کامپوزیتی است که با اندیس k نشان داده می‌شود. $x^{(k)}$ ، $y^{(k)}$ و $z^{(k)}$ در روابط بیان شده مختصات مربوط به هر لایه است.

$$x^{(k)} = x \quad y^{(k)} = y \quad z^{(k)} = z \quad (2)$$

با جایگذاری رابطه (۱) در روابط کرنش-جابجایی، روابط مربوط به کرنش عمودی و برشی داخل صفحه‌ای تیر به صورت رابطه‌ی (۳) بیان می‌شود.



شکل ۱- تیر کامپوزیتی تحت بارگذاری بر روی بستر

تحلیل مسائل استفاده کردند [۶]. لی و لیو یک حل بسته برای تحلیل کامل تنش‌های بین لایه‌ای برای لایه‌های نازک و ضخیم کامپوزیتی تحت توزیع بار سینوسی استخراج کردند. نتایج آنها نشان داد که این نظریه می‌تواند پیوستگی تنش‌های برشی و عمودی در سطح واسط لایه‌ها را برآورده کند. همچنین تنش‌های بین لایه‌ای به طور مستقیم از طریق معادلات ساختاری تعیین می‌شود [۷]. ماتسونوگا تنش‌ها و جابجایی‌ها در لایه‌های تیرهای کامپوزیتی تحت فشار جانبی را با روش تیر موضعی مرتبه بالا که می‌تواند تاثیر تنش‌های برشی و عمودی را محاسبه کند، مورد تحلیل قرار داد و با استفاده از روش بسط سری توانی از مولفه‌های جابجایی، یک مجموعه از معادلات تعادل از تئوری یک بعدی مرتبه بالا برای تیرهای لایه‌ای کامپوزیتی از طریق اصل کارمجازی استخراج کرد [۸]. طحانی و نشیر از تئوری روش لایه‌ای^۱ برای تحلیل تنش‌های سه بعدی بین لایه‌ای و در نزدیکی سطح آزاد چیدمان متقاطع در لایه‌هایی با اندازه محدود تحت نیروی کششی یک پارچه استفاده کردند [۹]. در روش لایه‌ای با شرط اتصال کامل بین لایه‌ها، میدان جابجایی هر لایه نسبت به لایه دیگر متفاوت فرض می‌شود. افشین و طاهری با استفاده از تئوری لایه‌ای، تنش‌های بین لایه‌ای و تاثیرات لبه‌ی آزاد را در تیر لایه لایه شده‌ی کامپوزیتی در بستر الاستیک مورد بررسی قرار دادند [۱۰]. سعیدی و همکاران با استفاده از تئوری روش لایه‌ای تورق را در چند لایه‌های کامپوزیتی که تحت کشش یکنواخت قرار دارد، مورد بررسی قرار دادند [۱۱]. دینگ و همکاران استحکام پوسته‌های استوانه کامپوزیتی را با استفاده از تئوری روش لایه‌ای و روش اجزای محدود مطالعه نمودند [۱۲]. سالمون مسائل خمش لبه آزاد را با گسترش روش تفاضل متناهی برای حل لایه‌های یکپارچه خمیده تحت گشتاور خمشی انتهایی لایه‌ها و حول محور عرضی موازی لایه‌ها انجام داد [۱۳]. با استفاده از روش لایه‌ای [۱۴-۱۵] و بکارگیری معادلات تعادل سه بعدی و تقریبی از میدان جابجایی سرتاسر ضخامت می‌توان تنش‌های بین لایه‌ای را تخمین زد [۱۶-۱۷]. با این حال حتی چنین نظریه‌ای تنش‌های بین لایه‌ای را به عنوان یک نتیجه‌ی مستقیم بدست نمی‌آورد. فراترنالی و ردی تحلیلی خطی و متفاوت برای تیر و پوسته منحنی شکل ارائه کردند [۱۸-۱۹]. آنها از روش لایه‌ای برای توزیع میدان جابجایی و از روش پنالتی^۲ برای محدودیت کامل بین لایه‌های مجاور ساختارهای کامپوزیتی استفاده نمودند. بقایی و همکاران ارتعاشات آزاد و کمانش را در تیر لایه‌ای با چیدمان نامتقارن که بر روی بستر الاستیک خطی و غیر خطی قرار دارد، مورد بررسی قرار دادند [۲۰]. ندروی و همکاران ارتعاشات آزاد ورق کامپوزیتی لایه‌ای را که بر روی بستر الاستیک قرار دارد، با استفاده از تئوری اصلاح شده‌ی تغییر شکل برشی، مورد بررسی قرار دادند [۲۱]. با مرور مطالعات پیشین، می‌توان دریافت که تمرکز مطالعات در سالهای اخیر برای مطالعه تنش‌های بین لایه‌ای، بر روی روش لایه‌ای با فرض اتصال کامل بین لایه‌ها بوده است.

در این تحقیق با ارایه روشی نوین یک مدل جابجایی یک بعدی برای محاسبه تنش‌های داخل صفحه‌ای و خارج صفحه‌ای برای یک تیر کامپوزیتی ارائه شده است. مدل جابجایی روش لایه‌ای برای

^۱ Layer-wise

^۲ Penalty

که در آن $T^{(k)}$ نیروی برشی، $N^{(k)}$ نیروی عمودی و $M^{(k)}$ گشتاور خمشی هستند و به صورت زیر تعریف می‌شوند.

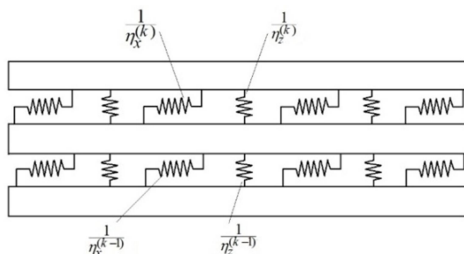
$$\{T^{(k)}, N^{(k)}, M^{(k)}\} = \iint_{A^{(k)}} (\sigma_{xz}^{(k)}, \sigma_x^{(k)}, \sigma_x^{(k)} z) dy dz \quad (13)$$

رابطه ۱۴ و ۱۵ تغییرات کار حاصل از بار گسترده $p_z(x)$ را که بر سطح بالایی تیر وارد شده و تغییرات کار حاصل از بستر الاستیک از نوع پاسترناک را نشان می‌دهند.

$$\delta q = \int_0^l b p_z(x) \delta w^{(1)} dx \quad (14)$$

$$\delta K = \int_0^l (K_f \delta w^{(n)} w^{(n)} - G_m \delta w \frac{\partial^2 w^{(n)}}{\partial x^2}) dx \quad (15)$$

که K_f بیانگر سختی فنر عمودی و G_m ضریب برشی بستر الاستیک است. در صورتیکه مقدار ضریب برشی برابر صفر باشد، بستر الاستیک به نوع وینکلر تبدیل می‌شود. همانطور که در شکل ۲ نشان داده شده است در این پژوهش با ارایه روشی نوین از فنرهای افقی و قائم بین لایه‌های کامپوزیت استفاده می‌شود. سختی فنرهای افقی و قائم بکار گرفته شده به ترتیب با متغیرهای $1/\eta_z^{(k)}$ و $1/\eta_x^{(k)}$ نشان داده شده است.



شکل ۲- فنرهای الاستیک خطی بکارگرفته شده بین لایه‌های تیر کامپوزیتی

A انرژی پتانسیل فنرهای استفاده شده بین لایه‌های تیر کامپوزیتی است، که تغییرات آن به صورت زیر است.

$$\delta A = \frac{1}{\eta} \left\{ \int_0^l \sum_{k=1}^n \frac{\eta}{\eta_x^{(k)}} (\delta w^{(k)} - \delta w^{(k+1)}) ((w^{(k)} - w^{(k+1)}) \right.$$

$$\left. (1 - \delta_{kn}) \frac{\eta}{\eta_x^{(k)}} ((\delta u^{(k)} + \frac{h^{(k)}}{2} \delta \varphi^{(k)} - \delta u^{(k+1)} + \frac{h^{(k+1)}}{2} \delta \varphi^{(k+1)}) (u^{(k)} + \frac{h^{(k)}}{2} \varphi^{(k)} - u^{(k+1)} + \frac{h^{(k+1)}}{2} \varphi^{(k+1)}) (1 - \delta_{kn}) \right\} dx \quad (16)$$

$$\eta = \max \{ \eta_z^{(1)}, \eta_x^{(1)}, \dots, \eta_z^{(n-1)}, \eta_x^{(n-1)} \} \quad (17)$$

با جایگذاری معادلات (۱۲)، (۱۴)، (۱۵) و (۱۶) در معادله (۱۱) معادلات تعادل برحسب u, v, w به صورت زیر بیان می‌شوند.

$$\begin{cases} \varepsilon_{xx}^{(k)} = \frac{du^{(k)}}{dx} + z^{(k)} \frac{d\varphi^{(k)}}{dx} \\ \varepsilon_{xz}^{(k)} = \frac{1}{2} \left(\frac{dw^{(k)}}{dx} + \varphi^{(k)} \right) \end{cases} \quad (3)$$

۲-۲- روابط تنش و کرنش

معادله (۴) بیانگر قانون هوک برای لایه k ام تیر در مختصات محلی (x', y', z) است. پس از انتقال دستگاه مختصات به (x, y, z) رابطه‌ی تنش کرنش برای لایه‌ی k ام به صورت زیر تعریف می‌شود.

$$\sigma_{ij}^{(k)} = Q_{ij}^{(k)} \varepsilon_{ij}^{(k)} \quad (4)$$

$$\sigma^{(k)} = [\sigma_x^{(k)}, \sigma_{xz}^{(k)}]^T \quad (5)$$

$$\varepsilon^{(k)} = [\varepsilon_x^{(k)}, \varepsilon_{xz}^{(k)}]^T \quad (6)$$

با توجه به اینکه $\varepsilon_{xy}^{(k)} = \varepsilon_{yz}^{(k)} = 0$ ، آرایه‌های ماتریس $Q^{(k)}$ متناظر با این کرنش‌ها حذف می‌گردند.

$$Q^{(k)} = \begin{bmatrix} Q_{11}^{(k)} & \\ & Q_{44}^{(k)} \end{bmatrix} \quad (7)$$

که در آن مولفه‌های ماتریس سختی در دستگاه مختصات اصلی بر حسب مولفه‌های ماتریس در دستگاه مختصات محلی به صورت زیر بیان می‌شوند.

$$Q_{11}^{(k)} = m^4 C_{11}^{(k)} + n^4 C_{22}^{(k)} + 2m^2 n^2 (C_{12}^{(k)} + 2C_{66}^{(k)}) \quad (8)$$

$$Q_{44}^{(k)} = m^2 C_{44}^{(k)} + n^2 C_{55}^{(k)} \quad (9)$$

که $m = \cos \varphi^{(k)}$ ، $n = \sin \varphi^{(k)}$ و نیز زاویه الیاف با محور x است، و مولفه‌های ماتریس سختی در دستگاه مختصات محلی به صورت معادله‌ی (۱۰) بیان می‌شود.

$$C_{11}^{(k)} = \frac{E_1^{(k)}}{1 - \vartheta_{12}^{(k)} \vartheta_{21}^{(k)}} \quad C_{22}^{(k)} = \frac{E_2^{(k)}}{1 - \vartheta_{12}^{(k)} \vartheta_{21}^{(k)}} \quad (10)$$

$$C_{12}^{(k)} = C_{21}^{(k)} = \frac{\vartheta_{12}^{(k)} E_1^{(k)}}{1 - \vartheta_{12}^{(k)} \vartheta_{21}^{(k)}} \quad C_{55}^{(k)} = G_{23}^{(k)}$$

در معادله (۱۰)، $E_1^{(k)}$ و $E_2^{(k)}$ به ترتیب نشان دهنده‌ی مدول الاستیک طولی و عرضی هستند. $G_{12}^{(k)}$ و $G_{23}^{(k)}$ مدول برشی اصلی و فرعی و همچنین $v_{12}^{(k)}$ و $v_{21}^{(k)}$ نیز بیانگر ضریب پواسون اصلی و فرعی هستند

۲-۳- اصل کار مجازی برای تیر کامپوزیتی

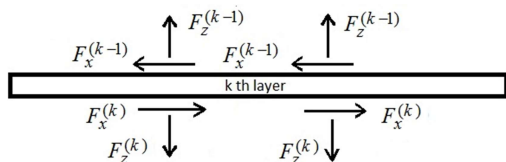
در این بخش از اصل کار مجازی برای محاسبه‌ی شرایط مرزی و معادلات تعادل یا میدان جابجایی که تابع انرژی را حداقل می‌کند، استفاده می‌شود. اصل کار مجازی برای یک تیر کامپوزیتی که بر روی بستر الاستیک قرار دارد، به صورت معادله (۱۱) نوشته می‌شود.

$$\delta \Pi = \delta U - \delta q + \delta K + \delta A \quad (11)$$

که در آن U, q, K, A به ترتیب نشان دهنده‌ی انرژی کرنشی، کار حاصل از نیروهای خارجی، کار حاصل از بستر الاستیک و تغییرات انرژی پتانسیل فنرهای بین لایه‌ای هستند. معادله (۱۲) تغییرات انرژی کرنشی برای تیر کامپوزیتی را نشان می‌دهد.

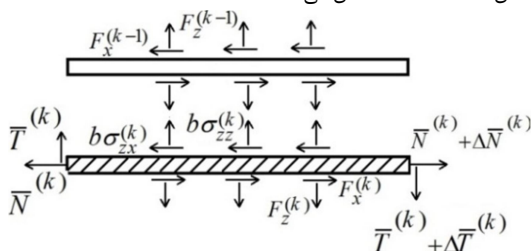
$$\begin{aligned} \delta U &= \int_0^l \left\{ \sum_{k=1}^n \iint_{A^{(k)}} (\sigma_x^{(k)} \delta \varepsilon_{xx}^{(k)} + 2\sigma_{xz}^{(k)} \delta \varepsilon_{xz}^{(k)}) dy dz \right\} dx \\ &= \sum_{k=1}^n \int_0^l \left(-\frac{\partial N^{(k)}}{\partial x} \delta u^{(k)} - \frac{\partial T^{(k)}}{\partial x} \delta w^{(k)} \right. \\ &\quad \left. + T^{(k)} \delta \varphi^{(k)} - \frac{\partial M^{(k)}}{\partial x} \delta \varphi^{(k)} \right) dx \end{aligned} \quad (12)$$

نشان داده شده است)، می‌توان تنش‌های داخل صفحه‌ای $\sigma_{zz}^{(k)}$ و $\sigma_{zx}^{(k)}$ را محاسبه نمود.



شکل ۳- عکس العمل نیروی وارده از طرف فنرها بر لایه کامپوزیتی

با فرض اینکه تنش‌های $\sigma_{zz}^{(k)}$ و $\sigma_{zx}^{(k)}$ در سرتاسر عرض b ثابت است، معادلات (۲۴) تعادل را برای قسمت هاشور خورده از تیر که در شکل ۴ نشان داده شده است نشان می‌دهند.



شکل ۴- نیروهای وارد بر لایه k ام که توسط صفحه‌ای با ارتفاع ثابت z جدا شده است.

$$\frac{dT^{(k)}}{dx} + F_z^{(k)} - \sigma_{zz}^{(k)}b = 0 \quad (الف-۲۴)$$

$$\frac{dN^{(k)}}{dx} + F_x^{(k)} - \sigma_{zx}^{(k)}b = 0 \quad (ب-۲۴)$$

که در آن \bar{T} و \bar{N} تنش‌های وارده بر سطح مقطع $\bar{A}^{(k)}$ ، با توصیف $\bar{A}^{(k)} = b(\frac{h^{(k)}}{2} - z^{(k)})$ از لایه k ام است و به صورت زیر تعریف می‌شود.

$$\{\bar{T}^{(k)}, \bar{N}^{(k)}\} = \iint_{\bar{A}^{(k)}} (\sigma_{zz}^{(k)}, \sigma_{zx}^{(k)}) dydz \quad (۲۵)$$

معادلات تعادل برای یک لایه تیر کامپوزیتی به شکل زیر بیان می‌شود.

$$\frac{dT^{(k)}}{dx} + F_z^{(k)} - F_z^{(k-1)} = 0 \quad (الف-۲۶)$$

$$\frac{dN^{(k)}}{dx} + F_x^{(k)} - F_x^{(k-1)} = 0 \quad (ب-۲۶)$$

با توجه به دو معادله‌ی (۲۴) و (۲۶) می‌توان تنش‌ها را محاسبه نمود. باید توجه داشت در صورتی که سطح بالای تیر (لایه اول) تحت نیروی عمودی و یا برشی باشد، در معادله (۲۶) این نیروها به ترتیب برابر $F_z^{(0)}$ و $F_x^{(0)}$ هستند. همچنین در صورتی که سطح زیرین تیر (لایه آخر) تحت نیروی عمودی و یا برشی باشد، در معادله (۲۶) این نیروها به ترتیب برابر $F_z^{(n)}$ و $F_x^{(n)}$ هستند.

$$\delta u^{(k)}: -A_{11}^{(k)} \frac{d^2 u^{(k)}}{dx^2} + \frac{1}{\eta_x^{(k)}} ((1 - \delta_{kn})u^{(k)} - (-1 + \delta_{kn})u^{(k+1)} + \frac{h^{(k)}}{2}(1 - \delta_{kn})\varphi^{(k+1)} + \frac{h^{(k+1)}}{2}(1 - \delta_{kn})\varphi^{(k+1)})$$

$$\delta u^{(k+1)}: \frac{1}{\eta_x^{(k)}} ((-1 + \delta_{kn})u^{(k)} + (1 - \delta_{kn})u^{(k+1)} + \frac{h^{(k)}}{2}(-1 + \delta_{kn})\varphi^{(k)} - \frac{h^{(k+1)}}{2}\varphi^{(k+1)} + \frac{h^{(k+1)}}{2}\delta_{kn}\varphi^{(k+1)}) \quad (۱۸)$$

$$\delta w^{(k)}: (K_f w^{(k)} - G_m \frac{d^2 w^{(k)}}{dx^2})\delta_{kn} - P_z(x)\delta_{k1} - A_{44}^{(k)} \frac{d^2 w^{(k)}}{dx^2} + \frac{1}{\eta_z^{(k)}} (-A_{44}^{(k)} \frac{d\varphi^{(k)}}{dx} (1 - \delta_{kn})w^{(k)} + (1 - \delta_{kn})w^{(k+1)})$$

$$\delta w^{(k+1)}: \frac{1}{\eta_z^{(k)}} ((-1 + \delta_{kn})w^{(k)} + (1 - \delta_{kn})w^{(k+1)}) \quad (۱۹)$$

$$\delta \varphi^{(k)}: \frac{1}{\eta_x^{(k)}} \frac{h^{(k)}}{2} ((1 - \delta_{kn})u^{(k)} + (-1 + \delta_{kn})u^{(k+1)}) + A_{44}^{(k)} \frac{dw^{(k)}}{dx} + A_{44}^{(k)} \varphi^{(k)} + \frac{1}{\eta_x^{(k)}} (\frac{h^{2(k)}}{4}(1 - \delta_{kn})\varphi^{(k)} - D_{11}^{(k)} \frac{d^2 \varphi^{(k)}}{dx^2} + \frac{h^{(k)}h^{(k+1)}}{2}(1 - \delta_{kn})\varphi^{(k+1)})$$

$$\delta \varphi^{(k+1)}: \frac{1}{\eta_x^{(k)}} \frac{h^{(k+1)}}{2} ((1 - \delta_{kn})u^{(k)} + (-1 + \delta_{kn})u^{(k+1)} + \frac{h^{(k)}}{2}(1 - \delta_{kn})\varphi^{(k)}\varphi^{(k+1)} + \frac{h^{(k+1)}}{2}(1 - \delta_{kn})) \quad (۲۰)$$

که در آن

$$\begin{cases} A_{44}^{(k)} = Q_{44}^{(k)}bh^{(k)} \\ A_{11}^{(k)} = Q_{11}^{(k)}bh^{(k)} \\ D_{11}^{(k)} = Q_{11}^{(k)}bh^{3(k)} \end{cases} \quad (۲۱)$$

شرایط مرزی در $x = l$ و $x = 0$ عبارتند از:

$$u^{(k)} = 0 \quad \text{یا} \quad \frac{du^{(k)}}{dx} = 0 \quad (الف-۲۲)$$

$$w^{(k)} = 0 \quad \text{یا} \quad \frac{dw^{(k)}}{dx} + \varphi^{(k)} = 0 \quad (ب-۲۲)$$

$$\varphi^{(k)} = 0 \quad \text{یا} \quad \frac{d\varphi^{(k)}}{dx} = 0 \quad (ج-۲۲)$$

۲-۴- محاسبه‌ی تنش‌های وارد بر تیر

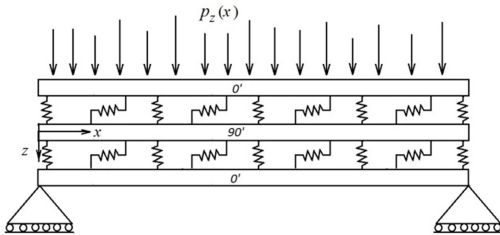
شکل ۳ نشان دهنده‌ی نیروهای عکس العمل مماسی $F_x^{(k)}$ و عمودی $F_z^{(k)}$ ($k = 1, \dots, n-1$) است، که بر اثر فنرهای بین‌لایه‌ای به لایه k ام وارد می‌شود. همچنین معادلات عکس العمل حاصل از این فنرها در معادله (۲۱) نشان داده شده است.

$$F_x^{(k)} = \frac{1}{\eta_x^{(k)}} (u^{(k)} + \frac{h^{(k)}}{2}\varphi^{(k)} - (u^{(k+1)} - \frac{h^{(k+1)}}{2}\varphi^{(k+1)})) \quad (الف-۲۳)$$

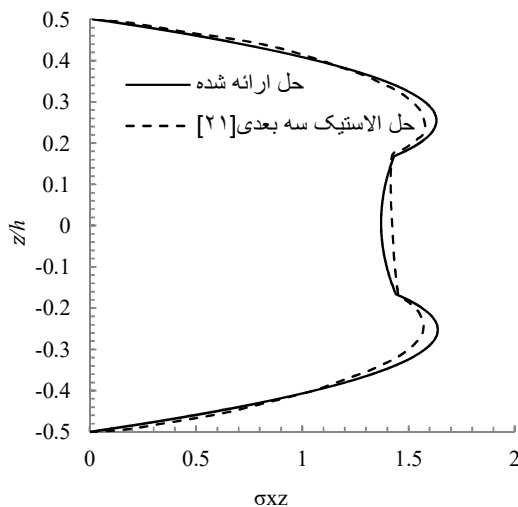
$$F_z^{(k)} = \frac{1}{\eta_z^{(k)}} (w^{(k)} - w^{(k+1)}) \quad (ب-۲۳)$$

با نوشتن معادلات تعادل برای بخشی از لایه‌ی k ام تیر که توسط صفحه‌ای با ارتفاع ثابت z جدا شده است (همانگونه که در شکل ۴

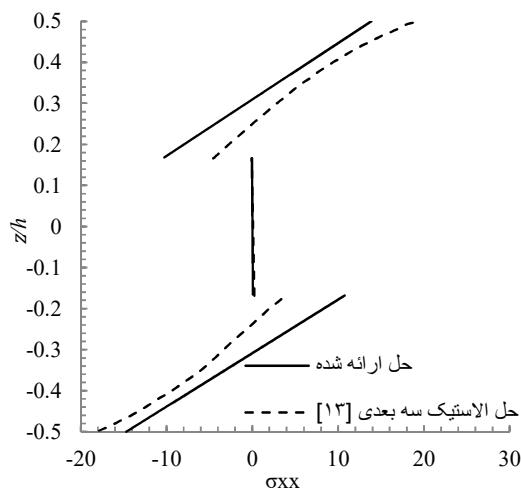
25. $G_{23} = 2E_2$ و $G_{12} = G_{13} = 5E_2$ است. نتایج مدل ارایه شده با نتایج حاصل از حل الاستیک سه بعدی [25]، در حالیکه ضرایب بستر الاستیک برابر صفر است مقایسه شده و در دو شکل 6 و 7 نشان داده شده است. لازم به ذکر است که میزان سختی فنرهای بین لایه‌ای $\eta = 5 \times 10^{-1} (m^2/N)$ در نظر گرفته شده است.



شکل 5- تیر با شرایط مرزی دو سر ساده تحت بارگذاری



شکل 6- توزیع تنش بین لایه‌های σ_{xz} برای چیدمان $[0, 90, 0]$ در $x = 0$



شکل 7- توزیع تنش بین لایه‌های σ_{xx} برای چیدمان $[0, 90, 0]$ در $x = L/2$

۳- روش مربع سازی دیفرانسیلی تعمیم یافته

به منظور تعیین جابجایی تیر کامپوزیتی معادلات (18)، (19) و (20) با استفاده از روش مربع سازی دیفرانسیلی تعمیم یافته حل شدند. در روش مربع سازی دیفرانسیلی تعمیم یافته تابع مجهول و مشتقات آن در هر گره به صورت مجموع خطی ضرایب وزنی و مقادیر تابع بیان می‌شوند [22-23]. در این روش، مشتق مرتبه اول تابع $f(x)$ را می‌توان به صورت مجموع خطی ضرایب وزن و مقادیر تابع برای همه نقاط در دامنه x تقریب زد.

$$\frac{df(x_i)}{dx} = \sum_{j=1}^N C_{ij}^{(1)} f(x_j) \quad i = 1, 2, 3, \dots, N \quad (27)$$

که N تعداد نقاط شبکه بندی شده در حوزه x مقدار $f(x_j)$ در نقطه x_j و $C_{ij}^{(1)}$ ضرایب وزن مشتق مرتبه اول است. ضریب وزن برای مشتق مرتبه اول به صورت زیر بیان می‌شود.

$$\frac{df^{(r)}(x_i)}{dx^{(r)}} = \sum_{j=1}^N C_{ij}^{(r)} f(x_j) \quad (28)$$

$$C_{ij}^{(1)} = \begin{cases} \frac{M^{(1)}(x_i)}{(x_i - x_j)M^{(1)}(x_j)} & i \neq j \\ -\sum_{k=1, k \neq i}^N C_{ik}^{(1)} & i = j \end{cases} \quad i, j = 1, 2, \dots, N$$

$M(x_i) = \prod_{k=1, k \neq i}^N (x_i - x_k)$
مقدار تقریبی مشتق مرتبه r ام تابع $f(x)$ برای حوزه x در روش مربع سازی دیفرانسیلی تعمیم یافته به صورت زیر است [23].

$$C_{ij}^{(r)} = \begin{cases} r \left(\frac{C_{ij}^{(1)} C_{ii}^{(r-1)}}{x_i - x_j} - \frac{C_{ij}^{(r-1)}}{x_i - x_j} \right) & i, j = 1, 2, \dots, N; r = 2, 3, \dots, N - 1; \\ -\sum_{j=1, j \neq i}^N C_{ij}^{(r)} & i, j = 1, 2, \dots, N; r = 1, 2, 3, \dots, N - 1; \end{cases} \quad (29)$$

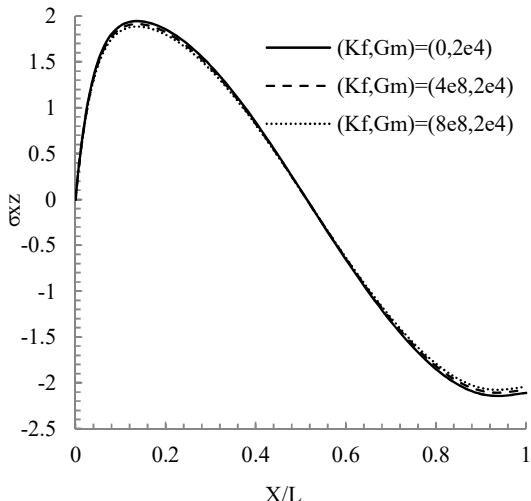
در این تحقیق از توزیع نقاط چپیشف-گوس-لوباتو [24] برای محاسبه ضرایب تابع وزنی استفاده شد.

$$x_i = \frac{1 - \cos\left(\frac{(i-1)\pi}{N-1}\right)}{2} L \quad i = 1, 2, 3, \dots, N \quad (30)$$

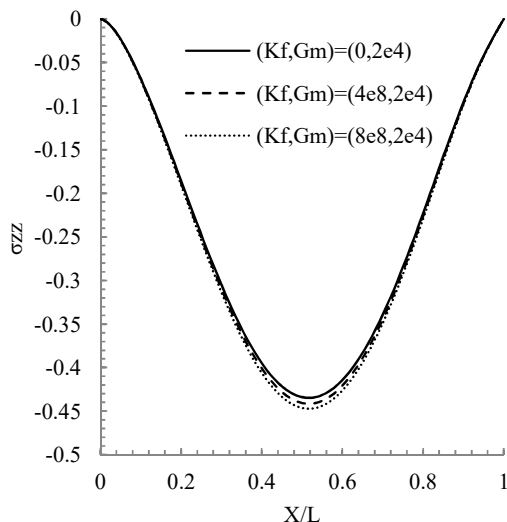
۴- نتایج عددی و بحث

۴-۱- صحنه گذاری

در این قسمت به منظور بررسی دقت روش حل در پژوهش صورت گرفته، نتایج حاصل از محاسبه تنش بین لایه‌های σ_{xz} در نقطه‌ای $x = 0$ و همچنین تنش σ_{xx} در نقطه‌ای $x = L/2$ در تیر دو سر ساده با چیدمان $[0, 90, 0]$ مطالعه شده است. سطح بالایی تیر تحت بار گسترده $P_z(x) = q_0 \sin(\pi x/l)$ قرار دارد و تنش‌های محاسبه شده نیز بوسیله q_0 به شکل $\bar{\sigma}_{ij} = \frac{\sigma_{ij}}{q_0}$ بدون بعد شده‌اند. ضخامت هر لایه از تیر $h^{(k)} = 10mm$ است، و مدل تیر مورد مطالعه در شکل 5 نشان داده شده است. در حالیکه تیر دارای طول $L = 4h$ و خصوصیات مکانیکی: $\nu_{12} = \nu_{13} = \nu_{23} = 0, E_1 = 25E_2, E_2 = 6.98(MPa)$



شکل ۹- تاثیر ضریب K_f بر تنش $\sigma_{xz}^{(k)}$ در راستای طول تیر و بین دو لایه دوم و سوم



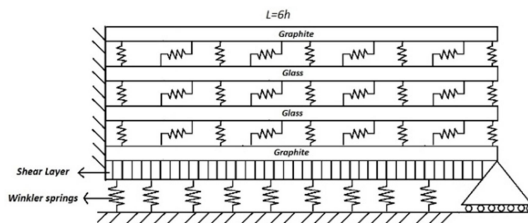
شکل ۱۰- تاثیر ضریب K_f بر تنش $\sigma_{zz}^{(k)}$ در راستای طول تیر و بین دو لایه دوم و سوم

۳-۴- اثرات ضریب برشی پاسترناک

دو شکل ۱۱ و ۱۲ تاثیر ضریب برشی بستر را بر روی تنش‌های بین لایه‌ای در سطح مشترک دو لایه دوم و سوم تیر، در حالیکه ضریب بستر وینکلر برابر $K_f = 4 \times 10^8 (N/m^2)$ است را نشان می‌دهند. شکل ۱۱ و ۱۲ نشان می‌دهند افزایش ضریب برشی باعث کاهش در مقدار تنش $\sigma_{xz}^{(k)}$ و افزایش تنش $\sigma_{zz}^{(k)}$ می‌گردد. این پدیده را می‌توان اینگونه تفسیر نمود که با افزایش ضریب برشی، جابجایی‌های مماسی کاهش یافته و کاهش جابجایی سبب کاهش تنش برشی خواهد شد.

۲-۴- اثرات ضریب وینکلر

در مطالعه انجام شده نتایج عددی حاصل شده برای تیر کامپوزیتی با زاویه الیاف ۴۵ درجه، چیدمان [Graphite/Glass/Glass/Graphite] و شرط مرزی یک سر گیردار یک سر ساده مورد بررسی قرار می‌گیرد. تیر مورد نظر در شکل ۸ نشان داده شده است.



شکل ۸- مدل ارایه شده برای محاسبه تنشهای بین لایه ای در تیر کامپوزیتی با شرایط مرزی گیردار-ساده بر روی بستر الاستیک

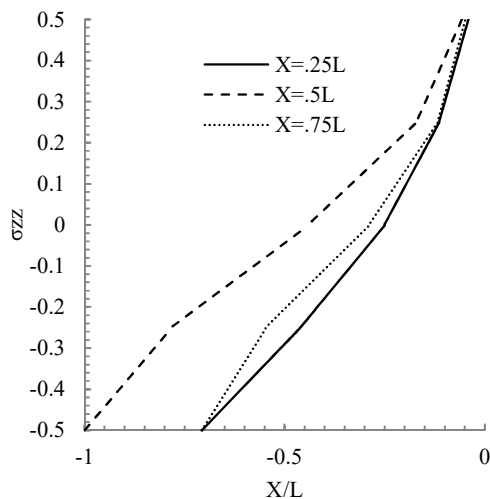
سطح بالایی تیر تحت بار گسترده $P_z(x) = q_0 \sin(\pi x/l)$ قرار دارد و تنش‌های محاسبه شده در نمودارهای مختلف نیز بوسیله q_0 بدون بعد شده‌اند. ضخامت هر لایه از تیر $h^{(k)} = 10mm$ و طول تیر $L = 6h$ می‌باشد. خصوصیات مکانیکی آن نیز در جدول ۱ بیان شده است.

جدول ۱- خواص مکانیکی Graphite/Epoxy و Glass/Epoxy

جنس	E_1 GPa	$E_2 = E_3$ GPa	$\nu_{12} = \nu_{13}$	$G_{12} = G_{13}$ GPa	G_{23} GPa
Graphite/Epoxy	۱۱۹	۸/۶۷	.۳۱	۵/۱۸	۳/۹
Glass/Epoxy	۴۸	۱۲	.۲۸	۵/۵	۳/۵

شکل‌های ۹ و ۱۰، تاثیر تغییرات ضریب بستر وینکلر را بر روی تنش‌های بین لایه‌ای $\sigma_{xz}^{(k)}$ و $\sigma_{zz}^{(k)}$ در نقطه‌ی $Z = 0$ در راستای تیر، در حالیکه ضریب برشی بستر برابر $G_m = 2 \times 10^4 (N)$ است، را نشان می‌دهد. در صورتی که دوشکل ۹ و ۱۰ با یکدیگر مقایسه شود می‌توان دریافت که مقدار حداکثر تنش $\sigma_{xz}^{(k)}$ در تیر بسیار بیشتر از حداکثر تنش $\sigma_{zz}^{(k)}$ است. همانطور که در شکل ۹ نشان داده شده است، به دلیل اینکه تیر در شرط مرزی گیردار کاملاً مقید است، تنش $\sigma_{xz}^{(k)}$ دارای مقدار صفر بوده، اما در شرط مرزی ساده تیر دارای جابجایی چرخشی بوده و تنش در آن نقطه صفر نیست، بلکه بیشترین مقدار خود را داراست. افزایش ضریب بستر وینکلر سبب کاهش مقدار تنش $\sigma_{xz}^{(k)}$ و افزایش تنش $\sigma_{zz}^{(k)}$ می‌شود. از آنجا که طول تیر شش برابر ضخامت در نظر گرفته شده است، تاثیر ضریب وینکلر روی تنش کمتر است، اما هرگاه طول تیر را افزایش دهیم تاثیر این ضریب بیشتر خواهد بود. همچنین اثرات ضریب پاسترناک بسیار بیشتر از ضریب وینکلر بوده و در این دو شکل اختلاف نمودارهای تنش با تغییرات ضریب وینکلر چشمگیر نیست.

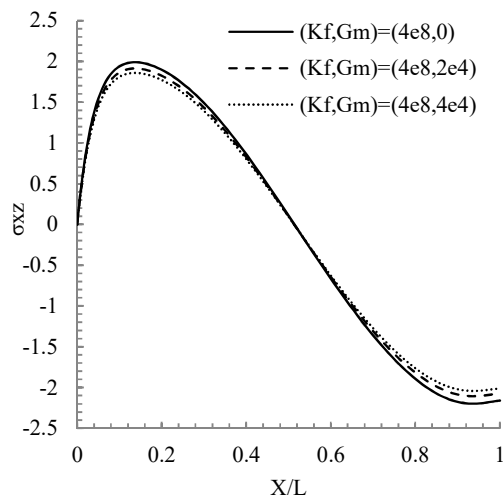
شکل ۱۴ تنش σ_{xx} در نقطه وسط تیر و در راستای ضخامت تیر، در حالیکه ضرایب عمودی و برشی بستر الاستیک به ترتیب برابر با $G_m = 2 \times 10^4 (N)$ و $K_f = 4 \times 10^8 (N/m^2)$ را برای دو چیدمان هیبرید $[Glass/Graphite]_s$ و $[Graphite/Glass]_s$ برای زاویه الیاف ۴۵ درجه، را نشان می‌دهد. همانطور که در شکل نشان داده شده است با حرکت از لایه اول به سمت لایه چهارم میزان تغییرات تنش در هر دو تیر کاهش می‌یابد، همچنین حداکثر تنش عمودی در دو تیر در سطح بالایی ایجاد شده و از نوع فشاری است. با مقایسه لایه اول به عنوان نمونه در دو چیدمان می‌توان دریافت که لایه های کرین تنش بیشتری را نسبت به لایه‌های شیشه تحمل می‌کند و تغییرات تنش در آن نیز بیشتر است.



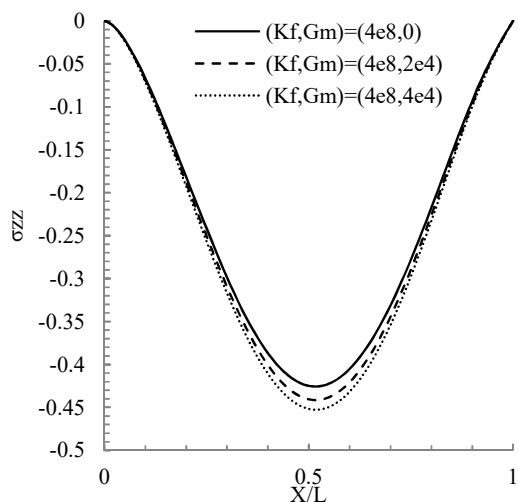
شکل ۱۳- تنش $\sigma_{zz}^{(k)}$ در سه نقطه‌ی متفاوت از تیر و در راستای ضخامت

۵- نتایج

در این پژوهش از مدل فنرهای خطی افقی و قائم، برای تعیین تنش های بین لایه‌ای در تیر کامپوزیتی تیموشنکو، که بر روی بستر وینکلر و پاسترناک قرار دارد، استفاده شده است. برای صحت گذاری و نشان دادن دقت روش حل، نتایج حاصل از حل انجام شده برای تیر با شرایط مرزی دو سر لولا، با نتایج حل الاستیک سه بعدی مقایسه شده است. مقایسه نتایج بدست آمده در این پژوهش با روش حل الاستیک سه بعدی نشان دهنده‌ی صحت و دقت روش ارائه شده می باشد. آنگاه به مطالعه اثرات تغییر ضرایب بستر وینکلر و پاسترناک بر روی تنشهای بین لایه ای پرداخته شده است. نتایج نشان می دهد تاثیر ضریب وینکلر روی تنش‌های بین لایه ای، کمتر از تاثیر ضریب پاسترناک می باشد. افزایش ضرایب بستر الاستیک سبب کاهش تنش بین لایه‌ای $\sigma_{xz}^{(k)}$ و افزایش تنش $\sigma_{zz}^{(k)}$ می‌شود. در بین تنش‌های بین لایه‌ای، مقدار و تغییرات تنش برشی بسیار بیشتر از تنش عمودی است.



شکل ۱۱- تاثیر ضریب G_m بر تنش $\sigma_{xz}^{(k)}$ در راستای طول تیر و در $Z = 0$



شکل ۱۲- تاثیر ضریب G_m بر تنش $\sigma_{zz}^{(k)}$ در راستای طول تیر و در $Z = 0$

شکل ۱۳ تنش داخل صفحه‌ای $\sigma_{zz}^{(k)}$ را در سه نقطه‌ی متفاوت $X = 0.25L$ ، $X = 0.5L$ و $X = 0.75L$ از تیر که بر روی بستر الاستیک با ضرایب عمودی و برشی $(K_f, G_m) = (4 \times 10^8 (N/m^2), 2 \times 10^4 (N))$ قرار دارد، را نشان می‌دهد. در سطح بالایی تیر به دلیل اینکه بیشترین نیرو وارد می‌شود، تنش حداکثر مقدار خود را دارد، اما در سطح زیرین تیر به دلیل قرار داشتن تیر بر روی بستر، تنش دارای مقداری غیر صفر است.

میزان تنش عمودی در وسط تیر و در نقاط مختلف از ضخامت بیشتر از تنش در دو نقطه $X = 0.25L$ و $X = 0.75L$ است. هرچند این دو نقطه از لحاظ بارگذاری و مختصات نسبت به مرکز تیر دارای تقارن هستند، اما به دلیل نامتقارن بودن شرایط مرزی جابجایی برای این دو نقطه در راستای ضخامت با یکدیگر برابر نیست، در نتیجه تنش‌ها نیز برابر نیستند.

[9] Tahani M. and Nosier A., Three-dimensional interlaminar stress analysis at free edges of general cross-ply composite laminates, *Journal of Materials and Design*, Vol. 24, pp. 121–130, 2003.

[10] Afshin M. and Taheri-Behrooz F., "Interlaminar stresses and edge effects of laminated composite of beams resting on elastic foundation, *Journal of Computational Materials*, Vol. 96, pp. 439–447, 2015

[11] Saeedi N., Sab K., Caron J., Analytical Analysis of multi-delaminated under extension using a Layerwise stress model, *The 6th International Conference on FRP Composites in Civil Engineering*, 2013.

[12] Li D., Qing G., Liu C. Y., A layerwise/solid-element method for the composite stiffened laminated cylindrical shell structures, *Journal of Composite Structure*, Vol. 98, pp. 215–227, 2013.

[13] Salamon N. J., Interlaminar stresses in a layered composite laminate in bending fibre, *Journal of science and technology*, Vol. 11, pp. 305-317, 1978.

[14] Savoia M., Laudiero F., and Tralli A., A refined theory for laminated beams Report of meeting New developments in Structural Mechanics, Catania, *Mat. Acc. Lincei 1*, pp.223-233, 1990.

[15] Ascio L. and Fraternali F., On the mechanical behavior of laminated curved beams: a simple model which takes into account the warping effects, *Rend.* 1990.

[16] Reddy J. N., A generalization of two-dimensional theories of laminated composite plates, *Communications in Applied Numerical Methods*, Meth. 3, pp. 173-180, 1980.

[17] Reddy J. N., Barbero E. J. and Teply J. L., A plate bending element based on a generalized laminate plate theory, *International Journal for Numerical Methods in Engineering* 28, pp. 2275-2292, 1989.

[18] Ascio L. and Fraternali F., A penalty model for the analysis of laminated curved beams, *Journal of Computational Materials*, Vol. 45, pp. 985-999, 1992.

[19] Fraternali F. and Reddy J. N., A penalty model for the analysis of laminated composite shells, *International Journal of Solids and Structures*, Vol. 30, No. 24, pp. 3337-3355, 1993.

[20] Baghani M., Jafari-Talookolaei R.A., Salarieh H., Large amplitudes free vibrations and postbuckling analysis of unsymmetrically laminated composite beams on nonlinear elastic foundation, *Applied Mathematical Modeling*, Vol. 35, pp. 130–138, 2011.

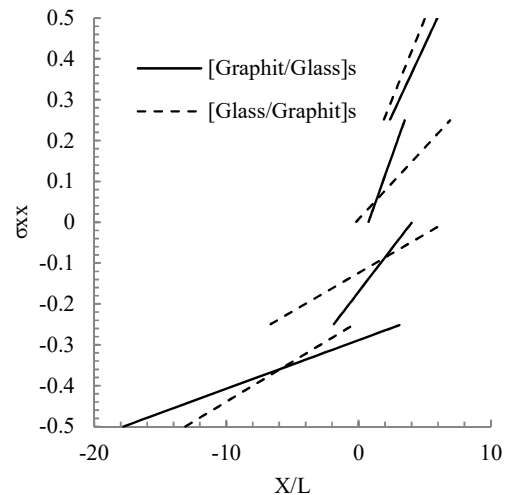
[21] Nedri K., Meiche N. El., Tounsi, A. Free Vibration Analysis of Laminated Composite Plates Resting on Elastic Foundations by Using a Refined Hyperbolic Shear Deformation Theory, *Journal of Mechanics of Composite Materials*, Vol. 49, pp. 629-640, 2014.

[22] Bert, C. W. and Malik, M., Differential quadrature method in computational mechanics: a review, *Journal of Applied Mechanics Reviews*, 1996, Vol. 49, pp. 1-27, 1969.

[23] Du H., and Lim M. K., "Application of generalized differential quadrature to vibration analysis", *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 181, pp. 279-273, 1995.

[24] Wu Y. L. and Shu C., Development of RBF-DQ method for derivative approximation and its application to simulate natural convection in concentric annuli, *Journal of Computational Mechanics*, Vol. 29, pp. 477-485, 2002.

[25] Pagano N. J., Exact solutions for composite laminates in cylindrical bending, *Journal of Composite Materials*, Vol. 42, No. 1, pp. 398–411, 1969.



شکل ۱۴- تنش $\sigma_{xx}^{(k)}$ در وسط تیر و در راستای ضخامت، به ازای دو چیدمان $[Glass/Graphite]_s$ و $[Graphite/Glass]_s$

تنش $\sigma_{zz}^{(k)}$ در هر نقطه و در سطح بالایی تیر بیشترین مقدار خود را دارد. کمترین مقدار تنش نیز در سطح زیرین تیر است، که بر اثر عکس العمل بستر ایجاد می‌شود. حداکثر تنش σ_{xx} در وسط تیر در سطح بالایی آن اتفاق می‌افتد و از نوع فشاری است. در ساختارهای هیبرید، شیشه/اپوکسی و کربن/اپوکسی، لایه های کربن نسبت به شیشه سهم بیشتری از تنش σ_{xx} را تحمل می‌کنند. همچنین تغییرات تنش در لایه های کربن بسیار بیشتر از تغییرات تنش در لایه های شیشه است. این امر به دلیل سفتی بالاتر لایه های کربن نسبت به لایه های شیشه می‌باشد.

۶- منابع

[1] Pipes R. B. and Pagano N. J., Interlaminar Stresses in Composite Laminates Under Uniform Axial Loading, *Journal of Composite Materials*, Vol. 4, No. 4, pp. 538-548, 1970.

[2] Kassapoglou C. and Lagace P. A., "An efficient method for the calculation of interlaminar stresses in composite materials, *Journal of Applied Mechanics*, Vol. 53, pp. 744-750, 1986.

[3] Kassapoglou C. and Lagace P. A., Closed-form solutions for the interlaminar stress field in angle-ply and cross-ply laminates, *Journal of Composite Materials*, Vol. 21, No. 4, pp. 292-308, 1987.

[4] Kassapoglou C., Determination of interlaminar stresses in composite laminates under combined loads, *Journal Reinforced Plastics and Composite*, Vol. 9, No. 1, pp. 33-58, 1990.

[5] Lu X., and Liu D., "n interlaminar shear stress continuity theory, In: *Proceedings of the Fifth Technical Conference of the American Society for Composites*, Lancaster PA: Technomic, pp. 479-483, 1990.

[6] Wu C. P., and Kuo H. C., Interlaminar stress analysis for laminated composite plates based on a local higher-order lamination theory, *Journal of Composite Materials*, Vol. 20, No. 4, pp. 237-247, 1992.

[7] Lee C. Y., and Liu D., An interlaminar stress continuity theory for laminated composite analysis, *Journal of Composite Materials*, Vol. 42, No. 1, pp. 69-78, 1992.

[8] Matsunaga H., Interlaminar stress analysis of laminated composite of beams according to global higher-order deformation theories, *Journal of Composite Structures*, Vol. 55, pp. 105-114, 2002.