

بهینه‌سازی توپولوژی مسئله انتقال گرمای رسانشی بروش مجموعه سطوح تراز با استفاده از معادله انتشار واکنشی و تحلیل اجزاء محدود

پژوهشگر، دانشکده مهندسی عمران، آب و محیط زیست، پردیس فنی و مهندسی عباسپور، دانشگاه شهید بهشتی، تهران، ایران
 دانشجوی دکتری، دانشکده مهندسی عمران، دانشگاه سمنان، سمنان، ایران
 استادیار، دانشکده مهندسی مکانیک و انرژی، پردیس فنی و مهندسی عباسپور، دانشگاه شهید بهشتی، تهران، ایران

حسن علی جهانگیری

علی جهانگیری*

چکیده

در این مقاله روش بهینه‌سازی توپولوژی با استفاده از روش مجموعه سطوح تراز جهت تعیین توپولوژی بهینه براساس داده‌های به‌دست آمده از حل مسئله انتقال گرمای دوبعدی با استفاده از روش تحلیل اجزاء محدود، توسعه داده شده است. در روش مجموعه سطوح تراز، مرزهای سازه به‌وسیله یک تراز از تابع اسکالر دینامیکی ضمنی از بعد بالاتر معرفی می‌شوند. همچنین از معادله آلن-چان جهت بروز رسانی متغیرهای طراحی استفاده شده است که دارای مزیت‌هایی نسبت به روش کلاسیک می‌باشد از جمله امکان ایجاد حفره‌های جدید در طی فرایند بهینه‌سازی، قابل حذف شدن مرحله مربوط به دوباره مقداردهی و پایدار باقی ماندن مسئله بهینه‌سازی از لحاظ عددی. تابع هدف، کمینه کردن ظرفیت توان گرمایی بوده و آنالیز حساسیت در چندین مسئله نمونه انتقال گرما با استفاده از روش مجموعه سطوح تراز جهت بهینه‌سازی توپولوژی به همراه روش تحلیل اجزاء محدود بررسی شده است. سرانجام، نتایج حل شش مسئله نمونه انتقال گرما شامل بار گرمایی نقطه‌ای، بار گرمایی گسترده، دمای معلوم غیر صفر روی مرزها و ترکیبی از این سه جهت نشان دادن اعتبار روش مذکور ارائه شده است. **واژه‌های کلیدی:** انتقال گرما، بهینه‌سازی توپولوژی، روش مجموعه سطوح تراز، معادله انتشار واکنشی، آنالیز حساسیت، اجزاء محدود.

Topology optimization of heat conduction problem via Level-Set method based on Reaction-Diffusion equation and the Finite Elements analysis

H. A. Jahangiri

Faculty of Civil, Water and Environmental Engineering, Shahid Beheshti University, Tehran, Iran

A. Jahangiri

Faculty of Civil Engineering, Semnan University, Semnan, Iran

Faculty of Mechanical & Energy Engineering, Shahid Beheshti University, A.C., Tehran, Iran

Abstract

In this paper a level set-based topological optimization method is developed for determining the optimized topology based on the data obtained from solving two-dimensional heat conduction problem using finite elements method. In level-set method, all structural boundaries are parameterized by a level of dynamic implicit scalar function of higher order. Moreover, Allen-Chan equation has been used to update the design variables which have advantages compared to the classic method including letting new holes to be created during the optimization process, ability of removing the re-initialization step and the numerical stability of optimization process. In the present study, the objective function is to minimize thermal power capacity. Sensitivity analysis has been investigated on several heat conduction problems to optimize the topology using level-set and finite element methods. Finally, topological optimization results obtained from 6 heat conduction problems including point thermal load, spread thermal load, non-zero specified temperature on boundaries and the combination of these 3 cases have been presented to demonstrate the validity of the proposed method.

Keywords: Heat transfer, Topology Optimization, Level-set Method, Reaction-Diffusion equation, Sensitivity Analysis, Finite Elements.

۱- مقدمه

دارای لوله‌های پرده‌دار را در شرایط یخ زدگی بهینه سازی کردند. وو و همکارانش [۴] از روش شبیه‌سازی شبکه درختی جهت بهینه‌سازی مسئله انتقال گرمای رسانشی در تجهیزات و قطعات الکترونیکی استفاده نمودند. آزی و همکارانش [۵] از پیشگامان مبحث بهینه‌سازی توپولوژیکی جهت حل مسائل سیالاتی و حرارتی می‌باشند. مشتقات توپولوژیکی بعنوان یک ابزار برای بهینه‌سازی شکل، توسط چالیس و همکارانش [۶] مورد استفاده قرار گرفت و این روش‌ها توسط سیگموند و ماووت [۷] جهت افزودن اثر اینرسی توسعه داده شد.

اخیراً بهینه‌سازی توپولوژیکی در شاخه‌های مختلف علوم مهندسی از جمله پدیده‌های انتقال، شاره‌ها و سازه‌ها و امواج مورد توجه قرار گرفته است. یکی از این موارد بهینه سازی کیفیت انتقال گرما در دامنه محاسباتی آن می‌باشد. لورنزی و همکارانش [۱] به بررسی هندسه بهینه مسیره‌های انتقال گرمای رسانشی در یک مقاومت گرمایی تماسی جسم دارای تولید گرمای خنک شونده، پرداختند. تام و همکارانش [۲] در یک تحلیل جامع، طراحی مبادله‌کن‌های گرمایی را بهینه‌سازی نمودند. یانگ و همکاران [۳] فاصله بین پرده‌های یک مبادله‌کن گرمایی

* نویسنده مکاتبه کننده، آدرس پست الکترونیکی: a_jahangiri@sbu.ac.ir

محدود به‌همراه روش مجموعه سطوح تراز^۳ را در مورد این مسئله به خوبی توسعه داد.

تاکیزاوا [۲۰] روش phase-field ارائه کرده است. در روش phase-field نیز از معادله آلن-چان به‌منظور بروز رسانه متغیرهای طراحی استفاده می‌شود. همچنین هیوز و همکارانش [۲۱] روش phase-field را با روش تحلیل آیزوژئومتریکی ترکیب کرده و همچنین جهانگیری و توکلی [۲۲] از روش تحلیل آیزوژئومتریکی به‌منظور تعیین توابع مجهول استفاده کرده‌اند. یامادا و همکارانش [۲۳] نیز روش مجموعه سطوح تراز را با یک سطح انرژی ساختگی موسوم به پارامتر انرژی چان-هیلارد ترکیب کردند و نشان دادند که معادله حاصل همچنان از لحاظ عددی پایدار خواهد ماند. این پارامتر نقش مهمی در نرم و هموار کردن مرزها در مسئله بهینه‌سازی ایفا می‌کند [۲۴ و ۲۵]. در این مقاله نیز سعی شده تا با ترکیب روش مجموعه سطوح تراز با معادله آلن-چان ضمن بهره‌مندی از دقت و ویژگی‌های روش مجموعه سطوح تراز به منظور بهینه‌یابی، مشکلات این روش از جمله عدم ایجاد حفره در طی فرایند بهینه‌سازی و نیز عدم ثبات سطح تراز صفر در حین مرحله دوباره مقدار دهی را با حذف مرحله دوباره مقداردهی رفع کرده و روش بهینه‌سازی جدید را به ارائه مثال‌های متعددی در مسائل انتقال گرمای رسانشی بسط و گسترش داد. روش مجموعه سطوح تراز نیز زیرمجموعه روش تابع ضمنی می‌باشد. مزیت این روش بر روش‌های دیگر این است که با توجه به پیوسته در نظر گرفتن تابع مجموعه سطوح تراز به عنوان متغیر طراحی، دقت تحلیل حساسیت به مراتب افزایش پیدا می‌کند. همچنین برای ایجاد پیوستگی در تابع مورد نظر از همان خاصیت آیزوپارامتریکی روش اجزاء محدود استفاده شده است یعنی از همان توابع مورد استفاده برای تقریب تابع مجهول و مدل‌سازی هندسه معلوم، برای تشکیل رویه پیوسته مجموعه سطوح تراز نیز استفاده شده است. در حالیکه در روش‌هایی نظیر روش تکامل یافته ساختاری یک و دو جهته که در پژوهش‌های گذشته (پژوهش گاوو و همکاران [۱۵]) استفاده شده است؛ فقط نقاط گرهی به عنوان متغیرهای طراحی در نظر گرفته و فقط به همین نقاط مقادیر پیوسته بین صفر و یک به عنوان چگالی مصالح اختصاص داده شده است.

در این پژوهش، یک مورد از مثال‌هایی که در پژوهش پیشین جهانگیری [۱۹] با پژوهش گاوو و همکارانش [۱۵] مقایسه شده بود، جهت بهینه‌سازی توپولوژی، در مسئله انتقال گرمای رسانشی پایدار، با استفاده از روش اجزاء محدود به‌همراه روش مجموعه سطوح تراز اصلاح شده، بررسی و مقایسه می‌گردد. با استفاده از روش اجزاء محدود به همراه روش مجموعه سطوح تراز و در نظر گرفتن تغییرات دما و منبع گرمایی که می‌تواند شامل منبع گرمای سطحی و یا منبع گرمای حجمی و یا هر دو بطور همزمان باشد در ۶ مسئله مختلف، به بهینه‌سازی توپولوژی انتقال گرمای رسانشی پایدار پرداخته شده که در آن تابع هدف جهت بهینه‌سازی توپولوژی، کمینه کردن ظرفیت توان گرمایی در فرآیند بهینه‌سازی تعریف شده است. همچنین از معادله انتشار واکنشی به عنوان معادله بروز رسان استفاده شده و با حذف تابع دیراگ وابستگی حل به فاصله علامتدار بودن تابع مجموعه سطوح تراز

روش تکامل یافته ساختاری^۱ توسط لی ژانگ و لیو [۸] جهت طراحی توپولوژی انتقال گرمای رسانشی استفاده شد. در کار ایشان روند بهینه‌سازی، توسط حذف تدریجی بخش کوچکی از مواد هادی گرما که ارتباط اندکی با تابع هدف داشته‌اند، محقق شده است.

ویی و همکارانش [۹] توسط تئوری سازمان یافتگی، شبکه‌های درختی سازمان یافته انتقال گرما را بررسی نمودند. ایشان مسیرهای هادی را جهت کاهش مقاومت گرمایی ایجاد نمودند.

چنگ و همکارانش [۱۰] روش بهینه‌سازی مصنوعی را برای مسیرهای موثر انتقال گرما ارائه نمودند. ایده اصلی روش بهینه‌سازی مصنوعی در خصوص مواد دارای رسانایی گرمایی بالا که در آن گرادیان دمای بالا وجود دارد به تدریج شکل گرفته است.

همچنین روش همگن‌سازی نیز جهت بهینه‌سازی توپولوژی توسط آلایر [۱۱] توسعه یافته است.

لی و همکارانش [۱۲] از روش بهینه‌سازی تکامل یافته توپولوژیکی جهت کاهش دمای میدان‌های رسانش گرمایی استفاده نمودند. که در آن معیار بهینه‌سازی توسط انتگرالگیری مقدار شار المان تعریف شده است.

ژو و همکارانش [۱۳] به طراحی بهینه توپولوژیکی یک جسم هادی گرما پرداختند که در پژوهش ایشان مسئله طراحی مسیر رسانش گرما در قطعات الکترونیکی مورد مطالعه قرار گرفت. گرسبورگ و هانسن [۱۴] مسائل بهینه‌سازی توپولوژی انتقال گرما با استفاده از روش تحلیل حجم محدود را بررسی کردند.

گاوو و همکارانش [۱۵]، در طول تکرار، اثرات بار گرمایی وابسته به طراحی در دامنه محاسباتی را در نظر گرفتند. در نتیجه، تابع هدف در نظر گرفته شده در حل بهینه این مسئله غیر یکنواخت شده است. در مقاله ایشان روش تکامل یافته ساختاری دو جهته^۲ اصلاح شده، توسعه یافته است و نتایج به‌روشنی اثر بار گرمایی وابسته به طراحی و تأثیر محدودیت حجم در حل بهینه را نشان داده است.

روش مجموعه سطوح تراز توسط لوو و همکارانش [۱۶] به منظور حل معادلات حاکم بر مرزهای دینامیکی از جمله انتشار امواج مورد استفاده قرار گرفت ولی ایده اصلی استفاده از این روش در بهینه‌سازی توپولوژیکی برای نخستین بار توسط وانگ و همکارانش [۱۷] ارائه شد. کارهای وانگ و همکارانش روش‌های عددی را توسعه داده است. در مقالات آن‌ها مثال‌های عددی زیادی حل گردیده تا قدرت و عملکرد این روش را ثابت کند و اهمیت ادامه تحقیقات در این روش را نشان دهد. همچنین در کارهای آلایر و همکارانش [۱۸]، یک چهارچوب محاسباتی برای بهینه‌سازی شکل و توپولوژی با روش مجموعه سطوح تراز معرفی شده که از گرادیان شکل، برای رشد تابع مجموعه سطوح تراز استفاده شده است و الگوریتم عددی، برای حل معادله مجموعه سطوح تراز ارائه گردیده است.

جهانگیری [۱۹] جهت مقایسه با پژوهش گاوو و همکارانش [۱۵]، سه مورد از مثال‌های ایشان را در مسئله بهینه‌سازی توپولوژی انتقال گرمای رسانشی پایدار را انتخاب نمود و روش عددی مبتنی بر اجزاء

^۳Level set Method (LSM)

^۱Evolutionary Structural Optimization (ESO)

^۲Bidirectional Evolutionary Structural Optimization (BESO)

$$\min: C = \sum \int \frac{1}{2} \nabla T \cdot (k \nabla T) d\Omega$$

s. t:

$$V \leq V_{max}$$

$$X_i = \begin{cases} 0 & \text{void} \\ 1 & \text{solid} \end{cases} \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (3)$$

در آن X متغیر طراحی است که عددی باینری بوده و 0 آن به منزله عدم وجود المان و 1 به معنی وجود المان مادی است. V حجم کنونی مصالح و V_{max} قید حد اکثر حجم مصالح مورد نظر می‌باشد.

۲-۲- معرفی روش مجموعه سطوح تراز (Level-Set)

روش مجموعه سطوح تراز، یک چارچوب کلی برای محاسبه عددی ارتباط استنتاجی با استفاده از یک بیان ضمنی است. ایده اولیه این روش، در بهینه‌سازی توپولوژی سازه جهت ارائه یک منحنی یا سطحی که دارای تراز صفر در توابع چند بعدی باشد، شکل گرفت [۱۷ و ۱۸]. سپس تغییر شکل منحنی و سطح جهت تغییر شکل این تابع استفاده شد. بنابراین تابع ضمنی مورد استفاده $(\phi(x))$ بگونه‌ای خواهد بود که در یک دامنه حل ارائه شده مانند Ω با یک مرز معین، شرایط معادله (۴) را ارضاء می‌نماید.

در این مسئله این تابع همان متغیرهای مجموعه سطوح تراز یا متغیرهای طراحی خواهد بود.

$$\begin{cases} +1 < \phi(x) < 0 & , \quad x \in \Omega^+ \text{ (Material)} \\ \phi(x) = 0 & , \quad x \in \partial\Omega \text{ (Boundary)} \\ -1 < \phi(x) < 0 & , \quad x \in \Omega^- \text{ (Hole)} \end{cases} \quad (4)$$

بردار یکه نرمال محلی n و انحنای منحنی $\nabla \cdot n$ به ترتیب به صورت روابط (۵) و (۶) ارائه می‌شوند:

$$n = \frac{\nabla \phi}{|\nabla \phi|} \quad (5)$$

$$\kappa = \nabla \cdot n = \text{div} \left(\frac{\nabla \phi}{|\nabla \phi|} \right) \quad (6)$$

جهت تکمیل معادلات حاکم، تابع سطوح تراز $\phi(x)$ بر روی منحنی یا سطح مرزی با استفاده از معادله همپلتن-ژاکوبی به شکل رابطه (۷) توسعه داده می‌شود.

$$\frac{\partial \phi(x, t)}{\partial t} - v_n |\nabla \phi(x, t)| = 0 \quad (7)$$

بخش مهمی از روش مجموعه سطوح تراز، انتخاب مقدار اولیه مناسب ϕ_0 و سرعت نرمال v_n است. همچنین در این روش از توابع هویساید H و تابع دلتای دیراک δ به‌عنوان ابزار محاسباتی به شرح روابط (۸) و (۹) استفاده می‌شود.

$$H(\phi(x)) = \begin{cases} 1, & \phi \geq 0 \\ 0, & \phi < 0 \end{cases} \quad (8)$$

$$\delta(\phi(x)) = \frac{dH(\phi(x))}{d\phi} = \delta(\phi) |\nabla \phi| \quad (9)$$

بدین ترتیب دامنه محاسباتی و مرزهای دامنه به صورت روابط (۱۰) و (۱۱) تعریف خواهند شد:

$$\Omega = \{x: H(\phi(x)) = 1\} \quad (10)$$

از بین رفته است که در این صورت برای فرایند بهینه‌سازی، اجازه ایجاد حفره مورد نیاز در نواحی مستعد به‌صورت خودکار فراهم خواهد شد.

۲- فرمول‌بندی مسئله بهینه‌سازی توپولوژی

۲-۱- معرفی مسئله بهینه‌سازی توپولوژی انتقال گرمای رسانشی

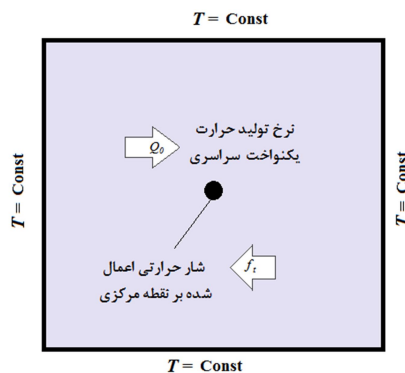
در این مقاله مسئله انتقال گرمای رسانشی پایدار درون یک محفظه بسته و با شرایط مرزی دریکه در نظر گرفته شده است. در این مسئله که عبارت منبع گرمایی به شکل‌های منبع نقطه‌ای و گسترده می‌تواند در دامنه حل وجود داشته باشد، معادله کلی انتقال گرما و شرایط مرزی آن به شکل رابطه (۱) نوشته می‌شود:

$$\begin{aligned} \nabla \cdot (k \nabla T) - f &= 0 \text{ in } \Omega \\ T &= \text{Const on } \partial\Omega \end{aligned} \quad (1)$$

در این معادله، T ، k و f به ترتیب دما، رسانایی گرمایی و منبع گرمایی می‌باشد. شار گرمایی نیز بصورت $q = k \nabla T$ محاسبه می‌گردد. در رابطه فوق f می‌تواند شامل منبع گرمای سطحی f_i (روی نقاط شبکه بندی اجزاء محدود اعمال می‌شود) و منبع گرمای حجمی f_b (در کل المانهای اجزاء محدود بطور یکنواخت اعمال می‌شود) و یا هر دو بطور همزمان باشد. زمانی که منبع گرمای حجمی مد نظر باشد مقدار آن از رابطه (۲) قابل محاسبه است:

$$f_b = \int_{\Omega^e} Q_0 H(\phi) N_i d\Omega^e \quad (2)$$

در رابطه فوق Q_0 و N_i به ترتیب آهنگ تولید گرمای حجمی موجود و تابع شکل روش تحلیل اجزاء محدود می‌باشد. مفهوم شرط مرزی دیریکله القاء شده نیز به معنی وجود دمای ثابت $T = \text{Const}$ بر روی مرزهای محفظه بسته $(\partial\Omega)$ مطابق شکل ۱ می‌باشد.



شکل ۱- طرحواره مسئله‌های طراحی بهینه‌سازی انتقال گرمای رسانشی

در مسئله حاضر هدف از بهینه‌سازی کمینه کردن تولید گرمایی برای مقدار معینی از ماده می‌باشد. حجم مصالح در این مسئله نیز مشابه طراحی بهینه توپولوژی سازه‌ها است؛ یعنی در آن متغیرهای چگالی نشان‌دهنده وجود و یا عدم وجود ماده در دامنه حل هستند. با این تعاریف تابع هدفی که بایستی کمینه گردد، با استفاده از رابطه (۳) محاسبه می‌شود [۱۵ و ۱۹]:

معادله اولر- لاگرانژ مربوط به هر نقطه به صورت رابطه (۱۹) بیان می‌شود [۱۹]:

$$\left[\frac{1}{2} \nabla T \cdot (k \nabla T) + \lambda \right] \delta(\phi) |\nabla \phi| = 0 \quad (19)$$

در اکثر موارد حل مستقیم معادله فوق غیرممکن است لذا یکی از روش های عمومی برای حل آن استفاده از معادله مجموعه سطوح تراز مطابق معادله (۲۰) و حل عددی آن با استفاده از شرایط اولیه مشخص می‌باشد [۱۹].

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} - \left[\frac{1}{2} \nabla T \cdot (k \nabla T) + \lambda \right] \delta(\phi) |\nabla \phi| = 0 \quad (20)$$

لذا سرعت نرمال معادله مجموعه سطوح تراز به شکل معادله (۲۱) قابل بیان است [۱۹]:

$$v_n = \left[\frac{1}{2} \nabla T \cdot (k \nabla T) + \lambda \right] \delta(\phi) \quad (21)$$

همچنین با استفاده از رابطه (۲۱) ضریب لاگرانژ قید حجم λ به صورت معادله (۲۲) قابل محاسبه است [۱۹]:

$$\lambda = - \frac{\int_{\Omega} \left[\frac{1}{2} \nabla T \cdot (k \nabla T) \right] \delta^2(\phi) |\nabla \phi| d\Omega}{\int_{\Omega} \delta^2(\phi) |\nabla \phi| d\Omega} \quad (22)$$

همچنین در صورت مد نظر قرار دادن منبع گرمای حجمی، سرعت نرمال مشابه با روند فوق با استفاده از معادله (۲۳) قابل محاسبه است [۱۹]:

$$v_n = \left[\frac{1}{2} \nabla T \cdot (k \nabla T) - Q_0 T + \lambda \right] \delta(\phi) \quad (23)$$

حل عددی رابطه (۲۰) دارای مشکلاتی است که از آن جمله می‌توان به ملزم بودن دوباره مقداردهی در هر تکرار به منظور ایجاد تابع فاصله علامت‌دار اشاره کرد. با توجه به این که مرحله دوباره مقداردهی جز مراحل اصلی در روش کلاسیک است ولی به دلیل وجود تقریب در حل عددی منجر به ایجاد اشکال در توپولوژی بهینه و تغییرات نامطلوب مرز در حین مرحله دوباره مقداردهی و عدم ثبات سطح تراز می‌شود که خود تاثیرات نامطلوب روی تحلیل حساسیت گذاشته و مانع از همگرایی کامل و کاهش دقت حل می‌گردد. مشکل دیگر این است که روش کلاسیک بدلیل وابسته بودن به مرحله دوباره مقداردهی و حل توسط معادله همیلتون-ژاکوبی توانایی ایجاد حفره جدید را نداشته و نیازمند ایجاد حفره دلخواه اولیه در ورودی اولیه می‌باشد. برای غلبه بر این ایرادات می‌بایست تابع هدف با اضافه کردن یک پارامتر تنظیم کننده انرژی اصلاح شود. لذا معادله جدید با اضافه کردن پارامتر تنظیم سطح انرژی بصورت زیر قابل بیان است:

$$\bar{J}(\phi, \lambda) = J(\phi, \lambda) + \int_{\Omega} \frac{1}{2} \tau |\nabla \phi|^2 d\Omega \quad (24)$$

در معادله فوق $\bar{J}(\phi, \lambda)$ تابع هدف تنظیم شده و $\tau > 0$ پارامتر تنظیم می‌باشد که وظیفه هموار کردن مرزها را بر عهده خواهد داشت.

$$\partial \Omega = \{x: \delta(\phi(x)) > 0\} \quad (11)$$

با توجه به موارد ذکر شده، برای یک تابع دلخواه $F(x)$ ، انتگرال حجمی روی دامنه محاسباتی به شکل رابطه (۱۲) نگاشته می‌شود و اگر $F(x) = 1$ در نظر گرفته شود، انتگرال مذکور طبق رابطه (۱۳) حجم دامنه را محاسبه خواهد نمود.

$$\int_{\Omega} F(x) H(\phi(x)) d\Omega \quad (12)$$

$$V(\Omega) = \int_{\Omega} H(\phi(x)) d\Omega \quad (13)$$

انتگرال تابع $F(x)$ روی مرز دامنه محاسباتی نیز با تعریف مشتق سوئی تابع هویساید به شکل رابطه (۱۴) نوشته می‌شود:

$$\int_{\Gamma} F(x) ds = \int_{\Omega} F(x) \delta(\phi(x)) |\nabla \phi(x)| d\Omega \quad (14)$$

جهت استفاده در محاسبات عددی، در این پژوهش از توابع هویساید و دیراک هموار شده به ترتیب در روابط (۱۵) و (۱۶) استفاده شده است. که در آن d عرض تقریب‌سازی تابع هویساید می‌باشد.

$$H(x) = \begin{cases} \varepsilon, & x \leq -d \\ \frac{1}{2} \left(1 + \sin \left(\frac{\pi x}{2d} \right) \right), & -d < x < d \\ 1, & x \geq d \end{cases} \quad (15)$$

$$\delta(x) = \begin{cases} \frac{\pi}{4d} \cos \left(\frac{\pi x}{2d} \right), & |x| \leq d \\ 0, & |x| > d \end{cases} \quad (16)$$

در رابطه فوق $\varepsilon > 0$ مقدار ثابت بسیار کوچکی به منظور پایداری حل معادله تعادل در روش اجزای محدود می‌باشد.

۲-۳- آنالیز حساسیت

به طور کلی آنالیز حساسیت به صورت مشتق توابع هدف و قیود مسئله بهینه‌سازی نسبت به متغیرهای طراحی به منظور نیل به حل بهینه تعریف می‌شود. به منظور اعمال روش مجموعه سطوح تراز، برخی از داده‌های گرادینان تابع هدف مورد نیاز است. از این رو آنالیز حساسیت در مورد مثال‌های این مسئله انتقال گرما با استفاده از مشتق تابع هدف و قیود به شکل تابع لاگرانژی نسبت به متغیرهای طراحی بیان می‌شود. برای این منظور شکل لاگرانژی مسئله بهینه‌سازی مورد نظر به شکل معادله (۱۷) بازنویسی می‌شود [۱۹].

$$J(\phi, \lambda) = \int_{\Omega} \left[\frac{1}{2} \nabla T \cdot (k(\phi) \nabla T) + \lambda (V(\phi) - V_{\max}) \right] d\Omega \quad (17)$$

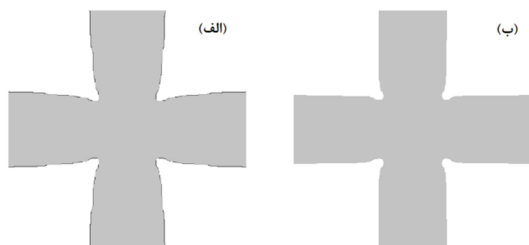
که در رابطه (۱۸)، λ ضریب لاگرانژ قید حجم می‌باشد.

تغییرات ϕ در رابطه (۱۷) روی مرز مصالح به صورت معادله (۱۸) محاسبه می‌شود [۱۹]:

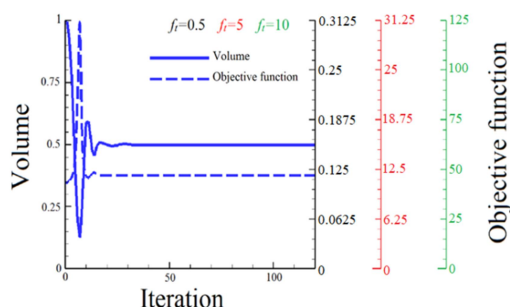
$$\begin{aligned} \delta_{\phi} J &= \int_{\Omega} \left[\frac{1}{2} \nabla T \cdot \left(\frac{\partial k(\phi)}{\partial \phi} \nabla T \right) + \lambda \frac{\partial H(\phi)}{\partial \phi} \right] \delta \phi |_{\phi=0} d\Omega \\ &= \int_{\Omega} \left[\frac{1}{2} \nabla T \cdot \left(\frac{\partial k(\phi)}{\partial \phi} \nabla T \right) + \lambda \frac{\partial H(\phi)}{\partial \phi} \right] |\nabla \phi| \delta \ell d\Omega \\ &= \int_{\Omega} \left[\frac{1}{2} \nabla T \cdot (k \nabla T) + \lambda \right] \delta(\phi) |\nabla \phi| \delta \ell d\Omega \end{aligned} \quad (18)$$

۱-۳- معرفی مثال شماره ۱ (اثر وجود منبع گرمایی نقطه-ای تنها و بررسی وجود حفره اولیه در توپولوژی نهایی)

در این مثال اثر تغییرات قدرت فقط یک منبع گرمایی نقطه‌ای که در نقطه مرکزی شبکه‌بندی دامنه محاسباتی اعمال می‌گردد، به صورت سه مقدار $f_i=0/5$ ، $f_i=5$ و $f_i=10$ در نظر گرفته شده است. شایان ذکر است مابقی پارامترها مانند دمای مرزها معادل $T=0$ و آهنگ تولید گرمای یکنواخت در سرتاسر دامنه محاسباتی معادل $Q_{10}=0$ لحاظ شده است.



شکل ۳- نتایج بهینه مثال ۱: (الف) مراجع [۱۳، ۱۵ و ۱۹]، (ب) مطالعه حاضر



شکل ۴- نمودار روند همگرایی برای تابع هدف و قید حجم

از آنجا که در این مثال فقط یک بار گرمایی متمرکز در وسط دامنه در نظر گرفته شده است، حل مطلوب یافتن کوتاه‌ترین مسیرهای پخش گرما از مرکز دامنه به سمت هر چهار مرز خواهد بود. این مسیرها در شکل ۳ بدست آمده است و همانطور که مشخص است حل عددی حاضر شبیه به یک پیکربندی صلیبی مشابه حل این مسئله در مراجع [۱۳، ۱۵ و ۱۹] است. همانطور که از نمودار روند همگرایی (شکل ۴) مشخص است مقدار به دست آمده برای تابع هدف در کسر حجمی مشخص ۵۰ درصد، حدود ۰/۱ محاسبه شده است که اختلاف آن با مقدار محاسبه شده در پژوهش جهانگیری [۱۹] بسیار ناچیز می‌باشد. نکته قابل توجه این است که تغییر منبع گرمایی نقطه‌ای در مرکز شبکه دامنه محاسباتی، تاثیری بر پیکربندی بهینه نهایی نخواهد داشت و توپولوژی بهینه در هر سه حالت منبع گرمایی نقطه‌ای، همان پیکربندی صلیبی شکل ۳ بدست آمده است. این موضوع به دلیل عدم تاثیر منبع گرمایی نقطه‌ای بر کوتاه‌ترین مسیرهای پخش گرما از مرکز دامنه به سمت هر چهار مرز خواهد بود و افزایش مقدار منبع نقطه‌ای فقط در مقادیر تابع هدف بهینه تفاوت ایجاد خواهد نمود. اندک تفاوتی که در مقایسه شکل‌های ۳- (الف) و ۳- (ب) مشاهده می‌گردد، ناشی

لذا معادله برورسانی متغیرهای طراحی مسائل بهینه سازی اصلاح شده در این روش بصورت زیر بدست خواهد آمد.

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} - \left[\frac{1}{2} \nabla T \cdot (k \nabla T) + \lambda \right] \delta(\phi) |\nabla \phi| - \tau \Delta \phi = 0 \quad (25)$$

در رابطه فوق Δ عملگر لاپلاس تابع مجموعه سطوح تراز می‌باشد. با توجه به اینکه $\delta(\phi)$ منجر به انتگرال‌گیری فقط روی مرز مجموعه سطوح تراز می‌شود لذا می‌توان به جای آن از سرعت نرمال اصلاح شده بصورت زیر استفاده نمود:

$$\bar{v}_n = \left[\frac{1}{2} \nabla T \cdot (k \nabla T) - Q_0 T + \lambda \right] \quad (26)$$

همان‌طور که مشخص است این‌گونه تعریف سرعت نرمال با حذف تابع دلتای دیراک منجر به گسترش سرعت نرمال در کل دامنه می‌شود که به چگالی مشتقات شکل تابع لاگرانژ موسوم است. لذا در نهایت حل بهینه با استفاده از رابطه زیر قابل حصول می‌باشد:

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} = \bar{v}_n + \tau \Delta \phi \quad (27)$$

۳- نتایج مثال‌های عددی مسئله بهینه‌سازی

توپولوژی انتقال گرما

همان‌طور که پیش از این ذکر شد، در این مقاله، از مثال‌های استفاده شده در پژوهش گاوو و همکارانش [۱۵] جهت مقایسه و تحلیل بهره گرفته می‌شود.

شایان ذکر است که در پژوهش‌های پیشین ورودی اولیه برای تمامی مسائل مطابق شکل ۲- (الف) شامل ۲۵ حفره بوده لذا شروع فرایند بهینه سازی با حجمی معادل با ۷۰٪ حجم کل دامنه آغاز شده است ولی در این پژوهش مطابق شکل ۲- (ب) ورودی اولیه برای تمامی مسائل بصورت غیرمقید و از حجم ۱۰۰٪ شروع می‌شود و در انای حل بهینه می‌گردد و تابع هدف نیز همان کمینه کردن ظرفیت توان گرمایی در دامنه محاسباتی می‌باشد. دامنه طراحی شامل محفظه بسته مربعی شکل واحد مطابق شکل ۱ در نظر گرفته شده است. کل دامنه با ۱۶۰۰ المان مربعی متقارن ۴ گرهی شبکه‌بندی شده لذا در کل شامل ۱۶۸۱ نقطه گرهی می‌باشد. لذا مقادیر h ، ϵ ، τ و d به ترتیب برابر با $0/025$ ، 10^{-6} ، 10^{-6} و $0/2h$ در نظر گرفته شده است. رسانایی گرمایی یک ماده با رسانش گرمای بسیار بالا در این محفظه معادل ۱ لحاظ شده و شرایط مرزی دریاچه بطور یکسان به صورت دمای صفر روی همه مرزهای خارجی اعمال شده است. همچنین قید حداکثر حجم مصالح برای تمامی مسائل برابر با ۵۰٪ حجم کل سازه در نظر گرفته شده است.



شکل ۲- سازه ورودی اولیه

از تفاوت در روش حل عددی و اختلاف بین حل با استفاده از بهینه سازی در روش حاضر و تقریب های عددی تابع فاصله علامتدار در روش های کلاسیک مراجع پیشین می باشد. وجود حفره اولیه در روش های قبلی خود روی نتایج نهایی تاثیرگذار بوده است ولی در روش حاضر حفره اولیه وجود ندارد و بهینه سازی از حجم ۱۰۰٪ شروع شده و حل عددی نواحی مستعد ایجاد حفره را در حین بهینه سازی پیدا می کند.

در شکل ۴ نمودار روند همگرایی مربوط به قید حجم و تابع هدف مسئله مثال ۱ نشان داده شده است. همانطور که واضح است مسئله مزبور در کمتر از ۱۰۰ تکرار اول حل شده است که خود حاکی از کیفیت تحلیل می باشد لذا ادامه فرایند فقط به منظور کنترل پایداری حل انجام یافته است.

در شکل ۴ نمودار روند همگرایی مربوط به قید حجم و تابع هدف مسئله مثال ۱ نشان داده شده است. همانطور که واضح است مسئله مزبور در کمتر از ۱۰۰ تکرار اول حل شده است که خود حاکی از کیفیت تحلیل می باشد لذا ادامه فرایند فقط به منظور کنترل پایداری حل انجام یافته است.

در این مثال اثر تغییرات فقط آهنگ تولید گرمای یکنواخت در سرتاسر دامنه محاسباتی به صورت سه مقدار $Q_{10}=5$, $Q_{10}=10$ و $Q_{10}=15$ ، در نظر گرفته شده است. شایان ذکر است مابقی پارامترها مانند دمای مرزها معادل $T=0$ و منبع گرمایی نقطه ای که در نقطه مرکزی شبکه بندی دامنه محاسباتی معادل $f_i=0$ لحاظ شده است.

۲-۳- معرفی مثال شماره ۲ (اثر وجود فقط شار گرمایی گسترده در سرتاسر دامنه حل)

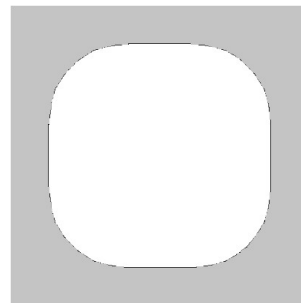
در این مثال اثر تغییرات فقط آهنگ تولید گرمای یکنواخت در سرتاسر دامنه محاسباتی به صورت سه مقدار $Q_{10}=5$, $Q_{10}=10$ و $Q_{10}=15$ ، در نظر گرفته شده است. شایان ذکر است مابقی پارامترها مانند دمای مرزها معادل $T=0$ و منبع گرمایی نقطه ای که در نقطه مرکزی شبکه بندی دامنه محاسباتی معادل $f_i=0$ لحاظ شده است. همانطور که در شکل ۵ دیده می شود بر اساس نتیجه بهینه و مطلوب، مسیرهای پخش گرما در اطراف چهار مرز توزیع شده اند. نکته قابل توجه این است که تغییرات فقط آهنگ تولید گرمای یکنواخت در سرتاسر دامنه محاسباتی، هیچ تاثیری بر پیکربندی بهینه نهایی نخواهد داشت و توپولوژی بهینه در هر سه حالت شار گرمایی گسترده، همان پیکربندی شکل ۵ بدست آمده است. زمانی که تنها از آهنگ تولید گرمای یکنواخت در سرتاسر دامنه استفاده شود عمده گرمای ایجاد شده در ناحیه مرکزی دامنه قرار می گیرد لذا می بایست با حذف قسمت عمده ای از مصالح موجود در ناحیه مرکزی دامنه، گرمای ایجاد شده در این منطقه را کاهش داده و با افزایش مصالح در نواحی دورتر از مرکز، گرمای ایجاد شده در آن نواحی را به گونه ای افزایش دهد تا در نهایت توپولوژی ایجاد شده بتواند گرمای موجود را تعدیل کند.



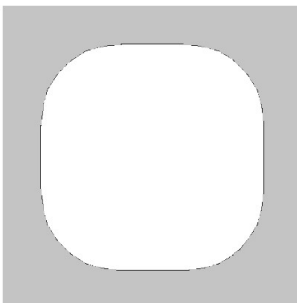
شکل ۶- نتایج بهینه مثال ۲

۳-۴- معرفی مثال شماره ۴ (اثر تغییر دمای مرزها در حضور وجود یک شار گرمایی گسترده در سرتاسر دامنه حل)

در این مثال اثر تغییرات دمای مرزها به صورت $T=5$, $T=0$ و $T=10$ در حضور آهنگ تولید گرمای یکنواخت در سرتاسر دامنه محاسباتی معادل $Q_{10}=10$ ، در نظر گرفته شده است. شایان ذکر است مابقی پارامترها مانند منبع گرمایی نقطه ای که در نقطه مرکزی شبکه بندی دامنه محاسباتی به مقدار $f_i=0$ لحاظ شده است. همانطور که در شکل ۷ دیده می شود بر اساس نتیجه بهینه و مطلوب، مسیرهای پخش گرما در اطراف چهار مرز توزیع شده اند. نکته قابل توجه این است که در این مثال نیز تغییر دمای مرزها در شبکه دامنه محاسباتی، هیچ تاثیری بر پیکربندی بهینه نهایی نخواهد داشت و توپولوژی بهینه در هر سه حالت دمایی با یکدیگر مشابه خواهند بود.



شکل ۵- نتایج بهینه مثال ۲



شکل ۷- نتایج بهینه مثال ۴

(الف) $T=0$ (ب) $T=5$ (ج) $T=10$

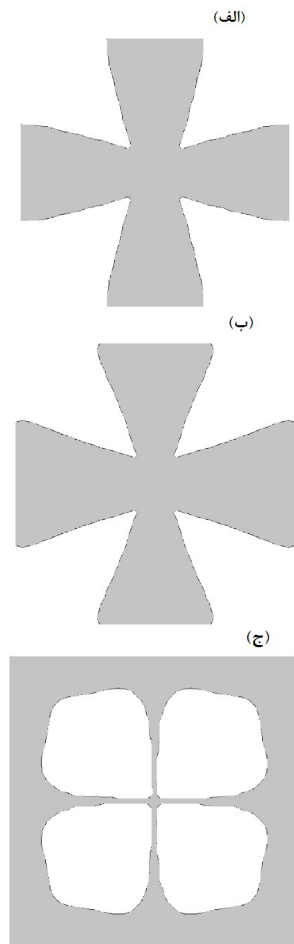
۳-۳- معرفی مثال شماره ۳ (اثر تغییر دمای مرزها در حضور وجود یک منبع گرمایی نقطه ای)

در این مثال اثر تغییرات دمای مرزها به صورت $T=5$, $T=0$ و $T=10$ در حضور یک منبع گرمایی نقطه ای که در نقطه مرکزی

۳-۶- معرفی مثال شماره ۶ (اثر تغییر آهنگ تولید گرمای یکنواخت در سرتاسر دامنه محاسباتی در حضور یک منبع گرمایی نقطه‌ای)

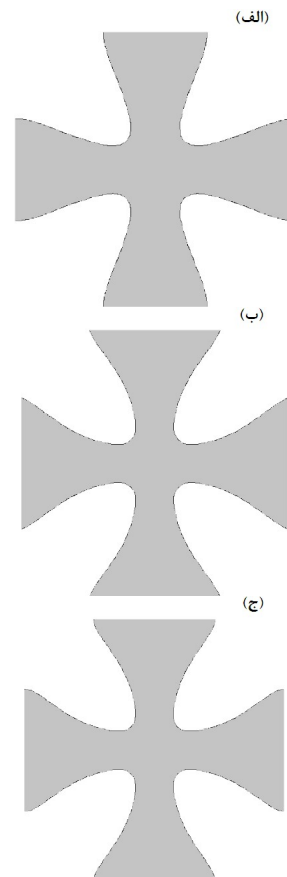
در این مثال اثر تغییرات آهنگ تولید گرمای یکنواخت در سرتاسر دامنه محاسباتی به صورت چهار مقدار $Q_{ii}=5$ ، $Q_{ii}=10$ ، $Q_{ii}=100$ و $Q_{ii}=1000$ ، در حضور یک منبع گرمایی نقطه‌ای که در نقطه مرکزی شبکه‌بندی دامنه محاسباتی به مقدار $f_i=5$ اعمال می‌گردد، در نظر گرفته شده است. شایان ذکر است که دمای مرزها معادل $T=0$ لحاظ شده است.

با توجه به اینکه در مثال قبل نشان داده شد که به هر حال اثر وجود منبع گرمایی نقطه‌ای در نقطه مرکزی نسبت به سایر عوامل در شکل توپولوژی بهینه موثرتر است؛ در این مثال با افزایش مقدار آهنگ تولید گرمای یکنواخت در سرتاسر دامنه محاسباتی، موثر بودن این پارامتر به چالش کشیده شده است بطوریکه با افزایش بیش از حد مقدار تولید گرمای یکنواخت در سرتاسر دامنه، خاصه شکل ۹- (د)، اثر گرمای یکنواخت بر سایر عوامل غلبه کرده است و شکل توپولوژی بهینه نهایی بصورت شکل ۵ در آمده است.



۳-۵- معرفی مثال شماره ۵ (اثر تغییر دمای مرزها در حضور وجود یک شار گرمایی گسترده در سرتاسر دامنه حل و یک منبع گرمایی نقطه‌ای)

در این مثال اثر تغییرات دمای مرزها به صورت $T=0$ ، $T=5$ و $T=10$ در حضور آهنگ تولید گرمای یکنواخت در سرتاسر دامنه محاسباتی معادل $Q_{ii}=10$ و یک منبع گرمایی نقطه‌ای که در نقطه مرکزی شبکه‌بندی دامنه محاسباتی به مقدار $f_i=5$ اعمال می‌گردد، در نظر گرفته شده است. همانطور که در شکل ۸ دیده می‌شود بر اساس نتیجه بهینه و مطلوب، ترکیب آثار وجود هر سه عامل دمای مرزها، آهنگ تولید گرمای یکنواخت در سرتاسر دامنه و منبع گرمایی نقطه‌ای در مرکز شبکه بندی منجر به ایجاد تفاوت‌های اساسی در مسیرهای پخش گرما در دامنه محاسباتی شده است. در هر صورت با توجه به روند همگرایی پیش آمده واضح است که اعمال منبع گرمایی نقطه‌ای در نقطه مرکزی البته در حضور آهنگ تولید گرمای یکنواخت در سرتاسر دامنه محاسباتی نسبت به سایر عوامل در شکل توپولوژی بهینه موثرتر است. با افزایش دمای مرزها کم کم اثر منبع گرمایی نقطه‌ای کاهش یافته و نتیجه به صورت ترکیب عوامل رفتار خواهد نمود. بطوریکه در هر سه شکل ۸- (الف)، ۸- (ب) و ۸- (ج)، اثر وجود شکل صلیبی حس می‌گردد.



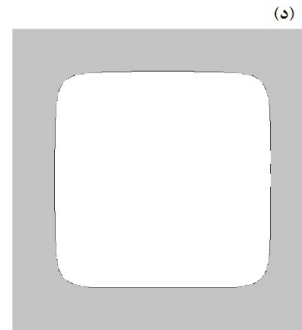
شکل ۸- نتایج بهینه مثال ۵
 (الف) $T=0$ (ب) $T=5$ (ج) $T=10$

۶- نمادها

رسانایی گرمایی	k
عرض تقریب سازی تابع هویساید	d
منبع گرمایی	f
شار گرمایی	q
آهنگ تولید گرمای حجمی	Q_0
تابع شکل تحلیل اجزاء محدود	N_i
تابع هویساید	$H(\phi)$
تابع دلتای دیراک	$\delta(\phi)$
اندازه گرادیان متغیر طراحی	$ \nabla\phi $
متغیر طراحی	X_i
قید حداکثر حجم مصالح	V_{max}
بردار نرمال یکه	n
سرعت نرمال معادله همیلتون-ژاکوبی	v_n
تابع فاصله علامتدار	$\text{sign}(\phi)$
گام زمانی	Δt
عرض مش بندی تحلیل اجزاء محدود	h
عملگرهای تفاضل محدود پیشرونده و پسرونده	∇^+ و ∇^-
علائم یونانی	
انحنای	κ
متغیر تابع مجموعه سطوح تراز	ϕ
عملگر لاپلاس	Δ
ضریب انتشار	τ
ضریب لاگرانژ قید حجم	λ
پارامتر ثابت به منظور پایداری حل معادله تعادل	ϵ

۷- مراجع

- [1] Lorenzini G., Barreto E. and Beckel C., Geometrical evaluation of T-shaped high conductive pathway with thermal contact resistance for cooling of heat-generating medium. *International Journal of Heat and Mass Transfer*, Vol. 108, pp. 1884-93, 2017.
- [2] Tam S., Tam H., Chio C. and Tam L., Use of Algorithm of Changes for Optimal Design of Heat Exchanger. *AIP Conference Proceedings*. AIP, pp. 857-62, 2010.
- [3] Yang D. K., Lee K. S. and Song S., Fin spacing optimization of a fin-tube heat exchanger under frosting conditions. *International Journal of Heat and Mass Transfer*, Vol. 49, No. 15-16, pp. 2619-2625, 2006.
- [4] Wu W., Chen L. and Sun F., Improvement of tree-like network constructal method for heat conduction optimization. *Science in China, Series E: Technological Sciences*, Vol. 36, No.7, pp. 773-781, 2006.
- [5] Aage N., Poulsen T. H., Gersborg-Hansen A. and Sigmund O., Topology optimization of large scale stokes flow problems. *Structural and Multidisciplinary Optimization*, Vol. 35, No.2, pp. 175-180, 2008.
- [6] Challis V. J. and Guest J. K., Level set topology optimization of fluids in Stokes flow. *International journal for numerical methods in engineering*, Vol. 79, No.10, pp. 1284-1308, 2009.



شکل ۹- نتایج بهینه مثال ۶

(الف) $Q_{in}=5$ (ب) $Q_{in}=10$ (ج) $Q_{in}=100$ (د) $Q_{in}=1000$

۴- جمع بندی و نتیجه گیری

در این پژوهش از روش مجموعه سطوح تراز برای تصویرنمایی توپولوژی بهینه استفاده گردید. با توجه به اینکه در این روش تصویر روی سطح تراز صفر تابع به عنوان توپولوژی تشکیل شده در نظر گرفته می‌شود، لذا شکل بهینه، شامل مرزهای بسیار هموار و فاقد مصالح میانه یا المان‌های خاکستری می‌باشد که خود دقت در تعیین توپولوژی نهایی و تخمین حجم واقعی مصالح را بسیار بالا خواهد برد. برای بررسی نهایی روش حل عددی ارائه شده، ۱۹ وضعیت ویژه مطابق شکل‌های ۳ تا ۹ در نظر گرفته شده است که در آنها ابتدا حالت صرفاً وجود یک منبع گرمایی نقطه‌ای در نقطه مرکزی شبکه دامنه محاسباتی، سپس محفظه با لحاظ کردن آهنگ تولید گرمای یکنواخت در سرتاسر دامنه محاسباتی، در ادامه تغییرات دمای مرزها در حضور هر یک از عوامل فوق و در نهایت ترکیب تمام عوامل در نظر گرفته شده است. همانطور که از شکل‌ها بر می‌آید به تدریج با افزایش قدرت منبع نقطه‌ای شرایط حاکم بر توپولوژی بهینه بدست آمده به طرف وضعیت منبع گرمایی قوی‌تر سوق پیدا کرده است. این حاکی از آن است که قوی شدن منبع نقطه‌ای توانسته تا حدود زیادی شرایط توپولوژی بهینه را به سود خود تحت تاثیر قرار دهد و در نهایت بیش از حد بزرگ شدن مقدار آهنگ تولید گرمای یکنواخت در سرتاسر دامنه محاسباتی که در شکل ۹- (د) رخ داده است توانسته بر تاثیر منبع نقطه‌ای غلبه نماید و شکل نهایی توپولوژی بهینه را به صورت اثر وجود فقط آهنگ تولید گرمای یکنواخت در آورد. بطور کلی در مسائل بهینه-سازی توپولوژی که شامل آهنگ تولید گرمای یکنواخت در سرتاسر دامنه محاسباتی می‌باشد، اثر تغییرات شار گرمایی نسبت به متغیرهای طراحی در معادله (۲۳) براحتی از بین نمی‌رود. در نتیجه مجموع دو جمله اول معادله (۲۳) می‌تواند مثبت یا منفی باشد که این بدان معناست که سرعت نرمال معادله مجموعه سطوح تراز، رفتار غیر یکنواختی نسبت به تغییرات متغیرهای طراحی از خود نشان خواهد داد.

۵- سپاسگزاری

نویسندگان از حمایت دانشگاه شهید بهشتی (شماره اعتبار ویژه ۶۰۰/۱۰۲۵) قدردانی می‌کنند.

- Mechanics and Engineering*, Vol. 319, pp. 240-257, 2017.
- [23] Yamada T., Izui K., Nishiwaki S. and Takezawa A., A topology optimization method based on the level set method incorporating a fictitious interface energy. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, Vol. 199, No.45-48, pp. 2876-2891, 2010.
- [24] Gao T., Xu P. and Zhang W., Topology optimization of thermo-elastic structures with multiple materials under mass constraint. *Computers & Structures*, Vol. 173, pp. 150-160, 2016.
- [25] Zhang W. L., Mo R., Wan N. and Zhang Q., Isogeometric analysis of heat transfer in fluids. *Applied Mechanics and Materials*, Trans Tech Publ, pp. 2174-2178, 2012.
- [7] Sigmund O. and Maute K., Topology optimization approaches. *Structural and Multidisciplinary Optimization*, Vol.48, No.6, pp. 1031-1055, 2013.
- [8] Zhang Y. and Liu S., Design of conducting paths based on topology optimization. *Heat and Mass Transfer*, Vol. 44, No.10, pp.1217-1227, 2008.
- [9] Wei S., Chen L. and Sun F., The area-point constructal optimization for discrete variable cross-section conducting path. *Applied Energy*, Vol. 86, No.7, pp. 1111-1118, 2009.
- [10] Cheng X., Li Z. and Guo Z., Constructs of highly effective heat transport paths by bionic optimization. *Science In China Series E-Engineering & Materials Science*, Vol. 46, No.3, pp. 296-302, 2003.
- [11] Allaire G., *Shape optimization by the homogenization method*. Springer Science & Business Media, 2012.
- [12] Li Q., Steven G. P., Xie Y. M. and Querin O. M., Evolutionary topology optimization for temperature reduction of heat conducting fields. *International Journal of Heat and Mass Transfer*, Vol. 47, No.23, pp. 5071-5083, 2004.
- [13] Zuo K.T., Chen L.P., Zhang Y.Q. and Wang S.T., Structural optimal design of heat conductive body with topology optimization method. *Chinese Journal of Mechanical Engineering*, Vol. 41, No.4, pp. 13-16, 2005. (in Chinese)
- [14] Gersborg-Hansen A., Bendsøe M.P. and Sigmund O., Topology optimization of heat conduction problems using finite volume method. *Structural and Multidisciplinary Optimization*, Vol. 31, No.4, pp. 251-259, 2006.
- [15] Gao T., Zhang W. H., Zhu J. H., Xu Y. J. and Bassir D. H., Topology optimization of heat conduction problem involving design-dependent heat load effect. *Finite Elements in Analysis and Design*, Vol. 44, No.14, pp. 805-813, 2008.
- [16] Luo Z., Tong L., Wang M. Y. and Wang S., Shape and topology optimization of compliant mechanisms using a parameterization level set method. *Journal of Computational Physics*, Vol. 227, No.1, pp. 680-705, 2007.
- [17] Wang M. Y., Wang X. and Guo D., A level set method for structure topology optimization. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, Vol. 192, No.1-3, pp. 227-246, 2003.
- [18] Allaire G., Jouve F. and Toader A. M., Structural optimization using sensitivity analysis and a level-set method. *Journal of Computational Physics*, Vol. 194, No.1, pp. 363-393, 2004.
- [۱۹] جهانگیری ح. و جهانگیری ع., بهینه‌سازی توپولوژی مسئله انتقال حرارت هدایت با استفاده از روش مجموعه سطوح تراز و تحلیل اجزاء محدود. *مجله مهندسی مکانیک مدرس*, د. ۱۶، ش. ۱۴، ص ۱-۱۰، ۱۳۹۵.
- [20] Takezawa A., Nishiwaki S. and Kitamura M., Shape and topology optimization based on the phase field method and sensitivity analysis. *Journal of Computational Physics*, Vol. 229, No.7, pp. 2697-2718, 2010.
- [21] Dedè L., Borden M. J. and Hughes T. J., Isogeometric analysis for topology optimization with a phase field model. *Archives of Computational Methods in Engineering*, Vol. 19, No.3, pp. 427-465, 2012.
- [22] Jahangiry H. A. and Tavakkoli S. M., An isogeometrical approach to structural level set topology optimization. *Computer Methods in Applied*