

کران بالا برای فشار سیال داخل لوله بوسیله معادلات دیفرانسیل

وحید رومی

استادیار، گروه ریاضی، دانشگاه شهید مدنی آذربایجان، تبریز، ایران

مجتبی رنجبر

استادیار، گروه ریاضی، دانشگاه شهید مدنی آذربایجان، تبریز، ایران

چکیده

شبکه‌هایی بسته از لوله‌های حاوی یک جریان پرفشار از یک سیال در بسیاری از پدیده‌های طبیعی و دست‌ساز وجود دارند. دینامیک چنین شبکه‌هایی به پارامترهای زیادی وابسته است. از یک سو به کنش و واکنش پیچیده بین بدنه جریان و مواد تشکیل دهنده هر یک از لوله‌ها و از سوی دیگر به اتصالات بین لوله‌ها در شبکه وابسته است. زیرا جریان در لوله‌های مختلف یک شبکه در نقاط اتصال بر یکدیگر اثر می‌گذارند. یک روش جایگزین برای توصیف شبکه خطوط جریان در دامنه زمان، نمایش چنین سیستم‌هایی در دامنه لاپلاس است. در این مقاله به بررسی جریان پرفشار درون یک لوله و یافتن کران بالای بهینه برای میزان فشار درون آن در هر نقطه و در هر زمان با استفاده از معادلات دیفرانسیل جزئی و حل تحلیلی آنها به وسیله تبدیلات لاپلاس می‌پردازیم. **واژه‌های کلیدی:** معادلات دیفرانسیل جزئی، تبدیل لاپلاس، خط جریان.

Maximum pressure in the fluid line by differential equations

V. Roomi
M. Ranjbar

Department of Mathematics, Azarbaijan Shahid Madani University, Tabriz, Iran

Department of Mathematics, Azarbaijan Shahid Madani University, Tabriz, Iran

Abstract

Networks of closed conduits containing pressurized fluid flow occur in many different instances throughout the natural and manmade world. The dynamics of such networks are dependent not only on the complex interactions between the fluid body and the conduit material within each fluid line, but also on the coupling between different lines as they influence each other through their common junctions. The forward modeling (time-domain simulation), and inverse modeling (system parameter identification) of such systems is of great interest to many different research fields. An alternative approach to time-domain descriptions of fluid line networks is the Laplace-domain representation of these systems.

In this paper we will consider a pressured fluid line, and we will find an optimized upper bound to the pressure by using Laplace transforms to solve the related differential system.

Keywords: Partial differential equations, Laplace transform, Fluid line.

۱-مقدمه

مدل‌سازی واکنش گذرا نسبت به آشفتگی مرزی و دیگر تحریک-های کنترل شده برای چنین شبکه‌هایی مورد علاقه بسیاری از محققان بوده و همچنین برای اهدافی مانند تحلیل، طراحی و شناسایی شبکه‌ها اساسی است. رویکرد سنتی برای مدل‌سازی ضربه آب در سیستم‌های توزیع خط لوله، استفاده از روش‌های تقریبی و گسسته در دامنه زمانی بوده است [۱، ۴، ۱۰، ۱۲ و ۱۵]. با این حال، به تازگی محققان علاقمند به توصیف چنین سیستم‌هایی در دامنه فرکانس شده‌اند [۶، ۷، ۸ و ۱۶]. دلیل این علاقه در ماهیت تحلیلی توصیف سیستم‌های خط لوله در دامنه فرکانس نهفته است. توصیف سیستم در دامنه فرکانس از جواب‌های تبدیل لاپلاس معادلات پایه‌ای جریان نتیجه می‌شود [۳ و ۹].

در این مقاله جریان پرفشار درون یک لوله را در نظر خواهیم گرفت و برای میزان فشار درون آن یک کران بالای بهینه خواهیم یافت. این کار با استفاده از معادلات دیفرانسیل جزئی و حل تحلیلی آن‌ها به وسیله تبدیلات لاپلاس انجام خواهد گرفت. این موضوع کاربردهای بسیاری در زمینه‌های مهمی چون شبیه‌سازی شبکه‌های لوله در دامنه زمان و شناسایی پارامترهای خواص خط لوله، در یک شبکه خطوط جریان دارد. در بخش بعدی معادلات عمومی حاکم بر جریان سیال را ارائه خواهیم کرد. سپس به معادلات حاکم بر خط سیال یک بعدی در

شبکه‌هایی بسته از لوله‌های حاوی یک جریان پرفشار یک سیال در بسیاری از پدیده‌های طبیعی و دست‌ساز وجود دارند و از دیرباز مورد توجه و مطالعه بسیاری از دانشمندان قرار گرفته‌اند [۱-۱۷]. مدل‌سازی مستقیم (شبیه‌سازی در دامنه زمان)، و مدل‌سازی معکوس (شناسایی پارامتری سیستم) چنین سیستم‌هایی مورد علاقه بسیاری از محققین در زمینه‌های مختلف علوم بوده است. به عنوان مثال می‌توان به سیستم انتقال موادی چون آب، گاز و سوخت [۴، ۵ و ۱۵]، سیستم‌های بیولوژیکی مانند جریان خون شریانی [۱۱] و سیستم‌های کنترل پنوماتیک^۱ و هیدرولیک^۲ [۲ و ۱۴] اشاره کرد. دینامیک چنین شبکه‌هایی به صورت ترکیب پیچیده‌ای از تعامل بدنه سیال با مواد مجرای آن است. در بسیاری از مثال‌های ذکر شده، شبکه به صورت یک لوله تنها نبوده، بلکه مرکب از تعدادی لوله‌های متصل به هم است. رفتار چنین ساختارهایی نه تنها از دینامیک جریان در تک‌تک لوله‌ها، بلکه از تاثیر دینامیک جریان‌ها در لوله‌های مجاور در اتصالات مشترک، بر یکدیگر نتیجه می‌شود.

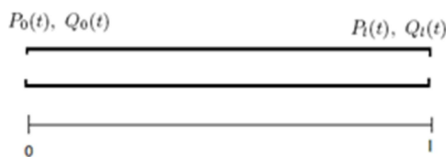
^۱Pneumatic^۲Hydraulic

تذکره ۱: در این مقاله با توجه به روابط $Q = vA_0$ و $P = \rho gH$ ، (که g شتاب جاذبه است) از جریان حجمی Q (با واحد $\frac{m^3}{s}$) به جای سرعت v و از خط ارتفاع H (با واحد m) به جای فشار P (با واحد پاسکال یا $\frac{kg}{ms^2}$) استفاده شده است. لازم به توضیح است که با توجه به واحد پارامترهای موجود در این دو رابطه (که در قسمت نمادها آورده شده‌اند)، واحدهای Q و H به ترتیب بر حسب متر مکعب بر ثانیه و متر خواهند بود. تعبیر فیزیکی Q مقدار حجمی از سیال است که در واحد زمان از نقطه ثابتی درون لوله عبور می‌کند. همچنین تعبیر فیزیکی H به این صورت است که اگر لوله‌ای با سطح مقطع یکسان با سطح مقطع لوله حاوی سیال، به صورت عمودی به انتهای لوله موجود (لوله حاوی سیال پرفشار) وصل شود، H نشان دهنده میزان ارتفاعی است که سیال درون لوله عمودی بالا می‌رود.

تذکره ۲: با توجه به اینکه توزیع فشار سیال درون لوله در لوله‌هایی با مقطع دایره‌ای در همه جای لوله یکسان است، در عمل و کاربردها لوله‌ها را به صورت استوانه با سطح مقطع دایره‌ای در نظر می‌گیرند. به همین دلیل در این مقاله به بررسی جریان سیال درون لوله‌های با سطح مقطع دایره‌ای می‌پردازیم. از طرفی با توجه به معادلات دیفرانسیل پایه‌ای حاکم بر سیالات در نظر گرفته شده (رابطه شماره (۱))، سطح مقطع لوله ثابت در نظر گرفته شده است. البته با توجه به اینکه در این مقاله کران بالا برای فشار سیال درون لوله محاسبه می‌شود و چون در یک لوله با سطح مقطع متغیر فشار در قسمت باریک آن بیشتر است، می‌توان سطح مقطع باریک‌ترین قسمت لوله را به عنوان سطح مقطع ثابت در نظر گرفت و یک کران بالا برای فشار سیال درون لوله به دست آورد.

۳- بیان و حل مسئله

در این بخش ابتدا به بیان مسئله پرداخته و سپس با استفاده از تبدیل لاپلاس به حل معادلات دیفرانسیل مربوطه خواهیم پرداخت. خط لوله‌ای به طول l را منطبق بر محور حقیقی در نظر بگیرید و فرض کنید فشار P (و در نتیجه مقدار H) و جریان حجمی Q در دو نقطه انتهایی لوله یعنی در $x=0$ و $x=l$ معلوم باشند (شکل ۱).



شکل ۱- لوله به طول l

اغلب روش‌های عددی فقط میزان فشار و جریان را در نقاط انتهایی لوله محاسبه می‌کنند. هدف این مقاله یافتن کران بالا برای میزان فشار سیال درون لوله در هر نقطه از لوله و در هر زمان با استفاده از معادلات دیفرانسیل است. با توجه به دو معادله اول رابطه (۱) و تذکره ۱، معادلات حاکم بر این سیستم، یک دستگاه معادلات دیفرانسیل جزئی به صورت زیر است.

لوله‌ها اشاره می‌شود و در بخش سوم به بیان مسئله و حل آن با استفاده از تبدیلات لاپلاس خواهیم پرداخت.

۲- معادلات پایه‌ای خط سیالات

در این بخش به ارائه معادلات عمومی حاکم بر جریان سیال یک بعدی می‌پردازیم. در این مقاله مفهوم هیدرولیک اولیه برای خط جریان یک بعدی مورد استفاده قرار گرفته است. در این حالت یک سیستم جریان مجرا بسته مورد بررسی قرار می‌گیرد که دینامیک آن توسط خواص برش عرضی میدان جریان توصیف می‌شود. نتایج حاصل بیان می‌کند که خواص سیستم مجرای مایع فقط به موقعیت مکانی یک بعدی در طول لوله و زمان بستگی دارد. این مدل از جریان لوله به عنوان پایه‌ای برای بسیاری از نظریه‌های خط لوله انتقال در نظر گرفته می‌شود. به عنوان مثال توصیف پدیده‌های جریان با ابعاد بالاتر و ساختارهای جریانی پیچیده توسط کنش و واکنش بین لوله‌های جریان یک بعدی مورد بررسی قرار می‌گیرند.

فرض کلی برای بیان سه معادله اساسی حاکم بر جریان مایع گذرا در یک مجرای بسته این است که رفتار جرم، حرکت و انرژی جریان گذرا توسط میانگین برش مقطعی خواص جریان مانند سرعت، فشار و چگالی توصیف می‌شوند [۴ و ۱۵]. یک مجرای بسته یک سیستم پارامتری توزیعی با مقادیر مساحت برش مقطعی A ، چگالی جریان ρ ، سرعت محوری v و فشار درونی سیال P توزیع شده در امتداد مجرا، نسبت به زمان است. معادلات جرم، حرکت و انرژی برای این سیستم، از روی قضیه انتقال رینولد^۱ به دست می‌آیند [۴ و ۱۳]. با استفاده از این قضیه، قانون بقای جرم و قانون دوم حرکت نیوتن و همچنین قانون اول ترمودینامیک سه معادله مذکور یعنی معادلات بقای جرم، حرکت و انرژی، با در نظر گرفتن مفروضات معمول برای خطی‌سازی به صورت زیر به دست می‌آیند [۱۷].

$$\begin{aligned} \frac{A_0}{\rho_0 c_0^2} \frac{\partial P}{\partial t} + 2A_0 \frac{\partial \varepsilon_r}{\partial t} + \frac{\partial v}{\partial x} &= 0 \\ \frac{\rho_0}{A_0} \frac{\partial v}{\partial t} + \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{4}{D_0} \tau &= 0 \\ \rho_0 \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{v^2}{2} \right) + \frac{1}{\rho_0 c_0^2} \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{P^2}{2} \right) + \frac{\partial}{\partial x} (Pv) + \frac{4}{D_0} \tau v \\ &+ 2P \frac{\partial \varepsilon_r}{\partial t} = 0 \end{aligned} \quad (1)$$

که در آن c_0 سرعت موج الاستیک جریان خطی، ε_r کشش پیرامونی پسین^۲، D_0 قطر لوله و τ تنش برشی دیواره لوله است. همچنین این پارامترها و نمادها در بخش مربوط به نمادها معرفی شده‌اند. لازم به توضیح است که اگر قسمتی از سیال گذرنده از یک لوله را در نظر بگیریم، مقاومت دیواره لوله و همچنین کشش قسمت‌های بعدی سیال روی آن اثر می‌گذارند و باعث تغییر شکل و اندازه و فشار آن قسمت از سیال می‌شوند. این مطلب تحت عنوان کشش پیرامونی پسین بیان و با نماد ε_r نمایش داده می‌شود.

^۱Reynolds Transport Theorem

^۲Retarded circumferential strain

$$\begin{cases} H_0^+(s) = \frac{1}{1-e^{-2\Gamma(s)}} H_0(s) - \frac{e^{-\Gamma(s)}}{1-e^{-2\Gamma(s)}} H_1(s) \\ H_1^-(s) = \frac{-e^{-\Gamma(s)}}{1-e^{-2\Gamma(s)}} H_0(s) + \frac{1}{1-e^{-2\Gamma(s)}} H_1(s) \end{cases}, \quad (9)$$

و یا به عبارت دیگر خواهیم داشت:

$$\begin{cases} H_0^+(s) = [\frac{1}{2}e^{\Gamma(s)}\text{csch}\Gamma(s)]H_0(s) \\ \quad - [\frac{1}{2}\text{csch}\Gamma(s)]H_1(s) \\ H_1^-(s) = -[\frac{1}{2}\text{csch}\Gamma(s)]H_0(s) \\ \quad + [\frac{1}{2}e^{\Gamma(s)}\text{csch}\Gamma(s)]H_1(s) \end{cases}, \quad (10)$$

بنابراین با استفاده از تبدیل معکوس لاپلاس، روابط زیر در زمان-

دامنه به دست می‌آیند (علامت "*" به معنای ضرب پیچشی¹ است).

$$\begin{cases} H_0^+(t) = (g_0 * H_0)(t) - (g_1 * H_1)(t) \\ H_1^-(t) = -(f_0 * H_0)(t) + (f_1 * H_1)(t) \end{cases}, \quad (11)$$

که در آن توابع g_0, g_1, f_0, f_1 به صورت زیر هستند و باید محاسبه شوند.

$$\begin{aligned} g_0(t) &= f_1(t) = L^{-1}\left\{\frac{1}{1-e^{-2\Gamma(s)}}\right\}(t) \\ g_1(t) &= f_0(t) = L^{-1}\left\{\frac{e^{-\Gamma(s)}}{1-e^{-2\Gamma(s)}}\right\}(t). \end{aligned} \quad (12)$$

در ادامه به محاسبه تبدیل معکوس لاپلاس توابع فوق می‌پردازیم. برای این منظور از روابط زیر استفاده می‌کنیم.

$$\begin{aligned} \frac{1}{1-e^{-2\Gamma(s)}} &= \frac{1}{2} \frac{e^{\Gamma(s)}}{\sinh(\Gamma(s))} = \frac{1}{2} e^{\Gamma(s)} \text{csch}\Gamma(s) \\ \frac{e^{-\Gamma(s)}}{1-e^{-2\Gamma(s)}} &= \frac{1}{2} \frac{1}{\sinh(\Gamma(s))} = \frac{1}{2} \text{csch}\Gamma(s). \end{aligned} \quad (13)$$

همچنین از بسط تیلور زیر برای محاسبه تبدیل معکوس توابع فوق استفاده می‌کنیم.

$$\text{csch}(\Gamma) = \frac{1}{\sinh(\Gamma)} = \frac{1}{\Gamma} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2(-1)^n \Gamma}{\Gamma^2 + (n\pi)^2}. \quad (14)$$

در حالت اصطکاک خطی تابع Γ به صورت زیر خواهد بود [17].

$$\Gamma(s) = \frac{1}{c} \sqrt{s(s+r_0)}. \quad (15)$$

که در آن تابع واکنش ضربه یا ثابت مقاومتی ایستا² است که در حالت اصطکاک خطی یک مقدار ثابت غیرمنفی فرض می‌شود و به جنس لوله حاوی سیال بستگی دارد و بیانگر میزان مقاومتی است که لوله در مقابل شروع جریان سیال از خود نشان می‌دهد. در ادامه تبدیل معکوس قسمت‌های مختلف را در چند بخش بعدی خواهیم دید.

۳-۲- تبدیل معکوس لاپلاس

با توجه به رابطه (15) در حالت اصطکاک خطی بسط تابع

$$\begin{cases} \frac{\partial H}{\partial t} + \frac{a^2}{gA} \frac{\partial Q}{\partial x} = 0 \\ \frac{\partial H}{\partial x} + \frac{1}{gA} \frac{\partial Q}{\partial t} + \frac{f}{2gDA^2} |Q| Q = 0 \end{cases} \quad (2)$$

که با توجه به شرایط مسئله، مقادیر زیر به عنوان شرایط مرزی معلوم فرض می‌شوند.

$$\begin{cases} H(0,t) = H_0(t), Q(0,t) = Q_0(t) & t \in R_+ \\ H(1,t) = H_1(t), Q(1,t) = Q_1(t) & t \in R_+ \end{cases} \quad (3)$$

به ازای $x \in [0,1]$ هدف محاسبه مقدار زیر است.

$$H_{\text{Max}}(x) = \max_{t \in R_+} H(x,t) \quad (4)$$

رویکرد حل مسئله به این صورت است که لوله حاوی سیال به طول 1 با شرایط مرزی معلوم $H_0(t)$ و $H_1(t)$ که $t \in [0,T]$ است را در نظر می‌گیریم و به ازای هر $x \in [0,1]$ ابتدا یک کران بالا برای $H(x,t)$ محاسبه می‌کنیم. در نتیجه مقدار مجهول به صورت زیر خواهد بود.

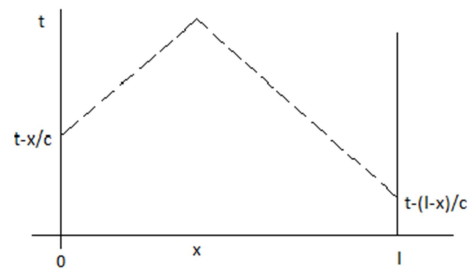
$$H_{\text{max}}(x) = \text{Max}_{t \in [0,T]} H(x,t). \quad (5)$$

واضح است که مقدار $H(x,t)$ از بالا توسط رابطه زیر تخمین زده می‌شود که به عنوان یک کران بالای بهینه برای آن شناخته می‌شود.

$$H(x,t) < H^+(x,t) + H^-(x,t), \quad (6)$$

که در آن مقادیر مجهول $H^+(x,t)$ و $H^-(x,t)$ در حالت انتشار موج در جهت مثبت و منفی بدون در نظر گرفتن پارامترهای کاهنده‌ای مانند اصطکاک هستند که به صورت زیر محاسبه می‌شوند (شکل ۲).

$$H^+(x,t) = H_0^+(t - \frac{x}{c}), \quad H^-(x,t) = H_1^-(t - \frac{1-x}{c}). \quad (7)$$



شکل ۲- خط ارتفاع انتشار موج در جهات مثبت و منفی

در این قسمت هدف محاسبه مقادیر مجهول H_0^+ و H_1^- در زمان-دامنه از روی مقادیر معلوم H_0 و H_1 (شرایط مرزی) است. با محاسبه این مقادیر، با استفاده از روابط (6) و (7) یک کران بالا برای فشار سیال درون لوله به دست می‌آید. می‌دانیم روابط زیر در لاپلاس-دامنه برقرار هستند (برای بررسی این موضوع به مرجع [17] رجوع کنید).

$$\begin{cases} H_0(s) = H_0^+(s) + H_0^-(s) = H_0^+(s) + e^{-\Gamma(s)} H_1^-(s) \\ H_1(s) = H_1^+(s) + H_1^-(s) = e^{-\Gamma(s)} H_0^+(s) + H_1^-(s) \end{cases}, \quad (8)$$

که در آن تابع $\Gamma(s)$ در رابطه (15) معرفی خواهد شد. با حل این دستگاه روابط زیر در لاپلاس-دامنه به دست می‌آیند.

¹Convolution

²Steady-state resistive coefficient

$$L^{-1}\{F_2(s)\}(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \text{Res} \left[\frac{2(-1)^n \frac{1}{c} \sqrt{s+r_0}}{\left(\frac{1}{c}\right)^2 s(s+r_0) + (n\pi)^2}, s = s_n \right] e^{s_n t} \quad (24)$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2(-1)^n \frac{1}{c} \sqrt{s+r_0}}{\left(\frac{1}{c}\right)^2 (2s+r_0)} e^{s t} \Big|_{s=s_n}$$

اگر فقط قطب‌هایی با قسمت موهومی مثبت را در نظر بگیریم، خواهیم داشت:

$$L^{-1}\{F_2(s)\}(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2(-1)^n \sqrt{\left(\frac{-r_0}{2} + i\omega_n\right)\left(\frac{r_0}{2} + i\omega_n\right)}}{\left(\frac{1}{c}\right)(2i\omega_n)} e^{\left(\frac{-r_0}{2} + i\omega_n\right)t} \quad (25)$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n \left(\frac{n\pi c}{1}\right)}{\left(\frac{1}{c}\right)\omega_n} e^{\left(\frac{-r_0}{2} + i\omega_n\right)t}$$

$$= \frac{\pi c^2}{1^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n n}{\omega_n} e^{\left(\frac{-r_0}{2} + i\omega_n\right)t}$$

بنابراین در این حالت با استفاده از روابط (۱۲)، (۱۳)، (۱۶)، (۱۸) و (۲۵) داریم:

$$g_1(t) = f_0(t) = L^{-1}\left\{\frac{e^{-\Gamma(s)}}{1 - e^{-2\Gamma(s)}}\right\}(t) \quad (26)$$

$$= \frac{\pi c^2}{21^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n n}{\omega_n} e^{\left(\frac{-r_0}{2} + i\omega_n\right)t} + \frac{c}{21} e^{\frac{-r_0 t}{2}} I_0\left(\frac{-r_0 t}{2}\right)$$

حال اگر قطب‌ها با قسمت موهومی منفی را نیز در نظر بگیریم، با توجه به رابطه $e^{ix} + e^{-ix} = 2 \cos(x)$ ، می‌توان نتیجه گرفت:

$$g_1(t) = f_0(t) = \left[\frac{\pi c^2}{1^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n n}{\omega_n} \cos(\omega_n t) + \frac{c}{21} I_0\left(\frac{-r_0 t}{2}\right) \right] e^{\frac{-r_0 t}{2}} \quad (27)$$

۳-۱- تبدیل معکوس لاپلاس $\frac{e^{\Gamma(s)}}{2 \sinh(\Gamma(s))}$

مشابه قسمت قبل در حالت اصطکاک خطی با توجه به بسط تابع $\text{csch}(\Gamma(s))$ رابطه زیر برقرار خواهد بود.

$$e^{\Gamma(s)} \text{csch}(\Gamma(s)) = \frac{e^{\Gamma(s)}}{\sinh(\Gamma(s))} = \frac{1}{e^{\frac{1}{c}\sqrt{s+r_0}}} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2(-1)^n \frac{1}{c} \sqrt{s+r_0}}{\left(\frac{1}{c}\right)^2 s(s+r_0) + (n\pi)^2} e^{\frac{1}{c}\sqrt{s+r_0}} \quad (28)$$

$$\underbrace{\frac{1}{e^{\frac{1}{c}\sqrt{s+r_0}}}}_{\text{Part(I)}=G_1(s)} + \underbrace{\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2(-1)^n \frac{1}{c} \sqrt{s+r_0}}{\left(\frac{1}{c}\right)^2 s(s+r_0) + (n\pi)^2} e^{\frac{1}{c}\sqrt{s+r_0}}}_{\text{Part(II)}=G_2(s)}$$

الف: تبدیل معکوس لاپلاس $\text{Part(I)} = G_1(s)$

برای یافتن تبدیل لاپلاس معکوس $G_1(s)$ ، ابتدا لم زیر را ثابت می‌کنیم.

لم ۱: فرض کنید a و r_0 اعداد مثبت باشند. در این صورت:

$\text{csch}(\Gamma(s))$ به صورت زیر خواهد بود.

$$\text{csch}(\Gamma(s)) = \frac{1}{\sinh(\Gamma(s))} = \frac{1}{\frac{1}{c}\sqrt{s+r_0}} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2(-1)^n \frac{1}{c} \sqrt{s+r_0}}{\left(\frac{1}{c}\right)^2 s(s+r_0) + (n\pi)^2} \quad (16)$$

$$\underbrace{\frac{1}{\frac{1}{c}\sqrt{s+r_0}}}_{\text{Part(I)}=F_1(s)} + \underbrace{\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2(-1)^n \frac{1}{c} \sqrt{s+r_0}}{\left(\frac{1}{c}\right)^2 s(s+r_0) + (n\pi)^2}}_{\text{Part(II)}=F_2(s)}$$

ابتدا تبدیل لاپلاس معکوس جمله اول و سپس تبدیل لاپلاس معکوس سایر جملات را حساب می‌کنیم و در نهایت با جمع آنها تبدیل معکوس کل به دست می‌آید.

الف: تبدیل معکوس لاپلاس $\text{Part(I)} = F_1(s)$

برای یافتن تبدیل لاپلاس معکوس قسمت اول از رابطه زیر استفاده می‌کنیم.

$$L^{-1}\left\{\frac{1}{\sqrt{s+a}\sqrt{s+b}}\right\}(t) = e^{\frac{-(a+b)t}{2}} I_0\left(\frac{a-b}{2}t\right), \quad (17)$$

که در آن I_0 تابع بسل پیراسته نوع اول از مرتبه صفر است. با استفاده از این رابطه تبدیل لاپلاس معکوس قسمت اول به صورت زیر به دست می‌آید.

$$L^{-1}\{F_1(s)\}(t) = \frac{c}{1} e^{\frac{-r_0 t}{2}} I_0\left(\frac{-r_0 t}{2}\right). \quad (18)$$

ب: تبدیل معکوس لاپلاس $\text{Part(II)} = F_2(s)$

در این قسمت از قضیه مانده‌ها در آنالیز مختلط استفاده می‌کنیم که به صورت زیر است.

$$L^{-1}\{F(s)\}(t) = \sum_{z \in \Omega} \text{Res}[F(s), s = z] e^{zt} \quad (19)$$

که در آن Ω مجموعه قطب‌های تابع F است. از طرفی می‌دانیم اگر Z_0 یک قطب ساده تابع کسری باشد، رابطه زیر برای محاسبه مانده تابع در آن قطب، برقرار است.

$$\text{Res}\left[\frac{p(z)}{q(z)}, z = z_0\right] = \frac{p(z_0)}{q'(z_0)}. \quad (20)$$

قطب‌های تابع $F_2(s)$ به صورت زیر محاسبه می‌شوند.

$$\left(\frac{1}{c}\right)^2 s(s+r_0) + (n\pi)^2 = 0 \Rightarrow s_n = \frac{-r_0}{2} \pm i \sqrt{\left(\frac{n\pi c}{1}\right)^2 - \left(\frac{r_0}{2}\right)^2}. \quad (21)$$

بنابراین با فرض

$$\omega_n = \sqrt{\left(\frac{n\pi c}{1}\right)^2 - \left(\frac{r_0}{2}\right)^2} \quad (22)$$

قطب‌های تابع $F_2(s)$ به صورت زیر هستند.

$$s_n = \frac{-r_0}{2} \pm i\omega_n. \quad (23)$$

با استفاده از روابط (۱۹) و (۲۰) خواهیم داشت:

میل خواهند کرد. بنابراین با توجه به اینکه درون ناحیه C قطبی وجود ندارد، با استفاده از قضیه کوشی^۳ رابطه زیر برقرار خواهد بود.

$$\int_{c-i\infty}^{c+i\infty} \frac{e^{-a\sqrt{s(s+r_0)}}}{\sqrt{s(s+r_0)}} e^{st} ds - i \int_0^{r_0} \frac{e^{ia\sqrt{x(r_0-x)}}}{\sqrt{x(r_0-x)}} e^{-xt} dx - i \int_0^{r_0} \frac{e^{-ia\sqrt{x(r_0-x)}}}{\sqrt{x(r_0-x)}} e^{-xt} dx = 0 \quad (33)$$

انتگرال دوم و سوم به ترتیب انتگرال روی خط پایین و بالای محور حقیقی هستند. توجه کنید چون خط واصل بین نقاط شاخه‌ای را قطع نمی‌کنیم، انتقال فاز از $-\pi$ به π پیوسته است. با انجام محاسبات جبری و همچنین با استفاده از رابطه $e^{ix} + e^{-ix} = 2\cos(x)$ تبدیل معکوس لاپلاس از محاسبه انتگرال زیر به دست خواهد آمد.

$$L^{-1} \left\{ \frac{e^{-a\sqrt{s(s+r_0)}}}{\sqrt{s(s+r_0)}} \right\} = \frac{1}{i2\pi} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} \frac{e^{-a\sqrt{s(s+r_0)}}}{\sqrt{s(s+r_0)}} e^{st} ds = \frac{1}{\pi} \int_0^{r_0} \frac{\cos[a\sqrt{x(r_0-x)}]}{\sqrt{x(r_0-x)}} e^{-xt} dx \quad (34)$$

با استفاده از سپس تعویض متغیر

$$z = r_0 \sin^2 \frac{\theta}{2} \quad (35)$$

انتگرال سمت راست رابطه (۳۴) به صورت زیر تبدیل می‌شود.

$$I = \frac{1}{\pi} e^{-r_0 t/2} \int_0^{\pi} \cos\left(\frac{1}{2} a r_0 \sin \theta\right) e^{(r_0 t/2) \cos \theta} d\theta \quad (36)$$

برای ارزیابی نهایی از دو رابطه زیر استفاده می‌کنیم.

$$\cos(b \sin \theta) = J_0(b) + 2 \sum_{k=1}^{\infty} J_{2k}(b) \cos 2k\theta \quad (37)$$

$$\int_0^{\pi} \cos n\theta e^{z \cos \theta} d\theta = \pi I_n(z)$$

که در آن J_n ، I_n ، n امین تابع بسل از نوع اول و I_n ، n امین تابع بسل پیراسته از نوع اول است. بنابراین در حالت $t > a$ نتیجه‌ای به دست آورده‌ایم. برای حالت $a \geq t$ ناحیه انتگرال را به جای نیم‌صفحه چپ، در نیم‌صفحه راست انتخاب می‌کنیم. از این واقعیت که در این ناحیه هیچ قطب یا نقطه شاخه‌ای وجود ندارد، و از اینکه انتگرال چنین تابع مختلفی در یک مسیر بسته برابر صفر است، نتیجه می‌شود که تبدیل معکوس لاپلاس به ازای $a \geq t$ برابر صفر است. بنابراین نتیجه به صورت زیر خواهد بود.

$$\frac{1}{i2\pi} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} \frac{e^{-a\sqrt{s(s+r_0)}}}{\sqrt{s(s+r_0)}} e^{st} ds = e^{-r_0 t/2} u(t-a) \times \left[J_0\left(\frac{1}{2} a r_0\right) I_0\left(\frac{1}{2} r_0 t\right) + 2 \sum_{k=1}^{\infty} J_{2k}\left(\frac{1}{2} a r_0\right) I_{2k}\left(\frac{1}{2} r_0 t\right) \right] \quad (38)$$

نتیجه به دست آمده را می‌توان به صورت ساده‌تری بیان کرد. برای این کار توجه کنید که رابطه (۳۸) از انتگرال زیر به دست آمده است.

$$\frac{1}{\pi} e^{-r_0 t/2} \int_0^{\pi} \cos\left(\frac{1}{2} a r_0 \sin \theta\right) e^{(r_0 t/2) \cos \theta} d\theta \quad (39)$$

$$L^{-1} \left\{ \frac{e^{-a\sqrt{s(s+r_0)}}}{\sqrt{s(s+r_0)}} \right\} = \frac{1}{i2\pi} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} \frac{e^{-a\sqrt{s(s+r_0)}}}{\sqrt{s(s+r_0)}} e^{st} ds = e^{-r_0 t/2} u(t-a) \left[J_0\left(\frac{1}{2} a r_0\right) I_0\left(\frac{1}{2} r_0 t\right) + 2 \sum_{k=1}^{\infty} J_{2k}\left(\frac{1}{2} a r_0\right) I_{2k}\left(\frac{1}{2} r_0 t\right) \right] = u(t-a) I_0\left(\frac{1}{2} r_0 \sqrt{t^2 - a^2}\right) e^{-r_0 t/2} \quad (29)$$

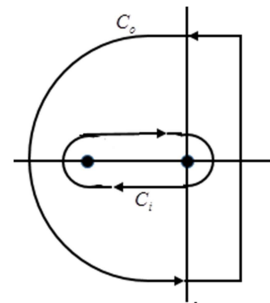
که در آن u تابع پله‌ای هویساید^۱ است که به صورت زیر تعریف می‌شود.

$$u(x) = \begin{cases} 1 & x > 0 \\ 0 & x < 0 \end{cases} \quad (30)$$

اثبات: دو نقطه شاخه‌ای^۲ در $s=0$ و $s=-r_0$ وجود دارد. انتگرال مختلط زیر را در نظر می‌گیریم.

$$\oint_C \frac{e^{-a\sqrt{s(s+r_0)}}}{\sqrt{s(s+r_0)}} e^{st} ds \quad (31)$$

که در آن منحنی $C = C_0 + C_i$ در شکل ۳ رسم شده است.



شکل ۳- منحنی $C = C_0 + C_i$

نقاط شاخه‌ای تکین را به وسیله کم کردن منحنی درونی C_i از منحنی بیرونی C_0 با قرار دادن $C = C_0 + C_i$ حذف می‌کنیم. انتگرال روی منحنی C شامل انتگرال روی مسیر قائم (که در نهایت همان تبدیل معکوس لاپلاس مطلوب است) و انتگرال حول کمان بیرونی است. ابتدا نشان خواهیم داد که انتگرال دومی با افزایش شعاع کمان در حالتیکه $a < t$ باشد، به صفر میل می‌کند. با قرار دادن $s = R e^{i\phi}$ ، برای R به اندازه کافی بزرگ، انتگرال روی کمان ذکر شده به صورت زیر تبدیل می‌شود.

$$\left| \int_{\pi/2}^{3\pi/2} e^{R(t-a) \cos \phi} d\phi \right| \quad (32)$$

توجه کنید در ناحیه انتگرالگیری رابطه $\cos \phi < 0$ برقرار است. در نتیجه فقط در حالت $a < t$ مقدار انتگرال به صفر میل خواهد کرد. بنابراین فقط انتگرال روی C_i باقی می‌ماند که شامل انتگرال بالا و پایین محور حقیقی میان نقطه‌های شاخه‌ای و انتگرال روی کمان‌های نیم‌دایره‌ای حول نقاط شاخه‌ای است. انتگرال روی کمان‌های نیم‌دایره‌ای حول نقاط شاخه‌ای با به صفر میل کردن شعاع نیم‌دایره، به صفر

³Cauchy Theorem

¹Heaviside step function

²Branch point

$$s_n = \frac{-r_0}{2} \pm i\omega_n \quad (48)$$

با استفاده از روابط (۱۹) و (۲۰) خواهیم داشت:

$$L^{-1}\{G_2(s)\}(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \text{Res} \left[\frac{2(-1)^n \frac{1}{c} \sqrt{s(s+r_0)}}{\left(\frac{1}{c}\right)^2 s(s+r_0) + (n\pi)^2} e^{\frac{1}{c} \sqrt{s(s+r_0)}}, s = s_n \right] e^{s_n t} \quad (49)$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2(-1)^n \frac{1}{c} \sqrt{s(s+r_0)}}{\left(\frac{1}{c}\right)^2 (2s+r_0)} e^{s t} \Big|_{s=s_n}$$

اگر فقط قطب‌هایی با قسمت موهومی مثبت را در نظر بگیریم، خواهیم داشت:

$$L^{-1}\{G_2(s)\}(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2(-1)^n \sqrt{\left(\frac{-r_0}{2} + i\omega_n\right) \left(\frac{r_0}{2} + i\omega_n\right)}}{\left(\frac{1}{c}\right) (2i\omega_n)} \times e^{\frac{1}{c} \sqrt{\left(\frac{-r_0}{2} + i\omega_n\right) \left(\frac{r_0}{2} + i\omega_n\right)}} e^{\left(\frac{-r_0}{2} + i\omega_n\right) t} \quad (50)$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n \left(\frac{n\pi c}{1}\right)}{\left(\frac{1}{c}\right) \omega_n} e^{in\pi} e^{\left(\frac{-r_0}{2} + i\omega_n\right) t}$$

$$= \frac{\pi c^2}{l^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{\omega_n} e^{\left(\frac{-r_0}{2} + i\omega_n\right) t}$$

بنابراین در این حالت با استفاده از روابط (۱۲)، (۱۳)، (۲۸)، (۴۷) و (۵۰) داریم:

$$g_0(t) = f_1(t) = L^{-1} \left\{ \frac{1}{1 - e^{-2l\Gamma(s)}} \right\} (t) = \frac{\pi c^2}{2l^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{\omega_n} e^{\left(\frac{-r_0}{2} + i\omega_n\right) t} \quad (51)$$

$$+ \frac{c}{2l} u\left(t + \frac{1}{c}\right) e^{\frac{-r_0 t}{2}} I_0\left(\frac{r_0}{2} \sqrt{t^2 - \left(\frac{1}{c}\right)^2}\right).$$

حال اگر قطب‌ها با قسمت موهومی منفی را نیز در نظر بگیریم، با توجه به رابطه $e^{ix} + e^{-ix} = 2 \cos(x)$ ، می‌توان نتیجه گرفت:

$$g_0(t) = f_1(t) = \left[\frac{\pi c^2}{l^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{\omega_n} \cos(\omega_n t) + \frac{c}{2l} u\left(t + \frac{1}{c}\right) \right. \quad (52)$$

$$\left. \times I_0\left(\frac{r_0}{2} \sqrt{t^2 - \left(\frac{1}{c}\right)^2}\right) \right] e^{\frac{-r_0 t}{2}}.$$

تاکنون تبدیل لاپلاس معکوس قسمت‌های مورد نیاز را یافته‌ایم. حال با توجه به روابط (۲۷) و (۵۲) و با معلوم بودن شرایط مرزی $H_0(t)$ و $H_1(t)$ ، از رابطه (۱۱) مقادیر $H_0^+(t)$ و $H_1^+(t)$ به دست می‌آیند. سپس با جایگذاری این مقادیر در رابطه (۷) مقادیر $H^+(x,t)$ و $H^-(x,t)$ محاسبه می‌شوند و با جایگذاری این مقادیر در رابطه (۶) یک کران بالا برای $H(x,t)$ و در نتیجه با توجه به رابطه $P = \rho g H$ ، یک کران بالا برای فشار سیال درون لوله در هر نقطه از لوله و در هر زمان به دست می‌آید.

ادعا می‌کنیم که مجموع بالا را می‌توان به یک فرم بسته به صورت $S(\sqrt{t^2 - a^2})$ (۴۰)

تبدیل کرد. رابطه زیر را در نظر بگیرید.

$$\int_0^{\pi} \cos(q \sin \theta) e^{p \cos \theta} d\theta = \Re \left[\int_0^{\pi} e^{iq \sin \theta} e^{p \cos \theta} d\theta \right] \quad (41)$$

که در آن علامت \Re نشان دهنده قسمت حقیقی عبارت مختلط فوق است. حال با فرض

$$p = \sqrt{p^2 - q^2} \cosh \beta \quad (42)$$

$$q = \sqrt{p^2 - q^2} \sinh \beta$$

که در آن $\beta = \text{arctanh}(q/p)$ است، انتگرال (۴۱) به فرم زیر تبدیل می‌شود.

$$\Re \left[\int_0^{\pi} e^{\sqrt{p^2 - q^2} \cos(\theta - i\beta)} d\theta \right] \quad (43)$$

این انتگرال مستقل از β است. برای درک این موضوع، نسبت به β انتگرال می‌گیریم و توجه کنید که فقط قسمت حقیقی انتگرال مورد نیاز است. پس انتگرال مطلوب به صورت زیر خلاصه می‌شود.

$$\int_0^{\pi} \cos(q \sin \theta) e^{p \cos \theta} d\theta = \pi I_0\left(\sqrt{p^2 - q^2}\right) \quad (44)$$

در نتیجه با توجه به رابطه‌های (۳۴)، (۳۷)، (۴۱) و (۴۴) جواب مسئله به صورت زیر خواهد بود.

$$f(t) = L^{-1} \left\{ \frac{e^{-a \sqrt{s(s+r_0)}}}{\sqrt{s(s+r_0)}} \right\} \quad (45)$$

$$= u(t-a) I_0\left(\frac{1}{2} r_0 \sqrt{t^2 - a^2}\right) e^{-r_0 t/2}$$

به این ترتیب اثبات لم به پایان می‌رسد. □

تذکر ۳: با جایگذاری $-a$ به جای a در رابطه (۴۵) خواهیم داشت:

$$L^{-1} \left\{ \frac{e^{a \sqrt{s(s+r_0)}}}{\sqrt{s(s+r_0)}} \right\} = \frac{1}{i2\pi} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} \frac{e^{a \sqrt{s(s+r_0)}}}{\sqrt{s(s+r_0)}} e^{st} ds$$

$$= e^{-r_0 t/2} u(t+a) \left[J_0\left(\frac{1}{2} a r_0\right) I_0\left(\frac{1}{2} r_0 t\right) \right. \quad (46)$$

$$\left. + 2 \sum_{k=1}^{\infty} J_{2k}\left(\frac{1}{2} a r_0\right) I_{2k}\left(\frac{1}{2} r_0 t\right) \right]$$

$$= u(t+a) I_0\left(\frac{1}{2} r_0 \sqrt{t^2 - a^2}\right) e^{-r_0 t/2}$$

در نهایت با توجه به رابطه (۲۸) و با استفاده از لم ۱ و تذکر ۳ می‌توان نوشت:

$$L^{-1}\{G_1(s)\} = \frac{c}{l} u\left(t + \frac{1}{c}\right) I_0\left(\frac{1}{2} r_0 \sqrt{t^2 - \left(\frac{1}{c}\right)^2}\right) e^{-r_0 t/2} \quad (47)$$

$$= \frac{c}{l} u\left(t + \frac{1}{c}\right) \left[J_0\left(\frac{1}{2c} r_0\right) I_0\left(\frac{1}{2} r_0 t\right) \right. \left. + 2 \sum_{k=1}^{\infty} J_{2k}\left(\frac{1}{2c} r_0\right) I_{2k}\left(\frac{1}{2} r_0 t\right) \right] e^{-r_0 t/2}$$

ب: تبدیل معکوس لاپلاس $G_2(s)$ Part (II)

در این قسمت نیز از قضیه مانده‌ها استفاده می‌کنیم. با فرض

$$\omega_n = \sqrt{\left(\frac{n\pi c}{l}\right)^2 - \left(\frac{r_0}{2}\right)^2}.$$

تابع $G_2(s)$ به صورت زیر محاسبه می‌شوند.

P	فشار سیال داخل لوله ($\frac{kg}{ms^2}$)
u	تابع هویساید
l	طول لوله (m)
L	تبدیل لاپلاس
g	شتاب جاذبه ($\frac{m}{s^2}$)
L^{-1}	تبدیل معکوس لاپلاس
Q	جریان حجمی سیال داخل لوله ($\frac{m^3}{s}$)
H	خط ارتفاع (m)
\mathcal{R}	قسمت حقیقی یک عبارت مختلط
v	سرعت حرکت سیال ($\frac{m}{s}$)

۶-مراجع

- [1] Axworthy D. H., Water distribution network modelling from steady state to waterhammer, PhD thesis, University of Toronto, 1997.
- [2] Barber A., Pneumatic handbook, 7th ed, Trade and Technical Press, Morden, England, 1989.
- [3] Brown F. T., The transient response of fluid lines, Journal of Basic Engineering, ASME, 84 (3), pp. 547-553, 1962.
- [4] Chaudhry M. H., Applied Hydraulic Transients, 2nd ed., Van Nostrand Reinhold Co., New York, USA, 1987.
- [5] Fox, J. A., Hydraulic Analysis of Unsteady Flow in Pipe Networks, The Macmillan Press Ltd., London, UK, 1977.
- [6] Ferrante M. and Brunone B., Leak detection in pressurised pipes by means of wavelet analysis, in 4th International Conference on Water Pipeline Systems: Managing Pipeline Assets in an Evolving Market, pp. 243-255, BHR Group, York, UK.
- [7] Ferrante M. and Brunone B., Pipe system diagnosis and leak detection by unsteadystate tests 1., Harmonic Analysis, Advances in Water Resources, 26, pp. 95-105, 2003.
- [8] Ferrante M., B. Brunone, S. Meniconi and Almadori C., Wavelet analysis of numerical pressure signals for leak monitoring, in CCWI 2005, Water Management for the 21-st Century, Vol. 1, edited by D. Savic, G. Walters, R. King, and S.-T. Khu, pp. 329-334, Exeter, UK, 2005.
- [9] Goodson R. E., and Leonard R. G., A survey of modeling techniques for fluid line transient, Journal of Basic Engineering, ASME, 94, pp. 474-482, 1972.
- [10] Izquierdo J., and Iglesias P. L., Mathematical modelling of hydraulic transients in complex systems, Mathematical and Computer Modelling, 39 (4-5), pp. 529-540.
- [11] John L. R., Forward electrical transmission line model of the human arterial system, Medical and Biological Engineering and Computing, 42 (3), pp. 312-321.
- [12] Karney B. W., Analysis of fluid transients in large distribution networks, PhD thesis, The University of British Columbia.
- [13] Munson B. R., Young D. F. and Okiishi T. H., Fundamentals of Fluid Mechanics, 4th ed., Wiley, New York, 2002.
- [14] Stecki J. S. and Davis D. C., Fluid transmission-lines - distributed parameter models. 1. A review of the state-of-the-art, Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers Part A-Journal of Power and Energy, 200 (4), pp. 215-228.

۴-نتیجه‌گیری

در این مقاله جریان پرفشار یک بعدی سیال درون یک لوله به طول 1 با شرایط مرزی مورد بررسی قرار گرفت که مبنای توصیف دینامیک شبکه‌هایی پیچیده از لوله‌های به هم متصل و با ابعاد بالاتر می‌باشد. در بخش ۱ مقدمه‌ای کوتاه در مورد جریان سیال درون لوله ارائه شد. در بخش ۲ معادلات پایه‌ای حاکم بر جریان یک بعدی که شامل معادلات جرم، حرکت و انرژی برای این سیستم، از روی قضیه انتقال رینولد و با استفاده از قانون بقای جرم و قانون دوم حرکت نیوتن و همچنین قانون اول ترمودینامیک، با در نظر گرفتن مفروضات معمول برای خطی‌سازی، بیان شدند. در نهایت در بخش سوم به طرح مسئله تعیین کران بالا برای فشار سیال درون لوله و حل آن به روش تحلیلی پرداختیم.

روش به کار رفته در این مقاله مبتنی بر انتقال سیستم دینامیکی حاکم بر خط جریان به فرکانس-دامنه با استفاده از تبدیلات لاپلاس و حل آن در لاپلاس-دامنه و سپس بازگرداندن جواب به زمان-دامنه است. این روش ترکیبی از مفاهیم مکانیک سیالات، معادلات دیفرانسیل با مشتقات جزئی، تبدیل لاپلاس و توابع مختلط است. نتایج این مقاله می‌تواند به انتخاب جنس و مقاومت لوله‌های حامل سیالات پرفشار و جلوگیری از بروز حوادثی مانند انفجار لوله‌های حاوی سیال پرفشار کمک شایانی نماید.

روش‌های قبلی فقط قادر به محاسبه فشار در ابتدا و انتهای لوله به صورت تقریبی بودند، در صورتی که روش به کار رفته در این مقاله قادر به محاسبه کران بالای بهینه برای فشار سیال درون لوله در هر زمان و در هر نقطه از لوله می‌باشد. روش پیشنهادی این مقاله مبتنی بر انتقال سیستم دینامیکی حاکم بر خط جریان به فرکانس-دامنه با استفاده از تبدیلات لاپلاس و حل آن در لاپلاس-دامنه و سپس بازگرداندن جواب به زمان-دامنه است.

۵-سپاسگزاری

نویسندگان از دانشگاه شهید مدنی آذربایجان به دلیل حمایت از این پژوهش قدردانی می‌کنند.

۱- نمادها

A_0, A	مساحت مقطع برش عرضی (m^2)
c_0	سرعت موج الاستیک جریان خطی
\mathcal{E}_r	کشش پیرامونی پسین
τ	تنش برشی دیواره لوله
r_0	ثابت مقاومتی ایستا
ρ_0, ρ	چگالی جریان ($\frac{kg}{m^3}$)
D_0	قطر لوله (m)
I_0	تابع بسل پیراسته نوع اول مرتبه صفر
I_n	تابع بسل پیراسته نوع اول مرتبه n
J_0	تابع بسل نوع اول مرتبه صفر
J_n	تابع بسل نوع اول مرتبه n

- [15] Wylie E. B. and Streeter V. L., Fluid Transients in Systems, Prentice-Hall Inc., Englewood Cliffs, New Jersey, USA, 1993.
- [16] Zecchin A. C., White L. B., Lambert M. F. and Simpson A. R., Frequency-domain hypothesis testing approach to leak detection in a single fluid line", in CCWI 2005, Water Management for the 21st Century, vol. 2, edited by D. Savic, G. Walters, R. King, and S.-T. Khu, pp. 149-154, Exeter, UK, 2005.
- [17] Zecchin A. C., Laplace-Domain Analysis of Fluid Line Networks with Applications to Time-Domain Simulation and System Parameter Identification, PhD thesis, The University of Adelaide, 2009.

مکان: بلا بیری فنلاند سیدال داخل اوله ...