

# بررسی کمانش ورق مستطیلی کامپوزیتی دارای گشودگی با هندسه‌های مختلف تحت اثر بارهای متغیر صفحه‌ای

احمد مامندی\*

استادیار، گروه مهندسی مکانیک، واحد پرند، دانشگاه آزاد اسلامی، پرند، ایران

محسن پرویز

کارشناس ارشد، واحد پرند، گروه مهندسی مکانیک، دانشگاه آزاد اسلامی، پرند، ایران

## چکیده

در این مقاله، تحلیل رفتار کمانش ورق‌های کامپوزیتی مستطیلی دارای گشودگی (*Cutout*) و بدون گشودگی تحت بارهای فشاری درون صفحه‌ای در حالت الاستیک خطی انجام شده است. برای بررسی تاثیر گشودگی با هندسه‌های مختلف شامل گشودگی دایروی، مستطیلی و ترکیبی از این دو نوع گشودگی و با توزیع گشودگی‌های متفاوت از نظر چیدمان (مانند ورق با یک گشودگی و بیشتر) بر روی رفتار کمانشی ورق کامپوزیتی مستطیلی از روش عددی المان محدود (*FEM*) استفاده شده است. در این راستا، تاثیر شرایط مرزی و نسبت طول به عرض ورق مستطیلی شکل ( $a/b$ ) بر روی رفتار کمانشی ورق کامپوزیتی دارای گشودگی بررسی شده است. همچنین، تاثیر انواع متفاوت بارهای متغیر درون صفحه‌ای بر روی رفتار کمانشی ورق کامپوزیتی دارای گشودگی مورد تحلیل قرار گرفته است. با استفاده از روش‌های تحلیلی نظریه کلاسیک لایه‌ای (*CLT*) و نظریه تغییر شکل برشی مرتبه اول (*FSDT*)، رفتار کمانش ورق‌های کامپوزیتی بدون گشودگی بررسی و تحلیل شده است. در انتها با استفاده از روش تجربی تحلیل رفتار کمانش ورق‌های کامپوزیتی دارای گشودگی دایره‌ای و بدون گشودگی و مقایسه نتایج آزمایشگاهی با نتایج روش المان محدود انجام شده است.

**واژه‌های کلیدی:** ورق کامپوزیتی مستطیلی، بار کمانش، گشودگی، روش المان محدود، روش تحلیلی، روش تجربی.

## Buckling analysis of a rectangular composite plate with different cutout shapes subjected to various linearly varying in-plane loadings

A. Mamandi

Department of Mechanical Engineering, Parand Branch, Islamic Azad University, Parand, Iran

M. Parviz

Department of Mechanical Engineering, Parand Branch, Islamic Azad University, Parand, Iran

### Abstract

In this study, the buckling behavior of laminated composite plates with and without cutouts subjected to in-plane loading has been investigated. The composite plate with different cutout shapes is subjected to various types of in-plane compressive loads. A numerical study using finite element method (*FEM*) has been carried out to study the effect of various cutout shapes including circular, rectangular and combination of these two types of cutout shapes. Furthermore, the effects of plate aspect ratio, plate length/thickness ( $a/t$ ), ply orientation and boundary conditions on the buckling behavior of laminated rectangular composite plates are all considered in the analysis. In order to have a basic reference in our study two analytical solutions based on *CLT* and *FSDT* methods are also have been used to predict the buckling behavior of laminated composite plates without cutouts. An experimental method has been used to investigate the behavior of buckling loads of the composite rectangular composite plates with and without cutouts. Finally, the outcome results of the FE and experimental methods are compared.

**Keywords:** Rectangular composite plate, Buckling load, Cutout, *FEM*, Analytical method, Experimental method.

جنگی (مانند در و پنجره)، موشک‌ها، عرشه کشتی‌ها به منظور ایجاد دسترسی به سیم‌های هیدرولیکی و الکتریکی استفاده می‌شود. واکر [۱] در سال ۱۹۹۸، رفتار کمانشی ورق کامپوزیتی مستطیلی با گشودگی دایره‌ای را با استفاده از نظریه تغییر شکل برشی مرتبه اول و روش المان محدود مورد تحقیق و بررسی قرار داد. جانا و بسکار [۲] در سال ۲۰۰۶، پایداری کمانشی ورق‌های مستطیلی تحت بارهای درون صفحه‌ای را با استفاده از حل تحلیلی-تقریبی با بکارگیری حالت تنش صفحه‌ای مورد بررسی قرار دادند. بابا [۳] در سال ۲۰۰۷، تاثیر شرایط مرزی بر روی بار کمانشی ورق کامپوزیتی مستطیلی با گشودگی با هندسه‌های مختلف را بررسی و اثر نسبت طول به ضخامت ورق کامپوزیتی در پاسخ را مورد بررسی قرار داد. همچنین اثر زاویه لایه‌های

### ۱- مقدمه

مواد کامپوزیتی به دلیل داشتن چگالی بسیار کم و از سوی دیگر مقاومت بالا، نسبت به دیگر مواد مرسوم کاربرد بالایی در صنایع مختلف مانند صنایع هوانوردی، دریایی، خودروسازی و حمل و نقل، ساختمان‌سازی دارند. ورق‌ها کاربردهای وسیعی در سازه‌های مهندسی دارند. این ورق‌ها معمولاً تحت بارگذاری‌های درون صفحه‌ای و خارج صفحه‌ای قرار دارند. بنابراین، بررسی پاسخ سازه‌ای و مقاومتی آنها مانند تغییر شکل، بار کمانشی، توزیع تنش و کرنش تحت بارگذاری دارای اهمیت بالایی می‌باشد. برای نمونه از ورق‌های کامپوزیتی با گشودگی در طراحی و ساخت بدنه و بال‌های هواپیماهای تجاری و

\* نویسنده مکاتبه کننده، آدرس پست الکترونیکی: am\_2001h@yahoo.com

تاریخ دریافت: ۹۶۰۱/۲۷

تاریخ پذیرش: ۹۷/۰۸/۰۷

ورق کامپوزیتی بر روی بار کمانش ورق کامپوزیتی را محاسبه نمود. وی از دو روش عددی و آزمایشگاهی برای بررسی و تحلیل بار کمانش ورق کامپوزیتی استفاده کرد. کارگرونین و مامندی [۴] در سال ۲۰۰۸، با استفاده از روش ریزت بار کمانش ورق ارتوتروپ تحت شرایط مرزی تکیه‌گاه ساده و بار ترکیبی خمشی-فشاری درون صفحه‌ای را بررسی کردند. آنها با استخراج انرژی داخلی و کار نیروی خارجی کل و استفاده از اصل کمینه کردن انرژی پتانسیل بار کمانش ورق ارتوتروپ مستطیلی را بدست آوردند. توپال و ازمان [۵] در سال ۲۰۰۸، بار کمانش ورق کامپوزیتی مستطیلی با گشودگی دایره‌ای را بررسی کردند. آنها از نظریه تغییرشکل برشی مرتبه اول و روش انرژی استفاده کردند. تاثیرات اندازه گشودگی، نسبت ضخامت به طول ورق، زاویه لایه‌ها و شرایط مرزی بر روی بار کمانش ورق کامپوزیتی را مورد تجزیه و تحلیل قرار دادند. حسام القبلان و همکارانش [۶] در سال ۲۰۰۹، با استفاده از روش المان محدود تاثیرات عوامل و پارامترهای مختلف را بر روی بار کمانش ورق کامپوزیتی مربعی با گشودگی دایره‌ای با سه نوع بارگذاری درون صفحه‌ای شامل بار فشاری تک محوره، بار فشاری دو محوره و بار برشی را مطالعه و کردند. برای ورق با گشودگی نسبتاً کوچک، زمانی که گشودگی نزدیک به لبه ورق قرار داده شود عملکرد بهتری را می‌توان بدست آورد. اگرچه برای ورق با گشودگی‌های نسبتاً بزرگ در صورتی که گشودگی‌ها در مرکز ورق کامپوزیتی قرار بگیرند عملکرد بالاتری را می‌توان مشاهده کرد. لاکشمی نارایانا و همکارانش [۷] در سال ۲۰۱۳، با استفاده از روش المان محدود تاثیرات موقعیت و زاویه گشودگی مستطیلی و نسبت طول به عرض ورق کامپوزیتی مستطیلی شکل با تعداد لایه‌های گوناگون را بر روی بار کمانش ورق بررسی کردند. آنها مشاهده کردند که با افزایش نسبت طول به عرض ورق کامپوزیتی، بار کمانش ورق کامپوزیتی کاهش می‌یابد. موهان کومار [۸] در سال ۲۰۱۳، با استفاده از نرم‌افزار المان محدود *NASTRAN* و ساخت نمونه‌هایی از ورق کامپوزیتی به بررسی رفتار کمانش ورق‌های کامپوزیتی با گشودگی‌های دایره‌ای، مستطیلی و مربعی پرداخت. وی مشاهده کرد که میزان بار کمانش ورق کامپوزیتی با افزایش نسبت طول به ضخامت ورق کاهش می‌یابد. ردی و همکارانش [۹] در سال ۲۰۱۴، رفتار کمانشی ورق کامپوزیتی مستطیلی ارتوتروپ گرافیت/اپوکسی ۴ لایه با لایه‌چینی [0/45/45/0] دارای گشودگی‌های مربعی و مستطیلی را مطالعه کردند. نتایج بدست آمده نشان‌دهنده آن است که مقدار بار کمانشی ورق با افزایش نسبت طول به ضخامت ورق کامپوزیتی حاوی گشودگی مربعی و مستطیلی و نسبت طول به عرض ورق مستطیلی کاهش می‌یابد. آنها برای بدست آوردن نتایج از نرم‌افزار *ANSYS* استفاده کردند. با بررسی پژوهش‌های انجام گرفته پیشین مشاهده می‌گردد که تاکنون تحقیق جامعی که دربرگیرنده بررسی انواع گشودگی (دایره ای، مستطیلی و ترکیبی) و تعداد آنها بر روی ورق، موقعیت و چیدمان آنها نسبت به یکدیگر (فاصله و نحوه قرارگیری آنها) در شکل پاسخ کمانشی ورق کامپوزیتی با استفاده از روش‌های حل تحلیلی، المان محدود و آزمایشگاهی باشد انجام نشده‌است. از این رو پژوهش کنونی انجام گرفته‌است. در این

مقاله، با استفاده از روش‌های تحلیلی شامل نظریه کلاسیک لایه‌ای<sup>۱</sup> (*CLT*) و نظریه تغییر شکل برشی مرتبه اول<sup>۲</sup> (*FSDT*)، رفتار کمانش ورق‌های کامپوزیتی بدون گشودگی (و با گشودگی در حالت‌های خاص) با شرایط مرزی متفاوت بررسی شده‌است. همچنین برای بررسی تاثیر گشودگی شامل گشودگی دایروی، مستطیلی و ترکیبی از این دو نوع و توزیع گشودگی‌های متفاوت از نظر چیدمان مانند ورق با یک گشودگی و بیشتر، شرایط مرزی متفاوت در لبه‌های ورق و توزیع متنوع بارهای کمانشی-خمشی درون صفحه‌ای متغیر بر روی رفتار کمانشی ورق کامپوزیتی مستطیلی از روش عددی المان محدود<sup>۳</sup> (*FEM*) استفاده شده‌است. در انتها با استفاده از روش تجربی مقایسه نتایج آزمایش با نتایج روش المان محدود در کمانش ورق‌های کامپوزیتی دارای گشودگی دایره‌ای و بدون گشودگی انجام شده‌است.

## ۲- مدل‌سازی کمانش ورق کامپوزیتی

### ۲-۱- نظریه کلاسیک لایه‌ای (*CLT*)

با استفاده از نظریه کلاسیک می‌توان از خصوصیات لایه‌ها به منظور تجزیه و تحلیل رفتار چندلایه‌ها استفاده نمود. با استفاده از نظریه کلاسیک لایه‌ای رابطه تنش-کرنش برای یک لایه از ورق کامپوزیتی در مختصات هندسی سازه عبارت است از [۱]:

$$\begin{bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \\ \tau_{xz} \\ \tau_{yz} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{Q}_{11} & \bar{Q}_{12} & \bar{Q}_{16} & 0 & 0 \\ \bar{Q}_{12} & \bar{Q}_{22} & \bar{Q}_{26} & 0 & 0 \\ \bar{Q}_{16} & \bar{Q}_{26} & \bar{Q}_{66} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \bar{Q}_{44} & \bar{Q}_{45} \\ 0 & 0 & 0 & \bar{Q}_{45} & \bar{Q}_{55} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \\ \gamma_{xz} \\ \gamma_{yz} \end{bmatrix} \quad (1)$$

مولفه‌های نیروها و ممان‌ها برای برای  $N$  لایه از روابط زیر بدست می‌آیند [۱]:

$$\begin{bmatrix} N_x \\ N_y \\ N_{xy} \end{bmatrix} = \int_{-h/2}^{h/2} \begin{bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{bmatrix} dz = \sum_{k=1}^N Z_{k-1} \int_{Z_k-1}^{Z_k} \begin{bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{bmatrix}_k dz, \quad (2)$$

$$\begin{bmatrix} M_x \\ M_y \\ M_{xy} \end{bmatrix} = \int_{-h/2}^{h/2} \begin{bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{bmatrix} z dz = \sum_{k=1}^N Z_{k-1} \int_{Z_k-1}^{Z_k} \begin{bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{bmatrix}_k z dz$$

که در رابطه بالا  $z_k$  فاصله سطح پایینی لایه  $k$ ام از سطح میانی ورق و  $z_{k-1}$  فاصله سطح بالایی این لایه از سطح میانی ورق می‌باشد. مولفه‌های نیروها و ممان‌ها برای یک ورق چند لایه ارتوتروپ بر اساس رابطه (۱) عبارتند از

$$\begin{bmatrix} N_x \\ N_y \\ N_{xy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{16} \\ A_{12} & A_{22} & A_{26} \\ A_{16} & A_{26} & A_{66} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_x^0 \\ \varepsilon_y^0 \\ \gamma_{xy}^0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B_{11} & B_{12} & B_{16} \\ B_{12} & B_{22} & B_{26} \\ B_{16} & B_{26} & B_{66} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} k_x \\ k_y \\ k_{xy} \end{bmatrix}, \quad (3)$$

$$\begin{bmatrix} M_x \\ M_y \\ M_{xy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} B_{11} & B_{12} & B_{16} \\ B_{12} & B_{22} & B_{26} \\ B_{16} & B_{26} & B_{66} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_x^0 \\ \varepsilon_y^0 \\ \gamma_{xy}^0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} D_{11} & D_{12} & D_{16} \\ D_{12} & D_{22} & D_{26} \\ D_{16} & D_{26} & D_{66} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} k_x \\ k_y \\ k_{xy} \end{bmatrix}$$

<sup>1</sup> Classical Laminate Theory (CLT)

<sup>2</sup> First-order Shear Deformation Theory (FSDT)

<sup>3</sup> Finite Element Method (FEM)

لازم به ذکر است که در استخراج رابطه (۱۱) فرض شده است که تنها بارهای لبه‌ای درون صفحه ای قائم  $(N_x \text{ و } N_y)$  بر ورق ارتوتروپ وارد می‌شوند و  $N_{xy} = 0$ .

### ۲-۲- نظریه تغییر شکل برشی مرتبه اول (FSDT)

نظریه تغییر شکل برشی مرتبه اول (FSDT) بر مبنای نظریه ورق *Reissner-Mindlin* می‌باشد. این نظریه برای ورق‌های نازک و نسبتاً ضخیم قابل استفاده می‌باشد. کرنش‌های درون‌صفحه‌ای  $(\epsilon_x, \epsilon_y, \gamma_{xy})$  و کرنش‌های برشی  $(\gamma_{xz}$  و  $\gamma_{yz})$  به صورت زیر می‌باشند

$$\begin{Bmatrix} \epsilon_x \\ \epsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \frac{\partial u_0}{\partial x} \\ \frac{\partial v_0}{\partial y} \\ \frac{\partial u_0}{\partial y} + \frac{\partial v_0}{\partial x} \end{Bmatrix} + z \begin{Bmatrix} \frac{\partial \psi_x}{\partial x} \\ \frac{\partial \psi_y}{\partial y} \\ \frac{\partial \psi_x}{\partial y} + \frac{\partial \psi_y}{\partial x} \end{Bmatrix} \quad (12)$$

$$\begin{Bmatrix} \gamma_{xz} \\ \gamma_{yz} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \frac{\partial w_0}{\partial x} + \psi_x \\ \frac{\partial w_0}{\partial y} + \psi_y \end{Bmatrix} \quad (13)$$

در روش *FSDT* به منظور ساده کردن تجزیه و تحلیل ورق، ماتریس تنش را به دو بخش برشی و خمشی تقسیم می‌کنند. بخش برشی به صورت زیر نمایش داده می‌شود

$$\begin{Bmatrix} \tau_{yz} \\ \tau_{xz} \end{Bmatrix} = k \begin{bmatrix} \bar{Q}_{44} & \bar{Q}_{45} \\ \bar{Q}_{45} & \bar{Q}_{55} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \frac{\partial w_0}{\partial y} + \psi_y \\ \frac{\partial w_0}{\partial x} + \psi_x \end{Bmatrix} \quad (14)$$

که  $k$  ضریب تصحیح برشی می‌باشد. بخش خمشی ماتریس تنش به صورت زیر می‌باشد

$$\begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{Q}_{11} & \bar{Q}_{12} & \bar{Q}_{16} \\ \bar{Q}_{12} & \bar{Q}_{22} & \bar{Q}_{26} \\ \bar{Q}_{16} & \bar{Q}_{26} & \bar{Q}_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \frac{\partial u_0}{\partial x} \\ \frac{\partial v_0}{\partial y} \\ \frac{\partial u_0}{\partial y} + \frac{\partial v_0}{\partial x} \end{Bmatrix} + z \begin{bmatrix} \bar{Q}_{11} & \bar{Q}_{12} & \bar{Q}_{16} \\ \bar{Q}_{12} & \bar{Q}_{22} & \bar{Q}_{26} \\ \bar{Q}_{16} & \bar{Q}_{26} & \bar{Q}_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \frac{\partial \psi_x}{\partial x} \\ \frac{\partial \psi_y}{\partial y} \\ \frac{\partial \psi_x}{\partial y} + \frac{\partial \psi_y}{\partial x} \end{Bmatrix} \quad (15)$$

مولفه‌های نیروها و ممان‌ها در روش *FSDT* همانند روش *CLT* می‌باشند. نیروهای برش  $R_{yz}$  و  $R_{xz}$  بر اساس کرنش‌های برشی به صورت زیر نوشته می‌شوند

$$\begin{Bmatrix} R_{yz} \\ R_{xz} \end{Bmatrix} = k \begin{bmatrix} A_{44} & A_{45} \\ A_{45} & A_{55} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \frac{\partial w_0}{\partial y} + \psi_y \\ \frac{\partial w_0}{\partial x} + \psi_x \end{Bmatrix} \quad (16)$$

و معادلات تعادل به صورت زیر نوشته می‌شوند

$$\frac{\partial M_x}{\partial x} + \frac{\partial M_{xy}}{\partial y} - R_{xz} = 0, \quad \frac{\partial M_y}{\partial y} + \frac{\partial M_{xy}}{\partial x} - R_{yz} = 0, \quad (17)$$

$$\frac{\partial R_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial R_{yz}}{\partial y} + p^* = 0$$

که

$$p^* = p + N_x \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + N_y \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + 2N_{xy} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} - \rho^* \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} \quad (18)$$

که در آن

$$A_{ij} = \sum_{k=1}^N (\bar{Q}_{ij})_k (Z_k - Z_{k-1}), \quad B_{ij} = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^N (\bar{Q}_{ij})_k (Z_k^2 - Z_{k-1}^2), \quad (4)$$

$$D_{ij} = \frac{1}{3} \sum_{k=1}^N (\bar{Q}_{ij})_k (Z_k^3 - Z_{k-1}^3),$$

که در روابط بالا،  $A_{ij}$  سختی محوری،  $B_{ij}$  سختی خمشی-محوری و  $D_{ij}$  سختی خمشی می‌باشند. مولفه‌های کرنش‌ها و انحناها به صورت زیر نوشته می‌شوند

$$\begin{aligned} \epsilon_x^0 &= \frac{\partial u_0}{\partial x}; \quad \epsilon_y^0 = \frac{\partial v_0}{\partial y}; \quad \gamma_{xy}^0 = \frac{\partial u_0}{\partial y} + \frac{\partial v_0}{\partial x} \\ k_x &= -\frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2}; \quad k_y = -\frac{\partial^2 w_0}{\partial y^2}; \quad k_{xy} = -\frac{2\partial^2 w_0}{\partial x \partial y} \end{aligned} \quad (5)$$

انرژی کرنشی ورق ارتوتروپ عبارت است از

$$U = \frac{1}{2} \int_0^{L_x} \int_0^{L_y} \left[ D_{11} \left( \frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} \right)^2 + D_{22} \left( \frac{\partial^2 w_0}{\partial y^2} \right)^2 + D_{66} \left( \frac{2\partial^2 w_0}{\partial x \partial y} \right)^2 + 2 \left( D_{12} \frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} \frac{\partial^2 w_0}{\partial y^2} + D_{16} \frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} \frac{2\partial^2 w_0}{\partial x \partial y} + D_{26} \frac{\partial^2 w_0}{\partial y^2} \frac{2\partial^2 w_0}{\partial x \partial y} \right) \right] dy dx \quad (6)$$

کار نیروی خارجی ورق تحت نیروهای صفحه‌ای به صورت زیر می‌باشد

$$Q = \frac{1}{2} \int_0^{L_x} \int_0^{L_y} \left[ N_x \left( \frac{\partial w_0}{\partial x} \right)^2 + N_y \left( \frac{\partial w_0}{\partial y} \right)^2 + 2N_{xy} \left( \frac{\partial w_0}{\partial x} \frac{\partial w_0}{\partial y} \right) \right] dy dx \quad (7)$$

که در روابط بالا،  $N_x$ ،  $N_y$  و  $N_{xy}$  نیروهای درون صفحه‌ای (بر واحد طول) می‌باشند. برای بدست آوردن تغییرمکان، از روش ریتز استفاده می‌شود. برای ورق روی تکیه گاه ساده، در لبه‌ها تغییر مکان صفر است

$$w_0 = 0 \quad \begin{cases} x=0 & \text{و} & 0 \leq y \leq L_y \\ x=L_x & \text{و} & 0 \leq y \leq L_y \\ 0 \leq x \leq L_x & \text{و} & x=0 \\ 0 \leq x \leq L_x & \text{و} & y=L_y \end{cases} \quad (8)$$

برای ارضای شرایط مرزی، می‌توان از جواب زیر برای تغییرمکان استفاده نمود

$$w_0 = \sum_{i=1}^I \sum_{j=1}^J w_{ij} \sin \frac{i\pi x}{L_x} \sin \frac{j\pi y}{L_y} \quad (9)$$

$w_{ij}$  ثابت و بر اساس اصل کمینه کردن انرژی پتانسیل محاسبه می‌شود

$$\frac{\partial \pi_p}{\partial w_{ij}} = \frac{\partial (U+Q)}{\partial w_{ij}} = 0 \quad (10)$$

با جایگذاری  $w_0$  از رابطه (۹) در عبارات  $U$  و  $Q$  در روابط (۶) و (۷)، و بهره‌گیری از رابطه (۱۰). برای ورق‌های ارتوتروپ (که  $D_{16} = D_{26} = 0$  می‌باشد) مقادیر ویژه  $(\lambda_{cr})_{ij}$  از رابطه زیر بدست می‌آیند  $(i, j = 1, 2, \dots)$ .

$$(\lambda_{cr})_{ij} = \frac{\pi^2 \left[ D_{11} \left( \frac{i}{L_x} \right)^4 + 2(D_{12} + 2D_{66}) \left( \frac{i}{L_x} \right)^2 \left( \frac{j}{L_y} \right)^2 + D_{22} \left( \frac{j}{L_y} \right)^4 \right]}{N_{x0} \left( \frac{i}{L_x} \right)^2 + N_{y0} \left( \frac{j}{L_y} \right)^2} \quad (11)$$

که  $i$  و  $j$  تعداد نیم‌دامنه موج به ترتیب در جهت‌های طولی و عرضی می‌باشند. کمترین مقدار  $(\lambda_{cr})_{ij}$ ، بار بحرانی کمانش ورق می‌باشد.

می‌باشد. در مش‌بندی از المان‌های چهار ضلعی استفاده شده‌است. لازم به ذکر است که در شبیه‌سازی‌های المان محدود با توجه به ابعاد ورق در حالت‌های مختلف بارگذاری و شرایط مرزی، اندازه المان‌ها در مش‌بندی ورق جهت دستیابی به همگرایی حل مورد بررسی قرار گرفته‌است. همچنین، در حالت‌های خاص که پاسخ‌های تحلیلی در مقالات و مراجع در دسترس بوده‌اند با صحت‌سنجی نتایج، تایید همگرایی و استقلال از مش در حل با توجه به اندازه المان‌ها در مش‌بندی بدست آمده‌است. از سوی دیگر، در این مقاله نتایج بدست آمده از روش آزمایشگاهی و روش حل عددی المان محدود نیز تاکیدی بر انتخاب مناسب مش‌بندی مورد استفاده می‌باشند.

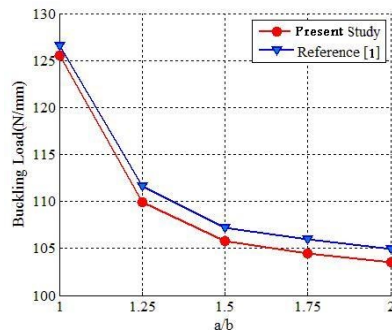
### ۳- اعتبارسنجی نتایج

برای اعتبارسنجی، کمانش ورق کامپوزیتی مستطیلی با طول ۲۰ اینچ و عرض ۱۰ اینچ با شرایط مرزی تکیه‌گاه ساده و تحت بار فشاری تک محوره در نظر گرفته می‌شود. نتایج بدست آمده با روش تحلیلی *CLT* در تحقیق کنونی و مرجع [۱۰] در جدول ۱ آورده شده‌است. نتایج نشان داده شده در این جدول، دقت مناسبی بین نتایج بار کمانش بدست آمده در پژوهش کنونی و مرجع [۱۰] را نشان می‌دهد.

جدول ۱- بار کمانش ورق مربعی کامپوزیتی مستطیلی تحت بار فشاری تک محوره در پژوهش کنونی و مرجع [۱۰]

بار کمانش ورق (N/mm)	پژوهش کنونی ( <i>CLT</i> )	مرجع [۱۰]	اختلاف (%)
	۱/۴۴	۱/۴۱	۲/۱۲

در شکل ۱، برای مقایسه، نتایج بار کمانش ورق کامپوزیتی ۴ لایه از جنس گرافیت/اپوکسی (T۳۰۰) [۱] تحت بار فشاری دو محوره و تحت شرایط مرزی تکیه‌گاه ساده برای نسبت‌های مختلف  $a/b$  با استفاده از روش تحلیلی *FSDT* در پژوهش کنونی و مرجع [۱] آورده شده‌است.



شکل ۱- بار کمانش ورق کامپوزیتی مستطیلی ۴ لایه برحسب ضریب منظری

در شکل ۲، نتایج بار کمانش ورق کامپوزیتی ۱۶ لایه دارای گشودگی مستطیلی برای نسبت‌های مختلف طول به عرض ورق ( $a/b$ ) برای انواع مختلف بارگذاری‌های بکار برده شده (بارگذاری‌های مختلف

برای محاسبه بار کمانش ورق کامپوزیتی با شرایط مرزی تکیه‌گاه ساده و تحت اثر نیروی فشاری تک محوره با استفاده از روش *FSDT* رابطه (۱۷) به صورت زیر نوشته می‌شود

$$\begin{aligned} D_{11} \frac{\partial^2 \psi_x}{\partial x^2} + (D_{12} + D_{66}) \frac{\partial^2 \psi_y}{\partial x \partial y} + D_{66} \frac{\partial^2 \psi_x}{\partial y^2} - A_{55} k \left( \psi_x + \frac{\partial w}{\partial x} \right) &= 0 \\ D_{22} \frac{\partial^2 \psi_y}{\partial y^2} + (D_{12} + D_{66}) \frac{\partial^2 \psi_x}{\partial x \partial y} + D_{66} \frac{\partial^2 \psi_y}{\partial x^2} - A_{44} k \left( \psi_y + \frac{\partial w}{\partial y} \right) &= 0 \quad (19) \\ A_{55} k \left( \frac{\partial \psi_x}{\partial x} + \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) + A_{44} k \left( \frac{\partial \psi_y}{\partial y} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) - N \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} &= 0 \end{aligned}$$

شرایط مرزی برای ورق مانند روش *CLT* می‌باشد. برای شکل پاسخ  $w$ ،  $\psi_x$  و  $\psi_y$  از سری‌های فوری به صورت زیر استفاده شده‌است

$$\begin{aligned} w(x, y) &= \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} w_{mn} \sin\left(\frac{m\pi x}{a}\right) \sin\left(\frac{n\pi y}{b}\right) \\ \psi_x(x, y) &= \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} x_{mn} \cos\left(\frac{m\pi x}{a}\right) \sin\left(\frac{n\pi y}{b}\right) \\ \psi_y(x, y) &= \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} y_{mn} \sin\left(\frac{m\pi x}{a}\right) \cos\left(\frac{n\pi y}{b}\right) \end{aligned} \quad (20)$$

با قرار دادن رابطه (۲۰) در رابطه (۱۹)، رابطه زیر به دست می‌آید

$$\begin{bmatrix} -D_{11}\alpha^2 - D_{66}\beta^2 - A_{55}k & -D_{12}\alpha\beta - D_{66}\alpha\beta & -A_{55}k\alpha \\ -D_{12}\alpha\beta - D_{66}\alpha\beta & -D_{22}\beta^2 - D_{66}\alpha^2 - A_{44}k & -A_{44}k\beta \\ -A_{55}k\alpha & -A_{44}k\beta & N\alpha^2 - A_{55}k\alpha^2 - A_{44}k\beta^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_{mn} \\ y_{mn} \\ w_{mn} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (21)$$

که  $\alpha = \frac{m\pi}{a}$  و  $\beta = \frac{n\pi}{b}$  می‌باشد. با تعریف روابط زیر

$$\begin{aligned} H_1 &= -D_{11}\alpha^2 - D_{66}\beta^2 - A_{55}k, H_2 = -D_{12}\alpha\beta - D_{66}\alpha\beta, \\ H_3 &= -A_{55}k\alpha, H_4 = -D_{22}\beta^2 - D_{66}\alpha^2 - A_{44}k, H_5 = -A_{44}k\beta \end{aligned} \quad (22)$$

رابطه (۲۱) به صورت زیر خلاصه می‌شود

$$\begin{bmatrix} H_1 & H_2 & H_3 \\ H_2 & H_4 & H_5 \\ H_3 & H_5 & N\alpha^2 + \alpha H_3 + \beta H_5 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_{mn} \\ y_{mn} \\ w_{mn} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (23)$$

برای جواب‌های غیر بديهی، با حل رابطه (۲۳)، بار کمانش ورق کامپوزیتی ( $N$ ) از رابطه زیر به دست می‌آید

$$N = \frac{H_1 H_2^2 + \alpha H_3 H_2^2 + \beta H_2^2 H_5 + H_3^2 H_4 - \alpha H_1 H_3 H_4 - \beta H_1 H_4 H_5 - 2H_2 H_3 H_5}{\alpha^2 (H_1 H_4 - H_2^2)} \quad (24)$$

که بار بحرانی کمانش (شکل مد اول) در  $n = m = 1$  اتفاق می‌افتد. برای حل معادلات در روش‌های تحلیلی *CLT* و *FSDT* برنامه‌ای با استفاده از نرم‌افزار *MATLAB* نوشته شده‌است.

### ۳-۲- مدل سازی المان محدود

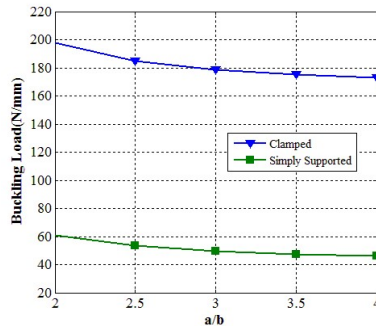
برای صحت سنجی نتایج بدست آمده از روش‌های تحلیلی و آزمایشگاهی در تحلیل کمانش ورق‌های کامپوزیتی مستطیلی دارای گشودگی با هندسه‌های مختلف و با توزیع گشودگی‌های متفاوت از نظر شکل و چیدمان تحت اثر بارهای متغیر درون صفحه‌ای از روش المان محدود به کمک نرم‌افزار *ANSYS* استفاده شده‌است. در شبیه‌سازی از المان *SHELL281* برای مدل‌سازی ورق ارتوتروپ استفاده شده‌است. این المان دارای ۸ گره با ۶ درجه آزادی برای هر گره می‌باشد. در این المان، استفاده تا ۲۵۰ لایه مختلف برای مدل‌سازی ورق‌ها امکان‌پذیر

#### ۴-۱-۱- بررسی تاثیر ضريب منطري (نسبت طول به

عرض) ورق و شرايط مرزی بر روی کمانش ورق کامپوزيتی

#### بدون گشودگی در روش CLT

برای انجام تحليل در روش CLT، ورق کامپوزيتی ۱۶ لایه با ضخامت ۲ mm با لایه‌چینی  $[0/+45/-45/90]_{2S}$  که تحت بار فشاری تک محوره ( $N_x$ ) قرار دارد در نظر گرفته شده‌است. در این بخش تاثیر دو نوع شرايط مرزی SSSS و CCCC (با استفاده از روش المان محدود) بر روی بار کمانش ورق بررسی شده‌است. به این صورت که  $S$  بیانگر شرايط مرزی به صورت تکیه گاه ساده و  $C$  بیانگر شرايط مرزی گیردار می‌باشند. در SSSS، تمام لبه‌ها تکیه‌گاه ساده و در CCCC تمام لبه‌ها گیردار می‌باشند. در شکل ۴، تاثیر این دو نوع شرايط مرزی مختلف بر روی مقدار بار کمانش ورق کامپوزيتی نمایش داده شده‌است. در این شکل، شرايط مرزی CCCC دارای بار کمانش بیشتری در مقایسه با شرايط مرزی SSSS می‌باشد به طوری که بار کمانش ورق کامپوزيتی ۱۶ لایه با شرايط مرزی CCCC تقریباً ۳ برابر بار کمانش ورق کامپوزيتی تحت شرايط مرزی SSSS برای نسبت‌های مختلف  $a/b$  می‌باشد. همچنین با توجه به شکل ۴ با افزایش ضريب منطري ورق ( $a/b$ ) از ۲ به ۴ میزان بار کمانش ورق کامپوزيتی تقریباً ۱۵ درصد با شرايط مرزی CCCC و ۳۰ درصد با شرايط مرزی SSSS کاهش می‌یابد.



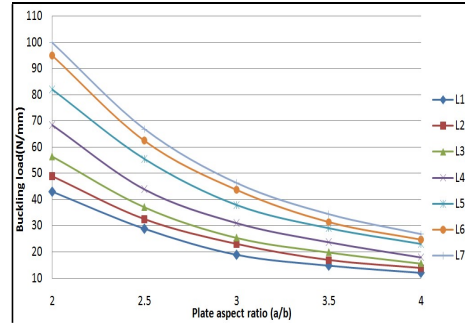
شکل ۴- تاثیر شرايط مرزی بر روی میزان بار کمانش ورق کامپوزيتی به روش CLT

#### ۴-۱-۲- بار کمانش ورق کامپوزيتی بدون گشودگی در

#### روش تحليلی با FEM

بار کمانش ورق کامپوزيتی شبه‌ایزوتروپیک از جنس گرافیت/اپوکسی با طول ۱۰۰ mm و عرض ۱۰۰ mm تحت شرايط مرزی تکیه‌گاه ساده و بار فشاری تک محوره برای ورق ۸ لایه با ضخامت ۱ mm با لایه‌چینی به صورت  $[0/+45/-45/90]_S$ ، ورق ۱۶ لایه با ضخامت ۲ mm با لایه‌چینی  $[0/+45/-45/90]_{2S}$  و ورق ۲۴ لایه با ضخامت ۳ mm با لایه‌چینی  $[0/+45/-45/90]_{3S}$  در روش تحليلی CLT و روش المان محدود با استفاده از نرم افزار ANSYS در این بخش بررسی و مقایسه شده‌است. نتایج بار کمانش ورق کامپوزيتی بدست آمده برای تعداد لایه‌های مختلف در روش تحليلی CLT و روش المان محدود در شکل ۵ نشان داده شده‌است. بار کمانش ورق کامپوزيتی با افزایش تعداد لایه ( $N$ ) افزایش قابل توجهی می‌یابد. به این صورت که مقدار بار کمانش

( $L1, L2, L3, L4, L5, L6, L7$ ) به روش المان محدود نشان داده شده‌است. لازم به ذکر است که نتایج بار کمانش بدست آمده در این پژوهش با نتایج بدست آمده در مرجع [۱] بر روی یکدیگر منطبق می‌باشند.



شکل ۲- مقادیر بار کمانش ورق کامپوزيتی ۱۶ لایه دارای گشودگی مستطیلی در پژوهش کنونی به روش المان محدود

#### ۴- تحليل نتایج و بررسی پارامتری کمانش ورق

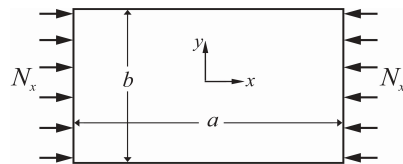
#### ارتوتروپ با گشودگی و بدون گشودگی

در این قسمت به بررسی عوامل موثر بر رفتار کمانشی ورق‌های کامپوزيتی و ایزوتروپ دارای گشودگی یا بدون گشودگی پرداخته شده‌است.

#### ۴-۱-۱- بار کمانش ورق کامپوزيتی مستطیلی بدون

#### گشودگی با استفاده از روش‌های تحليلی CLT و FSDT

در شکل ۳، ورق کامپوزيتی مستطیل شکلی که تحت بار فشاری تک محوره ( $N_x$ ) قرار دارد نشان داده شده‌است. با استفاده از روش تحليلی CLT و FSDT می‌توان بار کمانش ورق کامپوزيتی بدون گشودگی را بدست آورد. همچنین، تاثیر تغییر پارامترهای مختلف بر مقدار بار کمانش ورق به صورت جداگانه بررسی و تحليل شده‌اند.



شکل ۳- ورق کامپوزيتی مستطیلی تحت بار فشاری تک محوره ( $N_x$ )

در ادامه برای تحليل، از ورق کامپوزيتی با مشخصات گرافیت/اپوکسی ( $Hercules\ AS/3501-6$ ) [۶] برای تحليل بار کمانش ورق در روش‌های تحليلی و المان محدود استفاده شده‌است. مشخصات فیزیکی ماده کامپوزيتی گرافیت/اپوکسی در جدول ۲ ارائه شده‌است.

جدول ۲- مشخصات فیزیکی ماده کامپوزيتی گرافیت/اپوکسی

$E_{11}$ (GPa)	$E_{22}$ (GPa)	$\nu_{12}$	$G_{12} = G_{13}$ (GPa)	$G_{23}$ (GPa)
۱۲۸	۱۱	۰/۲۵	۴/۴۸	۱/۵۳

در جدول ۴ مقادیر بار کمانش ورق بدست آمده در شکل ۶ و درصد اختلاف بار کمانش ورق کامپوزیتی بدون گشودگی در دو روش تحلیلی (*FSDT*) و روش المان محدود آورده شده است. با توجه مقادیر بار کمانش نشان داده در جدول ۴ و جدول ۳ و مقایسه نتایج به دست آمده از نرم افزار *ANSYS*، می توان مشاهده کرد که روش تحلیلی *FSDT* در پیش بینی رفتار کمانش ورق های کامپوزیتی دارای دقت بیشتری نسبت به روش تحلیلی *CLT* می باشد. همچنین مشاهده شده است که با افزایش تعداد لایه و در نهایت افزایش ضخامت ورق کامپوزیتی درصد خطای روش تحلیلی *CLT* در پیش بینی بار کمانش ورق کامپوزیتی افزایش می یابد. بنابراین، از نتایج بدست آمده در پژوهش کنونی می توان نتیجه گرفت که روش تحلیلی *CLT* تنها برای پیش بینی رفتار کمانش ورق های کامپوزیتی نازک مناسب می باشد. از طرفی روش تحلیلی *FSDT* برای پیش بینی رفتار ورق های نازک و نسبتاً ضخیم نیز می تواند قابل استفاده باشد.

جدول ۴- بار کمانش ورق در روش تحلیلی *FSDT* و روش المان محدود

بار کمانش ورق (N/mm)			
اختلاف (%)	<i>ANSYS</i>	<i>FSDT</i>	<i>N</i> (تعداد لایه)
۰/۴۸	۱۶/۶۶	۱۶/۵۸	۸
۲/۹۴	۱۳۷/۰۷	۱۴۱/۱۲	۱۶
۵/۷۳	۴۵۳/۷۳	۴۷۹/۷۳	۲۴

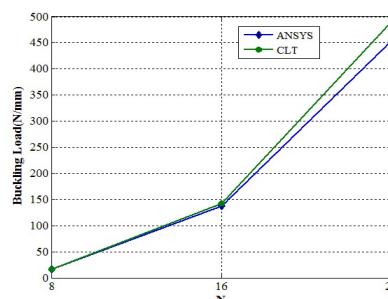
#### ۲-۴- بار کمانش ورق های کامپوزیتی دارای گشودگی با هندسه های مختلف به روش المان محدود

در این بخش با استفاده از روش عددی المان محدود به بررسی رفتار کمانش ورق های کامپوزیتی مستطیلی شکل دارای گشودگی با هندسه های مختلف شامل گشودگی دایروی، مستطیلی و ترکیبی از این دو نوع گشودگی پرداخته شده است. از نرم افزار *ANSYS* به منظور شبیه سازی کمانش ورق های کامپوزیتی استفاده شده است.

#### ۲-۴-۱- بررسی تاثیر هندسه و چیدمان گشودگی بر روی رفتار بار کمانشی ورق کامپوزیتی در روش *FEM*

در شکل ۷، ورق کامپوزیتی ۱۶ لایه با طول  $200\text{ mm}$  و عرض  $100\text{ mm}$  با ضخامت  $2\text{ mm}$  با لایه چینی  $[0/+45/-45/90]_{2S}$  که تحت بار فشاری تک محوره و شرایط مرزی *CCFF* دارای گشودگی های مستطیلی (۷-الف)، دایره ای (۷-ب) و ترکیبی افقی مرکزی (۷-پ) می باشد نشان داده شده است. مساحت گشودگی ها برابر در نظر گرفته شده است. شعاع گشودگی دایره ای  $12\text{ mm}$ ، طول و عرض گشودگی مستطیلی بترتیب  $30\text{ mm}$  و  $15\text{ mm}$  و گشودگی ترکیبی شامل یک گشودگی مستطیلی با طول و عرض بترتیب  $18/26\text{ mm}$  و  $15\text{ mm}$  و دو نیم دایره با شعاع  $7/5\text{ mm}$  می باشند.

ورق ۳۲ لایه، به طور تقریبی به ترتیب ۷، ۲/۳ و ۲۴ لایه می باشد. با توجه به مقدار بار کمانش ورق هایی با ۸، ۱۶ و ۲۴ لایه می باشد. با توجه به نتایج ارائه شده در شکل ۵ بار کمانش ورق در روش تحلیلی و المان محدود در  $N=8$  بیشترین دقت و نزدیکی (۰/۲۴ درصد) را نشان داده و در  $N=24$  بیشترین اختلاف (۸ درصد) را نشان می دهد. در جدول ۳ مقادیر بار کمانش ورق بدست آمده در شکل ۵ آورده شده و درصد اختلاف بار کمانش ورق کامپوزیتی بدون گشودگی محاسبه شده با دو روش تحلیلی و المان محدود آورده شده است.



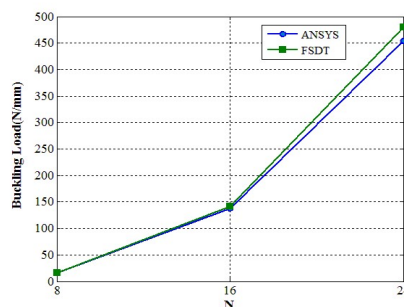
شکل ۵- بار کمانش ورق کامپوزیتی بدون گشودگی در روش تحلیلی *CLT* و روش المان محدود

جدول ۳- بار کمانش ورق کامپوزیتی بدون گشودگی در روش تحلیلی *CLT* و روش المان محدود

بار کمانش ورق (N/mm)			
اختلاف (%)	<i>ANSYS</i>	<i>CLT</i>	<i>N</i> (تعداد لایه)
۰/۲۴	۱۶/۶۲	۱۶/۶۶	۸
۳/۹۳	۱۳۷/۰۸	۱۴۲/۴۷	۱۶
۸/۰۴	۴۵۳/۷۳	۴۹۰/۲۳	۲۴

#### ۳-۱-۴- بار کمانش ورق کامپوزیتی بدون گشودگی در روش تحلیلی *FSDT* با *FEM*

نتایج بار کمانش ورق کامپوزیتی بدون گشودگی از جنس گرافیت/اپوکسی با طول  $100\text{ mm}$  و عرض  $100\text{ mm}$  با شرایط مرزی تکیه گاه ساده و بار فشاری تک محوره برای تعداد لایه های مختلف در روش تحلیلی *FSDT* و روش المان محدود در شکل ۶ نشان داده شده است.

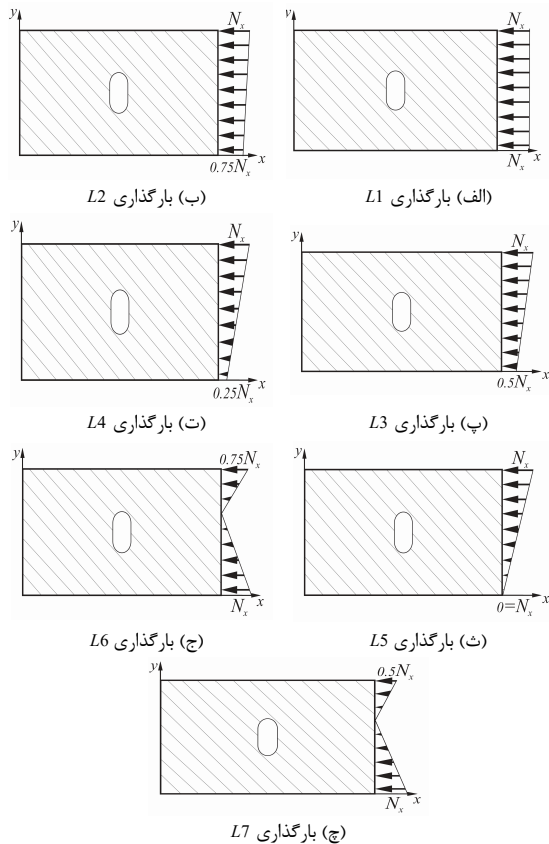


شکل ۶- بار کمانش ورق در روش تحلیلی *FSDT* و روش المان محدود

#### ۴-۲-۲- بررسی تاثیر انواع مختلف بارگذاری ها بر رفتار

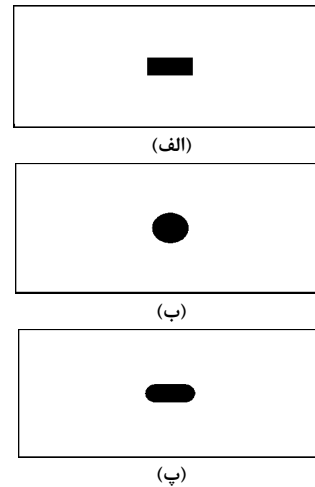
##### بار کمانشی ورق کامپوزیتی مستطیلی

در شکل ۹، انواع مختلف بارگذاری‌های به کار برده شده در این پژوهش (بارگذاری‌های مختلف  $L1, L2, L3, L4, L5, L6, L7$ ) نمایش داده شده‌اند. در ادامه تاثیر این بارگذاری‌ها بر روی بار کمانش ورق‌های کامپوزیتی دارای گشودگی با هندسه‌های مختلف بررسی شده‌است.



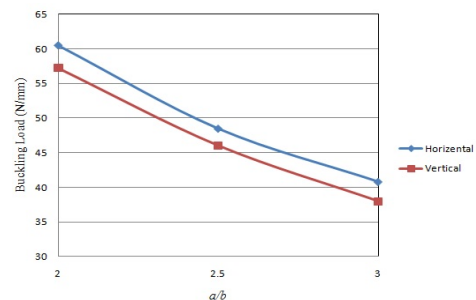
شکل ۹- انواع بارگذاری‌های کمانشی - خمشی درون صفحه‌ای در نظر گرفته شده برای تحلیل کمانش ورق مستطیل کامپوزیتی

در شکل ۱۰، مقادیر بدست آمده از روش المان محدود برای بار کمانشی ورق‌های کامپوزیتی با ۱۶ لایه با ضخامت کل ۲ mm و لایه چینی به صورت  $[0/+45/-45/90]_{2S}$  با گشودگی با هندسه‌های مختلف برای نسبت  $a/b$  برابر با ۲، ۲/۵، ۳ و نشان داده شده‌است. شرایط مرزی  $CCFF$  و  $CSFF$  در نظر گرفته شده‌اند. با توجه به شکل‌های ۱۰-الف و ۱۰-ب مشاهده می‌گردد که افزایش نسبت طول به ضخامت ورق کامپوزیتی ( $a/t$ ) باعث کاهش مقدار بار کمانشی ورق می‌گردد به طوری که مقدار بار کمانش ورق کامپوزیتی ۱۶ لایه با لایه چینی  $[0/+45/-45/90]_{2S}$  با نسبت  $a/t=100$  حدوداً شش برابر بار کمانش ورق ۸ لایه کامپوزیتی با لایه چینی بصورت  $[0/+45/-45/90]_S$  با نسبت  $a/t=200$  می‌باشد. از این شکل مشاهده می‌شود که بیشترین مقدار بار کمانشی متعلق به بارگذاری  $L7$  و کمترین مقدار آن متعلق به بارگذاری  $L1$  می‌باشد. به این صورت که مقدار بار کمانش بارگذاری  $L7$  ب تقریباً ۲/۵ برابر مقدار بار کمانش بارگذاری  $L1$  می‌باشد.



شکل ۷- ورق دارای یک گشودگی دایره‌ای، مستطیلی و ترکیبی افقی مرکزی، (الف): ورق با یک گشودگی مستطیلی افقی، (ب): ورق با یک گشودگی دایره‌ای، (پ): ورق با یک گشودگی ترکیبی افقی

در شکل ۸ بار کمانش ورق کامپوزیتی دارای گشودگی ترکیبی عمودی و افقی مرکزی برای نسبت‌های مختلف  $a/b$  نشان داده شده‌است. ورق ۱۶ لایه با لایه چینی به صورت  $[0/+45/-45/90]_{2S}$  تحت بار فشاری تک محوره و شرایط مرزی  $CCFF$  قرار دارد. با توجه به نتایج نشان داده شده، مقدار بار کمانشی ورق کامپوزیتی دارای گشودگی عمودی نسبت به ورق کامپوزیتی دارای گشودگی افقی ۵ درصد کمتر می‌باشد.



شکل ۸- تفاوت بار کمانش ورق کامپوزیتی دارای گشودگی ترکیبی

##### عمودی و افقی مرکزی در روش $FEM$

در جدول ۵، مقادیر بار کمانش ورق ۱۶ لایه با نسبت  $a/b$  برابر ۲ و گشودگی‌های مستطیلی و ترکیبی عمودی مرکزی و گشودگی دایره‌ای آورده شده‌است. با توجه به مقادیر نشان داده شده در این جدول، بیشترین مقدار بار کمانشی به ترتیب متعلق به ورق کامپوزیتی با گشودگی دایره‌ای، ورق با گشودگی ترکیبی و سپس ورق با گشودگی مستطیلی می‌باشد.

جدول ۵- بار کمانش ورق کامپوزیتی مستطیلی دارای گشودگی

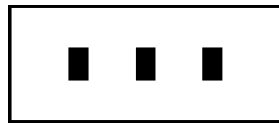
##### عمودی با هندسه‌های مختلف در روش $FEM$

هندسه گشودگی	بار کمانش ورق (N/mm)
دایره‌ای	۶۰/۱۲
ترکیبی	۵۷/۲۳
مستطیلی	۵۵/۰۵

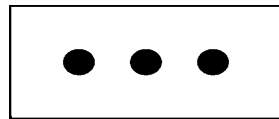
لازم به ذکر است که معمولاً محققین جهت ساده‌سازی تحلیل رفتار کمانشی ورق از بارگذاری یکنواخت فشاری در یک‌بعد (حالت کلاسیک بارگذاری  $L1$ ) و یا حالت دوبعدی آن استفاده می‌نمایند. در موارد واقعی و کاربردی برای جامعیت دادن به مساله علاوه بر بارگذاری  $L1$  به عنوان نمونه تاثیر رفتار کمانشی بارگذاری‌های درون صفحه‌ای غیریکنواخت ( $L2, L3, L4, L5, L6, L7$ ) بر ورق نیز می‌توانند مطالعه شوند.

#### ۴-۲-۳- بررسی تاثیر هندسه و توزیع گشودگی بر روی رفتار بار کمانشی ورق کامپوزیتی با استفاده از $FEM$

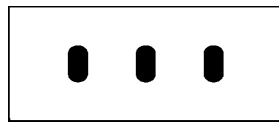
در این قسمت به بررسی و تحلیل تاثیرات توزیع گشودگی با هندسه‌های مختلف پرداخته شده‌است. ورق کامپوزیتی مستطیلی با لایه چینی  $[0/+45/-45/90]_{2S}$  (۱۶ لایه) تحت شرایط مرزی  $CCFF$  می‌باشد. بارگذاری اعمال شده به صورت  $L1, L2, L3$  می‌باشند. در شکل ۱۱، ورق‌های بررسی شده دارای سه گشودگی با هندسه‌های مستطیلی (شکل ۱۱-الف)، دایره‌ای (شکل ۱۱-ب) و ترکیبی (شکل ۱۱-پ) با چیدمان عمودی نشان داده شده‌اند.



(الف)



(ب)



(پ)

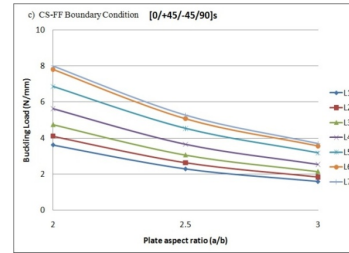
شکل ۱۱- ورق‌های کامپوزیتی دارای سه گشودگی با هندسه‌های دایره‌ای، مستطیلی و ترکیبی، (الف): ورق با سه گشودگی مستطیلی عمودی، (ب) ورق با سه گشودگی دایره‌ای، (پ) ورق با سه گشودگی ترکیبی عمودی

در جدول ۶، نتایج بدست آمده از تحلیل بار کمانش ورق‌های کامپوزیتی دارای سه گشودگی با هندسه‌های مختلف آورده شده‌است. با توجه به نتایج بدست آمده، ورق کامپوزیتی دارای سه گشودگی دایره‌ای بیشترین مقدار بار کمانش و ورق کامپوزیتی دارای سه گشودگی مستطیلی کمترین مقدار بار کمانش را به خود اختصاص داده‌اند. بیشترین مقدار بار کمانش در بین بارگذاری‌ها متعلق به بارگذاری  $L3$  می‌باشد.

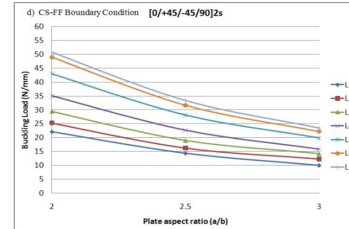
جدول ۶- بار کمانش ورق‌های کامپوزیتی دارای سه گشودگی با

هندسه‌های مختلف در بارگذاری  $L1, L2, L3$

	نوع بارگذاری			هندسه گشودگی
	$L3$	$L2$	$L1$	
بار کمانش ورق (N/mm)	۷۲/۷۹	۶۲/۶۸	۵۴/۸۳	دایره‌ای
	۷۱/۸	۶۱/۷۶	۵۴/۰۶	ترکیبی
	۷۱/۶۹	۶۱/۶۳	۵۳/۹۲	مستطیلی



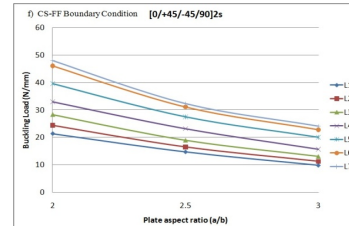
(الف): ورق (۸ لایه) با یک گشودگی مستطیلی با شرایط مرزی  $CSFF$



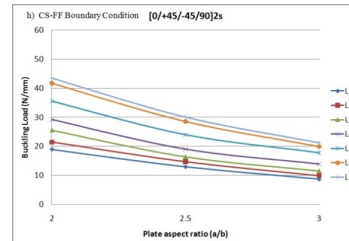
(ب): ورق (۱۶ لایه) با یک گشودگی مستطیلی با شرایط مرزی  $CSFF$



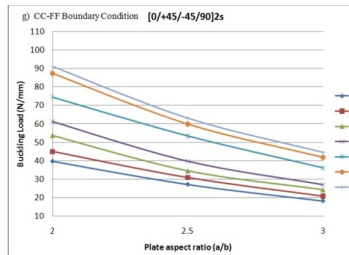
(پ): ورق (۱۶ لایه) با یک گشودگی دایره‌ای با شرایط مرزی  $CCFF$



(ت): ورق (۱۶ لایه) با یک گشودگی دایره‌ای با شرایط مرزی  $CSFF$



(ث): ورق (۱۶ لایه) با یک گشودگی ترکیبی با شرایط مرزی  $CSFF$



(ج): ورق (۱۶ لایه) با یک گشودگی ترکیبی با شرایط مرزی  $CCFF$

شکل ۱۰- تغییرات بار کمانشی ورق کامپوزیتی برحسب نسبت طول به عرض ورق ( $a/b$ ) با شرایط مرزی  $CSFF$  و  $CCFF$  تحت بارگذاری متفاوت و هندسه‌های مختلف گشودگی



### ۴-۳-۱- تست کشش

برای بدست آوردن مشخصات فیزیکی ورق‌های ساخته شده، از تست کشش بر اساس استاندارد *ASTM D3039* استفاده شده است. در شکل ۱۴، ورق کامپوزیتی ساخته شده از جنس شیشه/وینیل استر بر اساس استاندارد *D3039* نشان داده شده است.



(الف)



(ب)

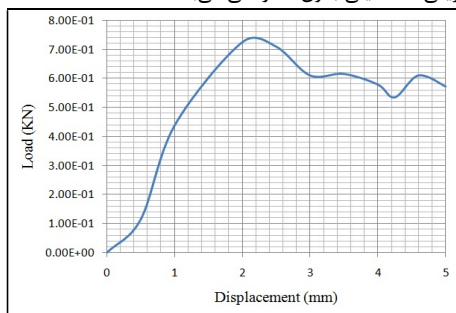
شکل ۱۴- ورق کامپوزیتی ساخته شده جنس شیشه/وینیل استر بر اساس استاندارد *D3039*، (الف): نمای روبرو، (ب): نمای جانبی مشخصات فیزیکی ورق کامپوزیتی از جنس شیشه/وینیل استر که تست کشش بر روی نمونه ساخته شده از آن (شکل ۱۲) انجام شده در جدول ۷ ارائه شده است.

جدول ۷- مشخصات فیزیکی ورق کامپوزیتی از جنس شیشه/وینیل استر

$E_{11}=E_{22}$ (GPa)	$E_{33}$ (GPa)	$\nu_{12}$	$G_{12}=G_{13}$ (GPa)
۸۸/۴	۱۲	۰/۲۱	۳۵

۴-۳-۲- بار کمانش ورق کامپوزیتی مستطیلی بدون گشودگی و دارای گشودگی دایره‌ای به روش تجربی

برای بدست آوردن نتایج بار کمانش ورق‌های کامپوزیتی ساخته شده از دستگاه *INSTRON* استفاده شده است. در شکل ۱۵، نمودار نیرو-جابجایی ورق کامپوزیتی مستطیلی ۱۲ لایه بدون گشودگی بر حسب جابجایی افقی نشان داده شده است. با توجه به شکل ۱۵ مشاهده می‌گردد که نیرو تا مقدار بیشینه  $0.72 \text{ kN}$  افزایش یافته و سپس تقریباً ثابت مانده است. این بیشینه نیرو، بار کمانش ورق کامپوزیتی مستطیلی بدون گشودگی می‌باشد.



شکل ۱۵- نمودار نیرو-جابجایی (افقی) ورق کامپوزیتی مستطیلی بدون گشودگی

نمودار نیرو-جابجایی (افقی) ورق کامپوزیتی مستطیلی دارای گشودگی دایره‌ای مرکزی (ورق شکل ۱۲-الف) در شکل ۱۶ نشان داده شده است. با توجه به شکل ۱۶، نیروی اعمالی بر ورق کامپوزیتی مستطیلی دارای گشودگی دایره‌ای تا  $0.58 \text{ kN}$  افزایش پیدا کرده و سپس ثابت مانده است. بنابراین مقدار بار بحرانی کمانش ورق کامپوزیتی ۱۲ لایه دارای گشودگی دایره‌ای با قطر  $24 \text{ mm}$  برابر با  $0.58 \text{ kN}$  می‌باشد.

### ۴-۳- بار کمانش ورق‌های کامپوزیتی با گشودگی دایره‌ای و بدون گشودگی با استفاده از روش تجربی

در این تحقیق، برای مقایسه نتایج تحلیلی و المان محدود با نتایج تجربی از سه ورق کامپوزیتی ساخته شده که دارای گشودگی دایره‌ای و بدون گشودگی می‌باشند در انجام آزمایش‌ها استفاده شده است. در شکل ۱۲، نماهایی از ورق‌های کامپوزیتی مستطیلی ساخته شده دارای گشودگی دایره‌ای مرکزی و بدون گشودگی نشان داده شده است.



(الف)



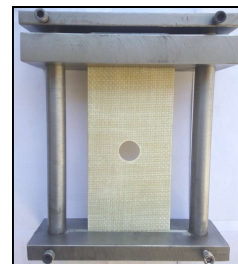
(ب)



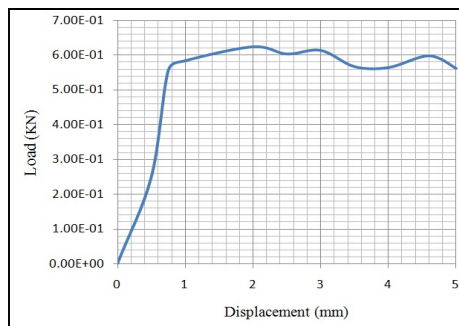
(پ)

شکل ۱۲- ورق‌های کامپوزیتی مستطیلی ساخته شده در روش تجربی، (الف) ورق ۱۲ لایه با گشودگی دایره‌ای مرکزی، (ب) ورق ۱۲ لایه بدون گشودگی، (پ) ورق ۱۲ لایه با گشودگی دایره‌ای مرکزی

ورق‌های کامپوزیتی با استفاده از روش لایه‌چینی دستی ساخته شده‌اند. ورق‌های ساخته شده از جنس شیشه/وینیل استر [۱۱] (جدول ۷) می‌باشند. به این صورت که از الیاف شیشه نوع *S* به عنوان تقویت کننده و از رزین وینیل استر به عنوان ماتریس استفاده شده است. تعداد لایه‌ها برابر با ۱۲ لایه با لایه‌چینی  $[(0/90)_6]$  می‌باشند. ضخامت هر لایه به طور تقریبی برابر با  $0.219 \text{ mm}$  می‌باشد. بنابراین، ضخامت کل ورق ۱۲ لایه برابر با  $2.63 \text{ mm}$  می‌باشد. طول و عرض ورق‌ها برابر با  $200 \text{ mm}$  و  $100 \text{ mm}$  می‌باشند. برای ورق‌های کامپوزیتی دارای گشودگی دایره‌ای مرکزی، قطر دایره برابر با  $24 \text{ mm}$  در نظر گرفته شده است. برای اعمال نیروی فشاری بر روی نمونه‌های آزمایش، فیکسچری ساخته شده است. شرایط مرزی مورد نظر در طراحی و ساخت فیکسچر در این پژوهش *SSFF* می‌باشد. نحوه قرارگیری نمونه ورق کامپوزیتی مستطیلی شکل داخل فیکسچر در شکل ۱۳ نشان داده شده است.



شکل ۱۳- فیکسچر ساخته شده به منظور اعمال بار فشاری



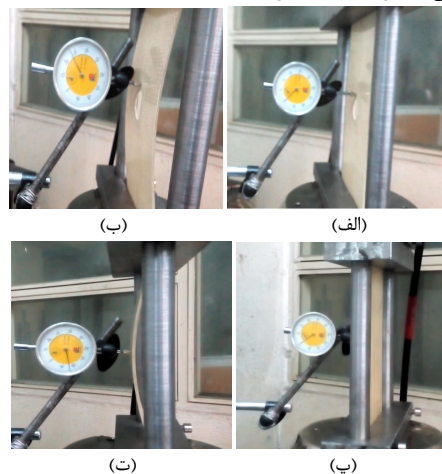
شکل ۱۶- نمودار نیرو-جابجایی (افقی) ورق کامپوزیتی مستطیلی دارای گشودگی دایره‌ای مرکزی

در جدول ۸، مقادیر بار کمانش ورق‌های کامپوزیتی مستطیلی بدون گشودگی و با گشودگی دایره‌ای به روش‌های تجربی و المان محدود آورده شده‌است. با توجه به جدول ۸ مشاهده می‌شود که مقدار بار کمانشی ورق کامپوزیتی دارای گشودگی دایره‌ای ۲۴ درصد کمتر از مقدار بار کمانشی ورق کامپوزیتی بدون گشودگی می‌باشد.

جدول ۸- مقادیر بار کمانش ورق کامپوزیتی بدون گشودگی و گشودگی دایره‌ای به روش‌های تجربی و المان محدود

بار کمانش ورق (kN)	اختلاف (%)		
	گشودگی	تجربی	ANSYS
بدون	۰/۷۲	۰/۶۹	۴/۳۴
دایره‌ای	۰/۵۸	۰/۶	۳/۴

در شکل ۱۷، نمایی از مراحل آزمایش در قبل و بعد از کمانش ورق کامپوزیتی دارای گشودگی دایره‌ای (شکل ۱۷-الف) و بدون گشودگی (شکل ۱۷-ب) نشان داده شده‌است.



شکل ۱۷- ورق کامپوزیتی دارای گشودگی دایره‌ای و بدون گشودگی قبل و بعد از کمانش، (الف): ورق دارای گشودگی قبل از کمانش، (ب): ورق دارای گشودگی بعد از کمانش، (پ): ورق بدون گشودگی قبل از کمانش، (ت): ورق بدون گشودگی بعد از کمانش

#### ۵- نتیجه‌گیری

در این پژوهش، با استفاده از کدهای کامپیوتری نوشته شده از روش‌های تحلیلی (CLT، FSDT و CPT)، المان محدود و نتایج

آزمایشگاهی تحلیل رفتار کمانش ورق کامپوزیتی مستطیلی با گشودگی با هندسه‌های مختلف و بارگذاری‌های درون‌صفحه‌ای متنوع مورد بررسی قرار گرفت. تاثیر تغییر پارامترهای مختلف در مقدار بار کمانشی ورق کامپوزیتی بررسی گردید. خلاصه‌ای از نتایج عبارتند از:

۱- بار کمانش ورق کامپوزیتی مستطیلی با نسبت  $a/b$  برابر با ۲، به طور تقریبی به ترتیب ۱/۵ و دو برابر بار کمانش ورق کامپوزیتی مستطیلی با نسبت  $a/b$  برابر با ۲/۵ و ۳ می‌باشد.

۲- بار کمانش ورق کامپوزیتی مستطیلی با شرایط مرزی CCFF تقریباً دو برابر بار کمانش ورق کامپوزیتی با شرایط مرزی CSFF می‌باشد.

۳- در بین انواع بارگذاری‌ها بیشترین میزان بار کمانش متعلق به بارگذاری L7 و کمترین مقدار متعلق به بارگذاری L1 می‌باشد.

۴- بیشترین مقدار بار کمانش به ترتیب متعلق به ورق با گشودگی دایره‌ای، ورق با گشودگی ترکیبی سپس ورق با گشودگی مستطیلی می‌باشد.

۵- مشاهده شد که روش CLT تنها برای پیش‌بینی رفتار کمانش ورق‌های کامپوزیتی نازک مناسب می‌باشد در صورتیکه از روش FSDT می‌توان هم برای پیش‌بینی رفتار کمانش ورق‌های نازک و هم برای پیش‌بینی رفتار کمانش ورق‌های نسبتاً ضخیم بهره برد.

#### ۶- سپاسگزاری

در انجام این تحقیق از معاونت پژوهشی واحد پرند دانشگاه آزاد اسلامی در حمایت از طرح پژوهشی سپاسگزاری می‌گردد.

#### ۷- منابع

[1] Walker M., Optimal design of symmetric laminates with cutouts for maximum buckling load, Computers and Structures, Vol. 70, pp. 337-343, 1999.

[2] Jana P, Baskar K., Stability analysis of simply-supported rectangular plates under non-uniform uniaxial compression using rigorous and approximate plane stress solutions, Thin-Walled Structures, Vol. 44, pp. 507-516, 2006.

[3] Baba B., Buckling behavior of laminated composite plates, Journal Reinforced Plastics and Composites, Vol. 26, pp. 1637-1655, 2007.

[4] Kargamovin M.H. and Mamandi A., Buckling of generally orthotropic rectangular simply supported edgewise plate under compound in-plane linearly bending-compressive loading, using the Ritz method, Proceedings of the 3rd IASME/WSEAS International Conference on Continuum Mechanics, Cambridge, United Kingdom, pp. 22-29, 2008.

[5] Topal U. and Uzman U., Maximization of buckling load of laminated composite plates with central circular holes using MFD method, Structural Multidisciplinary Optimization, Vol. 35, pp. 131-139, 2008.

[6] Al Qablan H., et al., Assessment of the buckling behavior of square composite plates with circular cutout subjected to in-Plane shear, Jordan Journal of Civil Engineering, Vol. 3, No. 2, 2009.

[7] Lakshminarayana A., et al., Effect of location of cutout and plate aspect ratio on buckling strength of rectangular composite plate with square/rectangular cutout subjected to various linearly varying in-plane loading using FEM, International Journal of Mechanics, Vol.4, pp. 508-517, 2013.

[8] Mohan Kumar M., et al., Buckling analysis of woven glass epoxy laminated composite plate, AJER, e-ISSN: 2320-0847 p-ISSN: 2320-0936, Vol.e-02, Issue 07, pp. 33-40, 2013.

[9] Ravinder Reddy P., et al., Buckling analysis of orthotropic laminated composite plate with rectangular cut-outs by using FEA, IJTCAS, 14-719; IJTCAS, 2014.

[10] Haftka R.T., and Walsh J.L., Stacking-sequence optimization for buckling of laminated plates by integer programming, NASA Technical Memorandum, 04033, January 1991.

[11] www.azom.com/properties.aspx?ArticleID=76