

بررسی عددی ارتعاشات اجباری غیرخطی ورق های مستطیلی مدرج تابعی در شرایط مرزی مختلف با در نظر گرفتن نظریه الاستیسیته سه بعدی

دانشجوی کارشناسی ارشد، گروه مهندسی مکانیک، دانشگاه گیلان، رشت، ایران
دانشیار، گروه مهندسی مکانیک، دانشگاه گیلان، رشت، ایران

یوسف غلامی و سمه جانی
رضا انصاری خلخالی*

چکیده

تحقیقات انجام شده به وسیله محققان در بررسی ارتعاشات اجباری ورق های مستطیلی براساس نظریه الاستیسیته سه بعدی، محدود به حل تحلیلی در شرایط مرزی ساده یا تحلیل های خطی است، در این تحقیق با برطرف کردن محدودیت های گذشته، ارتعاشات اجباری ورق های مدرج تابعی براساس نظریه الاستیسیته سه بعدی و با در نظر گرفتن جملات غیرخطی هندسی در شرایط تکیه گاهی مختلف بررسی می شود. مواد سازنده ورق آلومینیوم و آلومینا می باشد که براساس قانون توانی در جهت ضخامت ورق تغییر می کنند. به منظور دستیابی به معادلات حاکم و شرایط مرزی برحسب جابجایی، از رابطه گرین-لاگرانژ، تنش-کرنش و اصل همپلتون استفاده شده است. با استفاده از روش دیفرانسیلی تعمیم یافته، معادلات غیرخطی کوپل در محدوده مکان گسسته می شوند. سپس با استفاده از تکنیک گلرکین عددی، دسته معادلات غیرخطی حاکم به معادلات دیفرانسیلی تابع زمان نوع دافینگ تبدیل می شوند که با استفاده از الگوریتم طول کمان حل می شوند، سرانجام، اثرات هندسی، دامنه بار و نسبت میرایی بر پاسخ فرکانسی در شرایط تکیه گاهی مختلف مورد بررسی قرار می گیرد. **واژه های کلیدی:** ورق مدرج تابعی، ارتعاشات اجباری غیرخطی، نظریه الاستیسیته سه بعدی، تحلیل عددی.

Numerical Analysis of Nonlinear Forced Vibration of Functionally Graded Rectangular Plates with Various Boundary Conditions using 3D theory of Elasticity

Y. Gholami

Department of Mechanical Engineering, University of Guilan, Rasht, Iran

R. Ansari Khalkhali

Department of Mechanical Engineering, University of Guilan, Rasht, Iran

Abstract

Researches done by researchers on the forced vibration analysis of rectangular plates based on the three-dimensional elasticity theory are limited to the analytical solutions for simply-supported boundary conditions or linear analyses. In this study, by eliminating the previous limitations, the forced vibration of functionally graded rectangular plates with different boundary conditions is examined based on three-dimensional theory of elasticity and taking into account the geometrical nonlinearity. The rectangular plate is made of the aluminum and alumina in which are distributed through the thickness direction according to a power law for functionally graded materials. In order to achieve the governing equations and corresponding boundary conditions in terms of displacements, Green-Lagrange, stress-strain relations and Hamilton's principle are used. The nonlinear coupled governing equations are discretized in the space domain using the generalized differential quadrature (GDQ) method. Then, utilizing the numerical-based Galerkin scheme, one can obtain a time-varying set of ordinary differential equations of Duffing type. The arc-length method is employed to solve the vectorized form of nonlinear parameterized equations. Finally, to have a comprehensive study on the effects of geometrical parameters, forcing amplitude and damping ratio on the frequency-response curve of functionally graded rectangular plates with different boundary conditions are examined.

Keywords: Functionally graded plate, Geometrically nonlinear force vibrations, three-dimensional theory of elasticity, Numerical solution procedure.

معرفی شد [۲]. به طور عمومی این مواد مخلوطی از سرامیک و فلز یا ترکیبی از فلزهای مختلف ساخته شده اند. مزیت استفاده از این مواد مقاومت آن ها به حفظ تمامیت ساختاری در مقابل تغییرات بالای دمای محیط است. مقاومت مواد سرامیکی در مقابل گرما بالا به خاطر رسانایی گرمایی پایین آن ها می باشد از طرف دیگر فلز تشکیل دهنده مواد به دلیل انعطاف پذیری در مقابل تنش های دمایی، باعث جلوگیری از شکست می شود، بنابراین ترکیبی از فلز و سرامیک با تغییر پیوسته کسری حجمی به راحتی می تواند تولید گردد [۳-۶]. ویژگی های ارتعاشی صفحات ضخیم ساخته شده از مواد مدرج تابعی توجه بسیاری از مهندسان را در طراحی و ساخت به خود جلب کرده

۱- مقدمه

در سال های اخیر، مواد مدرج تابعی اهمیت قابل توجهی در محیط هایی با دمای بالا مانند راکتورهای هسته ای و تولید مواد شیمیایی به دست آورده اند. مواد مدرج تابعی به عنوان یک ماده ساختاری بالقوه برای فضاییها با سرعت بالا در آینده در نظر گرفته خواهند شد [۱]. مواد مدرج تابعی مواد همگن میکروسکوپی هستند که به تدریج از سطحی به سطح دیگر در حال تغییر هستند. این تغییر کسر حجمی مواد تشکیل دهنده باعث تغییر خواص مواد مدرج تابعی می شود، این مواد جدید برای اولین بار توسط گروهی از دانشمندان در سندی ژاپن

* نویسنده مکاتبه کننده، آدرس پست الکترونیکی: ransari.guilan@gmail.com

نظریه نتایج دقیق تری برای رفتار ارتعاشی سازه‌های ضخیم پیش‌بینی می‌کند.

به طور کلی، نظریه های دوبعدی با در نظر گرفتن فرضیات خاصی در مدل ریاضی و معادلات استخراج شده با استفاده از نظریه های سه‌بعدی به دست می‌آیند. ساده‌سازی در استخراج و حل معادلات، منجر به خطاهایی در پیش‌بینی رفتارهای ارتعاشی سازه‌های نسبتاً ضخیم می‌گردد. به همین دلیل، نظریه های دوبعدی قادر به پیش‌بینی رفتار دقیقی از سازه‌های ضخیم و نسبتاً ضخیم نیستند. هم‌چنین، نظریه‌های سه‌بعدی درک فیزیکی بهتر و واقعی تری نسبت به مساله ارائه می‌کنند که با استفاده از نظریه‌های دوبعدی امکان پذیر نیست. علاوه بر این، مرور کارهای انجام شده نشان می‌دهد که مطالعات انجام شده با صرف نظر از ترم‌های غیرخطی هندسی و در شرایط تکیه‌گاهی ساده انجام شده است. هم‌چنین، تجربه و تحلیل ارتعاشات اجباری غیرخطی ورق-های مدرج تابعی برای ورق‌های ضخیم و نسبتاً ضخیم در شرایط تکیه-گاهی مختلف با در نظر گرفتن نظریه الاستیسیته سه‌بعدی انجام نشده است.

در مقاله حاضر، ارتعاشات اجباری ورق‌های مدرج تابعی براساس نظریه الاستیسیته سه بعدی مورد بررسی قرار می‌گیرد که ابتدا با استفاده از رابطه کرنش-جابجایی گرین-لاگرانژ، رابطه تنش-کرنش و اصل همیلتون معادلات حاکم و شرایط مرزی متناظر به دست می‌آید برای حل معادلات ابتدا با استفاده از روش تربیع دیفرانسیل تعمیم یافته، گلرکین عددی، گسسته سازی در متناوب زمانی معادلات به فرم برداری نوشته می‌شوند سپس، از الگوریتم طول کمان برای حل پارامترهای غیرخطی استفاده می‌شود و پاسخ های فرکانسی متناظر با ارتعاشات اجباری به دست می‌آید. به منظور دستیابی به بررسی جامع اثرات نسبت طول به ضخامت، طول به عرض و شاخص کسر حجمی مورد بررسی قرار می‌گیرد.

۲- استخراج معادلات حاکم و شرایط مرزی متناظر

با در نظر گرفتن ورق مستطیلی مدرج تابعی و تئوری الاستیسیته سه بعدی، مواد تشکیل دهنده ی ورق، معادلات حاکم و شرایط مرزی متناظر به صورت زیر به دست می‌آید:

۲-۱- خواص مادی ورق مستطیلی مدرج تابعی

شکل ۱ ورق مستطیلی طول a ، عرض b و ضخامت h در سیستم مختصات دکارتی $(0 \leq x \leq a, 0 \leq y \leq b, -h/2 \leq z \leq h/2)$ را نشان می‌دهد. مواد تشکیل دهنده ورق برحسب قانون توانی برای مواد مدرج تابعی توزیع شده است که لیه پایین $(z = -h/2)$ آن فلز خالص و لیه بالای آن $(z = h/2)$ با سرامیک خالص غنی شده است. نحوه توزیع مواد مدرج تابعی و تغییر خواص مکانیکی به صورت زیر بیان می‌گردد:

$$V_c(z) = \left(\frac{z}{h} + \frac{1}{2}\right)^k, V_m(z) = 1 - \left(\frac{z}{h} + \frac{1}{2}\right)^k \quad (1)$$

که V^c کسر حجمی سرامیک، V^m کسر حجمی فلز و k شاخص کسر حجمی می‌باشد.

است. مطالعات گذشته نشان می‌دهد که در بسیاری از تحقیقات گذشته روی ارتعاشات ورق‌های مدرج تابعی با استفاده از نظریه‌های دو بعدی مانند: نظریه کلاسیک ورق‌های مستطیلی، نظریه مرتبه اول تغییر شکل برشی و نظریه مرتبه بالای تغییر شکل برشی انجام شده است [۷-۱۴]. به طور مثال، یانگ و شن [۷] از نظریه کلاسیک برای پاسخ دینامیکی ورق نازک مستطیلی مدرج تابعی در معرض تنش اولیه صفحه‌ای روی پایه الاستیک قرار دارد، استفاده کردند. آن‌ها نشان دادند که مواد با خصوصیات متوسط فرکانس طبیعی متوسط و پاسخ گذرا دارند. چنگ و همکارش [۸] کمانش و ارتعاشات ورق‌های ناهمگن روی پایه الاستیک را با استفاده از نظریه‌های کلاسیک و نظریه مرتبه اول برشی مورد مطالعه قرار داده‌اند. چنگ و باترا [۹] با استفاده از نظریه تغییر شکل مرتبه سوم ردی کمانش و ارتعاشات ورق مستطیلی روی بستر الاستیک را در شرایط مرزی ساده مطالعه کرده‌اند. چنگ و باترا [۱۵] به بررسی تغییر شکل ترموالاستیک سه‌بعدی یک صفحه بیضوی مدرج تابعی در شرایط مرزی گیردار پرداخته‌اند. ول و همکارانش [۱۶] ارتعاشات آزاد و اجباری خطی ورق های مستطیلی مدرج تابعی براساس تئوری الاستیسیته سه بعدی با شرایط تکیه گاهی ساده با استفاده از حل تحلیلی مورد بررسی قرار داده‌اند و با مقایسه با نتایج حاصل از نظریه‌های کلاسیک صفحه‌ای، نظریه تغییر شکل برشی مرتبه اول و مرتبه سوم نشان داده‌اند که برای مواد مدرج تابعی نظریه تغییر شکل مرتبه اول جواب دقیق تری نسبت به نظریه مرتبه سوم استخراج می‌گردد. زو و همکارش [۱۷] با حل تحلیلی به بررسی تنش و جابجایی ورق مستطیلی مدرج تابعی با تغییر ضخامت در شرایط مرزی ساده پرداخته‌اند. علی بیگو و عزیزاده [۱۸] به تحلیل رفتار استاتیکی و ارتعاشات آزاد ورق‌های ساندویچی مدرج تابعی با استفاده از نظریه الاستیسیته سه بعدی در شرایط تکیه گاهی ساده پرداخته‌اند. علی بیگو و عبدالله زاده [۱۹] به بررسی ارتعاشات آزاد سه‌بعدی نانو ورق‌های مستطیلی براساس نظریه الاستیسیته غیرمحلّی پرداخته‌اند. بسطامی و بهجت [۲۰] حل تحلیلی کمانش و ارتعاشات نانو ورق‌های مدرج تابعی در بستر الاستیک را با در نظر گرفتن اثرات موضعی مورد بررسی قرار دادند و مشاهده کرده‌اند که افزایش طول باعث کاهش فرکانس طبیعی و بار بحرانی سیستم می‌شود. اله‌کرم و سربزدی [۲۱] به تحلیل ارتعاشات آزاد پواسته‌های نازک و نسبتاً ضخیم مواد مدرج تابعی دو جهته براساس نظریه مرتبه اول برشی پرداخته‌اند. و اهمیت پوسته-های مدرج تابعی دو جهته نسبت به پوسته‌های مدرج تابعی معمولی را بیان کرده‌اند.

با مرور کارهای گذشته، مشاهده می‌گردد که مطالعات انجام شده روی رفتارهای مکانیکی (خمشی و ارتعاشی) ورق‌های مدرج تابعی با در نظر گرفتن نظریه‌های دوبعدی انجام شده است. نظریه های دوبعدی کلاسیک به دلیل صرف‌نظر از تغییر شکل برشی و اینرسی چرخشی قادر به پیش‌بینی درست رفتارهای ارتعاشی سازه‌های نسبتاً ضخیم به دلیل افزایش اهمیت تغییر شکل برشی با افزایش نسبت ضخامت به طول، نیست و عموماً برای پیش‌بینی رفتار سازه‌های نازک به کار می‌رود. میندلین با فرض توزیع کرنش برشی ثابت در جهت ضخامت، نظریه تغییر شکل مرتبه اول را ارائه کرد و با در نظر گرفتن ضریب تصحیح برشی، خطای ناشی از تقریب یکنواخت را تصحیح کرد. این

$$\begin{pmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{zz} \\ \sigma_{yz} \\ \sigma_{zx} \\ \sigma_{xy} \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} & 0 & 0 & 0 \\ C_{12} & C_{22} & C_{23} & 0 & 0 & 0 \\ C_{13} & C_{23} & C_{33} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & C_{44} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & C_{55} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & C_{66} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ \varepsilon_{zz} \\ \gamma_{yz} \\ \gamma_{zx} \\ \gamma_{xy} \end{pmatrix} \quad (6)$$

$$C_{11} = C_{22} = C_{33} = \lambda + 2\mu,$$

$$C_{12} = C_{12} = C_{12} = \lambda$$

$$C_{44} = C_{55} = C_{66} = \mu$$

مطابق رابطه‌ی (۴) و میدان جابجایی (۳)، مؤلفه‌های غیرخطی کرنش-

ها به صورت زیر بیان می‌شوند:

$$\begin{aligned} \varepsilon_{xx} &= \frac{\partial u_0}{\partial x} + \frac{1}{2} \left(\left(\frac{\partial u_0}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial v_0}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial w_0}{\partial x} \right)^2 \right), \\ \varepsilon_{yy} &= \frac{\partial v_0}{\partial y} + \frac{1}{2} \left(\left(\frac{\partial u_0}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial v_0}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial w_0}{\partial y} \right)^2 \right), \\ \varepsilon_{zz} &= \frac{\partial w_0}{\partial z} + \frac{1}{2} \left(\left(\frac{\partial u_0}{\partial z} \right)^2 + \left(\frac{\partial v_0}{\partial z} \right)^2 + \left(\frac{\partial w_0}{\partial z} \right)^2 \right), \\ \varepsilon_{xy} = \varepsilon_{yx} &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_0}{\partial y} + \frac{\partial v_0}{\partial x} + \frac{\partial u_0}{\partial x} \frac{\partial u_0}{\partial y} + \frac{\partial v_0}{\partial x} \frac{\partial v_0}{\partial y} \right. \\ &\quad \left. + \frac{\partial w_0}{\partial x} \frac{\partial w_0}{\partial y} \right), \end{aligned} \quad (7)$$

$$\begin{aligned} \varepsilon_{xz} = \varepsilon_{zx} &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_0}{\partial z} + \frac{\partial w_0}{\partial x} + \frac{\partial u_0}{\partial x} \frac{\partial u_0}{\partial z} + \frac{\partial v_0}{\partial x} \frac{\partial v_0}{\partial z} \right. \\ &\quad \left. + \frac{\partial w_0}{\partial x} \frac{\partial w_0}{\partial z} \right), \\ \varepsilon_{yz} = \varepsilon_{zy} &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_0}{\partial z} + \frac{\partial w_0}{\partial y} + \frac{\partial u_0}{\partial y} \frac{\partial u_0}{\partial z} + \frac{\partial v_0}{\partial y} \frac{\partial v_0}{\partial z} \right. \\ &\quad \left. + \frac{\partial w_0}{\partial y} \frac{\partial w_0}{\partial z} \right). \end{aligned}$$

لازم به ذکر است که با جایگذاری کرنش‌های بدست آمده در رابطه‌ی فوق در رابطه‌ی (۶)، مؤلفه‌های تنش را می‌توان بر حسب مؤلفه‌های جابجایی بدست آورد.

انرژی کرنشی برای مواد الاستیک خطی را نیز می‌توان به صورت زیر نوشت:

$$\Pi_s = \frac{1}{2} \int_V (\sigma : \varepsilon) dV = \frac{1}{2} \int_V (\sigma_{xx} \varepsilon_{xx} + \sigma_{yy} \varepsilon_{yy} + \sigma_{zz} \varepsilon_{zz} + \sigma_{xy} \varepsilon_{xy} + \sigma_{yx} \varepsilon_{yx} + \sigma_{xz} \varepsilon_{zx} + \sigma_{zx} \varepsilon_{xz} + \sigma_{yz} \varepsilon_{zy} + \sigma_{zy} \varepsilon_{yz}) dV \quad (8)$$

همچنین، مطابق میدان جابجایی (۳)، انرژی جنبشی ورق و انرژی پتانسیل ناشی از کار خارجی را می‌توان به صورت زیر بیان کرد:

$$\Pi_T = \int_A \rho \left\{ \left(\frac{\partial u_0}{\partial t} \right)^2 + \left(\frac{\partial v_0}{\partial t} \right)^2 + \left(\frac{\partial w_0}{\partial t} \right)^2 \right\} dA \quad (9-الف)$$

$$\Pi_p = \int_V q w dA \quad (9-ب)$$

حال، با استفاده از اصل همپلتون

$$\delta \int_{t_1}^{t_2} (\Pi_T - \Pi_s + \Pi_p) dt = 0 \quad (10)$$

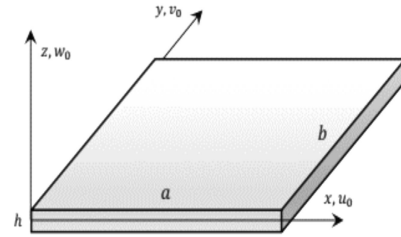
با جایگذاری کرنش‌های غیرخطی (۷) در انرژی پتانسیل کرنشی (۸)، محاسبه تغییرات انرژی پتانسیل کرنشی و جنبشی و سپس استفاده از اصول اساسی حساب تغییرات، معادلات غیرخطی سه بعدی حاکم بر حرکت ورق مستطیلی به صورت زیر حاصل می‌شود:

$$\frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{xz}}{\partial z} + Z_1 = \rho \frac{\partial^2 u_0}{\partial t^2} \quad (11-الف)$$

$$\frac{\partial \sigma_{yy}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{yz}}{\partial z} + Z_2 = \rho \frac{\partial^2 v_0}{\partial t^2} \quad (11-ب)$$

$$\frac{\partial \sigma_{zz}}{\partial z} + \frac{\partial \sigma_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{xz}}{\partial x} + Z_3 = \rho \frac{\partial^2 w_0}{\partial t^2} \quad (11-ج)$$

که در آنجملات غیر خطی به صورت زیر تعریف می‌شوند:

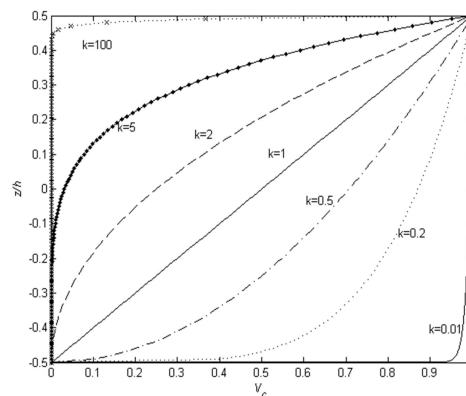


شکل ۱ - شکل طرحواره یک ورق مستطیلی مدرج تابعی

خواص مکانیکی مواد نظیر مدول یانگ E ، ضریب پواسون ν و چگالی جرمی ρ به با در نظر گرفتن کسر حجمی سرامیک و فلز صورت زیر بیان می‌گردد:

$$\begin{aligned} E(z) &= E_c V_c + E_m V_m, & \nu(z) &= \nu_c V_c + \nu_m V_m, \\ \rho(z) &= \rho_c V_c + \rho_m V_m \end{aligned} \quad (2)$$

نحوه توزیع کسر حجمی سرامیک به صورت زیر می‌باشد:



شکل ۲- تغییر کسر حجمی V_c در طول ضخامت با تغییر شاخص حجمی

۲-۲- نظریه الاستیسیته سه بعدی و استخراج معادلات

با در نظر گرفتن نظریه الاستیسیته سه بعدی، میدان جابجایی در راستای جهت‌های Y, X, Z و به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\begin{aligned} u_x &= u_0(t, x, y, z), & u_y &= v_0(t, x, y, z), \\ u_z &= w_0(t, x, y, z) \end{aligned} \quad (3)$$

طبق روابط گرین-لاگرانژ، رابطه غیرخطی کرنش-جابجایی به صورت زیر بیان می‌شود:

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} + \frac{\partial u_k}{\partial x_i} \frac{\partial u_k}{\partial x_j} \right) \quad (4)$$

علاوه بر این، روابط بین مؤلفه‌های تنش و کرنش را می‌توان به صورت رابطه (۵) بیان کرد:

$$\sigma_{ij} = \sigma_{ji} = \lambda \varepsilon_{kk} \delta_{ij} + 2\mu \varepsilon_{ij} \quad (5)$$

که در آن δ_{ij} نشان‌دهنده دلتای کرونکر و $\lambda = Ev / [(1 - 2\nu)(1 + \nu)]$ و $\mu = E\nu / [2(1 + \nu)]$ ثابت‌های لامه هستند که E و ν به ترتیب مدول یانگ و ضریب پواسون می‌باشند. رابطه‌ی (۵) را می‌توان به صورت زیر بازنویسی کرد:

$$x: 0, a \text{ لبه های } \\ u_0 = v_0 = w_0 = 0 \\ y: 0, b \text{ لبه های } \\ \sigma_{yy} + \sigma_{xy} \frac{\partial v_0}{\partial x} + \sigma_{yy} \frac{\partial v_0}{\partial y} + \sigma_{yz} \frac{\partial v_0}{\partial z} = 0, u_0 = w_0 = 0$$

۳- روش حل مساله

۳-۱- گسسته سازی معادلات در حوزه مکان

معادلات حاکم و شرایط مرزی متناظر با استفاده از روش تربیعدیفرانسیلی تعمیم یافته گسسته می‌شوند. برطبق توزیع چبیشف گاوس-لوباتو نقاط گسسته شده در امتداد جهت های x, y و z به صورت زیر توزیع می‌شوند:

$$\zeta_i = \frac{1}{2} \left(1 - \cos \left(\frac{i-1}{N-1} \right) \right), \quad i = 1, 2, \dots, N \\ \eta_j = \frac{1}{2} \left(1 - \cos \left(\frac{j-1}{M-1} \right) \right), \quad j = 1, 2, \dots, M \\ \gamma_k = \frac{1}{2} \left(1 - \cos \left(\frac{k-1}{P-1} \right) \right), \quad k = 1, 2, \dots, P \quad (15)$$

که در آن M, N, P و تعداد کل نقاط گسسته شده در جهت محورهای x, y, z می‌باشد.

با استفاده از روش تربیع دیفرانسیلی، شکل گسسته شده معادلات (۱۴) به صورت زیر بیان می‌گردد:

$$M\ddot{X} + KX + K_{nl}(X) = FCos(\Omega t) \quad (16)$$

که در آن Ω فرکانس تحریک، M و K به ترتیب ماتریس‌های جرم و سفتی، K_{nl} بردار سختی غیرخطی، X بردار جابجایی و F بردار نیرو را نشان می‌دهند. که به صورت زیر قابل بیان می‌باشد:

$$X = [U \quad V \quad W]^T, \quad N(X) = [N_u(X) \quad N_v(X) \quad N_w(X)]^T \\ K = \begin{bmatrix} K_{11} & K_{12} & K_{13} \\ K_{21} & K_{22} & K_{23} \\ K_{31} & K_{32} & K_{33} \end{bmatrix}, M = \begin{bmatrix} M_{11} & 0 & 0 \\ 0 & M_{22} & 0 \\ 0 & 0 & M_{33} \end{bmatrix} \\ F_w = [\dots, f, \dots]_{1 \times N} F = [0 \quad 0 \quad F_w]$$

که در آن

$$K_{11} = C_{11} I_z \otimes I_y \otimes D_x^{(2)} + C_{66} I_z \otimes D_y^{(2)} \otimes I_x \\ + C_{55} D_z^{(2)} \otimes I_x \otimes I_y + C_{55,2} D_z^{(1)} \otimes I_x \otimes I_y, \\ K_{12} = K_{21} = (C_{12} + C_{66}) I_z \otimes D_x^{(1)} \otimes D_y^{(1)}, \\ K_{13} = (C_{13} + C_{55}) D_z^{(1)} \otimes I_y \otimes D_x^{(1)} + C_{55,2} I_z \otimes I_y \otimes D_x^{(1)}, \\ K_{22} = C_{22} I_z \otimes D_y^{(2)} \otimes I_x + C_{66} I_z \otimes I_y \otimes D_x^{(2)} \\ + C_{44} D_z^{(2)} \otimes I_y \otimes I_x + C_{44,2} D_z^{(1)} \otimes I_y \otimes I_x, \\ K_{23} = (C_{23} + C_{44}) D_z^{(1)} \otimes D_y^{(1)} \otimes I_x + C_{44,2} I_z \otimes D_y^{(1)} \otimes I_x, \\ K_{31} = (C_{13} + C_{55}) D_z^{(1)} \otimes D_x^{(1)} \otimes I_x + C_{13,2} I_z \otimes I_y \otimes D_x^{(1)}, \\ K_{32} = (C_{23} + C_{44}) D_z^{(1)} \otimes D_y^{(1)} \otimes I_x + C_{23,2} I_z \otimes D_y^{(1)} \otimes I_x, \\ K_{33} = C_{33} D_z^{(2)} \otimes I_y \otimes I_x + C_{55} I_z \otimes I_y \otimes D_x^{(2)} \\ + C_{44} I_z \otimes D_y^{(2)} \otimes I_x + C_{33,2} D_z^{(1)} \otimes I_y \otimes I_x, \\ M_{11} = M_{22} = M_{33} = \rho I_z \otimes I_y \otimes I_x \quad (18)$$

که \otimes بیانگر ضرب تنسور کرونیگر است. لازم به ذکر است که برای رعایت اختصار، مؤلفه‌های بردارهای جابجایی و مؤلفه‌های غیرخطی و همچنین گسسته‌سازی شرایط مرزی آورده نمی‌شوند.

۳-۲- نحوه اعمال گلرکین عددی

با در نظر گرفتن حل هارمونیک به صورت $X = \bar{X} e^{i\omega t}$ و برابر صفر قرار دادن جملات غیرخطی و نیرو معادله (۱۶)، مقادیر ویژه به صورت زیر به دست می‌آید:

$$K\bar{X} = \omega^2 M\bar{X}, \quad \bar{X} = \{\bar{u}_0^T, \bar{v}_0^T, \bar{w}_0^T\}^T \quad (19)$$

$$Z_i = \frac{\partial}{\partial x} \left(\sigma_{xz} \frac{\partial u_i}{\partial z} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\sigma_{xy} \frac{\partial u_i}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\sigma_{yz} \frac{\partial u_i}{\partial y} \right) \\ + \sum_{j=1}^3 \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\sigma_{ij} \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \right). \quad (12)$$

که $(1,2,3) = (x, y, z)$

علاوه بر این، شرایط مرزی را می‌توان به صورت زیر بیان کرد:

$$\delta u_k = 0 \text{ or } \left(\sigma_{kl} + \sigma_{kl} \frac{\partial u_k}{\partial x_l} \right) n_l = 0 \quad (13)$$

اکنون، با قرار دادن معادلات (۱۰) و (۱۲) در معادلات (۱۴)، معادلات غیر خطی کلاسیک ورق مستطیلی برحسب جابجایی‌ها به صورت زیر بدست می‌آید:

$$C_{11} \frac{\partial^2 u_0}{\partial x^2} + C_{12} \frac{\partial^2 v_0}{\partial x \partial y} + C_{13} \frac{\partial^2 w_0}{\partial x \partial z} \\ + C_{55} \left(\frac{\partial^2 u_0}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 w_0}{\partial z \partial x} \right) + \frac{\partial C_{55}}{\partial z} \left(\frac{\partial u_0}{\partial z} + \frac{\partial w_0}{\partial x} \right) \quad (14 \text{ الف}) \\ + C_{66} \left(\frac{\partial^2 u_0}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v_0}{\partial y \partial x} \right) + z_1 = \rho \frac{\partial^2 u_0}{\partial t^2}$$

$$C_{12} \frac{\partial^2 u_0}{\partial y \partial x} + C_{22} \frac{\partial^2 v_0}{\partial y^2} + C_{23} \frac{\partial^2 w_0}{\partial y \partial z} \\ + C_{66} \left(\frac{\partial^2 u_0}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 v_0}{\partial x^2} \right) + \frac{\partial C_{44}}{\partial z} \left(\frac{\partial v_0}{\partial z} + \frac{\partial w_0}{\partial y} \right) \quad (14 \text{ ب}) \\ + C_{44} \left(\frac{\partial^2 v_0}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 w_0}{\partial z \partial y} \right) + z_2 = \rho \frac{\partial^2 v_0}{\partial t^2},$$

$$C_{13} \frac{\partial^2 u_0}{\partial x \partial z} + C_{23} \frac{\partial^2 v_0}{\partial y \partial z} + C_{33} \frac{\partial^2 w_0}{\partial z^2} + \frac{\partial C_{13}}{\partial z} \frac{\partial u_0}{\partial x} \\ + \frac{\partial C_{23}}{\partial z} \frac{\partial v_0}{\partial y} + \frac{\partial C_{33}}{\partial z} \frac{\partial w_0}{\partial z} \\ + C_{55} \left(\frac{\partial^2 u_0}{\partial x \partial z} + \frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} \right) \quad (14 \text{ ج}) \\ + C_{44} \left(\frac{\partial^2 v_0}{\partial y \partial z} + \frac{\partial^2 w_0}{\partial y^2} \right) + q + z_3 = \rho \frac{\partial^2 w_0}{\partial t^2}.$$

که در آن z_1, z_2, z_3 مؤلفه‌های غیرخطی هستند که برای رعایت اختصار در اینجا آورده نمی‌شوند.

با استفاده از رابطه (13)، ترکیبات مختلفی از شرایط مرزی را می‌توان برای ورق‌های مستطیلی در نظر گرفت. در این مطالعه، شرایط مرزی ساده (SSSS)، شرایط مرزی گیردار (CCCC) و شرایط مرزی دوسر گیردار و دو سر ساده (CSCS) در نظر گرفته شده است که به صورت زیر بیان می‌شوند:

• شرایط مرزی SSSS:

$$x: 0, a$$

$$\sigma_{xx} + \sigma_{xx} \frac{\partial u_0}{\partial x} + \sigma_{xy} \frac{\partial u_0}{\partial y} + \sigma_{xz} \frac{\partial u_0}{\partial z} = 0, v_0 = w_0 = 0 \\ y: 0, b$$

$$\sigma_{yy} + \sigma_{xy} \frac{\partial v_0}{\partial x} + \sigma_{yy} \frac{\partial v_0}{\partial y} + \sigma_{yz} \frac{\partial v_0}{\partial z} = 0, u_0 = w_0 = 0 \\ \bullet \text{ شرایط مرزی CCCC:}$$

$$x: 0, a$$

$$u_0 = v_0 = w_0 = 0$$

$$y: 0, b$$

$$u_0 = v_0 = w_0 = 0$$

• شرایط مرزی CSCS:

$A = [\cos(2\pi\bar{\tau}_1) \dots \cos(2\pi\bar{\tau}_{N_t})]$
 سرنجام معادله (۲۶) به شکل برداری زیر بیان می‌گردد:

$$\left(\left(\frac{\Omega}{2\pi} \right)^2 (D_t^{(2)} \otimes \bar{M}) + \left(\frac{\Omega}{2\pi} \right) (D_t^{(1)} \otimes \bar{C}) + (I_{t^*} \otimes \bar{K}) \right) \text{vec}(Q) + \text{vec}(\bar{K}_{nl}(\Phi Q)) - (I_{t^*} \otimes \bar{F})A^T = 0 \quad (30)$$

معادله (۳۰) به صورت معادلات پارامتری زیر قابل بیان است:
 $H: \mathbb{R}^{3m+1} \rightarrow \mathbb{R}^{3m \times N_t}, H(\text{vec}(Q), \Omega) = 0 \quad (31)$

$N_t \times N_t$ شکل برداری ماتریس Q و I_{t^*} یک تانسور واحد را نشان می‌دهد، روش پیوسته طول کمان [۲۴] برای تخمین ویژگی‌های پاسخ فرکانسی ورق مستطیلی مدرج تابعی در شرایط مرزی مختلف با حل معادلات جبری غیرخطی سیستم استفاده می‌شود

۴- نتایج و بحث

در قسمت‌های قبل معادلات حاکم غیرخطی بر ورق‌های مستطیلی بادر نظر گرفتن نظریه الاستیسیته سه بعدی به دست آمد و سپس روش حل معادلات به دست آمده ارائه گردید. در این قسمت به بررسی صحت نتایج به دست آمده و نتایج عددی حاصل از تغییر شرایط بارگذاری و تغییر پارامترهای هندسی برای ارتعاشات اجباری ورق مستطیلی مدرج تابعی پرداخته می‌شود.

برای ارائه نتایج به دست آمده، پارامترهای بی بعد به صورت زیر تعریف می‌گردند:

$$(x, y, z) \rightarrow \left(\frac{x}{a}, \frac{y}{b}, \frac{z}{h} \right), (u_0, v_0, w_0) \rightarrow \left(\frac{u_0}{h}, \frac{v_0}{h}, \frac{w_0}{h} \right), \quad (32)$$

$$\eta = \frac{a}{h}, \quad \kappa = \frac{a}{b}, \quad \omega_L = \omega a \sqrt{\frac{\rho^c}{E^c}}$$

شرایط تکیه گاهی ورق برحسب حرف اول کلمه به صورت CSCS می‌باشد که به ترتیب گیردار در $x=0, a$ و ساده $y=0, b$ می‌باشد. نسبت پواسون $\nu=0.3$ فرض می‌شود، خواص مواد مدرج تابعی براساس قانون توانی در جهت ضخامت تغییر می‌کند، خواص مواد مدرج تابعی ترکیبی از آلومینیم و آلومینا به ترتیب با خواص $E^m = 70 \text{ GPa}$ ، $\rho^m = 2702 \text{ kg/m}^3$ و $E^c = 380 \text{ GPa}$ ، $\rho^c = 3800 \text{ kg/m}^3$ می‌باشد. به منظور بررسی صحت نتایج، نتایج فرکانس‌های بی بعد $(\bar{\omega} = \frac{\omega b^2}{\pi^2 h} \sqrt{12(1-\nu^2)\rho^c/E^c})$ مودهای اول و دوم در شرایط تکیه گاهی ساده کار حاضر با مقاله‌ی [۲۵] در جدول ۱ مقایسه شده است. شاخص کسر حجمی $k=1$ ، نسبت طول به عرض $(a/h=10)$ و طول و عرض ورق $a=b=10m$ می‌باشد.

جدول ۱- فرکانس‌های اول و دوم کار حاضر و مرجع [۲۳]

شماره مود	کار حاضر	مرجع [23]
1	1.4820	1.4818
2	3.5586	3.5586

بید توجه داشت که المان‌های شرایط مرزی گسسته شده در ماتریس المان‌های مرتبط با مرز ماتریس‌های قبلی جایگزین گردد. با حل معادله (۱۹) و استخراج حالت مودهای خطی، برای حل معادله (۱۶) می‌توان فرض کرد:

$$X = \Phi q \quad (20)$$

که Φ و q به ترتیب سیستم مختصات کاهش یافته و تابع پایه در روش عددی گلرکین استفاده می‌شود، که به صورت زیر بیان می‌شود:

$$q_{(3m) \times 1}^T = [q_u^1 \dots q_u^m \quad q_v^1 \dots q_v^m \quad q_w^1 \dots q_w^m], \quad (21-f)$$

$$\Phi_{(3N) \times (3m)} = \begin{bmatrix} \Phi_u & 0 & 0 \\ 0 & \Phi_v & 0 \\ 0 & 0 & \Phi_w \end{bmatrix} \quad (21-b)$$

بردار باقیمانده با قرار دادن رابطه (۲۰) در (۱۶)، به صورت زیر به دست می‌آید:

$$R = M\Phi\ddot{q} + K\Phi q + K_{nl}(\Phi q) - FCos(\Omega\tau) \quad (22)$$

با ضرب هر مفادله در حالت مود نظیر و سپس انترگرال گیری در روی دامنه در روش گلرکین عددی ارائه شده، به وسیله عملگرهای ماتریسی زیر انجام می‌شود:

$$G = \Phi^T S \quad (23)$$

که S بیانگر عملگر انترگرال است که با استفاده از تربیع دیفرانسیلی و سری تیلور به دست می‌آید [۲۲]. با در نظر گرفتن توضیحات قبل معادلات موسوم به معادلات دافینگ به صورت زیر بیان می‌شود:

$$\bar{M}\ddot{q} + \bar{K}q + \bar{K}_{nl}(\Phi q) = \bar{F}Cos(\Omega\tau) \quad (24)$$

که در آن

$$\bar{M} = GM\Phi, \quad \bar{K} = GK\Phi, \quad \bar{K}_{nl}(\Phi q) = GK_{nl}(\Phi q) \quad (25)$$

$$\bar{F} = GF$$

۳-۳- حل در دامنه زمانی

ابتدا براساس عملگر ماتریس دیفرانسیلی صریح، معادله (۲۲) در دامنه زمانی گسسته می‌شود. این عملگرها برای مسائل متناوب با مشتق گیری از توابع متناوب سینوسی به عنوان توابع پایه در روش نظم طیفی بدست می‌آیند. [۲۳] با تعریف $\tau^* = \tau/T$ و $\Omega = 2\pi/T$ معادله (۲۲) باز نویسی می‌گردد:

$$\left(\frac{\Omega}{2\pi} \right)^2 \bar{M}\ddot{q} + \left(\frac{\Omega}{2\pi} \right) \bar{C}\dot{q} + \bar{K}q + \bar{K}_{nl}(\Phi q) = \bar{F}Cos(2\pi\tau^*) \quad (26)$$

که نقاط نشان دهنده مشتق نسبت به τ^* و نسبت میرایی $\bar{K}(2\beta/\omega_L)$ که β عدد بسیار کوچکی می‌باشد.

شکلگسسته شده مربوط به q در معادله (۲۶) در دامنه زمانی به صورت زیر می‌باشد:

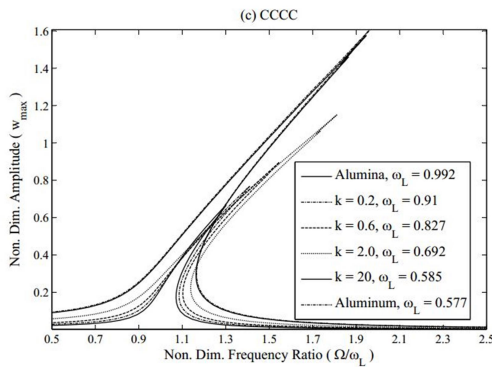
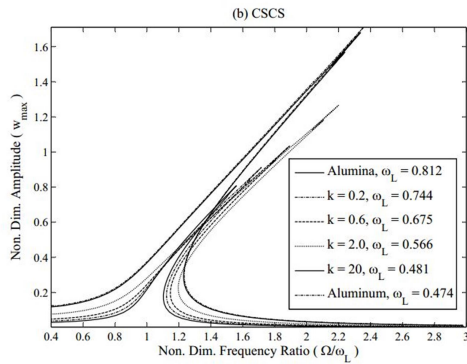
$$Q^T = \begin{bmatrix} q_u^1 \times N_t & \dots & q_u^m \times N_t & q_v^1 \times N_t & \dots & q_v^m \times N_t \\ & & & q_w^1 \times N_t & \dots & q_w^m \times N_t \end{bmatrix} \quad (27)$$

که m نشان دهنده شماره حالت مورد گلرکین و N_t تعداد نقاط گسسته شده در دامنه زمانی است، هم چنین نقاط شبکه بندی شده در دامنه زمانی به صورت زیر ارائه می‌گردد:

$$\bar{\tau} = \frac{i}{N_t}, \quad 0 < \bar{\tau} < 1, \quad i = 1, 2, \dots, N_t = 2k \quad (28)$$

که در آن مقدار عددی N_t باید زوج باشد. با استفاده از معادلات (۲۶) و (۲۷)، می‌توان نوشت:

$$\left(\frac{\Omega}{2\pi} \right)^2 \bar{M}QD_{\tau}^{(2)T} + \left(\frac{\Omega}{2\pi} \right) \bar{C}QD_{\tau}^{(1)T} + \bar{K}Q + \bar{K}_{nl}(Q) = \bar{F}A, \quad (29)$$



شکل ۳- اثر شاخص کسر حجمی بر نمودار پاسخ فرکانسی ورق مدرج تابعی در شرایط مرزی مختلف ($\eta = 10, f = 0.01, c = 0.01$)

همچنین برای $\frac{\Omega}{\omega_L} > 1$ پدیده جهش، یعنی یک تغییر ناگهانی در کاهش یا افزایش قابل توجه در دامنه ارتعاشات صورت می‌گیرد زمانی که فرکانس تحریک متغیر است که ناشی از سفت شوندگی غیرخطی می‌باشد [۲۷]. علاوه بر این، با افزایش شاخص کسر حجمی باعث کاهش فرکانس طبیعی سیستم می‌شود و ممکن است نسبت فرکانسی سیستم کاهش یا افزایش یابد. بنابراین با افزایش شاخص کسر حجمی سفتی هندسی خطی سیستم کاهش می‌یابد. علاوه بر موارد زیر شده می‌توان دریافت که رفتار سفت شوندگی غیر خطی باعث می‌شود که حداکثر دامنه ارتعاش اجباری در فرکانس های تحریک بالاتری نسبت به فرکانس طبیعی رخ دهد.

هم چنین در جدول ۲ کار حاضر با نتایج حاصل از تئوری های دوبعدی نیز مورد بررسی قرار گرفته است که صحت نتایج و اهمیت تئوری سه بعدی را نشان می‌دهد. در این بررسی فرکانس طبیعی بی بعد های کلاسیک، مرتبه اول برشی و مرتبه بالای برشی همگن با تئوری مرزی ساده مقایسه شده است، خواص مواد مورد استفاده به صورت و $\rho = 1 \text{ kg/m}^3$ و نسبت طول به ضخامت $a/h = 10$ می‌باشد.

جدول ۲- فرکانس های طبیعی بی بعد با نظریه های مرتبه دوم

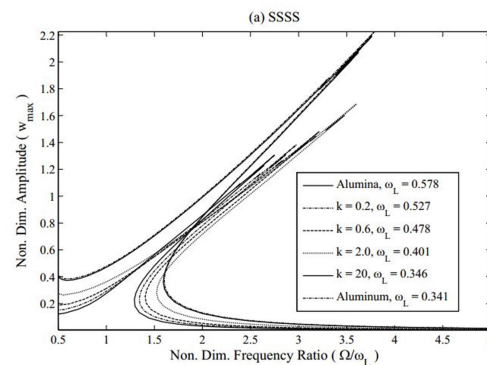
کار حاضر	مرتبه بالای برشی [24]	مرتبه اول برشی [24]	کلاسیک [24]
0.0932	0.0935	0.0930	0.0963

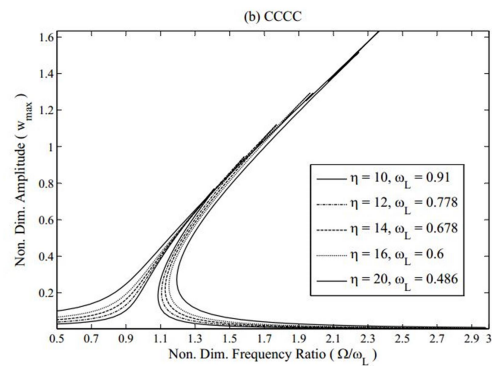
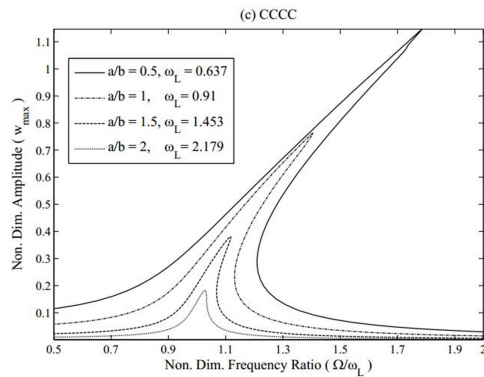
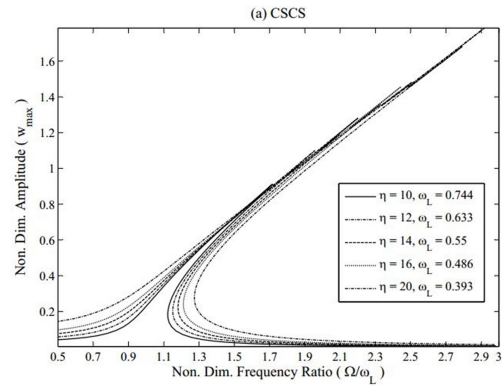
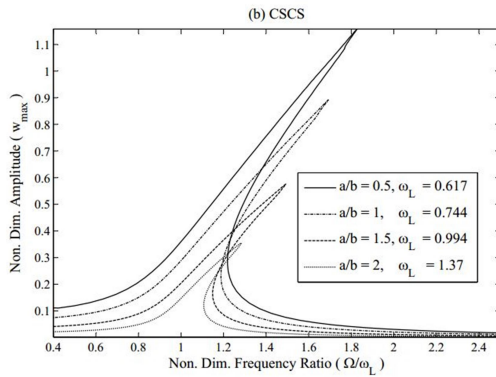
نتایج حاصل نشان می‌دهد که روش حل کار حاضر تطابق خوبی با روش های ارائه شده در مقاله‌های انتشار یافته دارد. در محاسبات انجام شده دامنه ارتعاشی بی بعد و نسبت فرکانسی ورق مستطیلی مدرج تابعی به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$W_{max} = \frac{w_{max}}{h} = \frac{\text{بیشینه انحنای ورق}}{\text{ضخامت ورق}}$$

$$\frac{\Omega}{\omega_L} = \frac{\text{فرکانس تحریک خارجی}}{\text{فرکانس طبیعی اساسی}}$$

در شکل منحنی پاسخ فرکانس ورق مستطیلی مدرج تابعی که دامنه بی بعد ورق برحسب نسبت فرکانسی برای مقادیر مختلف شاخص کسر حجمی در شرایط مرزی متفاوت نشان داده شده است. مشاهده می‌شود که با افزایش شاخص کسر حجمی بیشینه دامنه ارتعاشات بی بعد افزایش می‌یابد. علاوه بر این مشاهده می‌شود که در یک شاخص کسر حجمی معین با افزایش نسبت فرکانسی، بیشینه دامنه ارتعاشی تا یک نقطه بیشینه افزایش یافته و سپس با شدت زیادی کاهش می‌یابد. این تغییر ناگهانی در نتایج پاسخ دینامیکی ناشی از ماهیت غیرخطی سیستم می‌باشد.



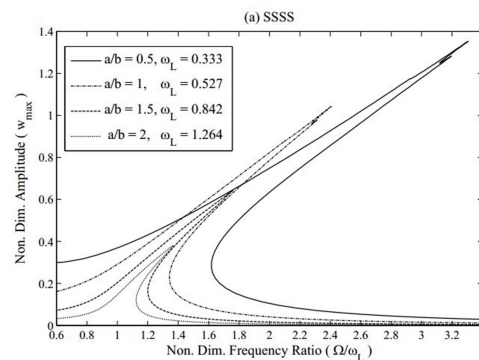
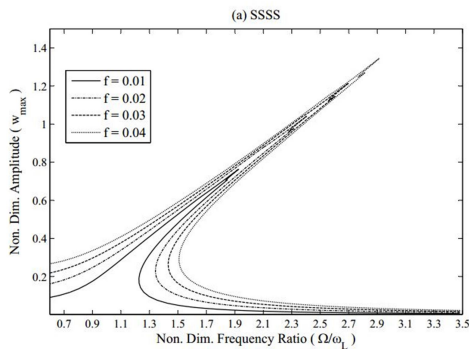


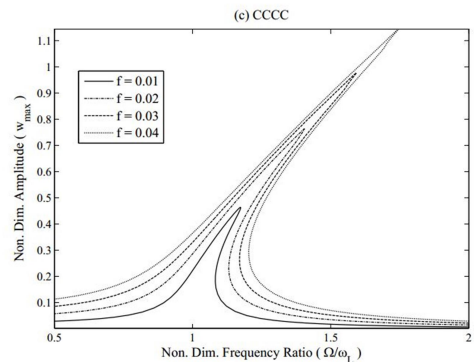
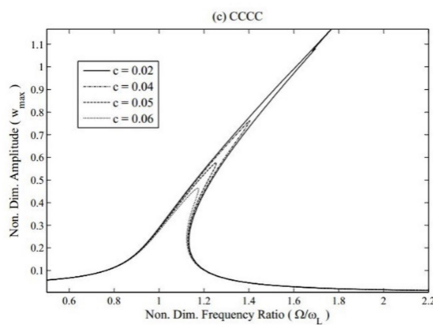
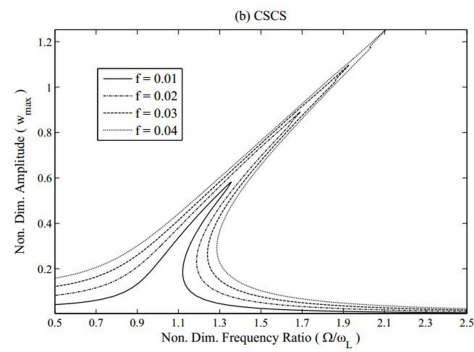
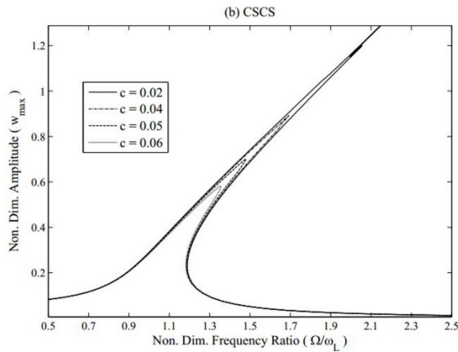
شکل ۵- اثر نسبت طول به عرض بر نمودار پاسخ فرکانسی ورق مدرج تابعی در شرایط مرزی مختلف ($\kappa = 0.2, f = 0.02, c = 0.02$)

شکل ۴- اثر تغییرات نسبت طول/عرض به ضخامت بر نمودار پاسخ فرکانسی ورق مدرج تابعی در شرایط مرزی مختلف ($\kappa = 0.2, f = 0.01, c = 0.01$)

شکل ۵ اثرات تغییر نسبت طول به عرض ورق را نشان می‌دهد. مشاهده می‌شود که افزایش نسبت a/b باعث افزایش قرانکس طبیعی سیستم و کاهش نسبت فرکانسی می‌شود. هم‌چنین قابل مشاهده است که در یک نسبت معین a/b سیستم با شرایط تکیه‌گاهی گیردار سفتی بیشتری نسبت به دو شرایط تکیه‌گاهی دیگر دارد و انحراف نمودار نسبت فرکانسی برای شرایط مرزی ساده از بقیه شرایط مرزی‌ها بیشتر می‌باشد و در این شرایط مرزی رفتار سفت شوندگی غیرخطی نمایان‌تر است.

در شکل ۴ اثرات نسبت طول/عرض به ضخامت نشان داده شده است، مشاهده می‌شود که در نسبت‌های طول/عرض به ضخامت پایین‌تر، دارای قرانکس طبیعی بالاتر و بیشینه دامنه ارتعاشی پایین‌تری دارد. هم‌چنین قابل مشاهده است که با افزایش η منحنی‌ها به سمت راست انحراف پیدا می‌کنند و رفتار سفت شوندگی غیرخطی سیستم افزایش پیدا می‌کند.





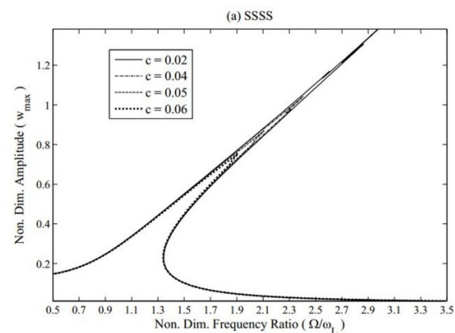
شکل ۷- اثر پارامتر میرایی متغییر بی بعد در شرایط مرزی مختلف ($\kappa = 0.2, f = 0.02$)

شکل ۶- اثر نیروی عرضی متغییر بی بعد در شرایط مرزی مختلف ($\kappa = 0.2, c = 0.02$)

۵- نتیجه گیری

در این مطالعه برحسب تئوری الاستیسیته سه بعدی و با در نظر گرفتن جملات غیرخطی هندسی گرین لاگرانژ، رفتار ارتعاشات اجباری ورق های مستطیلی مورد بررسی قرار گرفته است. مواد ورق های مستطیلی مدرج تاییی بوده و در جهت ضخامت تغییر می کند. با به دست آوردن انرژی جنبشی، انرژی کرنشی، کار حاصل از نیروی خارجی و با استفاده از اصل همپتون، معادلات دیفرانسیل پاره ای غیرخطی و شرایط مرزی متناظر به دست می آیند. با گسسته سازی معادلات حاکم و شرایط مرزی متناظر با استفاده از روش تربیع دیفرانسیلی تعمیم یافته و کاهش مرتبه آن با تکنیک گلرکین عددی، معادلات غیرخطی متغیر زمان به شکل دافینگ مرتب می شوند. برای حل مساله در دامنه زمانی، معادلات با از استفاده از عملگر دیفرانسیلی متناوب زمانی گسسته می شوند و سپس با استفاده از الگوریتم طول کمان معادلات پارامتری برداری غیرخطی حل می شوند. اثرات طول به ضخامت، طول به عرض، شاخص کسر حجمی، پارامتر میرایی بی بعد و نیروی عرضی بی بعد مورد بررسی قرار گرفته اند. برای همه ی شرایط مرزی، مشاهده شد که با افزایش شاخص حجمی، نسبت طول به ضخامت و نیروی عرضی بی بعد بیشینه دامنه ارتعاشی سیستم افزایش می یابد. اما، با افزایش نسبت طول به عرض و پارامتر میرایی بی بعد، بیشینه دامنه ارتعاشی کاهش پیدا می کند. همچنین، افزایش نسبت طول به عرض، فرکانس خطی و سفت شوندگی غیرخطی سیستم را افزایش می دهد اما

اثرات نیروی عرضی و پارامتر میرایی بی بعد مختلف بر روی دامنه ارتعاشی بی بعد برحسب نسبت فرکانسی ورق مستطیلی در شرایط مرزی مختلف در شکل های ۶ و ۷ نشان داده شده است. برحسب نتایج رسم شده، مشاهده می شود که با افزایش پارامتر میرایی بی بعد بیشینه مقدار دامنه کاهش می یابد در حالی که با افزایش نیروی عرضی بی بعد مقدار بیشینه دامنه ارتعاشی نیز افزایش می یابد و در نیروی تحریک کوچک تر رفتار سیستم به رفتار خطی نزدیک می شود. علاوه بر این، برای یک نیروی عرضی یا پارامتر میرایی بی بعد، بیشینه دامنه در شرایط مرزی کاملا ساده نسبت دو شرایط مرزی دیگر بیشتر است.



[۱۸] ا. علی بیگلر، م. عزیزاده، تحلیل استاتیکی و ارتعاشات آزاد ورق ساندویچی مدرج تابعی با استفاده از تئوری الاستیسیته سه بعدی، مهندسی مکانیک مدرس، Vol. 14, No. 10, pp. 195-204, 2014

[۱۹] ا. علی بیگلر، ا. عبدالله زاده شهر بابکی، تحلیل ارتعاشات آزاد سه بعدی نانوورق مستطیلی بر اساس تئوری الاستیسیته غیرمحل، مهندسی مکانیک مدرس، Vol. 15, No. 11, pp. 54-62, 2015

[۲۰] م. بسطامی، ب. بهجت، حل تحلیلی کماتش و ارتعاش نانو ورق هدفمند در محیط الاستیک با در نظرگیری اثرات غیرموضعی، مهندسی مکانیک دانشگاه تبریز، Vol. 46, No. 3, pp. 43-53, 2016

[۲۱] ف. اله کرمی، م. قصاب زاده سریزدی، تحلیل ارتعاشات آزاد پوسته استوانه‌ای نازک و نسبتاً ضخیم مدرج تابعی جهت بر اساس تئوری مرتبه اول تغییر شکل برشی، مهندسی مکانیک دانشگاه تبریز، Vol. 46, No. 1, pp. 15-28, 2016

[22] Ansari R., Shojaei M. F., Mohammadi V., Gholami R., Darabi M., Nonlinear vibrations of functionally graded Mindlin microplates based on the modified couple stress theory, *Composite Structures*, Vol. 114, pp. 124-134, 2014 .

[23] Trefethen L. N., *Spectral methods in MATLAB*: SIAM, 2000 .

[24] Ibrahim S., Patel B., Nath Y., Modified shooting approach to the non-linear periodic forced response of isotropic/composite curved beams, *International journal of non-linear mechanics*, Vol. 44, No. 10, pp. 1073-1084, 2009 .

[25] Ansari R., Shahabodini A., Shojaei M. F., Nonlocal three-dimensional theory of elasticity with application to free vibration of functionally graded nanoplates on elastic foundations, *Physica E: Low-dimensional Systems and Nanostructures*, Vol. 76, pp. 70-81, 2016 .

[26] Aghababaei R., Reddy J., Nonlocal third-order shear deformation plate theory with application to bending and vibration of plates, *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 326, No. 1, pp. 277-289, 2009 .

[27] Amabili M., *Nonlinear vibrations and stability of shells and plates*: Cambridge University Press, 2008 .

افزایش نسبت طول به ضخامت فرکانس خطی سیستم را کاهش و سفت شوندگی غیرخطی سیستم را افزایش می‌دهد. افزایش نیروی تحریک باعث افزایش بیشینه دامنه ارتعاشی سیستم می‌گردد. لازم به ذکر است که با میل کردن پارامتر میرایی به سمت صفر، نقطه بیشینه ای را برای دامنه ارتعاشی نمی‌توان متصور شد.

۶- مراجع

- [1] Yamanouchi M., Koizumi M., Functionally gradient materials, in *Proceeding of, Proceeding Of The First International Symposium On Functionally Graded Materials*, pp. 1993
- [2] Holt J., Koizumi M., Hirai T., Munir Z., *Ceramic transactions: Functionally gradient materials. Volume 34*, Westerville, OH (United States); American Ceramic Society, pp. 1993 .
- [3] Sata N., Characteristic of SiC-TiB composites as the surface layer of SiC-TiB-Cu functionally gradient material produced by self-propagating high-temperature synthesis, 1993 .
- [4] Yamaoka H., Yuki M., Tahara K., Fabrication of functionally gradient material by slurry stacking and sintering process, 1993 .
- [5] Rabin B., Heaps R., Powder processing of Ni-Al₂O₃ FGM, 1993 .
- [6] Fukui Y., Fundamental investigation of functionally gradient material manufacturing system using centrifugal force, *JSMIE international journal. Ser. 3, Vibration, control engineering, engineering for industry*, Vol. 34, No. 1, pp. 144-148, 1991 .
- [7] Yang J., Shen H.-S., Dynamic response of initially stressed functionally graded rectangular thin plates, *Composite Structures*, Vol. 54, No. 4, pp. 497-508, 2001 .
- [8] Cheng Z.-Q., Kitipornchai S., Membrane analogy of buckling and vibration of inhomogeneous plates, *Journal of engineering mechanics*, Vol. 125, No. 11, pp. 1293-1297, 1999 .
- [9] Cheng Z.-Q., Batra R., Exact correspondence between eigenvalues of membranes and functionally graded simply supported polygonal plates, *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 229, No. 4, pp. 879-895, 2000 .
- [10] Yang J., Shen H.-S., Vibration characteristics and transient response of shear-deformable functionally graded plates in thermal environments, *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 255, No. 3, pp. 579-602, 2002 .
- [11] Qian L., Batra R., Chen L., Static and dynamic deformations of thick functionally graded elastic plates by using higher-order shear and normal deformable plate theory and meshless local Petrov-Galerkin method, *Composites Part B: Engineering*, Vol. 35, No. 6, pp. 685-697, 2004 .
- [12] Ferreira A., Batra R., Roque, C. Qian L., Jorge R., Natural frequencies of functionally graded plates by a meshless method, *Composite Structures*, Vol. 75, No. 1, pp. 593-600, 2006 .
- [14] Roque C., Ferreira A., Jorge R., A radial basis function approach for the free vibration analysis of functionally graded plates using a refined theory, *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 300, No. 3, pp. 1048-1070, 2007 .
- [۱۴] Matsunaga H., Free vibration and stability of functionally graded plates according to a 2-D higher-order deformation theory, *Composite structures*, Vol. 82, No. 4, pp. 499-512, 2008 .
- [15] Cheng Z.-Q., Batra R., Three-dimensional thermoelastic deformations of a functionally graded elliptic plate, *Composites Part B: Engineering*, Vol. 31, No. 2, pp. 97-106, 2000 .
- [16] Vel S. S., Batra R., Three-dimensional exact solution for the vibration of functionally graded rectangular plates, *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 272, No. 3, pp. 703-730, 2004 .
- [17] Xu Y., Zhou D., Three-dimensional elasticity solution of functionally graded rectangular plates with variable thickness, *Composite Structures*, Vol. 91, No. 1, pp. 56-65, 2009 .