

تحلیل کمانش استوانه مشبک کامپوزیتی با پوسته درونی و بیرونی تحت فشار خارجی

بیژن رستمی

علی شهرجردی*

کارشناسی ارشد، گروه مهندسی مکانیک، دانشگاه ملایر، ملایر، ایران

استادیار، گروه مهندسی مکانیک، دانشگاه ملایر، ملایر، ایران

چکیده

در سال‌های اخیر پوسته‌های استوانه‌ای تقویت‌شده در اجزای اصلی ساختارهای هواپیمایی، موشکی و دریایی مورد استفاده قرار گرفته شده است. در این مقاله کمانش استوانه مشبک کامپوزیتی با پوسته درونی و بیرونی تحت فشار خارجی مورد تحلیل و بررسی قرار می‌گیرد. این کار با ایجاد یک مدل تحلیلی برای تعیین پارامترهای سختی معادل یک پوسته استوانه‌ای کامپوزیتی تقویت‌شده مشبک انجام شده است. بر اساس اصل برهم‌نهی سختی تقویت‌کننده‌ها با سختی پوسته جمع می‌گردد تا پارامترهای سختی معادل کل ساختار به دست آید. معادلات حاکم بر ساختارهای مشبک استوانه‌ای بر اساس میدان جابجایی و روابط تنش و کرنش به صورت ماتریسی با استفاده از نظریه کلاسیک پوسته‌ها تحت شرایط مرزی تکیه‌گاهی ساده و گیردار حل می‌گردد. نتایج نشان می‌دهد افزایش پارامترهای زاویه، طول سلول مشبک و سطح مقطع باعث افزایش سختی معادل و بار بحرانی کمانش تا قبل از رسیدن به مود کمانش موضعی تقویت‌کننده‌ها می‌شود ولی افزایش بیشتر آن‌ها کمانش موضعی و کمانش سازه را در پی دارد؛ بنابراین می‌توان برای تمامی پارامترهای مؤثر، مقدار بهینه‌ای را در نظر گرفت و همچنین برای مؤثر بودن ساختار مشبک به تعداد محدودی تقویت‌کننده با زاویه بهینه، فاصله طولی و سطح مقطع مناسب جهت جلوگیری از کمانش موضعی و در نهایت کمانش کلی نیاز است.

واژه‌های کلیدی: ساختار استوانه‌ای مشبک، کمانش، کامپوزیت.

Buckling analysis of composite lattice cylinder with inner and outer shell under external pressure

B. Rostami

Department of Mechanical Engineering, Malayer University, Malayer, Iran.

A. Shahrjerdi

Department of Mechanical Engineering, Malayer University, Malayer, Iran.

Abstract

In recently years, Stiffened cylindrical shells are used in the major components of aviation, missile and marine structures. In this study has been analyzed buckling of composite lattice cylinder with inner and outer shell under external pressure. This was accomplished by developing an analytical model for determination of the equivalent stiffness parameters of a grid stiffened composite cylindrical shell. This stiffness contribution of the stiffeners was superimposed with the stiffness contribution of the shell to obtain the equivalent stiffness parameters of the whole panel. Equations governing the cylindrical lattice structures are solved based on the displacement and stress-strain relations in the form of a matrix using classical shell theory under boundary conditions clamp supported and simply supported. The results show increase in grid cell length, angle and cross-section parameters caused increase in stiffness and critical buckling load but increase further them cause local and global buckling. Finally for all of them can be considered optimal value and for prevent local and global buckling and the effectiveness of the lattice structure to a limited number of stiffener with optimal angle, longitudinal and cross sections required.

Keywords: Lattice cylindrical, Buckling, Composite.

شبه‌ای موجب تغییر مسیر بارهای تخریبی در اطراف نقاط آسیب‌دیده و در نتیجه افزایش قدرت تحمل آسیب در این سازه‌ها می‌شود [۱]. همچنین ساخته شدن تقویت‌کننده‌ها از الیاف تک جهت احتمال بروز پدیده تورق در آن‌ها را نسبت به ساختارهای مشبک کاهش می‌دهد و این عامل به نوبه خود مقاومت این سازه‌ها را در برابر ضربه و خستگی افزایش می‌دهد. علاوه بر این، مجزا بودن تقویت‌کننده‌ها از یکدیگر امکان سرایت ترک از یک تقویت‌کننده به تقویت‌کننده مجاور را از بین برده و قدرت تحمل آسیب‌دیدگی سازه را نیز افزایش می‌دهد. از طرفی به دلیل ساختار باز این سازه‌ها، تأثیر رطوبت در آن‌ها ناچیز است و با توجه به استفاده از الیاف پیوسته در ساخت سازه مشبک کامپوزیتی، پتانسیل بالایی برای اتوماسیون فرایند ساخت این قبیل سازه‌ها وجود دارد. بر اساس به‌کارگیری شیوه‌های جدید اتوماسیون، قیمت این

۱- مقدمه

سازه‌های کامپوزیتی به علت نسبت مقاومت به وزن بالا و مقاومت در برابر رطوبت و خوردگی و سایر خواص منحصر به فرد، در صنایع مختلف از جمله صنایع هوایی، دریایی، موشکی و مخازن تحت فشار کاربرد زیادی دارند. در این میان پوسته‌های کامپوزیتی یکی از سازه‌های پرکاربرد هستند که از سال‌ها پیش مورد توجه طراحان بوده است. یکی از روش‌های بهبود کارایی پوسته‌های کامپوزیتی استفاده از انواع تقویت‌کننده‌ها (ریب‌ها)^۱ است. تقویت‌کننده‌ها می‌توانند به صورت محیطی، محوری و یا مارپیچ مورد استفاده قرار گیرند. طبیعت ساختار

^۱ Stiffeners (Ribs)

نتایج مشخص کرد که پارامترهای هندسی تقویت‌کننده‌های طولی تأثیرات مهمی بر بار بحرانی کمانش دارد. در سال ۲۰۱۵ سوفیو [۱۲] به مطالعه کمانش پوسته‌های مخروطی ناقص و کامل مواد مدرج تابعی تحت فشار خارجی در چارچوب نظریه تنش برشی پرداخته و در آن اثرات تنش برشی، مقطع مواد مدرج تابعی و مشخصات پوسته که بر روی بار بحرانی عمودی مؤثر است مورد بررسی قرار گرفت. در سال ۲۰۱۶ لاپتین و همکارانش [۱۳] روشی برای تحلیل کمانش ورق‌های مشبک غیر هم‌شکل با شرایط مرزی گیردار تحت فشار محوری ارائه داده است. در این مقاله مؤثرترین پارامترها را زاویه و جهت تقویت‌کننده‌های قطری بر بار بحرانی کمانش معرفی می‌نماید. در سال ۲۰۱۶ ترن و نیوین [۱۴] ارتعاشات آزاد پوسته‌های استوانه‌ای مدور مواد مدرج تابعی با تقویتی‌های متعامد را مورد بررسی قرار داده‌اند که در آن تأثیرات نسبت‌های ارتفاع به پهنا تقویتی‌ها، طول به شعاع، شعاع به ضخامت پوسته و تعداد موج‌های محیطی روی فرکانس طبیعی با شرایط مرزی تکیه‌گاهی ساده ارزیابی شده است.

بامطالعه پژوهش‌های انجام‌شده، خلأهای موجود در زمینه تحقیقات صورت گرفته در حوزه کمانش ساختارهای مشبک به شرح زیر است:

مطالعه اندکی (به‌صورت روش عددی اجزاء محدود) در خصوص کمانش ساختار مشبک تحت بارمحوری انجام‌شده ولی بررسی کمانش این ساختارها تحت فشار خارجی در مراجع بررسی‌شده صورت نگرفته است. همچنین تحلیل ساختارهای مشبک با هندسه تک پوسته مطالعه و بررسی‌شده ولی تحقیقی در خصوص این ساختار با پوسته بیرونی و درونی به عمل نیامده است. تحقیقاتی نیز بر روی کمانش پوسته استوانه‌ای تحت شرایط مرزی تکیه‌گاهی ساده انجام‌شده ولی مطالعه‌ای در خصوص معادلات آن تحت شرایط مرزی تکیه‌گاهی گیردار صورت نگرفته است.

هدف از این مقاله بررسی کمانش استوانه مشبک کامپوزیتی با پوسته بیرونی و درونی تحت فشار خارجی و شرایط مرزی $C-S^1, S-S^2$ است که با استفاده از روش گالرکین بار بحرانی کمانش استخراج گردیده و تأثیرات پارامترهای هندسی بر بار بحرانی کمانش به‌صورت تحلیلی و عددی مورد بررسی قرار گرفته شده است.

۲- معادلات حاکم

در شکل ۱، پوسته استوانه‌ای کامپوزیتی چندلایه با شعاع R ، طول L و ضخامت t نشان داده شده است. u ، v و w به ترتیب مؤلفه‌های تغییر مکان در جهت x ، θ و Z می‌باشند. همان‌طور که در این شکل نشان داده شده، مبدأ مختصات بر روی صفحه میانی پوسته در نظر گرفته می‌شود. مختصه x در جهت طولی، مختصه θ در جهت محیطی و مختصه Z در جهت ضخامت پوسته است.

محصولات نیز کاهش چشمگیری خواهد داشت [۱]. کمانش پوسته‌ها مشبک تحت بارگذاری‌های مختلف، از جمله بار خارجی، یکی از مهم‌ترین مدهای واماندگی آن‌هاست. به همین سبب مطالعه رفتار کمانشی آن‌ها از اهمیت ویژه‌ای برخوردار است. اولر [۲] اولین کسی بود که بر روی پدیده کمانش تحقیقاتی انجام داده و سعی نمود مدل ریاضی برای آن ارائه نماید. او در سال ۱۹۷۴ نخستین تحلیل صحیح از پایداری یک ستون را با رفتار کمانشی ارائه داد. وی با استفاده از روش تعادل خنثی یعنی تعادل ستون در حالت کمی خم‌شده توانست معادله دیفرانسیل رفتار یک عضو خطی را استخراج نماید و به حل آن بپردازد و مدهای کمانش و ضرایب بار کمانش تحت این مدها را به دست آورد. ولی این راه‌حل یک کار ریاضی محض بود و در آن زمان برای آن کاربردی مطرح نبود. در سال ۱۹۹۶ جانکی و همکارانش [۳] روشی را برای محاسبه بار کمانشی پنهلهای کامپوزیتی ارائه دادند که در این روش پنهلهای صفحه‌ای تقویت‌شده با استفاده از روش‌های ریاضی به پنهل صفحه‌ای یکنواخت معادل که دارای سختی معادل با پنهل اولیه است تبدیل می‌گردد. همچنین اثر متقابل پوسته و تقویت‌کننده‌ها با استفاده از سختی تقویت‌کننده‌ها و پوسته در ناحیه اتصال محاسبه گردیده و بار کمانش با قرار دادن سختی معادل نهایی در روش ریلی ریتز محاسبه شده است. ساموئل کیدان و همکارانش در سال ۲۰۰۳ [۴] مقاله‌ای را تحت عنوان تحلیل بار کمانشی در یک استوانه کامپوزیتی تقویت‌شده با ساختار شبکه‌ای کامپوزیتی ارائه دادند. فان و همکارانش [۵] در سال ۲۰۱۳ رفتار خمشی-فشاری ساندویچ پانل بامغزی مشبک تقویت‌شده با الیاف کربن را تحلیل نمودند. در این مطالعه نوع خرابی جدایش لایه‌ای و کمانش محلی بررسی شده است. راسینام و همکارش در سال ۲۰۱۳ [۶] تحلیل استاتیکی کمانش پوسته استوانه‌ای نازک تحت فشار خارجی را به روش اجزای محدود بررسی نمودند. آن‌ها در این تحقیق تأثیر انواع پارامترها را روی بار بحرانی کمانش بررسی نمودند. زنگ و جیانگ در سال ۲۰۱۴ [۷] خواص مکانیکی ساختارهای مشبک کامپوزیتی با تغییر نسبت پهنا را بررسی نمودند که در این تحقیق سفتی و استحکام بر پایه روش مکانیک محیط پیوسته استخراج شده است. سان و همکارانش در سال ۲۰۱۴ [۸] کمانش پوسته استوانه‌ای تحت فشار خارجی را با روش همیلتون و بر پایه تئوری دائل انجام دادند. نتایج نشان داد که کمینه فشار بحرانی پوسته استوانه‌ای تحت شرایط مرزی آزاد نسبت به شرایط مرزی دیگر کمتر است. سوفیو و همکارش در سال ۲۰۱۴ [۹] کمانش و ارتعاش پوسته استوانه‌ای مواد مدرج تابعی (FGM) را تحت فشار خارجی انجام دادند. آن‌ها معادلات اولیه را بر اساس نظریه دائل استخراج نموده و به روش گالرکین حل نمودند. فان و همکارانش در سال ۲۰۱۴ [۱۰] رفتار فشاری کامپوزیت‌های مشبک را بررسی نمودند. در سال ۲۰۱۵ ستوری و همکارانش [۱۱] با استفاده از نظریه مرتبه سوم تغییر شکل برشی به بررسی کمانش استوانه مواد مدرج تابعی با تقویتی طولی پرداخته‌اند، در این تحقیق اثرات بارگذاری و پارامترهای هندسی تقویت‌کننده‌های طولی و شاخص توان در تعیین خواص مواد مدرج تابعی در شرایط مرزی تکیه‌گاهی مختلف بر بار بحرانی کمانش مورد مطالعه قرار گرفت و

² Clamp support

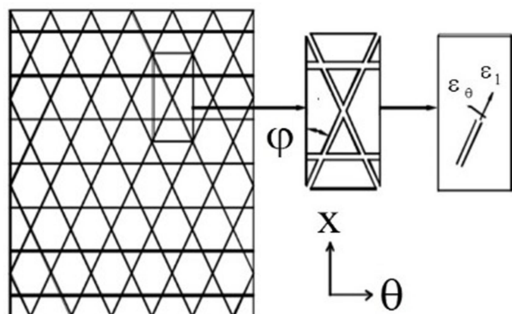
³ Simply support

¹ Functionally graded material

۳- محاسبه سفتی معادل ساختارهای مشبک

۳-۱- ساختارهای مشبک

یک مدل تحلیلی از ساختار مشبک در شکل شماره ۲ نمایش داده شده است. المان واحد طوری انتخاب می‌گردد که کل ساختار سازه با استفاده از تکرار المان واحد تولید گردد.



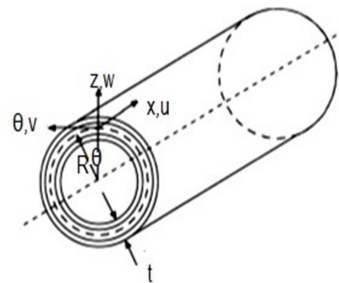
شکل ۲- ساختار مشبک به همراه المان واحد [۴].

خصوصیات سفتی یک سلول که به صورت تکرار ایجاد شده است، نماینده سفتی کل بخش تکرار شونده است. کامپوزیت‌های تقویت شده با الیاف، نوعی از مواد اورتوتروپیک هستند که در آن‌ها خواص مکانیکی در یک جهت خاص قوی‌تر بوده و معمولاً از دو قسمت ماتریس و الیاف تشکیل شده‌اند. الیاف جزء قوی‌تر بوده و به واسطه آن ماده‌ی کامپوزیت در جهتی که راستای الیاف قرار دارد خواص مکانیکی قوی‌تری به خود می‌گیرد و چون زاویه الیاف در راستای محور طولی پانل استوانه‌ای بوده بنابراین خصوصیات اورتوتروپیک به دست آمده، در جهت محوری است. برای تعیین ماتریس سفتی کل پوسته تقویت شده لازم است که ابتدا ساختار مشبک به یک ورق پیوسته معادل شود و سپس ماتریس سفتی آن تعیین گردد [۴]. برای استخراج ماتریس سفتی فرضیات زیر در نظر گرفته شده است [۴]:

- مدول عرضی تقویت کننده‌ها خیلی کمتر از مدول طولی و همچنین ابعاد سطح مقطع عرضی کوچک‌تر در مقایسه با ابعاد طولی تقویت کننده‌ها است.
- کرنش در سطح مقطع عرضی تقویت کننده‌ها یکسان می‌باشد. از این رو تنش در سطح مقطع عرضی تقویت کننده‌های محیطی و ماریچی یکسان است.
- بارها توسط نیروهای برشی بین پوسته و لایه تقویت کننده انتقال می‌یابد.

۳-۲- تحلیل نیرو در ساختار مشبک

کرنش سطح میانی و انحنای پوسته به ترتیب توسط متغیرهای $\epsilon_x^0, \epsilon_\theta^0, \epsilon_x^1, k_x, k_\theta, k_{x\theta}$ به دست می‌آیند. کرنش متناظر در سطح درونی پوسته (وجه مشترک تقویت کننده و پوسته) از شرایط کرنش سطح میانی و انحنای پوسته از معادله (۴) استخراج می‌گردد. وقتی تقویت کننده‌ها به پوسته می‌چسبند و یکپارچه می‌شوند به دلیل فرض دوم، کرنش در سطح مقطع تقویت کننده یکنواخت در نظر گرفته می‌شود. بنابراین کرنش در تقویت کننده‌ها از کرنش سطح روی پوسته به دست می‌آید [۴].



شکل ۱- پوسته استوانه‌ای کامپوزیتی و سیستم مختصات مرجع.

مؤلفه‌های کرنش و انحنای برای صفحه میانی پوسته‌ها در سیستم مختصات مماس- نرمال پوسته به صورت روابط (۱) است [۱۵].

$$\begin{aligned} \epsilon_x^0 &= \frac{\partial u}{\partial x} \\ \epsilon_\theta^0 &= \frac{1}{R} \frac{\partial v}{\partial \theta} + \frac{w}{R} \\ \gamma_{x\theta}^0 &= \frac{1}{R} \frac{\partial u}{\partial \theta} + \frac{\partial v}{\partial x} \\ k_x &= -\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \\ k_\theta &= \frac{1}{R^2} \left(\frac{\partial v}{\partial \theta} - \frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2} \right) \\ k_{x\theta} &= \frac{1}{R} \left(\frac{\partial v}{\partial x} - 2 \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial \theta} \right) \end{aligned} \quad (1)$$

رابطه برآیندهای نیرو و ممان با مؤلفه‌های کرنش و انحنای صفحه میانی به صورت معادله (۲) است [۱۵]:

$$\begin{Bmatrix} N_x \\ N_\theta \\ N_{x\theta} \\ M_x \\ M_\theta \\ M_{x\theta} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{16} & B_{11} & B_{12} & B_{16} \\ A_{21} & A_{22} & A_{26} & B_{21} & B_{22} & B_{26} \\ A_{61} & A_{62} & A_{66} & B_{61} & B_{62} & B_{66} \\ B_{11} & B_{12} & B_{16} & D_{11} & D_{12} & D_{16} \\ B_{21} & B_{22} & B_{26} & D_{21} & D_{22} & D_{26} \\ B_{61} & B_{62} & B_{66} & D_{61} & D_{62} & D_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \epsilon_x^0 \\ \epsilon_\theta^0 \\ \gamma_{x\theta}^0 \\ \kappa_x \\ \kappa_\theta \\ \kappa_{x\theta} \end{Bmatrix} \quad (2)$$

که در رابطه فوق ماتریس‌های A, B, D عبارت‌اند از [۱۵]:

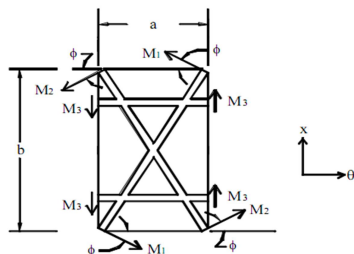
$$\begin{cases} A_{ij} = \sum_{k=1}^N (\bar{Q}_{ij})_k (t_k - t_{k-1}) \\ B_{ij} = \sum_{k=1}^N (\bar{Q}_{ij})_k (t_k^2 - t_{k-1}^2) \quad i, j = 1, 2, 6 \\ D_{ij} = \sum_{k=1}^N (\bar{Q}_{ij})_k (t_k^3 - t_{k-1}^3) \end{cases} \quad (3)$$

در این روابط t_k فاصله لایه k ام از صفحه میانی و N تعداد لایه‌هاست. همچنین ماتریس سفتی اصلاح شده تنش صفحه ای (توضیحات در صفحه ۱۱ مقاله) میباشد.

$$\begin{aligned}
 N_x &= \frac{AE_1}{a} \left(2c^3 \varepsilon_x^0 + 2c^3 k_x \left(\frac{t}{2} \right) + 2s^2 c \varepsilon_\theta^0 + 2s^2 c k_\theta \left(\frac{t}{2} \right) \right) \\
 N_\theta &= \frac{AE_1}{b} \left(2sc^2 \varepsilon_x^0 + 2sc^2 k_x \left(\frac{t}{2} \right) + (2s^3 + 2) \varepsilon_\theta^0 + (2s^3 + 2) k_\theta \left(\frac{t}{2} \right) \right) \quad (9) \\
 N_{x\theta} &= \frac{AE_1}{b} \left[2sc^2 \varepsilon_{x\theta}^0 + 2sc^2 k_{x\theta} \left(\frac{t}{2} \right) \right]
 \end{aligned}$$

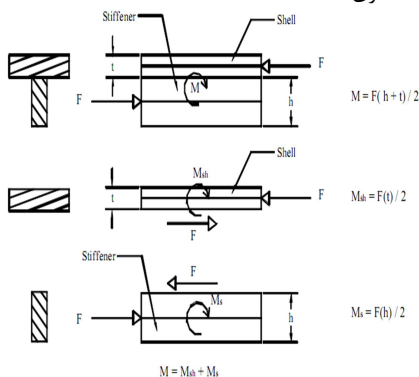
۳-۳- آنالیز گشتاور در ساختار مشبک

گشتاور توسط نیروی برشی بین وجه مشترک پوسته و تقویت کننده ایجاد می گردد. از اصل تعادل، این نیروهای برشی برابر با نیروهای تقویت کننده می باشد که در قسمت قبل محاسبه شدند. گشتاور ایجاد شده توسط این نیروها روی صفحه میانی مساوی حاصل ضرب نیروها در نصف ضخامت پوسته است. دیاگرام آزاد در شکل نشان دهنده گشتاورهای متفاوت ایجاد شده توسط نیروهای F است. هنگامی که گشتاورهای ایجاد شده به دلیل نیروهای برشی پوسته باشد فقط M_{sh} مورد توجه قرار می گیرد. در دیاگرام آزاد شکل ۵ گشتاور خالص M از میانگین گشتاور پوسته و تقویت کننده بر یکدیگر قابل مشاهده است [۴].

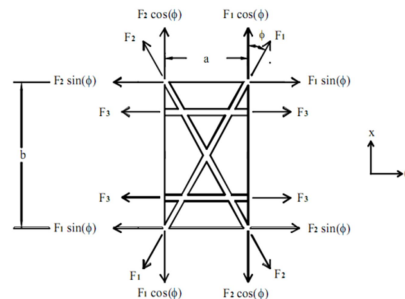


شکل ۴- دیاگرام آزاد گشتاور برای المان واحد [۴].

شکل ۴ نشان دهنده دیاگرام آزاد گشتاور بر روی المان واحد است. M_1, M_2, M_3 به ترتیب گشتاورهای حاصل از نیروهای F_1, F_2, F_3 هستند. مشابه حالت آنالیز نیرو بر روی المان واحد، گشتاور حاصل جهات عمودی و افقی المان واحد محاسبه می شوند. گشتاورهای M_1, M_2, M_3 توسط ضرب نیروهای برشی متناظر F_1, F_2, F_3 در بازوی سطح $\left(\frac{t}{2} \right)$ محاسبه شده اند. با جایگزینی گشتاورها و تقسیم بر طول لبه ها نتیجه ی نهایی همان مقدار گشتاورهاست. روابط (۱۲) و (۱۳) نشان دهنده نتیجه نهایی گشتاورها بعد از ساده سازی است [۴].



شکل ۵- توزیع گشتاور در صفحه مشبک و پوسته [۴].



شکل ۳- دیاگرام آزاد نیرو برای المان واحد [۴].

با توجه به اینکه کرنش در فاصله Z از صفحه میانی از رابطه $\varepsilon = \varepsilon^0 + kz$ به دست می آید خواهیم داشت [۴]:

$$\begin{aligned}
 \varepsilon_x &= \varepsilon_x^0 + k_x \left(\frac{t}{2} \right) \\
 \varepsilon_\theta &= \varepsilon_\theta^0 + k_\theta \left(\frac{t}{2} \right) \\
 \varepsilon_{x\theta} &= \varepsilon_{x\theta}^0 + k_{x\theta} \left(\frac{t}{2} \right)
 \end{aligned} \quad (4)$$

t ضخامت پوسته است.

با توجه به شکل ۳ نیروهای محوری متناظر به نامهای F_1, F_2, F_3 از کرنش های طولی تقویت کننده ها محاسبه می شوند. نیروهای در واحد طول $N_x, N_\theta, N_{x\theta}$ توسط تقسیم عبارات نیروی بالا به پهنای لبه متناظر المان واحد حاصل می شوند. $\varepsilon_{1t}, \varepsilon_{1l}, \varepsilon_{1r}$ به ترتیب کرنش برشی متناظر، کرنش عمود بر جهت تقویت کننده و کرنش در راستای آن می باشند. در معادله ماتریسی زیر $C = \cos(\phi)$ و $S = \sin(\phi)$ در نظر گرفته شده است [۴].

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_{1l} \\ \varepsilon_{1t} \\ \varepsilon_{1r} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} c^2 & s^2 & sc \\ s^2 & c^2 & -sc \\ -2sc & 2sc & c^2 - s^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_\theta \\ \varepsilon_{x\theta} \end{Bmatrix} \quad (5)$$

بر طبق فرضیات صورت گرفته [۴] اثرات کرنش عمودی ε_{1l} و کرنش برشی ε_{1t} ناچیز هستند. کرنش طولی ε_{1r} از معادله (۵) به صورت رابطه (۶) استخراج می گردد [۴]:

$$\varepsilon_{1r} = c^2 \varepsilon_x + s^2 \varepsilon_\theta + sc \varepsilon_{x\theta} \quad (6)$$

وقتی کرنش های محوری در تقویت کننده ها به وجود می آیند، نیروهای محوری متناظر به نامهای F_1, F_2, F_3 از کرنش های طولی محاسبه می شوند. معادله های (۷) نشان دهنده سه نیروی حاصل است [۴].

$$\begin{aligned}
 F_1 &= AE_1 \varepsilon_{1l}^1 = AE_1 (c^2 \varepsilon_x + s^2 \varepsilon_\theta - sc \varepsilon_{x\theta}) \\
 F_2 &= AE_1 \varepsilon_{1l}^2 = AE_1 (c^2 \varepsilon_x + s^2 \varepsilon_\theta + sc \varepsilon_{x\theta}) \\
 F_3 &= AE_1 \varepsilon_{1l}^3 = AE_1 (\varepsilon_\theta)
 \end{aligned} \quad (7)$$

از جمع کردن نیروها در جهت x, θ معادله (۸) حاصل می گردد:

$$\begin{aligned}
 F_x &= F_1 \cos(\phi) + F_2 \cos(\phi) = AE_1 (2c^3 \varepsilon_x + 2s^2 c \varepsilon_\theta) \\
 F_\theta &= F_1 \sin(\phi) + F_2 \sin(\phi) + 2F_3 = AE_1 (2sc^2 \varepsilon_x + (2s^3 + 2) \varepsilon_\theta) \\
 F_{x\theta} &= F_1 \cos(\phi) - F_2 \cos(\phi) = AE_1 (2sc^2 \varepsilon_{x\theta})
 \end{aligned} \quad (8)$$

نیروهای در واحد طول $N_x, N_\theta, N_{x\theta}$ توسط تقسیم عبارات نیروی بالا به طول لبه ی متناظر المان واحد به دست می آیند.

برای حالتی که پوسته استوانه‌ای تنها تحت فشار هیدرو استاتیک قرار داشته باشد، $P_x = P_\theta = 0$ همچنین P_n به صورت معادله (۱۷) تعریف می‌گردد [۱۷]:

$$P_n = \frac{P}{R} \left\{ \frac{\partial v}{\partial \theta} - \frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2} \right\} \quad (16)$$

در معادله بالا P فشار هیدرو استاتیک است.

با جایگذاری معادلات (۲) و (۱۷) در معادله (۱۶) رابطه زیر استخراج می‌گردد [۱۸]:

$$\begin{aligned} L_{11}u + L_{12}v + L_{13}w &= 0 \\ L_{21}u + L_{22}v + L_{23}w &= 0 \\ L_{31}u + L_{32}v + L_{33}w &= 0 \end{aligned} \quad (17)$$

که L_{ij} ها عملگرهایی هستند که به صورت زیر تعریف می‌شوند [۱۶]:

$$\begin{aligned} L_{11} &= A_{11} \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{2A_{16}}{R} \frac{\partial^2}{\partial x \partial \theta} + \frac{A_{66}}{R^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} \\ L_{12} = L_{21} &= \left\{ A_{16} + \frac{B_{16}}{R} \right\} \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \left\{ \frac{(A_{12} + A_{66})}{R} + \frac{(B_{12} + B_{66})}{R^2} \right\} \frac{\partial^2}{\partial x \partial \theta} + \left\{ \frac{A_{26}}{R^2} + \frac{B_{26}}{R^3} \right\} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} \\ L_{22} &= \left\{ A_{66} + 2 \frac{B_{66}}{R} \right\} \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \left\{ 2 \frac{A_{26}}{R} + 4 \frac{B_{26}}{R^2} \right\} \frac{\partial^2}{\partial x \partial \theta} + \left\{ \frac{A_{22}}{R^2} + 2 \frac{B_{22}}{R^3} \right\} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} \\ L_{13} = L_{31} &= -B_{11} \frac{\partial^3}{\partial x^3} - 3 \frac{B_{16}}{R} \frac{\partial^3}{\partial x^2 \partial \theta} - \frac{B_{12} + 2B_{33}}{R^2} \frac{\partial^3}{\partial x \partial \theta^2} - \frac{B_{26}}{R^3} \frac{\partial^3}{\partial \theta^3} + \frac{A_{12}}{R} \frac{\partial}{\partial x} + \frac{A_{26}}{R^2} \frac{\partial}{\partial \theta} \\ L_{23} = L_{32} &= - \left\{ B_{16} + \frac{D_{16}}{R} \right\} \frac{\partial^3}{\partial x^3} - \left\{ \frac{B_{12} + 2B_{66}}{R} + \frac{D_{12} + 2D_{66}}{R^2} \right\} \frac{\partial^3}{\partial x^2 \partial \theta} - 3 \left\{ \frac{B_{26}}{R^2} + \frac{D_{26}}{R^3} \right\} \frac{\partial^3}{\partial x \partial \theta^2} - \left\{ \frac{B_{22}}{R^3} + \frac{D_{22}}{R^4} \right\} \frac{\partial^3}{\partial \theta^3} + \left\{ \frac{A_{26}}{R} + \frac{B_{26}}{R^2} \right\} \frac{\partial}{\partial x} + \left\{ \frac{A_{22}}{R^2} + \frac{B_{22}}{R^3} + \frac{P}{R} \right\} \frac{\partial}{\partial \theta} \\ L_{33} &= \left\{ D_{11} \frac{\partial^4}{\partial x^4} + 4 \frac{D_{16}}{R} \frac{\partial^4}{\partial x^3 \partial \theta} + 2 \frac{D_{12} + 2D_{66}}{R^2} \frac{\partial^4}{\partial x^2 \partial \theta^2} + \left[4 \frac{D_{26}}{R^3} \frac{\partial^4}{\partial x \partial \theta^3} + \frac{D_{22}}{R^4} \frac{\partial^4}{\partial \theta^4} \right] - \left\{ 2 \frac{B_{12}}{R} \frac{\partial^2}{\partial x^2} + 4 \frac{A_{26}}{R^2} \frac{\partial^2}{\partial x \partial \theta} + \left(2 \frac{B_{22}}{R^3} + \frac{P}{R} \right) \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} \right\} + \frac{A_{22}}{R^2} \right\} \end{aligned} \quad (18)$$

۲-۴- شرایط مرزی

توابع u و v باید به نحوی تعیین گردند که شرایط مرزی موردنظر را ارضاء نمایند.

فرم کلی این توابع به صورت روابط (۲۰) است [۱۸]:

$$\begin{aligned} u &= U f_{11}(x, \theta) \\ v &= V f_{21}(x, \theta) \\ w &= W f_{31}(x, \theta) \end{aligned} \quad (19)$$

فرم کلی توابع f_{11} ، f_{21} و f_{31} که به صورت رابطه (۲۱) است [۱۸]:

$$\begin{aligned} f_{11}(x, \theta) &= \frac{\partial \Phi_x}{\partial \theta} \cos(n\theta) \\ f_{21}(x, \theta) &= \Phi(x) \sin(n\theta) \\ f_{31}(x, \theta) &= \Phi(x) \cos(n\theta) \end{aligned} \quad (20)$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow M_1 &= \frac{AE_1 t}{2} \left(c^2 \varepsilon_x^\circ + c^2 k_x \left(\frac{t}{2} \right) + s^2 \varepsilon_\theta^\circ + s^2 k_\theta \left(\frac{t}{2} \right) - sc \varepsilon_{x\theta}^\circ - sc k_{x\theta} \left(\frac{t}{2} \right) \right) \\ \Rightarrow M_2 &= \frac{AE_1 t}{2} \left(c^2 \varepsilon_x^\circ + c^2 k_x \left(\frac{t}{2} \right) + s^2 \varepsilon_\theta^\circ + s^2 k_\theta \left(\frac{t}{2} \right) - sc \varepsilon_{x\theta}^\circ - sc k_{x\theta} \left(\frac{t}{2} \right) \right) \\ \Rightarrow M_3 &= \frac{AE_1 t}{2} \left(\varepsilon_\theta^\circ + k_\theta \left(\frac{t}{2} \right) \right) \end{aligned} \quad (10)$$

$$\begin{cases} M_x = M_1 \cos(\varphi) + M_2 \cos(\varphi) \\ M_\theta = M_1 \sin(\varphi) + M_2 \sin(\varphi) + 2M_3 \\ M_{x\theta} = M_2 \cos(\varphi) - M_1 \sin(\varphi) \end{cases} \quad (11)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} M_x = \frac{AE_1 t}{2a} \left[2c^3 \varepsilon_x^\circ + 2c^3 k_x \left(\frac{t}{2} \right) + 2s^2 c \varepsilon_\theta^\circ + 2s^2 c k_\theta \left(\frac{t}{2} \right) \right] \\ M_\theta = \frac{AE_1 t}{2b} \left[2sc^2 \varepsilon_x^\circ + 2sc^2 k_x \left(\frac{t}{2} \right) + (2s^3 + 2) \varepsilon_\theta^\circ + (2s^3 + 2) k_\theta \left(\frac{t}{2} \right) \right] \\ M_{x\theta} = \frac{AE_1 t}{2b} \left[2sc^2 \varepsilon_{x\theta}^\circ + 2sc^2 k_{x\theta} \left(\frac{t}{2} \right) \right] \end{cases} \quad (12)$$

۳-۴- سفتی معادل ساختار پوسته مشبک

با استخراج پارامترهای سفتی برای یک المان می‌توان با تعمیم آن به کل سازه ماتریس‌های سفتی را به دست آورد. سفتی کل سازه ساندویچی تقویت‌شده از برهم‌نهی سفتی معادل پوسته مشبک به همراه سفتی پوسته بالایی و پوسته پایینی به دست می‌آید.

برای نوشتن معادلات بر اساس میدان جایجایی از روابط تنش و کرنش که به صورت ماتریس کلی رابطه (۱۴) است استفاده می‌شود [۴].

$$\begin{Bmatrix} N_x \\ N_\theta \\ N_{x\theta} \\ M_x \\ M_\theta \\ M_{x\theta} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} [A] & [B] \\ [B] & [D] \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_x^\circ \\ \varepsilon_\theta^\circ \\ \gamma_{x\theta}^\circ \\ k_x \\ k_\theta \\ k_{x\theta} \end{Bmatrix} \quad (13)$$

نیرو و گشتاور کل سازه از جمع ماتریسی نیرو و گشتاور حاصل از سازه مشبک و پوسته بیرونی و درونی به دست می‌آید:

در رابطه (۱۵) بالانویس S مربوط به شبکه تقویت‌کننده‌ها و بالانویس sh مربوط به پوسته است. به این ترتیب ماتریس سفتی معادل کل سازه از حاصل جمع ماتریس سفتی پوسته بیرونی و درونی با ماتریس سفتی تقویت‌کننده‌ها به دست می‌آید:

$$\begin{Bmatrix} N \\ M \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} A^{sh} + A^s + A^{sh} & B^{sh} + B^s + B^{sh} \\ B^{sh} + B^s + B^{sh} & D^{sh} + D^s + D^{sh} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon^\circ \\ k \end{Bmatrix} \quad (14)$$

۴- حل تحلیلی

۱-۴- معادلات تعادل

بر اساس نظریه کلاسیک پوسته‌ها، معادلات تعادل برای پوسته‌ها به صورت معادله (۱۶) می‌باشد [۱۶]:

$$\begin{aligned} \frac{\partial N_x}{\partial x} + \frac{1}{R} \frac{\partial N_{x\theta}}{\partial \theta} + P_x &= 0 \\ \frac{1}{R} \frac{\partial N_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial N_{x\theta}}{\partial x} + \frac{1}{R} \left[\frac{\partial M_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial M_{x\theta}}{\partial x} \right] + P_\theta &= 0 \\ \frac{\partial^2 M_x}{\partial x^2} + \frac{2}{R} \frac{\partial^2 M_{x\theta}}{\partial x \partial \theta} + \frac{1}{R^2} \frac{\partial^2 M_\theta}{\partial \theta^2} - \frac{N_\theta}{R} + P_n &= 0 \end{aligned} \quad (15)$$

$$\int_0^{2\pi L} \int_0^0 (L_{11}u + L_{12}v + L_{13}w) \frac{\partial \Phi}{\partial x} dx d\theta = 0$$

$$\int_0^{2\pi L} \int_0^0 (L_{21}u + L_{22}v + L_{23}w) \Phi dx d\theta = 0 \quad (28)$$

$$\int_0^{2\pi L} \int_0^0 (L_{31}u + L_{32}v + L_{33}w) \Phi dx d\theta = 0$$

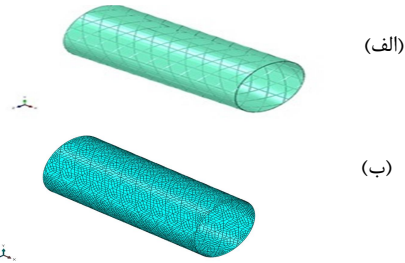
با محاسبه انتگرال‌های فوق، دستگاه معادلات (۳۰) حاصل می‌شود:

$$\begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} \\ C_{21} & C_{22} & C_{23} \\ C_{31} & C_{32} & C_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U \\ V \\ W \end{bmatrix} = 0 \quad (29)$$

با قرار دادن $\det(C) = 0$ معادله مشخصه سیستم به دست می‌آید که با حل آن می‌توان بار بحرانی کمانش را به دست آورد.

۵- مدل‌سازی عددی اجزای محدود

در شکل ۶ مدل المان محدود پوسته استوانه‌ای کامپوزیتی نشان داده شده است:



شکل ۶- (الف) پوسته استوانه‌ای به همراه تقویتی‌های محیطی و مارپیچی (ب) ساختار مش بندی شده

برای حل مسائل در نرم‌افزار المان محدود ABAQUS دو روش ضمنی^۲ و صریح^۳ ارائه شده است. در این تحقیق برای حل از روش صریح استفاده شده است به دلیل اینکه در مسائل کمانش و هر مسئله دینامیکی که تغییر شکل سازه در آن منجر به تغییرات بنیادی در استحکام ماده می‌شود استفاده از این روش مناسب‌تر است. مدل اجزای محدود تهیه شده با استفاده از المان تیر تیموشینکو و المان پوسته مدل‌سازی گردیده بنابراین این مدل توانایی تحلیل استاتیکی و دینامیکی با تغییر ضخامت و پهنای تقویت‌کننده و یا نسبتی از این پارامترها را دارا است. مدل اجزای محدود از سه بخش پوسته، تقویتی طولی و تقویتی محیطی تشکیل شده است. برای پوسته استوانه‌ای کامپوزیتی ترسیم شده، چهار لایه با زوایای الیاف متغیر و با ضخامت کلی دو میلی‌متر در نظر گرفته می‌شود از طرفی اگر ضخامت بیش از این باشد تقویت‌کننده‌ها دچار کمانش موضعی می‌شوند و باعث اختلاف نتایج روش تحلیلی با المان محدود می‌گردد. به علت نازکی پوسته، پوسته و مدل از نوع المان پوسته چهار گره ای^۴ است و سفتی سازه نیز در حین فرایند حل انتخاب شده و به روش سیمپسون انتگرال‌گیری

که $\Phi(x)$ تابع تیری مودال^۱ است که به صورت معادله (۲۲) تعریف می‌شود [۱۸]:

$$\Phi(x) = \alpha_1 \cosh\left(\frac{\lambda_m x}{L}\right) + \alpha_2 \cos\left(\frac{\lambda_m x}{L}\right) - \sigma_m \left\{ \alpha_3 \sinh\left(\frac{\lambda_m x}{L}\right) - \alpha_4 \sin\left(\frac{\lambda_m x}{L}\right) \right\} \quad (21)$$

در روابط فوق m و n به ترتیب تعداد نیم موج‌های طولی و تعداد موج‌های محیطی ایجاد شده در شکل مود کمانش پوسته استوانه‌ای می‌باشند. ضرایب ثابت $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$ و متغیرهای λ_m و σ_m با توجه به شرایط مرزی دو انتهای استوانه تعیین می‌شوند.

الف- استوانه مشبک با شرط مرزی دو سر تکیه‌گاه ساده
برای شرط مرزی دو سر تکیه‌گاه ساده داریم [۱۸]:

$$\lambda_m = m\pi \quad (22)$$

$$\sigma_m = 1$$

همچنین ضرایب ثابت $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$ به صورت روابط (۲۴) تعیین می‌شوند:

$$x = 0, x = L$$

$$N_x = M_x = v = w = 0 \quad (23)$$

$$a_1 = a_2 = a_3 = 0, a_4 = 1$$

به این ترتیب تابع تیری مودال به صورت معادله (۲۵) خواهد بود:

$$\Phi(x) = \sin\left(\frac{m\pi x}{L}\right) \quad (24)$$

ب- استوانه مشبک با شرط مرزی دو سر تکیه‌گاه گیردار

برای شرط مرزی دو سر تکیه‌گاه گیردار ضرایب λ_m از حل معادله (۲۶) به دست می‌آیند [۱۸]:

$$\cos \lambda_m \cosh \lambda_m = 1 \quad (25)$$

$$\sigma_m = \frac{\cosh \lambda_m - \cos \lambda_m}{\sin \lambda_m - \sinh \lambda_m} \quad (26)$$

همچنین ضرایب ثابت $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$ به صورت رابطه (۲۸) تعیین می‌شوند:

$$x = 0, x = L$$

$$u = v = w = \frac{\partial w}{\partial x} = 0 \quad (27)$$

$$a_1 = 1, a_2 = -1, a_3 = 1, a_4 = 1$$

۴-۳ روش حل گالرکین

برای حل معادلات حاکم از روش گالرکین استفاده شده است. ضمناً استخراج بار بحرانی کمانش برای ساختار هندسی مشبک استوانه‌ای با پوسته بیرونی و درونی تحت فشار خارجی جنبه نوآوری این مطالعه است که به این روش به صورت زیر ارائه می‌گردد. پس از تعیین توابع u, v و w برای حل معادلات تعادل، از روش گالرکین استفاده می‌شود [۱۸]:

² Implicit

³ Explicit

⁴ S4R

¹ Modal beam function

جدول ۳- نتایج بار بحرانی (pa) کمانش حاصل از روش تحلیلی و المان محدود برای استوانه‌ای کامپوزیتی مشبک با پوسته بیرونی و درونی دوسرگیردار و زاویه الیاف پوسته [0/90/90/0]

شماره مد	(m,n)	المان محدود (pa)	روش تحلیلی (pa)	اختلاف %
۱	(۱و۳)	۱,۷۷*۱۰ ^۶	۱,۸۳*۱۰ ^۶	۳
۵	(۲و۴)	۲,۷۷*۱۰ ^۶	۲,۴۴*۱۰ ^۶	۱۲

جدول ۴- نتایج بار بحرانی (pa) کمانش حاصل از روش تحلیلی و المان محدود برای استوانه‌ای کامپوزیتی مشبک با پوسته بیرونی و درونی دوسرگیردار و زاویه الیاف پوسته [90/90/90/90]

شماره مد	(m,n)	المان محدود (pa)	روش تحلیلی (pa)	اختلاف %
۱	(۱و۴)	۷,۹۵*۱۰ ^۵	۵,۱۶*۱۰ ^۵	۳۵
۵	(۱و۵)	۹,۴۸*۱۰ ^۵	۷,۳*۱۰ ^۵	۲۲

۷- نتایج و بحث

در این بخش بار بحرانی کمانش استوانه‌ای کامپوزیتی مشبک با پوسته بیرونی و درونی برای دو شرط مرزی ساده و گیردار با تغییر پارامترهای هندسی محاسبه شده است. مشخصات فیزیکی و هندسی پوسته در جدول ۱ آورده شده است. پارامترهای مؤثر روی بار بحرانی کمانش عبارت‌اند از: زاویه ریب‌ها، سطح مقطع ریب‌ها، طول سلول واحد که در ادامه به بررسی و مقایسه آن‌ها و میزان اثرگذاری آن‌ها بر بار بحرانی کمانش پرداخته می‌شود.

۷-۱- اثر زاویه ریب‌ها

اثر زاویه ریب‌ها (ϕ) بر روی بار بحرانی کمانش پوسته استوانه‌ای کامپوزیتی مشبک به شرح زیر مورد مطالعه قرار گرفته است. مشخصات شبکه تقویت‌کننده‌ها نیز به شرح زیر است:

$$a = 0.2 \quad \phi = \text{variable} \quad b = \frac{a}{\tan \phi}$$

$$E_1 = 138 \text{ Gpa} \quad A = 30 \text{ mm}^2$$

در شکل‌های ۷ و ۸ تغییرات بار بحرانی کمانش با زاویه ریب‌ها برای ساختار مشبک با پوسته بیرونی و درونی با شرط مرزی دو سر تکیه‌گاه ساده و دوسرگیردار برای شکل مودهای نظیر $m = 1$ و n های مختلف آورده شده است.

همان‌طور که مشاهده می‌شود در تمامی شکل مودها برای هر دو شرط مرزی موردنظر، حداکثر مقدار بار بحرانی کمانش به ازای $\phi = 40^\circ$ رخ می‌دهد. همچنین نکته دیگری که در این نمودار حائز اهمیت است محل تلاقی خطوط نمودار با یکدیگر است که نشان‌دهنده تغییر در توالی شکل مودهاست. بررسی نتایج نشان می‌دهد که برای تقویت پوسته، به تعداد حداقلی از تقویت‌کننده نیاز است که افزایش زاویه تا قبل از رسیدن به مود کمانش موضعی تقویت‌کننده‌ها باعث افزایش سختی معادل و بار بحرانی کمانش می‌شود و افزایش بیشتر زاویه، باعث

شده است. برای تقویت‌کننده‌ها یک دستگاه مختصات محلی به‌گونه‌ای تعریف شده که محور اصلی آن در امتداد مارپیچ تقویت‌کننده‌ها باشد و با چرخش تقویت‌کننده‌ها، محور دستگاه مختصات نیز دوران نماید. المان تقویت‌کننده‌ها از نوع المان تیر مرتبه اول سه‌بعدی^۱ استفاده شده است. فشار یکنواخت خارجی معادل یک مگا پاسکال برای سازه در نظر گرفته و شرایط مرزی را برای بهترین حالت که تکیه‌گاه گیردار است انتخاب می‌شود. تحلیل خطی برای کمانش استوانه مشبک کامپوزیتی با پوسته درونی و بیرونی در نظر گرفته شده است. در ضمن تابه‌حال مطالعه‌ای در خصوص کمانش استوانه مشبک کامپوزیتی با پوسته درونی و بیرونی تحت فشار خارجی با توجه بررسی‌های مراجع مختلف انجام نشده است.

۶- راستی آزمایی

مشخصات مکانیکی و هندسی پوسته استوانه‌ای با چهار لایه و زوایای مختلف به شرح جدول ۱ است [۱۹]. همانطور که در جداول ۲ و ۳ مشاهده می‌شود نتایج بدست آمده از روش تحلیلی در مقایسه با روش المان محدود و با نرم افزار ABAQUS دارای دقت قابل قبولی می‌باشد.

جدول ۱- مشخصات پوسته استوانه‌ای کامپوزیتی با چهار لایه (ضخامت هر لایه 0.5mm - ضخامت استوانه t=2mm - شعاع استوانه (R=0.2m - طول استوانه L=1m)

E1 (GPa)	E2 (GPa)	ν_{12}	G12 (GPa)	G23 (GPa)	زوایای الیاف در لایه ۴
۱۳۸	۹	0.3	6.9	5	[۰, ۹۰, ۹۰, ۰]
۱۳۸	۹	0.3	6.9	5	[۹۰, ۹۰, ۹۰, ۹۰]
۱۳۸	۹	0.3	6.9	5	[۰, ۰, ۰, ۰]

مشخصات ساختار مشبک نیز به شرح زیر است:

$$b = (R) \left(\frac{\pi}{4} \right) = 0.15708 \text{ m}$$

$$a = 0.1 \text{ m}$$

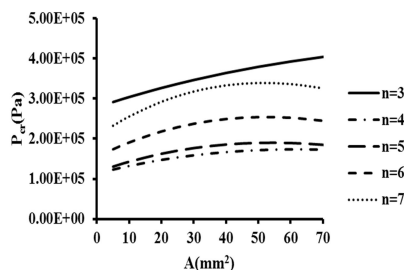
$$\phi = \tan^{-1} \frac{a}{b} = 32.48$$

جدول ۲- نتایج بار بحرانی (pa) کمانش حاصل از روش تحلیلی و المان محدود برای استوانه‌ای کامپوزیتی مشبک با پوسته بیرونی و درونی دوسرگیردار و زاویه الیاف پوسته [0/0/0/0]

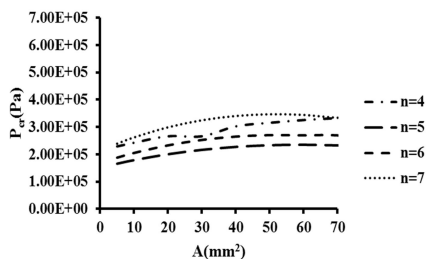
شماره مد	(m,n)	المان محدود (pa)	روش تحلیلی (pa)	اختلاف %
۸	(۲و۴)	۹,۷۵*۱۰ ^۵	۸,۱۰*۱۰ ^۵	۱۶

¹ B31

افزایش وزن سازه کمتر است و در نتیجه بار بحرانی ویژه سازه با کاهش مواجه می‌شود.



شکل ۹- تغییرات بار بحرانی کمانش با سطح مقطع تقویت‌کننده‌ها (A) برای استوانه مشبک با پوسته بیرونی و درونی با شرط مرزی دو سر تکیه‌گاه ساده برای شکل مودهای نظیر $m = 1$



شکل ۱۰- تغییرات بار بحرانی کمانش با سطح مقطع تقویت‌کننده‌ها (A) برای استوانه مشبک با پوسته بیرونی و درونی با شرط مرزی دو سر تکیه‌گاه گیردار برای شکل مودهای نظیر $m = 1$

۳-۷- اثر اندازه طول سلول مشبک (a)

در این بخش اثر اندازه طول سلول مشبک (a) بر روی بار بحرانی کمانش استوانه‌های کامپوزیتی مشبک با پوسته بیرونی و درونی مورد بررسی قرار گرفته است. مشخصات شبکه تقویت‌کننده‌ها نیز به شرح زیر آورده شده است:

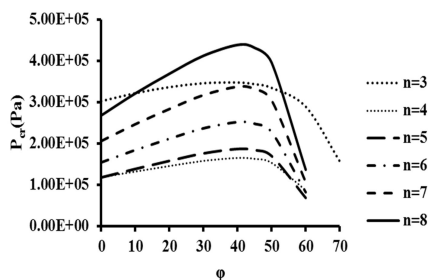
$$a = \text{variable} \quad \phi = 30 \quad b = \frac{a}{\tan \phi}$$

$$E_l = 138 \text{ Gpa} \quad A = 30 \text{ mm}^2$$

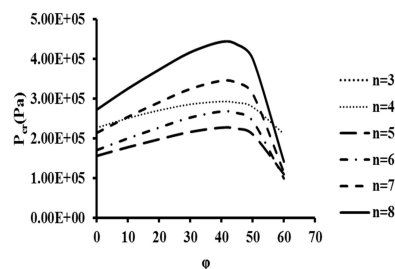
تغییرات بار بحرانی کمانش با اندازه طول سلول مشبک برای ساختار مشبک با پوسته بیرونی و درونی با شرط مرزی دو سر تکیه‌گاه ساده و گیردار برای شکل مودهایی نظیر $m = 1$ در شکل‌های ۱۱ و ۱۲ آورده شده است.

از نتایج بدست آمده، مشاهده می‌شود که در تمامی شکل مودها برای هر دو شرط مرزی موردنظر، با افزایش پارامتر اندازه طول سلول (a) بار بحرانی کمانش ابتدا افزایش یافته و سپس رو به کاهش می‌گذارد. در واقع می‌توان یک مقدار مطلوب برای a تعیین نمود که به ازای آن فشار بحرانی کمانش به ماکزیمم مقدار خود می‌رسد. همچنین تغییرات پارامتر a نیز می‌تواند موجب تغییر در توالی شکل مودها گردد که

کمانش موضعی تقویت‌کننده‌ها و در نتیجه کاهش بار بحرانی و کمانش سازه می‌گردد؛ که همین امر باعث تغییر در توالی مدها است.



شکل ۷- تغییرات بار بحرانی کمانش با زاویه تقویت‌کننده‌ها (ϕ) برای استوانه مشبک با پوسته بیرونی و درونی با شرط مرزی دو سر تکیه‌گاه ساده برای شکل مودهای نظیر $m = 1$



شکل ۸- تغییرات بار بحرانی کمانش با زاویه تقویت‌کننده‌ها (ϕ) برای استوانه مشبک با پوسته بیرونی و درونی با شرط مرزی دو سر تکیه‌گاه گیردار برای شکل مودهای نظیر $m = 1$

۲-۷- سطح مقطع تقویت‌کننده‌ها

اثر سطح مقطع ریب‌ها (A) بر روی بار بحرانی کمانش استوانه‌های کامپوزیتی مشبک با پوسته بیرونی و درونی قابل توجه بوده و به شرح زیر مورد بررسی قرار گرفته است. اگر مشخصات شبکه تقویت‌کننده‌ها نیز به شرح زیر باشد:

$$a = 0.2 \quad \phi = 30 \quad b = \frac{a}{\tan \phi}$$

$$E_l = 138 \text{ Gpa} \quad A = \text{variable}$$

در شکل‌های ۹ و ۱۰ تغییرات بار بحرانی کمانش با سطح مقطع ریب‌ها برای ساختار مشبک با پوسته بیرونی و درونی با شرط مرزی دو سر تکیه‌گاه ساده و گیردار برای شکل مودهای نظیر $m = 1$ و n های مختلف آورده شده است. در تمامی شکل مودها برای هر دو شرط مرزی موردنظر، یک مقدار مطلوب برای پارامتر A وجود دارد که به ازای آن فشار بحرانی کمانش به بیشینه مقدار خود می‌رسد. همچنین تغییرات پارامتر A نیز می‌تواند موجب تغییر در توالی شکل مودها گردد که محل تلاقی منحنی‌ها در هر نمودار نشان‌دهنده این مسئله است. افزایش سطح مقطع تقویت‌کننده‌ها به ازای ضخامت یکسان پوسته، مود کمانش سازه را به سمت کمانش پوسته سوق می‌دهد. در محدوده کمانش کلی سازه و کمانش موضعی تقویت‌کننده‌ها، با افزایش سطح مقطع تقویت‌کننده‌ها بار بحرانی افزایش می‌یابد اما اثر آن از اثر

معادل و بار بحرانی کمانش می شود که با افزایش بیشتر زاویه باعث کمانش موضعی تقویت کننده ها و در نتیجه کاهش بار بحرانی و کمانش سازه می گردد.

- با افزایش سطح مقطع تقویت کننده ها (A) بار بحرانی کمانش در تمامی مودها ابتدا افزایش یافته و سپس با افزایش بیشتر کاهش می یابد. افزایش سطح مقطع تقویت کننده ها به ازای ضخامت یکسان پوسته مود کمانش سازه را به سمت کمانش پوسته سوق می دهد. در محدوده کمانش کلی سازه و کمانش موضعی تقویت کننده ها، با افزایش سطح مقطع تقویت کننده ها بار بحرانی افزایش می یابد اما اثر آن از اثر افزایش وزن سازه کمتر است و در نتیجه بار بحرانی ویژه سازه با کاهش مواجه می شود.

- با افزایش پارامتر طول سلول مشبک (a) بار بحرانی کمانش در تمامی مودها در نمودارها ابتدا افزایش یافته و سپس با افزایش بیشتر کاهش می یابد. در واقع می توان یک مقدار مطلوب برای (a) تعیین نمود که به ازای آن فشار بحرانی کمانش به بیشینه مقدار خود می رسد. بررسی نتایج نشان می دهد که برای تقویت پوسته، به تعداد حداقلی از تقویت کننده نیاز است و افزایش طول سلول مشبک تا قبل از رسیدن به مود کمانش موضعی تقویت کننده ها باعث افزایش سفتی معادل و بار بحرانی کمانش می شود که افزایش بیشتر فاصله باعث کمانش موضعی تقویت کننده ها و در نتیجه کاهش بار بحرانی و کمانش سازه می گردد.

۹- پیشنهادها

برخی پیشنهادها جهت ادامه و تکمیل کار انجام شده عبارتند از:

- تحلیل فرکانسی ساختار به روش گالرکین
- استفاده از روشهای تحلیلی دیگر جهت حل
- اثر دما بر بار بحرانی کمانش و فرکانس طبیعی

توضیحات مربوط به ماتریس سفتی انتقال یافته

رابطه (*) ماتریس سفتی اصلاح شده تنش صفحه ای^۱ برای یک لایمیت است.

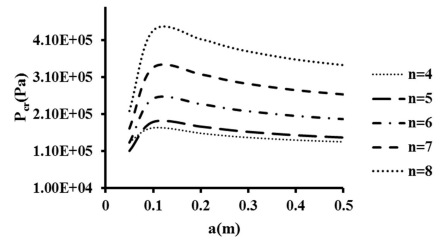
$$Q_{ij} = \begin{bmatrix} Q_{11} & Q_{12} & 0 \\ Q_{12} & Q_{22} & 0 \\ 0 & 0 & Q_{66} \end{bmatrix} \quad (*)$$

$$Q_{11} = \frac{E_{11}^2}{E_{11} - \nu_{12}^2 E_{22}}, \quad Q_{12} = \frac{\nu_{12} E_{11} E_{22}}{E_{11} - \nu_{12}^2 E_{22}}$$

$$Q_{22} = \frac{E_{11} E_{22}}{E_{11} - \nu_{12}^2 E_{22}}, \quad Q_{66} = G_{12}$$

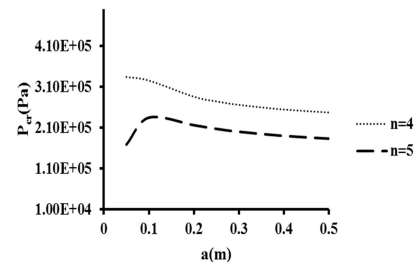
^۱ Plane stress-reduced stiffness

محل تلاقی منحنی ها در هر نمودار نشان دهنده این مسئله است. بررسی نتایج نشان می دهد که برای تقویت پوسته، به تعداد حداقلی از تقویت کننده نیاز است و افزایش اندازه طول سلول تا قبل از رسیدن به مود کمانش موضعی تقویت کننده ها باعث افزایش سفتی معادل و بار بحرانی کمانش می شود که افزایش بیشتر فاصله باعث کمانش موضعی تقویت کننده ها و در نتیجه کاهش بار بحرانی و کمانش سازه می گردد. همین امر باعث تغییر در توالی مدها است.



شکل ۱۱- تغییرات بار بحرانی کمانش با طول سلول مشبک (a) برای استوانه مشبک با پوسته بیرونی و درونی با شرط مرزی دو سر تکیه-

گاه ساده برای شکل مودهای نظیر $m = 1$



شکل ۱۲- تغییرات بار بحرانی کمانش با طول سلول مشبک (a) برای استوانه مشبک با پوسته بیرونی و درونی با شرط مرزی دو سر تکیه-

گاه گیردار برای شکل مودهای نظیر $m = 1$

۸- نتیجه گیری

در این مقاله کمانش استوانه مشبک با پوسته بیرونی و درونی تحت فشار خارجی و شرایط مرزی تکیه گاهی ساده و گیردار به روش گالرکین و شبیه سازی عددی اجزای محدود بررسی گردید. خلاصه ای از نتایج به شرح ذیل است:

- کم بودن اختلاف نتایج روش تحلیلی و عددی نشان می دهد که روش تحلیلی از دقت قابل قبولی برخوردار است.
- با افزایش زاویه تقویت کننده ها مقدار بار بحرانی کمانش در تمامی مودها در نمودارها ابتدا افزایش یافته و سپس با افزایش بیشتر کاهش می یابد و با بررسی آن مشخص می شود که برای تقویت پوسته، به تعداد حداقلی از تقویت کننده نیاز است و افزایش زاویه تا قبل از رسیدن به مود کمانش موضعی تقویت کننده ها باعث افزایش سفتی

- [17] Lopatin A. V and Morozov E. V, Buckling of the composite sandwich cylindrical shell with clamped ends under uniform external pressure, *Compos. Struct.*, Vol. 122, pp. 209–216, 2015.
 [18] Lam K. Y. and Loy C. T., Influence of boundary conditions for a thin laminated rotating cylindrical shell, *Compos. Struct.*, Vol. 41, No. 3–4, pp. 215–228, 1998.
 [19] www.performance-composite.com.

$$\begin{aligned} \bar{Q}_{11} &= Q_{41} \cos(\theta)^4 + 2(Q_{12} + 2Q_{66}) \cos(\theta)^2 \sin(\theta)^2 + Q_{22} \sin(\theta)^4 \\ \bar{Q}_{12} = \bar{Q}_{21} &= Q_{22} (\cos(\theta)^4 + \sin(\theta)^4) + (Q_{11} + Q_{22} - 4Q_{66}) \cos(\theta)^2 \sin(\theta)^2 \\ \bar{Q}_{16} = \bar{Q}_{61} &= (Q_{41} - Q_{12} - 2Q_{66}) \cos(\theta)^3 \sin(\theta) - (Q_{22} - Q_{12} - 2Q_{66}) \cos(\theta) \sin(\theta)^3 \\ \bar{Q}_{22} &= Q_{11} \sin(\theta)^4 + 2(Q_{12} + 2Q_{66}) \cos(\theta)^2 \sin(\theta)^2 + Q_{22} \cos(\theta)^4 \\ \bar{Q}_{26} = \bar{Q}_{62} &= (Q_{11} - Q_{12} - 2Q_{66}) \cos(\theta) \sin(\theta)^3 - (Q_{22} - Q_{12} - 2Q_{66}) \cos(\theta)^3 \sin(\theta) \\ \bar{Q}_{66} &= (Q_{11} + Q_{22} - 2Q_{12} - 2Q_{66}) \cos(\theta)^2 \sin(\theta)^2 + Q_{66} (\cos(\theta)^4 + \sin(\theta)^4) \end{aligned}$$

رابطه (***) ماتریس ماتریس سفتی اصلاح شده تنش صفحه ای برای یک چند لایه با زاویه الیاف است.

$$\bar{Q}_{ij} = \begin{bmatrix} \bar{Q}_{11} & \bar{Q}_{12} & \bar{Q}_{16} \\ \bar{Q}_{12} & \bar{Q}_{22} & \bar{Q}_{26} \\ \bar{Q}_{16} & \bar{Q}_{26} & \bar{Q}_{66} \end{bmatrix} \quad (***)$$

۱۰-مراجع

- [1] Vasiliev V. V., Barynin V. A. and Razin A. F., Anisogrid composite lattice structures—Development and aerospace applications, *Compos. Struct.*, Vol. 94, No. 3, pp. 1117–1127, 2012.
 [2] A. C. Ugral, *Stresses in Plates and Shells*. McGraw-Hill, 1981.
 [3] Jaunky N., Knight N. F. and Ambur D. R., Formulation of an improved smeared stiffener theory for buckling analysis of grid-stiffened composite panels, *Compos. Part B Eng.*, Vol. 27, No. 5, pp. 519–526, 1996.
 [4] Kidane S., Li G., Helms J., Pang S.-S. and Woldesenbet E., Buckling load analysis of grid stiffened composite cylinders,” *Compos. Part B Eng.*, Vol. 34, No. 1, pp. 1–9, 2003.
 [5] Fan H., Yang L., Sun F. and Fang D., Compression and bending performances of carbon fiber reinforced lattice-core sandwich composites, *Compos. Part A Appl. Sci. Manuf.*, Vol. 52, pp. 118–125, 2013.
 [6] Rathinam N. and Prabu B., Static buckling analysis of thin cylindrical shell with centrally located dent under uniform lateral pressure, *Int. J. Steel Struct.*, Vol. 13, No. 3, pp. 509–518, Sep. 2013.
 [7] Zheng Q., Ju S. and Jiang D., Anisotropic mechanical properties of diamond lattice composites structures, *Compos. Struct.*, Vol. 109, pp. 23–30, 2014.
 [8] Sun J., Xu X. and Lim C. W., Buckling of cylindrical shells under external pressure in a Hamiltonian system, *J. Theor. Appl. Mech.*, Vol. 52, No. 3, pp. 641–653, 2014.
 [9] Sofiyev A. H. and Kuruoglu N., Buckling and vibration of shear deformable functionally graded orthotropic cylindrical shells under external pressures, *Thin-Walled Struct.*, Vol. 78, pp. 121–130, 2014.
 [10] Fan H., Qu Z., Xia Z. and Sun F., Designing and compression behaviors of ductile hierarchical pyramidal lattice composites, *Mater. Des.*, Vol. 58, pp. 363–367, 2014.
 [11] Satouri S., Kargamovin M. H., Allahkarami F. and Asanjarani A., Application of third order shear deformation theory in buckling analysis of 2D-functionally graded cylindrical shell reinforced by axial stiffeners, *Compos. Part B Eng.*, Vol. 79, pp. 236–253, 2015.
 [12] Sofiyev A. H., Buckling analysis of freely-supported functionally graded truncated conical shells under external pressures, *Compos. Struct.*, Vol. 132, pp. 746–758, 2015.
 [13] V Lopatin A., Morozov E. V. and Shatov A. V., Buckling of uniaxially compressed composite anisogrid lattice plate with clamped edges, *Compos. Struct.*, vol. 157, pp. 187–196, 2016.
 [14] Tu T. M. and Van Loi N., Vibration Analysis of Rotating Functionally Graded Cylindrical Shells with Orthogonal Stiffeners, *Lat. Am. J. Solids Struct.*, Vol. 13, No. 15, pp. 2952–2969, 2016.
 [15] Reddy J. N., *Mechanics of laminated composite plates and shells: theory and analysis*. CRC press, 2004.
 [16] Qatu M. S., *Vibration of laminated shells and plates*. Elsevier, 2004.